第 1 章　信号与系统概述

1.1　引言

人类已经进入信息时代，在这样一个信息科学与技术、电子、计算机科学与技术取得巨大成就的时代，信息的获取、传输、分析、加工、处理与重现显得更加重要，其理论和方法在科学研究、工程技术、经济贸易、生产管理及文化艺术领域都有广泛的应用。

本章是全书的基础，概括介绍有关信号与系统的基本概念和基本理论。有关信号方面，概要介绍信号的描述、分类、分解、基本运算和波形变换，详细阐述常用的典型信号、奇异信号的概念及其基本性质，重点描述冲激信号的物理意义、定义和性质。有关系统方面，概要介绍系统的概念和分析方法，详细阐述系统的模型及其划分，重点描述线性时不变系统的性质。

1.2　信息、信号和系统

在人类认识和改造自然界的过程中，都离不开获取自然界的信息。上至天文、下至地理，大到宇宙、小到核粒子研究，人类社会各个领域无时无刻不涉及语言、文字、图像、编码、符号、数据等信息的传输。所谓信息，是指存在于客观世界的一种事物形象，一般泛指消息、情报、指令、数据和信号等有关周围环境的知识。凡是物质的形态、特性在时间或空间上的变化，以及人类社会的各种活动都会产生信息。千万年来，人类用自己的感觉器官从客观世界获取各种信息，如语言、文字、图像、颜色、声音和自然景物信息等，可以说，我们生活在信息的海洋之中，获取信息的活动是人类最基本的活动之一。

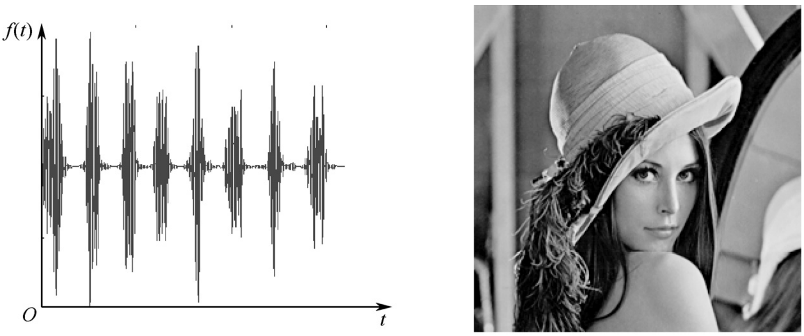
消息是指用来表达信息的语言、文字、图像和数据，如电报中的电文、电话中的声音、电视中的图像和雷达探测的目标距离等都是消息。在得到一个消息后，可能得到一定数量的信息，而所得到的信息是与在得到消息前后对某一事件的无知程度有关的。

信号是消息的表现形式与传送载体，消息是信号的传送内容。信号是消息的表现形式，是带有信息的某种物理量，如电信号、光信号和声信号等。消息的传送一般都不是直接的，必须借助于一定形式的信号才能便于远距离快速传输和进行各种处理。由于信号是带有信息的某种物理量，这些物理量的变化包含着信息，因此信号可以是随时间或空间变化的物理量，在数学上，可以用一个或几个独立变量的函数表示，也可以用曲线、图形等方式表示。例如，一个电视信号，要传送的消息是配有声音的图像。图 1.2.1 所示为这种信号的基本形式，图 1.2.1（a）所示为一段鸟叫的语音信号，它是一个随着时间 t 的变化而变化的一维函数 $f(t)$。图 1.2.1（b）所示为一帧“lena”的图像信号，它是随空间位置(x, y)的变化而变化的二维函数 $f(x, y)$，该信号反映的是空间某位置的光强度大小。

电信号是应用最广泛的物理量，是电压、电流或电磁场等物理量与消息内容相对应的变化形式，简称为信号，它可以用以时间 t 为自变量的某一函数关系来表示。

各种信号从来都不是孤立存在的，信号总是在系统中产生又在系统中不断地处理、传递。所谓系统，就是由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。系统是由各个不同单元按照一定的方式组成并完成某种任务的整体的总称。系统所完成的任务就是处理、传输

和存储信号，以达到自然界、人类社会、生产设备按照对人类有利的规律运动的目的，所以系统的组成、特性应由信息和信号决定。



（a）语音信号　　（b）图像信号

图 1.2.1　语音信号和图像信号

系统所涉及的范围十分广泛，包括太阳系、生物系和动物的神经组织等自然系统，电网、运输系统、计算机网络等人工系统，电气、机械、声学和光学等物理系统，以及生物系统、化学系统、政治体系、经济结构系统、管理组织系统等非物理系统。

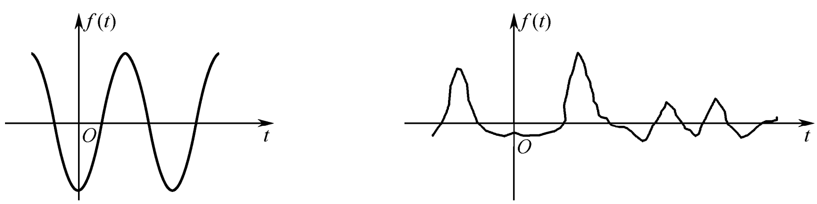
从上述可知，信息、信号与系统是不可分割的整体。

1.3　信号的描述和分类

对于信号的描述主要有两种方式：一是写出的它的数学表达式，即用函数来表达信号；二是绘出信号的图像或波形。除了表达式和波形这两种直观的描述外，针对问题从不同角度进行分析的需要，还可用频谱分析、各种变换及其他方式来描述和研究信号。

