第 1 章　导数与微分

本章提要：17 世纪初期笛卡儿提出变量和函数的概念，由此客观世界的运动变化过程就可以用数学来描述了，稍后牛顿和莱布尼兹基于直观的无穷小量，分别独立地建立了微积分学。到了 19 世纪，柯西和维尔斯特拉斯建立了极限理论，康托尔等建立了严格的实数理论，使微积分学得以严密化。微积分是人类智慧的伟大结晶，极大地推动了数学的发展，同时也极大地推动其他学科和工程技术的发展，其应用越来越广泛。本章主要内容包括：函数的基本概念，极限的概念及求极限的基本方法；导数的概念，导数的几何意义及求导法则、公式；导数的应用，包含洛必达法则、函数单调性与极值的判定、函数凹凸性及拐点的判定、函数作图等；最后简单介绍多元函数微分学。

1.1　函数复习

数学中把不断变化的、可取不同值的量称为变量，函数是对变量之间的依赖关系的一种抽象，以下是与函数有关的几个概念。

1. 函数、反函数、复合函数

定义 1　设 x 和 y 为两个变量，D 为一个给定的数集，如果对每一个 $x\in D$，按照一定的法则 f，变量 y 总有确定的数值与之对应，就称 f 是定义在 D 上的函数，记为 $y=f(x)$。x 叫作自变量，y 叫作因变量，数集 D 称为该函数的定义域，因变量 y 的变化范围称为该函数的值域。

定义 2　设 $y=f(x)$是 x 的函数，其定义域为 D，值域为 W，如果对于 W 中的每一个 y 值，D 中总有唯一确定的 x 通过 $y=f(x)$与之对应，这样得到定义在 W 上的以 y 为自变量、x 为因变量的新函数，我们称它为 $y=f(x)$的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$。

反函数一般具有以下性质：

(1) 反函数的定义域、值域分别是原函数的值域、定义域；

(2) 互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称；

(3) 严格增(减)的函数一定有严格增(减)的反函数。

定义 3　若函数 $y=f(u)$，定义域为 U_1，函数 $u=\varphi(x)$的值域为 U_2，其中 $U_2\subseteq U_1$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$和函数 $u=\varphi(x)$构成的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为中间变量。

函数的应用十分广泛，从不同角度分析函数的特性有利于我们更好地认识函数，以下介绍函数的几种简单性质。

2. 函数的几种简单性质

设函数 $y=f(x)$在数集 D 有定义,它的几种简单性质见表 1－1。

表 1－1 函数 $y=f(x)$的几种简单性质

函数性质	描 述
有界性	若存在一个正数 M,对任意 $x\in D$,恒有 $\|f(x)\|\leqslant M$,就称 $f(x)$在 D 有界,否则称 $f(x)$在 D 无界
单调性	在 D 内任取 $x_1<x_2$:(1) 若恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在 D 单调增加;(2) 若恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在 D 单调减小
奇偶性	D 关于原点对称,且对任意 $x\in D$:(1) 若恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数;(2) 若恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数
周期性	若存在常数 $T(T\neq 0)$,对任意 $x\in D$,恒有 $f(x+T)=f(x)$,$(x+T\in D)$,则称函数 $f(x)$为周期函数,且称 T 为 $f(x)$的周期,通常称 $f(x)$的最小正周期为基本周期,简称周期

3. 基本初等函数和初等函数

人们在长期的实践中总结出六类最常见、最基本的函数:常数函数($y=C$,C 为常数),幂函数($y=x^\alpha$),指数函数($y=a^x$),对数函数($y=\log_a x$),三角函数($y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=\sec x$,$y=\csc x$ 等),反三角函数($y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\mathrm{arccot}\,x$ 等),这六类函数统称为基本初等函数。

基本初等函数的定义、定义域、性质和图形在中学已经学过,在这里不再重复。

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合运算所得到的函数统称为初等函数。一般来说,能用一个解析式表示的函数都是初等函数。例如,$y=|x|=\sqrt{x^2}$ 由两个基本初等函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2$ 复合而成,是初等函数。

有些函数,如狄利克雷函数:

$$y=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 是有理数}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 是无理数}\end{cases}$$

