第一部分　几 何 光 学

人们在制造光学仪器和解释一些光学现象的过程中，总结出了适于光学工程技术应用的几何光学理论。几何光学把光在均匀介质中的传播用几何上的直线来表示，并把这种直线称为“光线”。几何光学就是以光线来研究光在介质中传播的理论。

几何光学不同于物理光学，它不讨论光的物理性质，不能用几何光学来解释光的干涉、衍射等现象，因为这些现象都是由光的波动性质所决定的。所以几何光学的理论有一定的局限性和近似性。但是，一般的光学仪器的孔径都能通过的光束与光的波长相比是近似于无限大的，上述物理现象并不明显，所以几何光学的结论还是符合实际情况的，只有在成像光束很细时，几何光学的结论才与实际情况有明显的差别。例如，光通过一个很大的圆孔投影到屏上，照明区有着明显的边界。如果通过一个很小的孔，由于衍射现象，在屏上就出现明暗相间的衍射图样。这种现象只能用物理光学理论来解释。但在一般情况下很少使光束通过一个小孔，而多是通过有限大小的孔径。因此，从实用的观点来看，几何光学理论仍是严密的，有重要的应用价值。

几何光学在一定条件下可以和物理光学统一起来。例如，几何光学认为点物通过理想光学系统成像为一个几何点；而物理光学认为成像为一个黑白相间的衍射斑，其第一个暗环的半径为

$$\psi = 1.22\lambda / D$$

但是，若使波长 $\lambda \to 0$，则 ψ 也为 0，此时物理光学和几何光学有一致的结论。所以，可认为几何光学是物理光学中波长为零时的极限情况，它的近似性也就在于此。

但是对于大多数的光学技术问题，用几何光学都可以得到正确的结论。它的重要意义在于用光线来描述光学系统中光的传播和成像，用几何学的方法可以方便地计算和设计光学系统，而使其满足预先给定的技术要求。其解决问题的方法简单、明了，结果合理、可靠。

各类光学仪器的物理光学原理确定以后，其光学系统通过几何光学的计算，即所谓外形尺寸计算，可以求得横向和轴向尺寸，以及组成光学系统的各个光学元件的几何光学特性，如焦距、孔径和视场等。

与光学系统光学元件必然要考虑光学材料一样，光学材料的许多光学性质也需要用几何光学理论来表征，如折射率和色散系数等。除考虑透射光学材料外，还必须要考虑反射光学材料。除光学玻璃材料外，还要考虑模压方便的光塑料材料。

第 6 章和第 7 章两章不属于几何光学的范畴，因为它们在工程技术方面与几何光学一样是光学基础部分，所以把这两章也放在第一部分中。

第 1 章　几何光学的基本定律和成像的概念

1.1　几何光学的基本概念

1．光波

人们对光的本性的认识是逐步发展的。直到1871年麦克斯韦提出电磁场学说以后，在1888年这个学说又为实验所证明，人们才认识到光实际上是一种电磁波。从本质上说，光和一般无线电波并无区别。光波向周围空间传播和水面因扰动产生的波浪向周围传播相似，都是横波，其振动方向和光的传播方向垂直。

光波区别于无线电波在于波长的不同。图1.1示意了从γ射线到无线电波的电磁波谱，图中的波长与频率均采用对数标尺。波长在 400 ~ 760 nm 范围内的电磁波能为人眼所感觉，称为可见光，超出这个范围的电磁波，人眼就感受不到了。

在可见光谱段范围以内，不同的波长引起不同的颜色感觉。具有单一波长的光称为“单色光”。几种单色光混合而成为“复色光”。太阳光由无限多种单色光混合而成。人眼可直接感知的 0.4~0.76 微米波段称为可见光波段，在可见光波段可被人眼感知为红、橙、黄、绿、青、蓝、紫七种颜色的光。比可见光的波长短的波段称为紫外光，但是比 X 射线的波长要长，紫外光波段范围约为 1~400 nm。真空紫外辐射的波段范围约是 100~300 nm，因为这个波段范围的光需要在真空设备中工作。而把比可见光的波长更长的从 0.76~1000 微米的电磁波称为红外波段，红外波段的短波段与可见光红光相邻，长波段与微波相接。波长由 0.76~3 μm 波段成为近红外或短波红外。波长为 3~6 μm 的波段称为红外或中波红外。波长为 6~15 μm 的波段称为远红外或长波红外，或热红外。长为 15~1000 μm 的波段称为极远红外。近年来，人们对波长为 30 μm~3 mm 的波段产生了浓厚的研究兴趣，该波段称为太赫兹(Hz)波段，在电磁波谱中其频率范围大致为 0.1~10 THz（THz =10^{12} Hz）。在长波段，它与毫米波有重叠；在短波段，它与红外线有重叠。

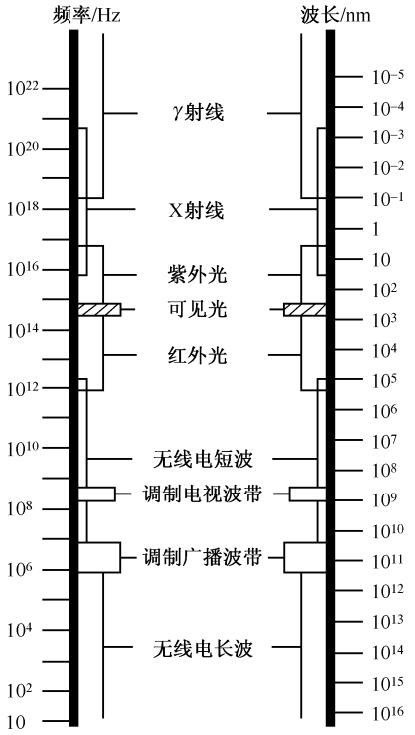


图 1.1　包括可见光在内的电磁波谱示意图

光和其他电磁波一样，在真空中以同一速度 c 传播，$c \approx 3\times10^{8}$ m/s。在空气中也近似如此。而在水和玻璃等透明介质中，光的传播速度要比在真空中慢，且随波长的不同而不同。

2．光源

从物理学的观点来看，辐射光能的物体称为发光体，或称为光源。当光源的大小与辐射光能作用距离相比可以忽略时，可认为是点光源。例如，人从地球上观察体积超过地球的太阳，仍认为其是发光点。但在几何光学中，发光体和发光点的概念与物理学中有所不同。无论本身发光的物体或者是被照明的物体在研究光的传播时统称为“发光体”。在讨论光的传播时，常用发光体上某些特定的几何点来代表这个发光体。在几何光学中认为这些特定点为发光点，或称为“点光源”。这些发光点被认为没有体积和线度，所以能量密度应为无限大，这只是一种假设，在自然界中是不存在这样的光源的。

3．光线

从物理学的观点来看，当光能从一个由两个光孔限制的细长空间（称为光管）中通过，如图 1.2 所示，若此光管的横截面积与其长度相比可以忽略时，则称此光管为“物理光线”。但在几何光学上认为光线是无直径、无体积，而有方向性的几何线，其方向代表光能传播的方向。当然，在自然界中也不存在这种能量密度为无限大的光线。