1.3.1　确定性信号与随机信号

若信号用确定的时间函数来表达，即对指定的某一时刻 t，有相应的函数值 $f(t)$与之对应（若干不连续点除外），这种信号称为确定性信号。例如，余弦信号如图 1.3.1（a）所示。在工程上，有许多物理过程产生的信号都是可以重复出现、可以预测的，并且能够用明确的数学表示式表示。例如，卫星在轨道上的运行、电容器通过电阻放电时电路中电流的变化、机器工作时各个构件的运动等，它们产生的信号都属于确定性信号。但是，实际传输的信号往往具有未可预知的不确定性，这种信号通常称为随机信号或不确定的信号。它是随机的，不能以明确的数学表示式表示，只能知道它的统计特性。例如，在通信传输过程中引入的各种噪声，即使在相同的条件下进行观察测试，每次的结果都不相同，呈现出随机性和不可预测性，如图 1.3.1（b）所示。



（a）确定性信号（余弦信号）　　（b）随机信号

图 1.3.1　确定信号与随机信号波形

确定性信号与随机信号有着密切的联系，在一定条件下，随机信号也会表现出某种确定性。例如，乐音表现为某种周期性变化的波形，电码可描述为具有某种规律的脉冲波形等。作为理论上的抽象，应该首先研究确定性信号，在此基础之上才能根据随机信号的统计规律进一步研究随机信号的特性。

1.3.2　连续时间信号与离散时间信号

按照信号在时间轴上的取值是否连续，可将信号分成连续时间信号与离散时间信号。

连续时间信号是指在信号的定义域内，任意时刻都有确定函数值的信号，通常用$f(t)$表示。连续时间信号最明显的特点是自变量 t 在其定义域上除有限个间断点外，其余都是连续可变的，简称连续信号。由于“连续”是相对时间而言的，故信号幅值可以是连续的，也可以是不连续的，如图 1.3.2 所示。对于幅值和时间都是连续的信号，又称为模拟信号，例如，正弦信号为模拟信号，如图 1.3.2（c）所示。

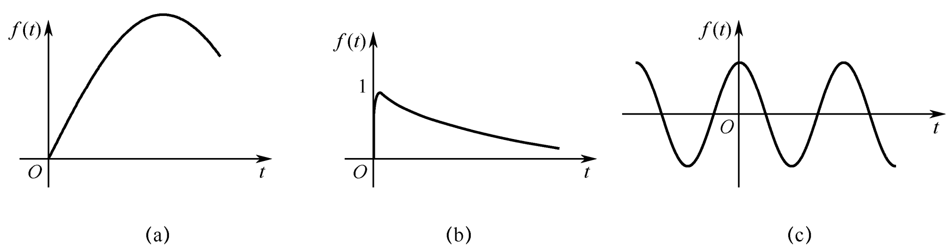


图 1.3.2　连续时间信号波形

与连续信号相对应的是离散信号。离散时间信号是指时间（其定义域为一个整数集）是离散的，只在某些不连续的规定瞬时给出函数值，在其他时间没有定义的信号（或称序列），简称离散信号，如图 1.3.3 所示。

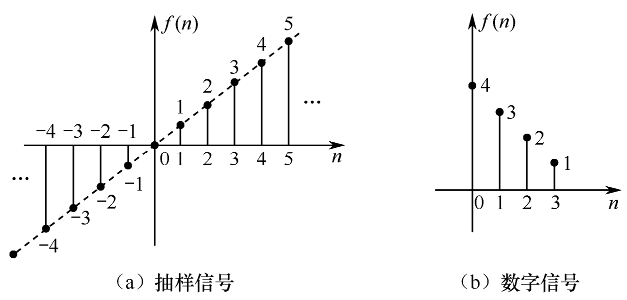


图 1.3.3　离散时间信号波形

如果离散时间信号的幅值是连续的，则称为抽样信号，如图 1.3.3（a）所示。如果离散时间信号不仅在时间上是离散的，而且在幅度上又是量化的，则称为数字信号，如图 1.3.3（b）所示。一般都采用均匀间隔，这时自变量 t 简化为用整数序号 n 表示，函数符号写做$f(n)$，当 n 为整数时，$f(t)$才有意义。

序列 $f(n)$的数学表达式可以写成闭合形式，也可以逐个列出 $f(n)$的值。通常把对应某序号 n 的序列值称为第 n 个样点的“样值”。图 1.3.3（a）所示的序列以闭合形式表示为

$$f(n)=n$$

而图 1.3.3（b）所示的序列为

$$f(n)=\begin{cases}0 & n<0\\ 4 & n=0\\ 3 & n=1\\ 2 & n=2\\ 1 & n=3\\ 0 & n>3\end{cases}$$

列出了每个样点的值。为了简化表达方式，此式也可表示为

$$f(n)=\{\underset{\uparrow}{4},3,2,1\}$$

序列中数字 4 下方的箭头↑表示与 $n=0$ 相对应，左右两边依次为 n 取负整数和 n 取正整数时相对应的样值。

1.3.3 实信号与复信号

物理可实现的信号通常是时间的实函数，即在各时刻的函数值均为实数，统称为实信号，如无线电信号、语音信号等。函数值为复数的信号，称为复信号，如常见的复指数信号。复信号由实部和虚部组成，虽然在实际中不能产生复信号，但是为了便于理论分析，往往采用复信号来代表某些物理量。