不能用基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合而成,就不是初等函数,称为非初等函数。

函数作为微积分的基础,其重要性不言而喻,以下通过两个例题进行复习和巩固。

【例 1－1】 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$定义域。

解:由所给函数知,要使函数有定义,必须

$$\begin{cases}4-x^2>0\\ \left|\dfrac{x}{2}-1\right|\leqslant 1\end{cases}$$

即

$$0\leqslant x<2$$

因此，所给函数的定义域为$[0,2)$。

【例 1－2】 写出下列函数的复合过程。

(1) $y=\sqrt{\sin(2x+3)}$　　(2) $y=e^{\sin\ln(3x-2)}$

解：

(1) $y=\sqrt{u}$，$u=\sin v$，$v=2x+3$

(2) $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\ln t$，$t=3x-2$

练习 1.1

1. 求下列函数的定义域。

(1) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$　　(2) $y=\log_3 \dfrac{1}{1-x}$

(3) $y=\arcsin \dfrac{x-3}{2}$　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}+\lg(3x-8)$

2. 指出下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数。

(1) $y=x+\sin x$　　(2) $y=\dfrac{\cos x}{1-x^2}$

(3) $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$　　(4) $y=2^{x^2-1}$

3. 证明：若 $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$，$(a>0)$，则 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$。

4. 指出下列函数的复合过程。

(1) $y=\cos x^2$　　(2) $y=\sqrt{\lg x}$

(3) $y=\sin(\arccos x^3)$　　(4) $y=\ln^2 \sin^3(4x+5)$

5. 一个无盖的长方体大木箱，体积为 4m^3，底为正方形，试把木箱的表面积 S 表示为底边长 x 的函数。

1.2　极限的概念

1. 数列极限

定义 1　对数列$\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，数列$\{x_n\}$无限趋向于一个常数 a，那么 a 就称为数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad \text{或} \quad x_n\to a(n\to\infty)$$

如果数列$\{x_n\}$没有极限，就说数列$\{x_n\}$是发散的。可以证明，如果一个数列有极限，则此极限是唯一的。

【例 1－3】 根据极限的定义，判断下列各数列是否有极限，对于收敛的数列指出其极限。

(1) $2,4,6,\cdots,2n,\cdots$

(2) $-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\cdots,\frac{(-1)^n}{n},\cdots$

(3) $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$

(4) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

解:把以上的每个数列逐项在数轴上表示出来,可以看出(1)和(3)两个数列没有极限,(2)和(4)两个数列有极限,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

2. 函数的极限

定义 2 当 x 趋向于 x_0 时,函数 $f(x)$ 趋向于常数 A,则称 A 为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限,记作:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$。

这时,根据 x 小于 x_0(或 x 大于 x_0)又可分为两种情况:

(i) 当 x 小于 x_0 而趋向于 x_0(记为 $x\to x_0^-$)时,$f(x)$ 趋向于常数 A,则称 A 为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的左极限,或简称 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限为 A。

记作:$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0^-)$ 或 $f(x_0-0)=A$

(ii) 当 x 大于 x_0 而趋向于 x_0(记为 $x\to x_0^+$)时,$f(x)$ 趋向于常数 A,则称 A 为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的右极限,或简称 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限为 A。

记作:$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0^+)$ 或 $f(x_0+0)=A$

定理 1 当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限存在且都等于 A,即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

定义 3 当 $|x|$ 无限增大时,函数 $f(x)$ 无限趋向于常数 A,则称 A 为 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限,记作:$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$。

这时,根据 x 的正负性,当 $|x|$ 无限增大时,可分为两种情况:

(i) 当 $x>0$ 且无限增大时,$f(x)$ 无限趋向于常数 A,此时极限可记作:$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$。

(ii) 当 $x<0$ 且 $|x|$ 无限增大时,$f(x)$ 无限接近于常数 A,此时极限可记作:$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to-\infty)$。

定理 2 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

【例 1-4】 试求函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\leqslant 0\\ \mathrm{e}^x & x>0\end{cases}$,当 $x\to 0$ 时的极限。

解:$x=0$ 是函数的分段点,而

$$\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1, \qquad \lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^x=1$$

故
$$\lim_{x\to 0}f(x)=1$$

【例 1－5】 $f(x)=\begin{cases}x+2 & x\leqslant 0\\ a & x>0\end{cases}$，问 a 为何值时，极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在。

解：$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的分段点

$$\lim_{x\to 0^-}(x+2)=2, \qquad \lim_{x\to 0^+}a=a$$

若要极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，左右极限必须相等，即当 $a=2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在。

【例 1－6】 考察下列函数的极限。

（1）当 $x\to+\infty$ 时，函数 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^x$ 的变化趋势。

（2）当 $x\to\infty$ 时，函数 e^x 的变化趋势。

解：（1）由图 1－1 所示函数图像可以看出，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^x=0$；

（2）由图 1－1 所示函数图像可以看出，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$，　故 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$ 不存在。

【例 1－7】 考察当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\arctan x$ 的极限。

解：由图 1－2 可以看出，

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，所以当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\arctan x$ 极限不存在。