利用几何光学的发光点和光线的概念可以把复杂的能量传输和光学成像问题归结为简单的几何运算问题。

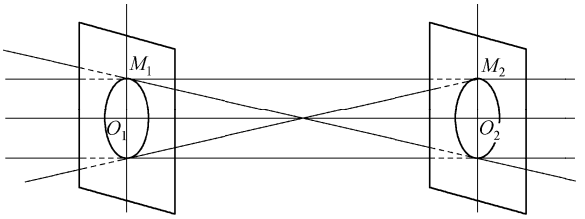


图 1.2　光管示意图

4．波面与光线

光波是电磁波，任何光源可看做波源，光的传播正是这种电磁波的传播。光波向周围传播，在某一瞬时，其振动相位相同的各点所构成的曲面称为波面。波面可分为平面波、球面波或任意曲面波。

在各向同性的介质中，光沿着波面的法线方向传播，所以可以认为光波波面的法线就是几何学中的光线。

5．光束

与波面对应的法线（光线）集合，称为“光束”。对应于波面为球面的光束称为同心光束，按光束传播方向的不同又分为会聚光束和发散光束。它们的波源可认为是一个几何点，但会聚光束的所有光线实际通过一点，如图 1.3(a)所示。可以在屏上接收到亮点，也可以是光线的延长线通过一点，如图 1.3(b)所示。发散光束可以是由实际的点发出的，如图 1.3(c)所示，也可以是光线的延长线通过的一点，如图 1.3(d)所示。发散光束不能在屏上会聚成亮点，但能被人眼直接观察到。与平面波相对应的称为平行光束，如图 1.3(e)所示，它是同心光束的一种特殊情况。

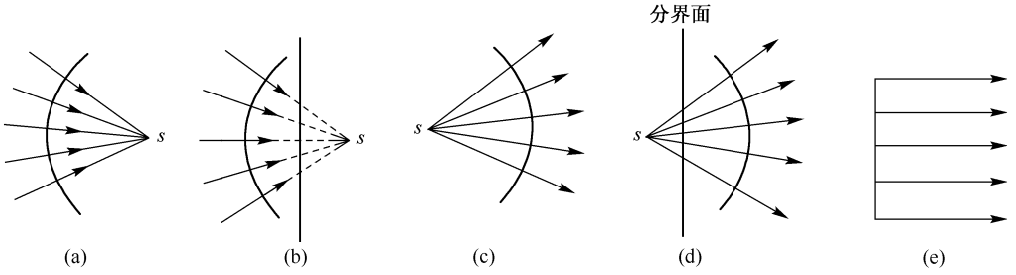


图 1.3　光束示意图

一般来说，球面波通过实际的光学系统总是要发生变形的，不再是球面波。相应的光束（法线束）不再会聚在一点，即不再是同心光束。

从变了形、不再是球面的实际波面上取出一个波面元，或者说从宽光束中取出一束无限细元光束来讨论它们的情况。如图 1.4 所示，$a_1a_3c_3c_1$ 是一波面元，$b_2F_2F_1$ 是波面元中心点 b_2 的法线。

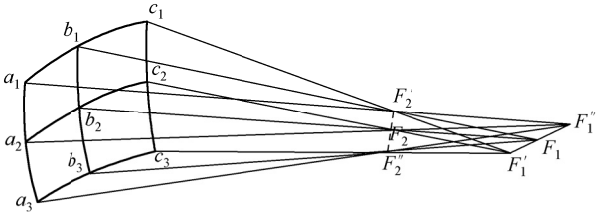


图 1.4　像散光束元示意图

根据微分几何对曲面的讨论可知，在波面元上通过某点必定有两条法截线（通过曲面上某点法线的平面与曲面的交线），其中一条曲率半径最大，另一条最小，且这两条截线互相垂直，称为主截线。

如图1.4 所示，曲率半径最大的波面主截线 $b_1b_2b_3$ 的曲率中心在点 F_1，曲率半径最小的波面主截线 $a_2b_2c_2$ 的曲率中心在点 F_2。靠近主截线 $b_1b_2b_3$，并处于截线 $a_1b_2c_3$ 和 $c_1c_2c_3$ 之间的其他截线，其曲率中

心均处于直线元 $F_1'F_1F_1''$ 上。靠近主截线 $a_2b_2c_2$ 并处于截线 $a_1b_1c_1$ 和 $a_3b_3c_3$ 之间的其他截线，其曲率中心形成一条直线元 $F_2'F_2F_2''$ 。所以，该波面元上诸点的法线首先会聚于直线元 $F_2'F_2F_2''$ ，然后发散，再会聚于第二条直线元 $F_1'F_1F_1''$ 上。这两条短线相互垂直，并且都垂直于波面中心点的法线或光束轴 $b_2F_2F_1$ 。

这种结构的细光束，即垂直于波面元，彼此不相平行又不交于一点的光线所成的光束称为像散光束。波面二主截面的曲率中心称为像散光束的焦点。像散光束所会聚的两条短线 $F_2'F_2F_2''$ 和 $F_1'F_1F_1''$ 称为焦线。二焦线之间的沿轴距离 F_1F_2 称为像散差，它是光学系统的成像缺陷中的一种。显然，像散差越小，此光束越接近于同心光束，波面越接近于球面波。

如果变形波面具有一定的大小，则情况要比上述波面元复杂得多，详见 A. N. 杜德罗夫斯基编著的《光学仪器理论》一书。

1.2　几何光学的基本定律

光的传播现象按几何光学理论可以归结为如下 4 条基本定律：

1．光的直线传播定律

“在各向同性的均匀介质中，光沿着直线传播”，称为光的直线传播定律，它是普遍存在的现象。用该定律可以很好地解释影子的形成、日蚀、月蚀等现象。一切精密的天文测量、大地测量和其他测量也都以此定律为基础。但是，光并不是在所有的场合都是直线传播的。实验表明，在光路中放置一个不透明的障碍物，特别是光通过小孔或狭缝，光的传播将偏离直线，这是物理学中的衍射现象，将在物理光学中详细讨论。因此，光的直线传播定律只有光在均匀介质中无阻拦地传播才能成立。

2．光的独立传播定律

“从不同的光源发出的光束以不同方向通过空间某点时，彼此互不影响，各光束独立传播”，称为光的独立传播定律。几束光会聚于空间某点时，其作用是在该点处简单地叠加，各光束仍按各自的方向向前传播。但是，这一定律对不同发光点发出的光来说是正确的。如果由光源上同一点发出的光分成两束单色光（为相干光），通过不同的而长度相近的途径到达空间某点时，这些光的合成作用不是简单地叠加，而可能是相互抵消而变暗。这是光的干涉现象，是物理学中所讨论的一个重要的问题。