连续时间复指数信号，简称指数信号，其一般形式为

$$f(t)=A\mathrm{e}^{st} \tag{1.3.1}$$

式中，复变量 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ ， σ 是 s 的实部，记做 $\mathrm{Re}\{s\}$ ， ω 是 s 的虚部，记做 $\mathrm{Im}\{s\}$ 。根据欧拉公式，式（1.3.1）可展开为

$$f(t)=A\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}=A\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t+A\mathrm{j}\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t \tag{1.3.2}$$

可见一个复指数信号可以分解为实、虚两部分，即

$$\mathrm{Re}\{f(t)\}=A\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t \tag{1.3.3}$$

$$\mathrm{Im}\{f(t)\}=A\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t \tag{1.3.4}$$

两者均为实信号，且是频率相同、振幅随时间变化的正（余）弦振荡。s 的实部 σ 表征了该信号振幅随时间变化的情况，虚部 ω 表征了其振荡角频率。

利用欧拉公式，正、余弦信号可用如下形式表达：

$$\sin\omega t=\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}) \tag{1.3.5}$$

$$\cos\omega t=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}) \tag{1.3.6}$$

由以上两个例子可以得出实信号

$$f(t)=f^{*}(t) \tag{1.3.7}$$

式中， $f^{*}(t)$ 为 $f(t)$ 的共轭函数。

复信号 $f(t)\neq f^{*}(t)$ ，即

$$f(t)=f_1(t)+\mathrm{j}f_2(t) \tag{1.3.8}$$

式中， $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 均为实函数。

1.3.4 周期信号与非周期信号

对连续时间信号 $f(t)$ ，若对所有 t 均有

$$f(t)=f(t+nT),\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1.3.9}$$

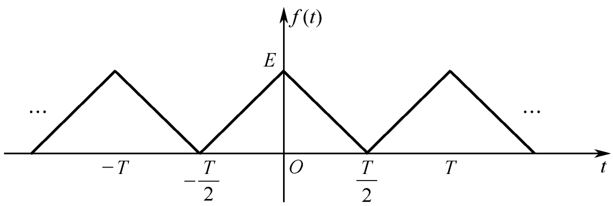
则称 $f(t)$ 为连续周期信号，满足式（1.3.9）的最小 T 值称为 $f(t)$ 的周期。图 1.3.4（a）所示为周期为 T 的连续周期信号。

对离散时间信号 $f(k)$，有

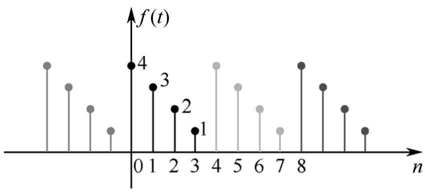
$$f(k)=f(k+N)，\ k 取整数，N 为整数 \tag{1.3.10}$$

则称 $f(k)$ 为离散周期信号，满足式（1.3.10）的最小 N 值称为 $f(k)$ 的周期。图 1.3.4（b）所示为周期为 4 的离散周期信号。

对于周期信号，只要给出任一周期内的变化规律，即可确定它在所有其他时间内的规律，如图 1.3.4 所示。而非周期信号在时间上不具有周而复始的特性，往往就有瞬变性，也可以看做是周期为无穷大的周期信号，如图 1.3.5 所示。



（a）连续周期信号



（b）离散周期信号

图 1.3.4　周期信号

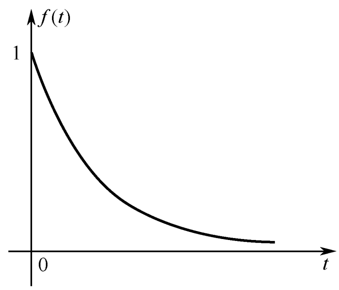


图 1.3.5　非周期信号

在通信领域还经常出现一种由有限个周期信号合成，但周期信号的各周期相互间不是公倍数关系的信号，其合成信号不满足周期的条件，这种信号称为准周期信号，如信号

$$f(t)=\cos t+\cos(\sqrt{3}t) \tag{1.3.11}$$

1.3.5　能量信号与功率信号

信号按时间函数的可积性，可分为能量信号和非能量信号，以及功率信号和非功率信号。

若将信号 $f(t)$看做是随时间变化的电压或电流，信号平方的无穷积分加到 1Ω电阻上的能量，称为信号能量 E，即

$$E=\lim_{T\to+\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1.3.12}$$

信号功率等于所有时间段上信号能量的时间平均值，即

$$P=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1.3.13}$$

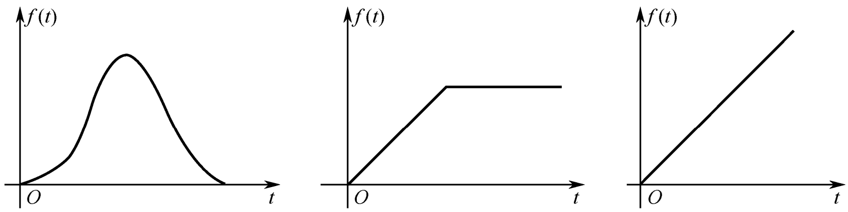
对于离散时间信号 $f(k)$，其信号能量 E 与平均功率 P 的定义分别为

$$E=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=-N}^{N}|f(k)|^2 \tag{1.3.14}$$

$$P=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\left|f(k)\right|^2 \tag{1.3.15}$$