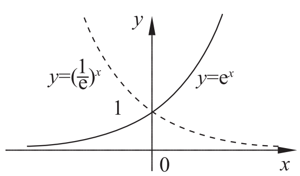

图 1－1

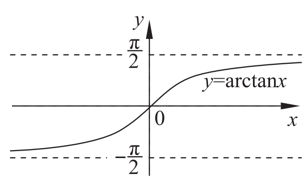

图 1－2

【例 1－8】 在半径为 R 的圆内作内接正方形，在这正方形内作内切圆，在内切圆内又作内接正方形，如此 n 次。试求当 $n\to\infty$ 时所有圆面积总和的极限。

解：本例的作图示意如图 1－3 所示。

第一个圆的面积为：πR^2

第二个圆的面积为：$\pi\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\pi R^2$　　（因为 $r=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$）

第三个圆的面积为：$\pi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{\pi R^2}{2^2}$

⋮

第 n 个圆的面积为：$\dfrac{\pi R^2}{2^{n-1}}$

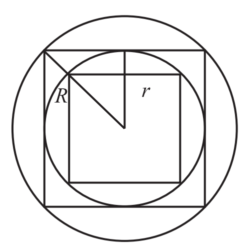

图 1－3

所以,面积总和为:$\pi R^2+\frac{\pi R^2}{2}+\frac{\pi R^2}{2^2}+\cdots+\frac{\pi R^2}{2^{n-1}}=\pi R^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\pi R^2$$

所求极限为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\pi R^2=2\pi R^2$。

3. 无穷小量与无穷大量

无穷小量与无穷大量是两个特殊的变量,微积分起源于无穷小演算。

(1) 无穷小量及其性质

定义 4　如果在 x 的某种趋向下,函数 $f(x)$以零为极限,则称在 x 的这种趋向下,函数 $f(x)$是无穷小量,简称无穷小。

注意:无穷小量是趋于零的函数,非零常数都不是无穷小。

例如,当 $x\to2$ 时,函数 x^2-4 和 $\ln(x-1)$都是无穷小量;

当 $x\to\infty$时,函数$\frac{1}{x}$和$\frac{1}{x^2}$也都是无穷小量。

以下定理描述了无穷小量与函数的极限的关系。

定理 3　若在 x 的某种趋向下,函数 $f(x)\to A$,则在 x 的这种趋向下,$f(x)-A$ 是无穷小量,其逆定理也为真。

例如,当 $x\to\infty$时,函数 $f(x)=1+\frac{1}{x}\to1$,而 $f(x)-A=\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\to0$。

定理 4　在自变量的同一变化过程中,无穷小具有下列性质:

① 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量。

② 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量。

③ 有界函数与无穷小量的乘积仍是无穷小量。

(2) 无穷大量及其与无穷小量的关系

定义 5　如果在自变量 x 的某种趋向下,函数 $f(x)$的绝对值无限增大,那么函数 $f(x)$就叫作在自变量的这种趋向下的无穷大量,简称无穷大。

我们知道,当 $x\to1$ 时,$x-1$ 是无穷小,$\frac{1}{x-1}$是无穷大;当 $x\to\infty$时,x 是无穷大,$\frac{1}{x}$是无穷小。一般地,无穷小量与无穷大量之间有以下的关系。

定理 5　在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$为无穷大量,则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小量;反之,如果 $f(x)$是无穷小量,且 $f(x)\neq0$,则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大量。

【例 1-9】　求下列函数的极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$　　　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x-1}$

解：(1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，即 x^2 是 $x\to 0$ 时的无穷小量，且 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，所以由定理 4 知

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$$

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ 而 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)\neq 0$，求该式的极限需用无穷小与无穷大关系定理(定理 5)解决。因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+1}=0$，所以当 $x\to 1$ 时，$\dfrac{x-1}{x^2+1}$ 是无穷小量，因而它的倒数是无穷大量，即 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\infty$。

现实生活中也不少无穷小量、无穷大量的例子。如单摆离开铅直位置的偏度(见图 1－4)可以用角 θ 来度量，这个角可规定当偏到一方(如右边)时为正，而偏向另一方(如左边)时为负。如果让单摆自己摆动，则由于机械摩擦力和空气的阻力，振幅就不断地减小。在这个过程中，量 θ 正负交替而且在每次改变符号时都要通过数值零($\theta=0$)处。即在这个过程中，角 θ 是一个无穷小量。

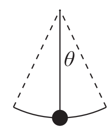

图 1－4

练习 1.2

1. 观察下列数列是否有极限，若有极限请指出其极限值。

(1) $x_n=\dfrac{1}{n}$　　　　(2) $x_n=2+\dfrac{1}{n^2}$

(3) $x_n=(-1)^n\cdot n$　　　　(4) $x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$