3．光线经过两种均匀介质分界面的传播规律——折射定律和反射定律

设有一光束投射在两种透明而均匀的介质的理想平滑分界面上（为入射光），将有一部分光能被反射回原来的介质，这种现象为“反射”，被反射的光称为“反射光”。另一部分光能通过分界面射入第二种介质中去，但改变了传播方向，这种现象称为“折射”。被折射的光称为“折射光”。光的反射和折射分别遵守反射定律和折射定律。

(1) 反射定律

在图1.5中，PQ 为一理想的光滑反射界面，入射光线 AO 和界面上投射点的法线 ON 夹角 AON 称为入射角，以 I 表示，反射光线 OB 和法线 ON 的夹角 BON 称为反射角，以 I'' 表示。角 I 和角 I'' 以锐角来量度，由光线转向法线，顺时针方向旋转形成的角度为正，反之为负。图 1.5 中，角 I 为正，角 I'' 为负。角度加上符号的作用是可以明确以法线为基线张角的方向。

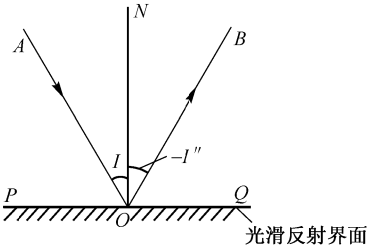


图 1.5　光的反射定律示意图

反射定律可归结为：入射光线、反射光线和投射点法线三者在同一平面内，入射角和反射角二者绝对值相等、符号相反，即入射光线和反射光线位于法线的两侧。反射定律可表示为

$$I = -I'' \tag{1.1}$$

对于粗糙的分界面，一束平行入射光投射其上，反射光将不再是平行的光束，发生了无规则的漫反射。但是对于粗糙表面上任一微小的反射面来说，仍然遵守反射定律。

(2) 折射定律

折射定律于 1621 年由斯涅耳发现，故又称为斯涅耳定律。如图 1.6 所示，PQ 为两种均匀介质的理想平滑分界面，AO 为入射光线，在 O 点发生折射，OC 为相应的折射光线。NN'' 为入射点 O 的法线，入射角 AON，以 I 表示；折射光线 OC 和法线 NN'' 的夹角 CON'' 为折射角，以 I' 表示。入射角和折射角的符号法则也是从光线转向法线，按锐角来量度，顺时针方向旋转形成的角度为正，反之为负。

折射定律可归结为：入射光线、折射光线和投射点的法线三者在同一平面内，入射角的正弦与折射角的正弦之比与入射角的大小无关，而与两种介质的性质有关。对一定波长的光线，在一定温度和压力的条件下，该比值为一常数，等于折射光线所在介质的折射率 n' 与入射光线所在介质的折射率 n 之比。折射定律可以表示为

$$\frac{\sin I}{\sin I'} = \frac{n'}{n} \tag{1.2}$$

或写为

$$n\sin I = n'\sin I' \tag{1.3}$$

对于两种介质界面的折射，$n\sin I$ 或 $n'\sin I'$ 为一常数，称为光学不变量。对于不同的介质对，它有不同的数值。

在式(1.3)中，若令 $n' = -n$，则 $I' = -I$，即为反射定律。这表明，反射定律可以看做是折射定律的一种特例。这在几何光学中是有重要意义的一项推论。

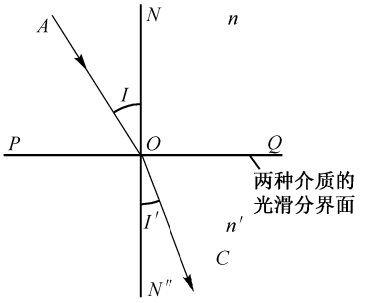


图 1.6　光的折射定律示意图

4．矢量形式的折射定律和反射定律

如果介质的分界面有着较为复杂的函数形式，为计算任一条光线经过反射和折射后的方向，用矢量形式的折射定律和反射定律是比较方便的。在直角坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

式中，A_x, A_y, A_z 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 x, y, z 坐标轴上的投影长度；$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 表示在 x, y, z 轴方向的单位矢量。

下面给出矢量形式的折射定律。如图 1.7 所示，$\boldsymbol{A}^0$ 和 $\boldsymbol{A}^{0\prime}$ 分别表示入射光线和折射光线的单位矢量，n 和 n' 分别表示折射面两边的介质的折射率。矢量 $\boldsymbol{A}^0$ 和 $\boldsymbol{A}^{0\prime}$ 指向右方为正方向，反之为负方向。$\boldsymbol{N}^0$ 为折射面投射点法线的单位矢量，其方向顺着入射光线方向。折射定律可以表示为

$$n(\boldsymbol{A}^0 \times \boldsymbol{N}^0) = n'(\boldsymbol{A}^{0\prime} \times \boldsymbol{N}^0) \tag{1.4}$$

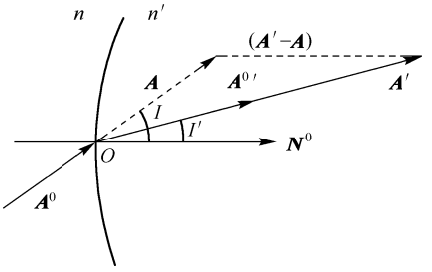


图 1.7　矢量形式折射定律示意图

把入射光线矢量 $\boldsymbol{A}$ 和折射光线矢量 $\boldsymbol{A}'$ 的长度各取为 n 和 n'，即 $\boldsymbol{A} = n\boldsymbol{A}^0, \boldsymbol{A}' = n'\boldsymbol{A}^{0\prime}$，则得

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{N}^0 = \boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{N}^0$$

或

$$(\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{N}^0 = 0$$

此式说明矢量 $(\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{N}^0$ 的方向是一致的，故可写为

$$\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A} = \Gamma\boldsymbol{N}^0 \tag{1.5}$$

式中，Γ 称为偏向常数。用 $\boldsymbol{N}^0$ 对上式两边作点积，可得

$$\Gamma = \boldsymbol{N}^0 \times \boldsymbol{A}' - \boldsymbol{N}^0 \times \boldsymbol{A} = n'\cos I' - n\cos I \tag{1.6}$$

又有

$$n'\cos I' = \sqrt{n'^2 - n'^2\sin^2 I'} = \sqrt{n'^2 - n^2 + n^2\cos^2 I} = \sqrt{n'^2 - n^2 + (\boldsymbol{N}^0 \times \boldsymbol{A})}$$

由此可得

$$\Gamma = \sqrt{n'^2 - n^2 + (\boldsymbol{N}^0 \times \boldsymbol{A})^2} - \boldsymbol{N}^0 \times \boldsymbol{A} \tag{1.7}$$

求得 Γ 值后，便可由式(1.4)求得折射光线方向为

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \Gamma \boldsymbol{N}^0 \tag{1.8}$$

这就是矢量形式的折射定律。

矢量形式的反射定律也是在 $n' = -n$ 的条件下由矢量形式的折射定律推导出的。这只要对偏向常数 Γ 作一简单处理即可。在折射定律的表示式(1.4)中，令 $n' = -n$，得 $I' = -I$，则式(1.6)可写为

$$\Gamma = -n\cos(-I) - n\cos I = -2n\cos I = -2(\boldsymbol{N}^0 \times \boldsymbol{A})$$