如果在无限大时间区间内，信号的总能量为有限值，且平均功率 $P\to 0$，这类信号称为能量有限信号，简称能量信号。如果在无限大时间区间内，信号的总能量为无穷大，平均功率为有限值，则称此类信号为功率有限信号，简称功率信号。

需要注意的是，一个信号不可能同时既是功率信号，又是能量信号；但可以是非功率非能量信号，如单位斜坡信号。一般来说，直流信号和周期信号都是功率信号，非周期信号可以是能量信号、功率信号或非功率非能量信号。例如，时间有限的非周期信号为能量信号，如图 1.3.6（a）所示；持续时间无限、幅度有限的非周期信号为功率信号，如图 1.3.6（b）所示；持续时间、幅度均无限的非周期信号为非功率非能量信号，如图 1.3.6（c）所示。



（a）能量信号　（b）功率信号　（c）非功率非能量信号

图 1.3.6　能量信号、功率信号和非功率非能量信号

1.3.6　普通信号与奇异信号

在信号与系统分析中，经常会遇到一类信号，它本身包含不连续点，或者其导数与积分存在不连续点，不能以普通函数的概念来定义，只能用“广义函数”的概念来研究，此类信号称为奇异信号。

通常，我们研究的典型信号都是一些抽象的数学模型，这些信号与实际信号可能有差距，然而，只要把实际信号按某种条件理想化，即可运用理想模型进行分析。第 1.5 节将详细介绍斜变、阶跃、冲激和冲激偶 4 种奇异信号，其中，冲激信号与阶跃信号是两种重要的理想信号模型。

1.3.7　一维信号与多维信号

从数学表达式来看，信号可表示为一个或多个变量的函数。一维信号即是由一个自变量描述的信号，多维信号即是由多个自变量描述的信号。例如，语音信号就可以表示为声压随时间变化的函数，是一维信号；静止的黑白图像信号为随像素点变化的光强，像素即可用平面的二维坐标来描述，黑白图像信号是二维信号；运动的平面黑白图像信号则是三维信号；电磁波在三维空间传播，同时考虑时间变量，从而构成四维信号。在以后的讨论中，一般情况下只研究一维信号，且自变量为时间。在个别情况下，自变量可能不是时间，例如，在气象观测中，温度、气压或风速将随高度的变化而变化，此时自变量就是高度。

1.3.8　因果信号与反因果信号

如果当 $t<t_0$（t_0 为实常数）时，$f(t)=0$；当 $t\geqslant t_0$ 时，$f(t)\neq 0$，则称 $f(t)$ 为因果信号，也叫做物理可实现信号，通常取 $t_0=0$，故因果信号可用 $f(t)u(t)$ 表示。在实际中出现的信号，大多数是物理可实现信号，因为这种信号反映了物理上的因果律。实际中所能测得的信号，许

多都是由一个激发脉冲作用于一个物理系统之后所输出的信号。所谓物理系统，是指当激发脉冲作用于物理系统之前，系统是不会有响应的。换言之，在零时刻之前，没有输入脉冲，则输出为零。

如果当 $t \geqslant t_0$（t_0 为实常数）时，$f(t)=0$；当 $t<t_0$ 时，$f(t) \neq 0$，则称 $f(t)$ 为反因果信号。通常取 $t_0=0$，故因果信号可用 $f(t)u(-t)$ 表示。

除以上划分方式外，还可将信号分为时间受限信号与频率受限信号，以及调制信号、载波信号等。

1.4　典型连续时间信号及其基本性质

1.4.1　正弦型信号

正弦信号的一般形式表示为

$$f(t)=K\sin(\omega t+\varphi)=K\cos\left(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right) \tag{1.4.1}$$

式中，K、ω 和 φ 分别为正弦信号的振幅、角频率和初相。由于余弦信号同正弦信号只是在相位上相差 $\frac{\pi}{2}$，所以将余弦信号和正弦信号统称为正弦型信号。正弦型信号是周期信号，其周期 T、频率 f 和角频率 ω 之间的关系为 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{f}$。如图 1.4.1 所示。

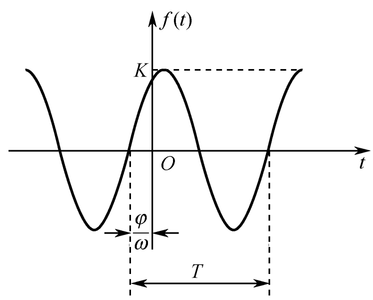


图 1.4.1　正弦型信号的波形

正弦型信号具有如下性质：

（1）两个频率相同的正弦型信号相加，即使其振幅和相位各不相同，但相加后的结果仍是原频率的正弦型信号；

（2）若一个正弦型信号的频率是另一个信号频率的整数倍，则合成信号是一个非正弦型周期信号，其周期等于基波的周期；

（3）正弦型信号的微分或积分仍然是同频率的正弦型信号。

1.4.2　指数信号

连续时间实指数信号的一般形式为

$$f(t)=A\mathrm{e}^{\sigma t} \tag{1.4.2}$$

式中，A 和 σ 均为常实数。若 $\sigma<0$，则 $f(t)$ 随着时间 t 的增加按指数衰减；若 $\sigma>0$，则 $f(t)$ 随着时间 t 的增加按指数增长；若 $\sigma=0$，则 $f(t)$ 为直流信号，如图 1.4.2 所示。