2. 求 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，在 $x=0$ 处的左右极限，并说明当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在。

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x+2 & x<2\\ 3-x & x\geqslant 2\end{cases}$，试求 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$，并确定 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 是否存在。

4. 指出下列函数中哪些是无穷小量，哪些是无穷大量。

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$，当 $x\to 0$ 时　　　　(2) $f(x)=e^x-1$，当 $x\to 0$ 时

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$，当 $x\to 0$ 时　　　　(4) $f(x)=\ln x$，当 $x\to 0^+$ 时

5. 利用无穷小的定理求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x^2}$　　　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x+1}$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\sin(x^2+1)$

1.3 极限的运算

1. 极限的运算法则

定理 若$\lim u(x)=A$，$\lim v(x)=B$，则

(1) $\lim[u(x)\pm v(x)]=\lim u(x)\pm \lim v(x)=A\pm B$

(2) $\lim[u(x)\cdot v(x)]=\lim u(x)\cdot \lim v(x)=A\cdot B$

(3) $\lim v(x)=B\neq 0$ 时，

$$\lim\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{\lim u(x)}{\lim v(x)}=\frac{A}{B}$$

说明：记号“lim”下面没有指明自变量的变化过程，这表明上述定理对于 $x\to x_0$ 和 $x\to\infty$等各种情形都成立。

推论 设$\lim u(x)$存在，c 为常数，n 为正整数，则有

(1) $\lim c\cdot u(x)=c\cdot \lim u(x)$

(2) $\lim[u(x)]^n=[\lim u(x)]^n$

使用这些法则时必须注意两点：

(1) 法则要求每个参与运算的函数的极限存在；

(2) 商的极限的运算法则有一个前提，即分母的极限不能为零。

【例 1-10】 求$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)$。

解：$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2)-\lim\limits_{x\to 1}(2x)+\lim\limits_{x\to 1}5$

$$=(\lim_{x\to 1}x)^2-2\lim_{x\to 1}x+5=4$$

【例 1-11】 求$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+1}{x^3+3x^2+4}$。

解：因为分母的极限$\lim\limits_{x\to -3}(x^3+3x^2+4)=4\neq 0$，

所以

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+1}{x^3+3x^2+4}=\frac{\lim\limits_{x\to -3}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to -3}(x^3+3x^2+4)}=\frac{9+1}{-27+27+4}=\frac{5}{2}$$

注：对于多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n=f(x_0)$$

【例 1-12】 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x+5}{x^2-3x+2}$。

解：因为分母的极限

$$\lim_{x\to 1}(x^2-3x+2)=0$$

此时由于分母的极限为零，不能直接用运算法则。在分母极限为零的情况下，求极限的方法将取决于分子极限的状况。本例中易求得分子的极限不等于零，这时我们将考

虑原来函数的倒数极限(分子分母颠倒过来求极限)。

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{4x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+2)}{\lim\limits_{x\to1}(4x+5)}=\frac{0}{4+5}=0$$

即$\frac{x^2-3x+2}{4x+5}$是 $x\to1$ 时的无穷小,由无穷小与无穷大的倒数关系,得

$$\lim_{x\to1}\frac{4x+5}{x^2-3x+2}=\infty$$

【例 1-13】 求$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$的值。

解:当 $x\to1$ 时,此分式的分母与分子的极限都为零,因而不能直接运用商的极限运算法则。但当 $x\to1(x\neq1)$时,可通过因式分解消去零因子$(x-1)$,求出极限。

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}$$

【例 1-14】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-1}{x^2+2x+3}$的值。

解:当 $x\to\infty$时,分子、分母都趋于无穷大,这类问题也不能直接利用商的极限运算法则,可使用如下方法(分子分母同除以 x 的最高次幂):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-1}{x^2+2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=3$$

综合以上例子,我们可以得出如下结论:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & \text{当 } m=n \text{ 时}\\ \infty & \text{当 } m>n \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } m<n \text{ 时}\end{cases}\quad(\text{其中},a_0\neq0,b_0\neq0)$$

利用这个结论今后对于这种极限我们可以直接写结果,例如:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+5}{3x^2+2x-1}=\frac{2}{3},\qquad\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x+7}{4x^4+x^3+1}=0$$

【例 1-15】 计算$\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$的值。

解:当 $x\to2$ 时$\frac{x^2}{x^2-4}$和$\frac{1}{x-2}$均为无穷大(极限不存在),上式极限不能直接用差的极限运算法则,通常是先通分再处理。