这就是适合于反射情况下偏向常数 Γ 的表示式，将其代入式(1.8)，得矢量形式的反射定律：

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{N}^0(\boldsymbol{N}^0 \times \boldsymbol{A}) \tag{1.9}$$

5．折射率

前已述及各种波长的光在真空中的速度 c 为定值，而在介质中，光的传播速度 v 与介质的性质和光的波长有关，一般 v 小于 c。对于一定的介质，一定波长的光传播速度也为常量。

一定波长的单色光在真空中的传播速度 c 与它在给定介质中的传播速度 v 之比，定义为该介质对指定波长的光的绝对折射率。该定义可以由图 1.8 说明，设有一束平行光束投射到两个介质的平面分界面上，所有光线的入射角为 I_1，折射角为 I_2，折射光线也相互平行。平行光束相对应的是平面波，OQ 为入射平面波，$O'Q'$ 为折射后的平面波，设光在两介质中的速度分别为 v_1 和 v_2，则

$$QQ' = v_1 t, \qquad OO' = v_2 t$$

由图 1.8 易见 $\sin I_1 = QQ'/OQ', \qquad \sin I_2 = OO'/OQ'$

两式相除，可得 $$\frac{\sin I_1}{\sin I_2} = \frac{QQ'}{OO'} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

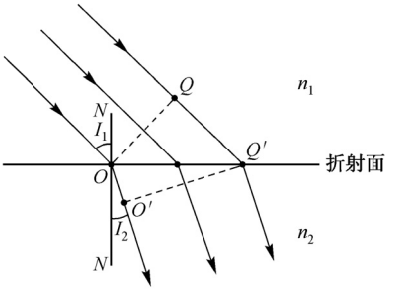


图 1.8　折射率定义示意图

由此可知，第二种介质对第一种介质的折射率之比等于第一种介质中的光速 v_1 和第二种介质中的光速 v_2 之比。显然，介质对真空的绝对折射率值为

$$n = c/v \tag{1.10}$$

在给定介质中，一定波长的光的速度为常数，所以该波长的绝对折射率也为常数。

被分界面分开的两种介质，折射率高的光速低，称为光密介质；折射率低的光速高，称为光疏介质。

空气的绝对折射率受温度和压力的影响，其经验公式为

$$n = 1 + 0.000\ 249\frac{p}{p_0}\frac{1}{at} \tag{1.11}$$

式中，p 为大气压强；p_0 为标准大气压；t 为温度(℃)；系数 $a = 1/273\ \mathrm{K}$。在标准条件下($p_0 = 101\ 275\ \mathrm{Pa},\ t = 293\ \mathrm{K} = 20℃$)，空气的折射率为

$$N = 1.000\ 273 \approx 1.0003$$

显然，空气的折射率受温度和压力影响较小。工业应用上常把空气的折射率作为 1 单位。在空气中测得的介质折射率为工业折射率，简称折射率。常用的光学玻璃的折射率为 1.46~1.96。表 1.1 列出了几种固体和液体对 d 光的折射率。

表 1.1　几种固体和液体对 d 光的折射率

固体介质	折射率①	液体介质（$t = 20℃$）	折射率
冰(H_2O)	1.309	水	1.3330
萤石(CaF_2)	1.434	甲醇(CH_3OH)	1.3290
岩盐(NaCl)	1.544	乙醇(C_2H_5OH)	1.3618
氯化钾(KCl)	1.490	酒精	1.3605
石英晶体(SiO_2)	1.544, 1.553	煤油	1.4460
方解石($CaCO_3$)	1.638, 1.486	甘油	1.4600
电石	1.669, 1.638	四氯化碳(CCl_4)	1.4607
金刚石(C)	2.417	松节油	1.4721
		液体石蜡	1.4800
		杉木油	1.5150
		二硫化碳	1.6276
		二碘甲烷	1.7410

① 表中某些晶体具有两种折射率，依次为寻常光折射率(n_o)和非寻常光折射率(n_e)。

当光线从第一种介质进入第二种介质时，第二种介质相对于第一种介质的折射率称为“相对折射率”。其值为第二种介质的折射率与第一种介质的

折射率之比，即

$$n_{12} = n_2 / n_1 \tag{1.12}$$

这样，折射定律可表示为

$$\sin I_1 / \sin I_2 = n_{12} \tag{1.13}$$

通常所说的介质的折射率实际上是该介质对于空气的相对折射率。

6．光路的可逆性

一条光线由介质 1 经分界面折射进入介质 2，则折射定律可写为

$$\frac{\sin I_1}{\sin I_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

另一条光线由介质 2 经分界面折射进入介质 1，如果光线的入射角为 I_2，则按折射定律有

$$\frac{\sin I_2}{\sin I_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

显然可以看出，以上两种折射情况是沿着同一光路，只是方向是相反的。这种现象称为“光路的可逆性”。

对于反射和折射现象，在均匀折射率介质和非均匀折射率介质、简单光学系统和复杂光学系统中，光的可逆性均是成立的。

7．分界面上反射光和折射光的能量分布

入射光投射到两均匀透明界质的分界面上时，如果分界面为理想光滑表面，则分成折射光和反射光，即折射的同时伴随着部分反射。折射定律和反射定律只能解决反射光和折射光所遵循的方向的问题，而不能说明能量的分布。后者是物理光学中所要解决的问题。此处只给出结论。

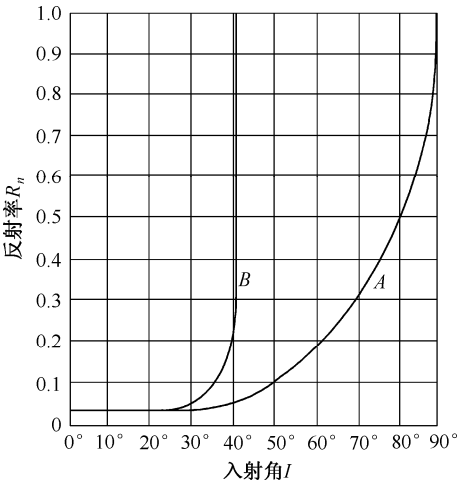
根据光的电磁理论，反射光和折射光的能量分布通常采用反射率 R 和透过率 T 表示：

$$R = \frac{\text{反射光的辐射通量}}{\text{入射光的辐射通量}} \qquad T = \frac{\text{折射光的辐射通量}}{\text{入射光的辐射通量}}$$