实际上，遇到较多的是单边指数衰减信号，如图 1.4.3 所示，其表达式为

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} & t \geqslant 0\end{cases} \tag{1.4.3}$$

在 $t=0$ 处，$f(t)=1$；在 $t=\tau$ 处，$f(\tau)=\frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.368$。即经过时间 τ，信号衰减到初始值的 36.8%。

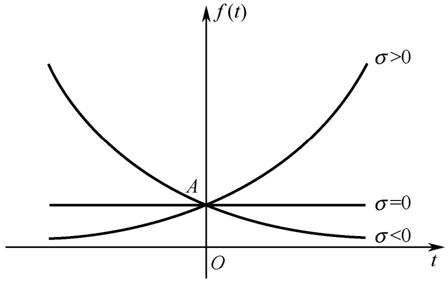


图 1.4.2　实指数信号

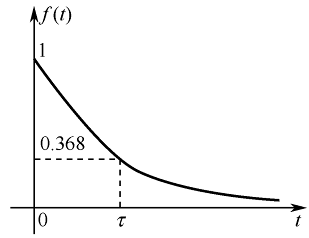


图 1.4.3　单边指数衰减信号

指数信号的一个重要特性是其对时间的微分和积分仍然是指数形式。

连续时间复指数信号，可表示为

$$f(t)=A\mathrm{e}^{st}\,,\quad s=\sigma+\mathrm{j}\omega \tag{1.4.4}$$

式中，s 称为复频率。根据欧拉公式，可得

$$\mathrm{e}^{st}=\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t+\mathrm{j}\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t \tag{1.4.5}$$

复指数信号可以表示为

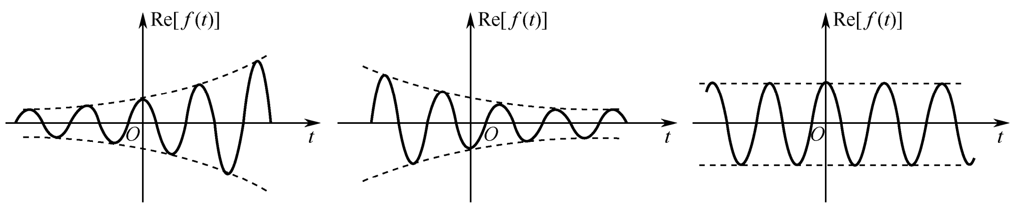
$$f(t)=A\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t+\mathrm{j}A\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t=\mathrm{Re}[f(t)]+\mathrm{j}\,\mathrm{Im}[f(t)] \tag{1.4.6}$$

由此可知，复指数信号可分解为实部和虚部两部分，代表余弦和正弦振荡信号，其波形随 s 的不同而异。当 $s=0$ 时，信号为直流信号；当 $\omega=0$ 时，信号变成实指数信号。

当 s 均为复数时，$f(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned}f(t)=A\mathrm{e}^{st}&=|A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\cdot\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}=|A|\mathrm{e}^{\sigma t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}\\&=|A|\mathrm{e}^{\sigma t}[\cos(\omega t+\varphi)+\mathrm{j}\sin(\omega t+\varphi)]\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

在通常情况下，复指数信号的实部是一个增幅（$\sigma>0$）或减幅（$\sigma<0$）余弦信号，如图 1.4.4（a）、（b）所示，虚部则是一个增幅（$\sigma>0$）或减幅（$\sigma<0$）正弦信号；当 $\sigma=0$ 时，信号实部是一个等幅余弦信号，虚部是一个等幅正弦信号，如图 1.4.4（c）所示。



（a）$\sigma>0$　　（b）$\sigma<0$　　（c）$\sigma=0$

图 1.4.4　复指数信号实部波形

1.4.3　矩形脉冲和三角脉冲

矩形脉冲信号的表示式为

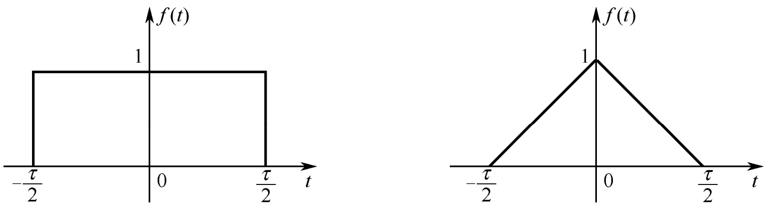
$$f(t)=\begin{cases}1 & |t|<\dfrac{\tau}{2}\\[2mm] 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases} \tag{1.4.8}$$

如图 1.4.5（a）所示，矩形脉冲信号经常称为门信号。

三角脉冲信号的表示式为

$$f(t)=\begin{cases}1-\dfrac{2|t|}{\tau} & |t|\leqslant\dfrac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}\tag{1.4.9}$$