在不存在吸收和其他损失的理想条件下，有

$$T = 1 - R$$

T 和 R 的能量分布取决于入射光的偏振态、两种介质的折射率以及入射角的大小。当入射光为自然光，并给定界面两边的介质时，则反射光和折射光的能量分布主要取决于入射角的大小。图 1.9 表示在自然光入射在空气和玻璃的分界面时，反射能量（以 R 表示)和折射能量（以 T 表示）的变化规律。已知玻璃折射率 $N = 1.523$，其中，曲线 A 是光从空气进入玻璃（由光疏介质进入光密介质）时，分界面处的反射率 R_n 和入射角 I 的关系曲线。曲线表明，当 $I < 45°$ 时，反射率 R_n 近似于常量，近似于垂直入射 $(I = 0)$ 时的反射率值 R_{n0}，按物理光学自然光垂直入射($I = 0°$）时的反射率：



（玻璃折射率$n = 1.523$）

图 1.9　R 和 T 的变化规律

$$R_{n0} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

若 $n = 1.523$，则 $R_{n0} \approx 0.043$，即约有 4%的能量被反射。当 $I > 45°$ 时，随着入射角 I 的增大，反射率 R_n 也增大；当 $I = 90°$ 时，$R_n = 1$，表明入射角增大，反射率增大，折射光的能量逐渐渐小。

曲线 B 是由玻璃进入空气（由光密介质进入光疏介质）时，分界面处的 R_n–I 曲线。当 $I < 45°$

时，$R_n \approx R_{n0} \approx 0.043$，反射率近似于一个常数；当 I 增大到 41° 时，反射率急剧上升到近似于 1 的值；当 I>41° 时，$R_n = 1$，表明入射光线全部反射回原介质，没有折射发生，即所谓的“全反射”。

8．全反射

如上所述，当光线的入射角 I 大于某值时，两种介质的分界面把入射光全部反射回原介质中去，这种现象称为“全反射”或“完全内反射”。

产生全反射的条件有：入射光由光密介质进入光疏介质；入射角必须大于一定的角度，按折射定律，当折射角 $I' = 90°$，有

$$\sin I_{\mathrm{m}} = \frac{n'}{n}\sin 90° = \frac{n'}{n} \tag{1.14}$$

式中，入射角 I_{m} 称为临界角，此时折射光线沿分界面掠射。若入射角 I 大于临界角 I'_{m} 时，折射定律已不适用。实验证明，此时光线不发生折射，而按反射定律把光线完全反射回原介质中，如图1.10 所示。如果光线由玻璃射入空气，当玻璃的折射率 $n = 1.523$ 时，则临界角 I_{m} 约为 41°。这和在反射光和折射光的能量分布结果是一致的。

在实际应用中，全反射常优于一般镜面反射，因为镜面的金属镀层对光有吸收作用，而全反射在理论上可使入射光全部反射回原介质。因此，全反射现象在光学仪器中有着重要的应用。例如，为了转折光路常用反射棱镜取代平面反射镜。如图1.11所示为一次反射式直角全反射棱镜。

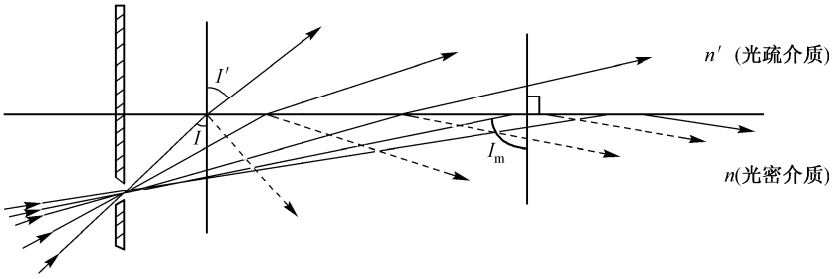


图 1.10　全反射示意图

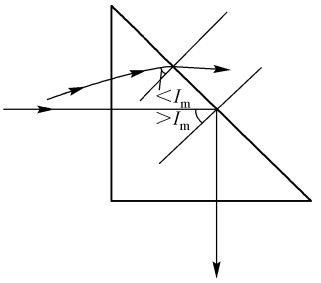


图 1.11　直角全反射棱镜主截面图

传光和传像的光学纤维也是利用了全反射原理。光纤将低折射率的玻璃外包层包在高折射率玻璃心子的外面，如图 1.12 所示。由于心子的折射率 n_1 大于包皮的折射率 n_2，心子内入射角大于临界角的光线将在临界面上发生全反射。设 I_{m} 为临界角,令 n_0 =1，为空气的折射率，由折射定律

$$n_0 \sin I_1 = n_1 \sin I'_1$$

得

$$\sin I_1 = n_1 \sin I'_1$$

由式(1.14)得

$$\sin I_{\mathrm{m}} = n'/n_{12} = \sin(90° - I')_1 = \cos I'_1$$

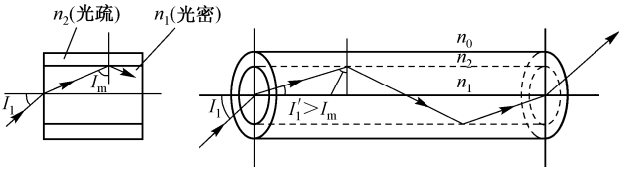


图 1.12　双层传光光纤示意图

保证发生全反射的条件为

$$n_0 \sin I_1 = n_1 \sin I'_1 = n_1\sqrt{1-\cos^2 I'_1} = n_1\sqrt{1-\left(n_2/n_1\right)^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

只有当在光纤的端面上入射角小于 I_1 时，光线在光纤内部才能不断地发生全反射，而由光纤的另一端输出。

设光纤直径为 D，长度为 l，则光线在光纤内的路程长度为

$$L = l/\cos I'_1 = l\Big/\sqrt{1-\frac{1}{n_2}\sin I_1} = n_2\, l\Big/\sqrt{n_2^2 - \sin^2 I_1}$$

光纤发生全反射的次数为

$$N = L\sin I_1/D = l\sin I_1/D\sqrt{n_2^2 - \sin^2 I_1}$$

例如，光纤直径 $D = 50\ \mu\text{m}$，长度 $l = 0.5\ \text{m}$，光纤心子的折射率 $n_2 = 1.70$，入射角 $I_1 = 30^\circ$，代入上式，则有 $N = \dfrac{500\ \text{mm} \times \sin 30^\circ}{0.05\ \text{mm}\sqrt{1.70^2 - \sin^2 30^\circ}} = 3077$，即发生全反射的次数为 3077 次。说明全反射过程中反射损失是近似于零的。

1.3　费马原理及其应用

1．费马原理

几何光学的基本定律：光的直线传播、光的独立传播、光的折射定律和光的反射定律表达了光线的传播规律。费马原理是从“光程”的角度来阐述光的传播规律。费马原理对光的传播规律做了更简明的概括。