如图 1.4.5（b）所示。



（a）矩形脉冲信号　　（b）三角脉冲信号

图 1.4.5　矩形脉冲信号和三角脉冲信号

1.4.4　抽样信号

单位抽样信号用 $\mathrm{Sa}(t)$ 表示，其函数表达式为

$$\mathrm{Sa}(t)=\frac{\sin t}{t}\tag{1.4.10}$$

其波形如图 1.4.6 所示。

抽样信号具有以下性质：

（1）抽样信号满足偶对称，即 $\mathrm{Sa}(-t)=\mathrm{Sa}(t)$；

（2）$\mathrm{Sa}(0)=\lim\limits_{t\to0}\mathrm{Sa}(t)=1$；

（3）当 $t=\pm n\pi$（$n=1,2,3,\cdots$）时，$\mathrm{Sa}(t)=0$，即 $t=n\pi$ 为抽样信号的零点；

（4）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$，$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\pi$；

（5）$\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{Sa}(t)=0$。

抽样函数的另一常用形式是辛格函数，其表达式为

$$\mathrm{sinc}(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t}\tag{1.4.11}$$

其波形如图 1.4.7 所示。

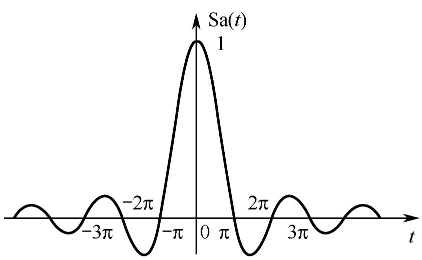


图 1.4.6　抽样信号

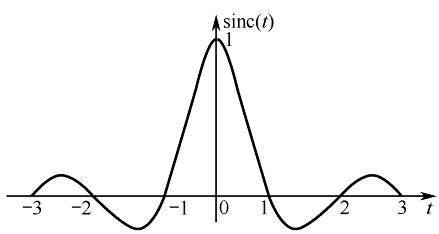


图 1.4.7　$\mathrm{sinc}(t)$ 函数

因为 $\mathrm{sinc}(t)$ 函数的因子 $1/t$ 随时间的增大而减小，而正弦项又是振荡的，所以 $\mathrm{sinc}(t)$ 为衰减振荡的。在 $t=0$ 处，$\mathrm{sinc}(t)$ 函数是不定式 $0/0$。利用近似算式 $\sin(\alpha)\approx\alpha$，可得

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\approx\frac{\pi t}{\pi t}=1\ \text{或}\ \lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}=\lim_{t\to0}\frac{\pi\cos(\pi t)}{\pi}=1$$

由图 1.4.7 可见，sinc(t) 具有偶对称性，且在原点具有单位高度。其主瓣位于原点两侧的第一个零点之间，旁瓣向正、负两个方向逐渐衰减。定义中的因子 π 使得 sinc(t) 函数近似具有单位面积，而且使得零点（$t=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$）之间为单位距离。

1.4.5 符号信号

符号函数用 sgn(t) 表示，定义式为

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases} \tag{1.4.12}$$

其波形如图 1.4.8 所示。

1.4.6 钟形脉冲信号

钟形脉冲信号（高斯信号）的表达式为

$$f(t)=E\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \tag{1.4.13}$$

波形如图 1.4.9 所示。

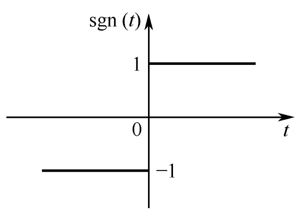


图 1.4.8 符号信号

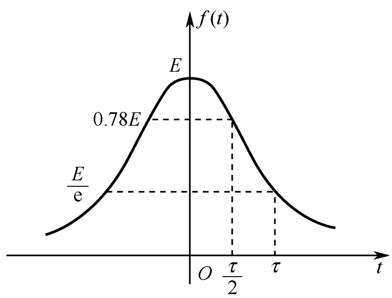


图 1.4.9 钟形脉冲信号

令 $t=\dfrac{\tau}{2}$，代入函数式求得

$$f\left(\frac{\tau}{2}\right)=E\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\approx0.78E \tag{1.4.14}$$

式（1.4.14）表明，函数式中的参数 τ 是当 $f(t)$ 由最大值 E 下降为 $0.78E$ 时所占据的时间宽度。钟形脉冲（高斯）信号最重要的性质是其傅里叶变换也是钟形脉冲（高斯）信号，在信号分析中占有重要地位。

1.5 奇异信号及其基本性质

1.5.1 单位斜变信号

斜变信号也称斜坡信号或斜升信号，它是指从 0 时刻开始随时间正比例增长的信号。如果增长的变化率是 1，称为单位斜变信号，表示为

$$r(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\geqslant0\end{cases} \tag{1.5.1}$$

其波形如图 1.5.1（a）所示。如果将起始点移至 t_0，则可写成

$$r(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ t-t_0 & t\geqslant t_0\end{cases} \tag{1.5.2}$$

其波形如图 1.5.1（b）所示。

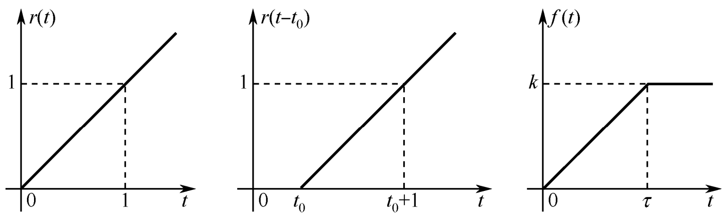
在实际应用中，经常遇到截平的斜变信号，在时间 τ 以后斜变波形被切平，如图 1.5.1（c）所示，可表示为

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{k}{\tau}r(t) & t<\tau\\ k & t\geqslant\tau\end{cases} \tag{1.5.3}$$

三角形脉冲信号也可用单位斜变信号表示

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{k}{\tau}r(t) & t\leqslant\tau\\ 0 & t>\tau\end{cases} \tag{1.5.4}$$

其波形如图 1.5.2 所示。



（a）单位斜变信号　（b）移位斜变信号　（c）截平的斜变信号

图 1.5.1　斜变信号

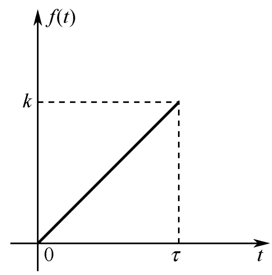


图 1.5.2　三角形脉冲信号

1.5.2　单位阶跃信号

单位阶跃信号用 $u(t)$ 表示，其定义为

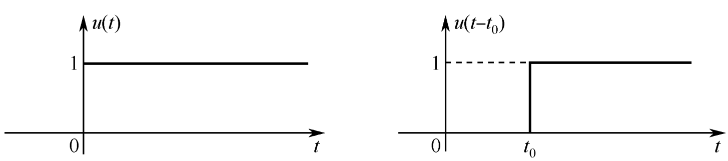
$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases} \tag{1.5.5}$$

其波形如图 1.5.3（a）所示。

值得注意的是，单位阶跃信号是一种在 $t=0$ 时刻产生跃变的信号，它在 $t=0$ 时刻有不连续点，所以是一种奇异信号。关于单位阶跃信号在跃变时刻的值，有些书中定义为 1，有些书中定义为 $\dfrac{1}{2}$，也有些书中没有定义。从信号处理的角度看，两个连续时间信号在有限个孤立时刻上的有限个差别不可能导致信号能量的差异，从而也就不可能导致处理结果的差异。

单位阶跃信号也可以延时任意时刻 t_0，其波形如图 1.5.3（b）所示，可以表示为

$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases} \tag{1.5.6}$$



（a）单位阶跃信号　（b）有延时的单位阶跃信号

图 1.5.3　单位阶跃信号

单位阶跃信号的基本性质是单边特性或因果特性，这个性质使其在信号分析与系统分析中具有非常重要的作用。一个在 $-\infty < t < +\infty$ 范围内取值的信号 $f(t)$，与单位阶跃信号相乘后就变成了单边信号：

$$f(t)u(t) = \begin{cases} f(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{1.5.7}$$

利用单位阶跃信号与延时的单位阶跃信号可以方便地表示某些单边信号，或者组合成其他一些基本信号。例如，式（1.4.3）表示的单边指数信号就可以表示为 $f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$。再如，对于图 1.5.4 所示的矩形脉冲信号 $G_{\mathrm{T}}(t)$，可以用 $u(t)$ 表示为

$$G_{\mathrm{T}}(t) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \tag{1.5.8}$$

而对于图 1.4.8 所示的符号函数，则可以用 $u(t)$ 表示为

$$\mathrm{sgn}(t) = 2u(t) - 1 \tag{1.5.9}$$

符号函数在 $t = 0$ 时刻也有一个跃变点，其值的性质与 $u(t)$ 相似。

比较单位斜变信号 $r(t)$ 和单位阶跃信号 $u(t)$ 的波形，不难发现 $r(t)$ 和 $u(t)$ 互为积分和微分的关系，即

$$u(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t) \tag{1.5.10}$$

$$r(t) = \int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.5.11}$$

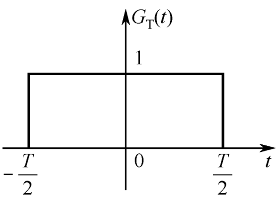


图 1.5.4　矩形脉冲信号

1.5.3　单位冲激信号

有时会遇到这样一些物理现象，它发生的时间极短，而取值或能量却极大，如电闪雷击、爆炸等现象。再如，具有一定质量和速度的刚体碰撞时的撞击力 $F(t)$ 就是如此，由于撞击的冲量 $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t$ 等于撞击前后刚体动量的变化，并且是一定的，若撞击接触的时间越短，撞击力 $F(t)$ 也就越大。冲激信号或冲激函数的概念就是由这类背景而引出的。

1．单位冲激信号的定义

狄拉克（Dirac）把单位冲激函数 $\delta(t)$ 定义为

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 \\ \delta(t) = 0 \qquad t \neq 0 \end{cases} \tag{1.5.12}$$

如图 1.5.5（a）所示，冲激信号可用带箭头的线段来表示。线段的长度表示冲激的强度，线段所在的位置表示冲激出现的时刻，表达了函数在 0 时刻取值不确定，在其他时刻取零值，几何意义为面积为 1，(1)表示强度为 1。

为描述在任一点 $t = t_0$ 处出现的冲激，可有如下的定义，如图 1.5.5（b）所示。

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\mathrm{d}t = 1 \\ \delta(t - t_0) = 0 \qquad t \neq t_0 \end{cases} \tag{1.5.13}$$