“光程”是指光在介质中经过的几何路程 l 与该介质折射率 n 的乘积，光程用 s 表示为

$$s = nl \tag{1.15}$$

由于介质的折射率 n 是光在真空中的速度 c 和在介质中的速度 v 之比，即

$$n = c / v$$

又知光在介质中所经过的路程为

$$l = vt$$

代入式(1.15)，得

$$s = nl = ct \tag{1.16}$$

式(1.16)表明，光在某种介质中的光程等于光在同一时间内在真空中所走过的路程。光程又称为光的“折合路程”。

若光线通过多层（如 m 层）均匀介质，则光线由许多段折线组成，其光程为

$$s = \sum_{i=1}^{m} n_i l_i \tag{1.17}$$

式中，n_i 和 l_i 分别为第 i 层介质的折射率和光路长度。

若光线通过连续变化的非均匀介质，即折射率 n 为位置的函数，则光线实际所走过的路程为一条空间曲线。若光由点 A 传到点 B，则光程可表示为

$$s = \int_{A \to B(L)} n\mathrm{d}l \tag{1.18}$$

式中，L 为光线在介质中所走过的实际路程。

费马原理还指出：光线由点 A 传到点 B，经过任意多次折射或反射，其光程为极值（极大值或极小值），可以用光程的一次积分为零表示：

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}\int_A^B n\mathrm{d}l = 0 \tag{1.19}$$

这就是费马原理的数学描述。费马原理又称为“极值光程定律”。满足费马原理时，光程可能为极大值或极小值，可以认为符合费马原理的情况下，光程处于稳定值。

在均匀介质中，根据几何公理“两点间以直线距离为最短”，由费马原理可以直接证明和解释光的直线传播定律。当光线通过两种不同介质的分界面时，利用费马原理可以推导出反射定律和折射定律，并可以证明实际光线的光程为稳定值。

2．用费马原理推导出反射定律

如图1.13所示，PQ 为平面反射镜，由点 A 发出的光线投射到反射镜面上的点 O，反射后的光线通过点 B。设光线处于均匀介质中，折射率为 n，投射点 O 到由点 A 作反射镜垂线的垂足 P 的距离为

x，则点 A 到点 B 的光程长度为

$$s = n\overline{AO} + n\overline{BO} = n\sqrt{h_1^2 + x^2} + n\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}$$

显然，光程 s 是变量 x 的函数。根据费马原理，实际光线的光程是稳定的，在均匀介质中其一阶导数为零，即

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \frac{n_1 x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{n_2(a-x)}{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}} = 0$$

因而有

$$n\sin I = n\sin(-I'')$$

或

$$I = -I''$$

即推导出了反射定律。进而可以证明 $\mathrm{d}^2 s/\mathrm{d}x^2 > 0$，表明满足反射定律的光线具有最短的光程。

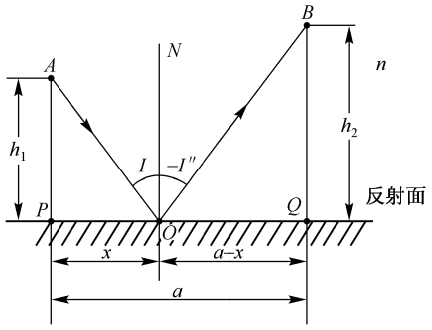


图 1.13　利用费马原理证明反射定律

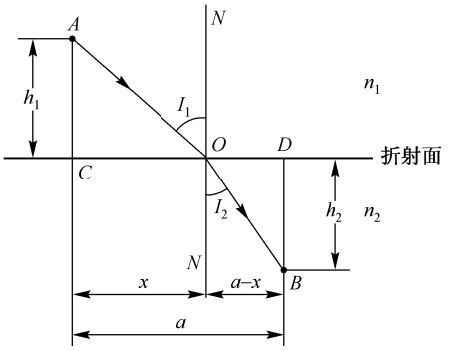


图 1.14　利用费马原理证明折射定律

3．从费马原理推导出折射定律

如图1.14所示，由位于折射率为 n_1 的均匀介质中的点 A 发出光线投射到分界面上的点 O，经折射后光线进入折射率为 n_2 的均匀介质，并通过点 B。设点 O 到点 A 的垂足 C 点的距离为 x，则由图 1.14 可知，点 A 到点 B 光线的光程可表示为

$$s = n_1\overline{AO} + n_2\overline{OB} = n_1\sqrt{h_2^2 + x^2} + n_2\sqrt{h_1^2 + (a-x)^2}$$

根据费马原理，有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \frac{n_1 x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{n_2(a-x)}{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}} = 0$$

因而有

$$n_1 \sin I_1 = n_2 \sin I_2$$

即推导出了折射定律。同样，可以证明 $\mathrm{d}^2 s/\mathrm{d}x^2 > 0$，即满足折射定律的光线有最短的光程。

4．光程在稳定值时的各种情况举例

以上讨论了反射和折射情况下，光程稳定在最小值的情况。图 1.15 给出了光程稳定在最小值和最大值的两种情况。图1.15(a)表示发光点 S 位于旋转椭球面的一个焦点 F_1(或F_2) 上，光线经椭球面内表面上任意点 Q 反射后达到另一个焦点 F_2(或F_1)。由旋转椭球面特性可知，两个焦点至椭球面上任意点的两个向径之和为一常数，因而有光程 $\overline{SQP} = \overline{SQ} + \overline{QP} = \overline{SQ'P} = \overline{SQ'} + \overline{Q'P}$ = 常数。表示由旋转椭球的焦点发出的光线经椭球内表面的反射的光程为常量，因而是稳定的。旋转椭球内反射面对焦点 F_1 和 F_2 来说，是“等光程面”。

在图 1.15(b)中，M_1N_1 是与椭球面切于点 Q 的曲面，光从点 S 发出后经椭球面上点 Q 的反射（光程 $\overline{SQP}$），相对于光从点 S 发出经内切曲面的反射（光程 $\overline{SRP}$），其光程为极大值。

与此相反，由点 S 发出的光经旋转椭球面上点 Q 处的外切曲面(M_2N_2)或平面(M_3N_3)的反射，其光程为极小值。

此外，还可以找到适当的曲面（平面也可以），使该曲面和椭球面交于点 Q，且与椭球面有公共的法线，则可以实现通过点 Q 的反射其光程既非极大、也非极小，是稳定的值。

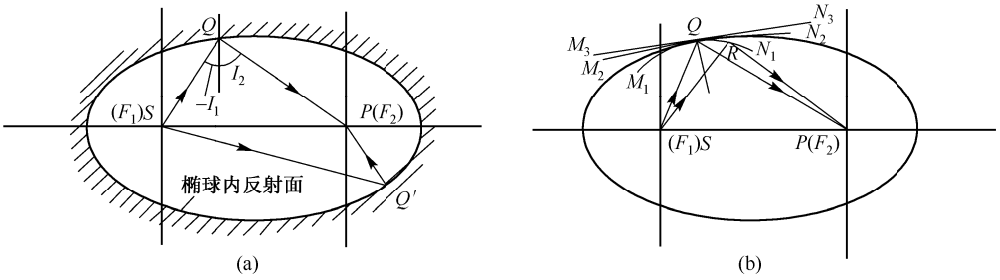


图 1.15　费马原理用于证明光程为稳定值的示意图

1.4　马吕斯定律

在各向同性的均匀介质中，光线为波面的法线；一个法线集合（光束）对应于一个波面。当光束经过任意多次反射和折射，对于光束与波面的关系和波面与光程的关系，马吕斯定理给出了明确的阐述。

马吕斯定理指出：垂直于波面的光线束（法线集合）经过任意多次反射和折射以后，无论折射面和反射面的形状如何，出射光束仍垂直于出射波面，保持光线束仍为法线集合的性质；并且入射波面与出射波面对应点之间的光程均为定值。

这个定理表明：光线束在各向同性介质的传播过程中，始终保持着与波面的正交性。该定理由马吕斯于 1808 年提出，而由杜宾于 1861 年加以修正，故又称为马吕斯–杜宾定理。

折射（及反射）定律、费马原理和马吕斯定律三者中任意一个均可以作为几何光学的基本定律，其余两个可以视为推论。三者之间可以互相推导出来。

1.5　成像的概念

在光学仪器中通常都有一个光学系统，其作用是把被观察物体成像以供人眼观测，或用干版照相，或用光电器件探测。

光学系统通常由一个或多个光学元件组成。各光学元件都是由球面、平面或非球面包围一定折射率的介质而组成的。组成光学系统的各光学元件的表面曲率中心在同一条直线上的光学系统称为共轴光学系统，该直线称为光轴。也有非共轴光学系统（如包括色散棱镜或色散光栅的光谱仪系统），本文着重讨论共轴光学系统。

设 $O_1, O_2, \cdots, O_k$ 表示 k 个面的光学系统，如图1.16所示。由一个发光点 A_1 发出一个球面波，即发出以点 A_1 为中心的同心光束，点 A_1 称为物点。如果该球面经过光学系统后仍为一球面波，即为以点 A'_K 为中心的同心光束，点 A'_K 也为一几何点，便是 A_1 的完善像。因此，光学系统成完善像的条件是入射为球面波时，出射也是球面波。或者根据马吕斯定律入射波面和出射波面对应点间的光程均为定值，因此，物点 A_1 及其完善像点 A'_K 之间的光程为一个常量。

对于如图 1.16 所示的 k 个面的光学系统，有

$$\begin{aligned} & n_1 A_1 O + n_1 O O_1 + n_2 O_1 O_2 + \cdots + n'_k O_k O' + n'_k O' A'_k \\ & = n_1 A_1 E + n_1 E E_1 + n_2 E_1 E_2 + \cdots + n'_k E_k E' + n'_k E' A'_k \\ & = \text{常量} \end{aligned} \tag{1.20}$$

或写为　　$(A_1 A'_k) = \text{常量}$

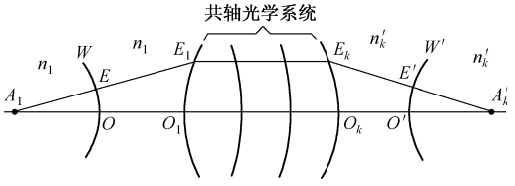


图 1.16　共轴光学系统示意图

发光体（自发光或被照明物体）AB 上每一个点发出球面波，通过光学系统后仍为球面波，会聚成像，这

样的像为物体 AB 的完善像。图 1.17 给出了物体 AB 成完善像的示意图。

由实际光线会聚所成的点称为实物点或实像点，由这样的点构成的物或像称为实物或实像。实像可以由眼睛或其他光能接收器（如照相底片、屏幕等）所接收。

由光线的延长线所会聚成的物点或像点，称为虚物点或虚像点。由这样的点构成的物或像称为虚物或虚像。虚像能被眼睛观察，而不能直接被其他接收器（干板、屏幕等）所接收，但可以通过另一光学系统使虚像转换成实像，则可以被任何接收器所接收。在光学系统中，被前一个折射面对物所成的像为后一个相邻的折射面的物。虚物一般是另一光学系统的像。如图1.18(a)所示，AB 为虚物，它是由前一个折射面所产生的实像构成下一个折射面的虚物，图 1.18(b)为由前一个折射面产生的虚像构成下一个折射面的虚物。

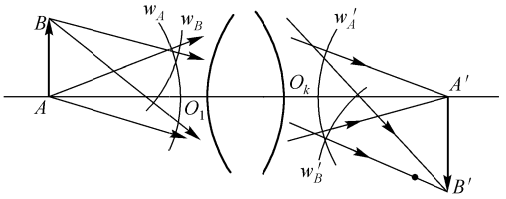


图 1.17　物体 AB 成完善像的示意图

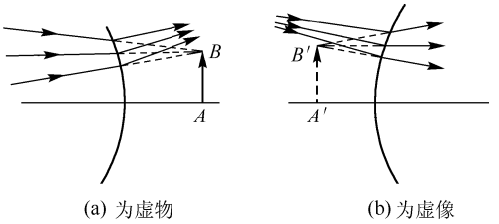


图 1.18　物和像的“虚”和“实”的解释

凡是物所在的空间（包括实物和虚物）称为物空间；像（包括实像和虚像）所在的空间称为像空间。两个空间是无限扩展的，并不是由折射面或一个光学系统的左边和右边机械地分开的。

设计对有限大小物体成完善像的光学系统是非常困难的。但对一个特定点成完善像只需单个折射面或反射面便可以实现。这样的面便是该特定点的等光程面。下面举几个等光程面的例子。

(1) 有限距离处物点 A 被反射面反射成像于有限距离点 A'，如图1.19所示。设 M 为反射面上的任一点，则光程满足

$$(AA') = \overline{AM} + \overline{MA'} + \text{常数}$$

的面是等光程面。由解析几何可知，一动点到定点的距离之和为常数，则该动点的轨迹是以两个定点为焦点的椭圆。将此椭圆绕轴旋转 360° 得一个椭球面，即为点 A 和点 A' 的等光程面，点 A 和点 A' 与两个焦点重合，可以互为物点和像点。

(2) 无限远处物点 A 被反射镜成像于有限距离处点 A'。设入射波面为平面波 W，如图 1.20 所示，则光程为

$$(GA') = \overline{GM} + \overline{MA'}$$

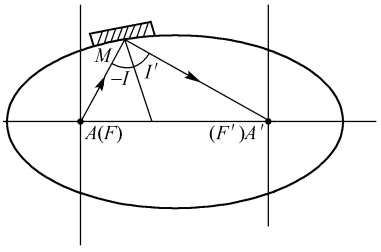


图 1.19　一定距离的两点之间的等光程面

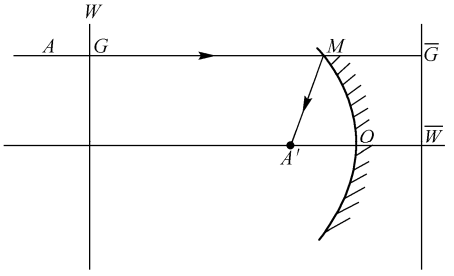


图 1.20　无限远处物点 A 与有限距离处点 A' 之间的等光程面

若反射镜对点 A 和点 A' 是等光程面，则光程 (GA') 应为常数。由解析几何可知，若一动点距一定点和一定直线距离相等，则该动点的轨迹为抛物线。图1.20中，$\overline{W}$ 为定直线，A' 为定点，M 为动点，因为 $MA' = M\overline{G}$，则

$$(GA') = (G\overline{G}) = \text{平行直线 } W \text{ 和 } \overline{W} \text{ 间距离} = \text{常量}$$