冲激信号不是通常意义上的函数，是一种广义函数。因为一般函数当自变量 t 取一定值时，函数总有确定值与之对应，而冲激信号在它出现的时刻并没有确定值。

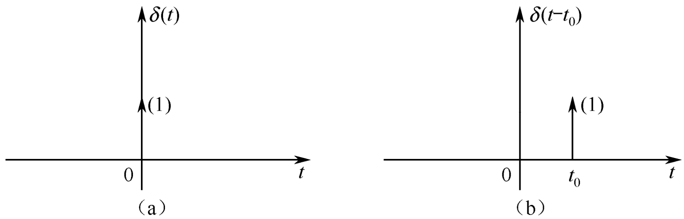


图 1.5.5 单位冲激信号和有延时的单位冲激信号

可以用一个面积为 1 的窄矩形，来近似单位冲激信号。设矩形脉宽为 τ，幅值为 $\frac{1}{\tau}$，当 $\tau \to 0$ 时，其脉冲的幅值 $\frac{1}{\tau} \to \infty$，将这种极限状态下的函数定义为冲激函数，并且以 $\delta(t)$ 表示，即

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right] \tag{1.5.14}$$

如图 1.5.6（b）所示。此脉冲的面积定义为冲激的强度，强度为 1 的冲激称为单位冲激。

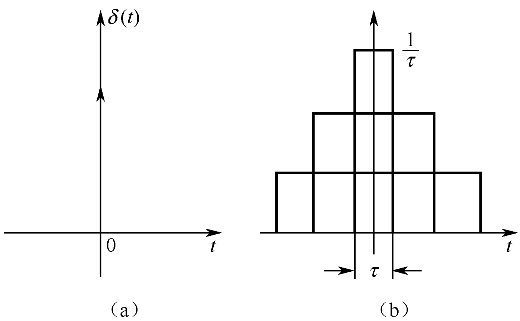


图 1.5.6 冲激函数的定义方式

此外，冲激函数还可以利用三角形脉冲、双边指数脉冲、钟形函数和抽样函数等形式通过求取极限来表示。

三角形脉冲 $\delta(t) = \lim_{\tau \to 0}\left\{\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{|t|}{\tau}\right)[u(t+\tau)-u(t-\tau)]\right\}$

双边指数脉冲 $\delta(t) = \lim_{\tau \to 0}\left(\frac{1}{2\tau}\mathrm{e}^{-\frac{|t|}{\tau}}\right)$

钟形函数 $\delta(t) = \lim_{\tau \to 0}\left[\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\right]$

抽样函数 $\delta(t) = \lim_{k \to 0}\frac{k}{\pi}\mathrm{Sa}(kt)$

2．冲激函数的性质

（1）筛选特性

根据冲激信号的定义，有

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \tag{1.5.15}$$

式中，$f(t)$ 为在 $t = t_0$ 处连续的普通函数。该式表明，$\delta(t-t_0)$ “筛选”出了信号 $f(t)$ 在 $t = t_0$ 时刻的函数值 $f(t_0)$。当 $t_0 = 0$ 时，式（1.5.15）变为

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t) \tag{1.5.16}$$

如图 1.5.7 所示。

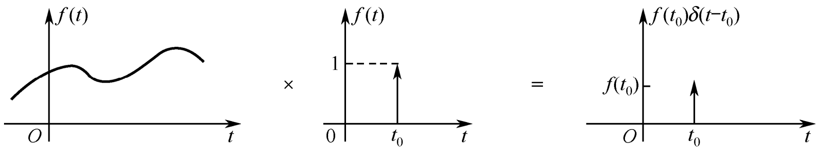


图 1.5.7 筛选特性

（2）抽样特性

若信号 $f(t)$ 是一个在 $t=t_0$ 处连续的普通函数，根据冲激信号的筛选特性，可得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t_0)\mathrm{d}t=f(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0) \tag{1.5.17}$$

当 $t_0=0$ 时，式（1.5.17）变为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0) \tag{1.5.18}$$

式（1.5.17）和式（1.5.18）表明，冲激函数通过与普通函数乘积的积分，可将普通函数在冲激出现时刻的函数值抽取出来，故称其具有抽样特性。

（3）尺度特性

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{1.5.19}$$

证明：令 $at=\tau$ ，对于在 $t=0$ 处连续的函数 $f(t)$ ，有

当 $a>0$ 时

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(at)f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a}\delta(\tau)f\left(\frac{\tau}{a}\right)\mathrm{d}(\tau)=\frac{f(0)}{a}$$

当 $a<0$ 时

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(at)f(t)\mathrm{d}t=\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{1}{a}\delta(\tau)f\left(\frac{\tau}{a}\right)\mathrm{d}(\tau)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a}\delta(\tau)f\left(\frac{\tau}{a}\right)\mathrm{d}(\tau)=-\frac{f(0)}{a}=\frac{f(0)}{|a|}$$

由于式（1.5.19）右边的积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|a|}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{|a|}f(0)$$

故可得证。

同理可证

$$\delta(at-t_0)=\frac{1}{|a|}\delta\left(t-\frac{t_0}{a}\right) \tag{1.5.20}$$

当 $a=-1$ 时，有

$$\delta(t)=\delta(-t) \tag{1.5.21}$$

所以冲激信号是偶函数。

（4）冲激函数和阶跃函数的关系

由冲激函数和阶跃函数的定义，可以推出冲激信号与阶跃信号的关系如下

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}=u(t) \tag{1.5.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=\delta(t) \tag{1.5.23}$$