由此可见，所需的等光程面是以点 A' 为焦点、点 O 为顶点的抛物线绕轴旋转而成的抛物面。平行于光轴入射的平行光束经此抛物面反射镜反射后必会聚于焦点 A' 处，或者自焦点 A' 发出的同心光束经反射以后必平行于光轴射出。

(3) 有限距离处的点 A 经折射面折射成像于有限距离处点 A'，如图 1.21 所示。此时光程 (AA') 应为常数，即

$$(AA') = n\overline{AE} + n'\overline{EA'}$$

取直角坐标 xOy，使 AA' 为 x 轴，y 轴垂直于 AA'。点 E 的坐标为 (x, y)，令 $AO = l$，$OA' = l'$，则有

$$n\sqrt{(l+x)^2 + y^2} + n'\sqrt{(l'-x')^2 + y'^2} = nl + n'l' \tag{1.21}$$

或

$$n\left(l - \sqrt{(l+x)^2 + y^2}\right) + n'\left(l' - \sqrt{(l'-x')^2 + y'^2}\right) = 0 \tag{1.22}$$

这是笛卡儿卵形线的四次方程，绕 Ox 轴旋转成曲面，为笛卡儿卵形面，其为 A 和 A' 完善像的等光程面。

(4) 若上例中物点和像点之一位于无限远处，如图 1.22 所示。设物点 A 在有限距离，像点 A' 在无限远处，设 $n'EG$ 为在折射率为 n' 介质中无限远处像点到折射面入射点的光程，因为折射后的波面为平面波，所以 A 和 A' 的等光程条件为

$$n\sqrt{(l-x)^2 + y^2} + n'EG = nl + n'x + n'EG$$

得

$$n'x + n\left[l - \sqrt{(l-x)^2 + y^2}\right] = 0 \tag{1.23}$$

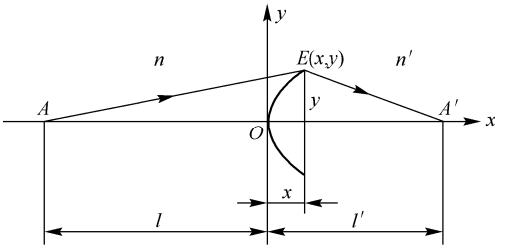
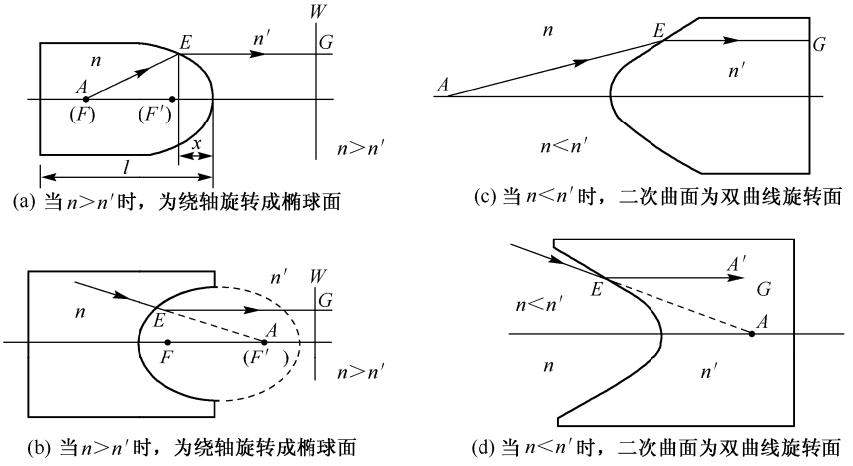


图 1.21　等光程面



(a) 当 $n>n'$ 时，为绕轴旋转成椭球面

(c) 当 $n<n'$ 时，二次曲面为双曲线旋转面

(b) 当 $n>n'$ 时，为绕轴旋转成椭球面

(d) 当 $n<n'$ 时，二次曲面为双曲线旋转面

图 1.22　有限距离物点 A，成像点 A' 在无限远处的等光程面

这是一个二次曲线方程，当 $n>n'$ 时，绕轴旋转成椭球面，如图1.22(a),(b)所示。当 $n<n'$ 时，二次曲面为双曲线旋转面，如图1.22(c), (d)所示。

实际上，上述等光程面仅对特定的点才有意义，能够成完善像。对一定大小的物体成像时，不能对物体上所有的点满足等光程条件，不能成完善像。又由于这些非球面制造困难，所以实际光学系统中很少采用这些等光程面，多用一系列球面组成光学系统。当满足一定条件时，它们能对光轴附近的小物体近似地成完善像。

习题

1.1　对于几何光学中光的传播的 4 个基本定律各举两个例子说明其现象，并设计有关的实验来证明这些基本定律，同时提出这些基本定律的限制条件。

1.2　已知光在真空中的速度为 3×10^8 m/s，求光在以下各介质中的速度：水(n=1.333)；冕玻璃(n =1.51)；重火石玻璃(n =1.65)；加拿大树胶(n =1.526)。

1.3　一个玻璃球，其折射率为 1.73，入射光线的入射角为 60°，求反射光线和折射光线的方向，并求折射光线与反射光线间的夹角。

1.4　一个玻璃平板厚 200 mm，其下放一块直径为 10 mm 的金属片，在平板上放一张与平板下金属片同心的圆纸片，使在平板上任何方向上观看金属片都被纸片挡住，设平板玻璃的折射率 n=1.5，问纸片的最小直径应为多少？

1.5　一个液槽内液体的折射率设在 n=1.5~1.8 范围内连续变化，问发生全反射的临界角的变化情况，并绘出折射率和临界角间的关系曲线。你能否提出使液体的折射率发生连续变化的方法，并说明怎样实现该实验。

1.6　设入射光线为 $A=\cos i+\cos\beta j+\cos\gamma k$，反射光线为 $A''=\cos a''i+\cos\beta'' j+\cos\gamma'' k$，试求此平面反射镜法线的方向。

1.7　矢量 $\boldsymbol{A}$ 表示的光线投射到折射平面 xoz 上，该平面是折射率为 n 和 n' 的分界面，求在第一种介质 n 中的反射光线 A'' 及在第二种介质 n' 中的折射光线 A'，设法线 N^O 与 y 轴同向。

1.8　设光纤芯的折射率 $n_1=1.75$，光纤包皮的折射率 $n_2=1.50$，试求在光纤端面上入射角在何值范围内变化时，可以保证光线发生全反射并通过光纤。若光纤直径 $D=4$ μm，长度为 100 m，试求光线在光纤内路程的长度和发生全反射的次数。

1.9　某一曲面是折射率分别为 $n=1.50$ 和 $n=1.0$ 的两种介质的分界面，设其对无限远和 $l'=100$ mm 处的点为等光程面，试求该分界面的表示式。