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+2}=\frac{3}{4}$$

2.复合函数的极限运算法则

复合函数的极限运算需用到连续函数的定义,我们先介绍连续函数。

定义　如果函数在点 x_0 处满足以下三个条件:

(1) $f(x)$在点 x_0 处的某邻域有定义(含 x_0 点);

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$;

则称函数 $f(x)$在点 x_0 处连续。

上述三个条件中,只要有一个不满足,则函数在点 x_0 处就不连续,这时称函数 $f(x)$在点 x_0 处间断,点 x_0称为函数 $f(x)$间断点。连续函数的图形通常称为光滑的或不间断的。

【例 1-16】 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<0\\ 2x+b & x\geqslant 0\end{cases}$在 $x=0$ 处连续,求 b 的值。

解:$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$,　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+b)=b$

因为 $f(x)$在 $x=0$ 连续,故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在,则$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$,所以 $b=1$。

关于函数的连续性的四点结论:

(1) 基本初等函数在它的定义区间内都是连续的;

(2) 连续函数的和、差、积、商(分母不为零)在它的定义区间内仍是连续函数;

(3) 连续函数复合而成的函数在它们的定义区间内仍是连续函数;

(4) 初等函数在它们的定义区间都是连续的。

上述结论为函数求极限提供了一类有效的方法,如果 $f(x)$是初等函数,且 x_0 是函数 $f(x)$定义区间内的点,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

【例 1-17】 求$\lim\limits_{x\to 2}\arcsin(\log_2 x)$的值。

解:因为 $\arcsin(\log_2 x)$是初等函数,且 $x=2$ 为其定义域内的点,所以有

$$\lim_{x\to 2}\arcsin(\log_2 x)=\arcsin(\log_2 2)=\frac{\pi}{2}$$

3.两个重要极限

先介绍两个极限存在准则。

准则 1　如果在自变量 x 的某个变化过程中,三个函数 $F(x)$,$f(x)$,$G(x)$总有关系 $F(x)\leqslant f(x)\leqslant G(x)$,且 $\lim F(x)=\lim G(x)=A$,则 $\lim f(x)=A$。

准则 2　单调有界数列必有极限。

下面介绍两个重要极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证明：因为$\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{-\sin x}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$，所以当 x 改变符号时$\dfrac{\sin x}{x}$的值不变，故只讨论 x 由正值趋于零的情形就可以了。

先设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，图 1－5 所示的单位圆中，令圆心角$\angle AOB=x$(弧度)，点 A 处的切线与 OB 的延长线相交于 D，又 $BC\perp OA$，则

$$\sin x=BC, x=AB, \tan x=AD$$

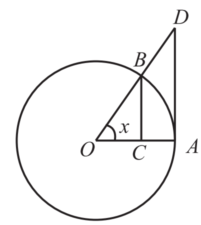

图 1－5

因为$\triangle AOB$ 的面积<扇形 AOB 的面积<$\triangle AOD$ 的面积，所以

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$$

即
$$\sin x<x<\tan x$$
除以 $\sin x$，得

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

从而有
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

因为上述不等式三边都是偶函数，所以当$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ 时上述不等式也成立。

又知$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to 0}1=1$，根据准则 1，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

这是一个非常重要的极限，其中 x 可以是任何极限为 0 的表达式。实际上该极限是有以下更普遍的形式：

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$$

注：□是相同的，且要趋向于 0。

【例 1－18】　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}(k\neq 0)$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k\sin kx}{kx}=k$

【例 1－19】　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$。

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right]^2=\frac{1}{2}$$

注：此极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$也可作为公式用。

【例 1－20】 求$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$。

解：令 $x=\pi+t$,则当 $x\to\pi$ 时,$t\to 0$,所以

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(3\pi+3t)}{\tan(5\pi+5t)}$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{\tan 5t}=-\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3t}{3t}}{\dfrac{\tan 5t}{5t}}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{3}{5}$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

其中 e 是无理数,它的值是 e=2.7182818284590…。

利用代换 $z=\dfrac{1}{x}$,则当 $x\to\infty$时,$z\to 0$,于是上式又可改写成

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}$$

这样我们又就得到了另一个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

再由极限存在的充分必要条件可得

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$$

可以用重要极限的这几种形式求某些函数的极限。

实际上,该重要极限也同样具有更普遍的形式：

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}\quad 或\quad \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$$

【例 1－21】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$。

解：令$\dfrac{2}{x}=t$,当 $x\to\infty$时,$t\to 0$,则

$$原式=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}]^2=\mathrm{e}^2$$

该方法熟练后,可不设新变量,直接求解。

【例 1－22】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

【例 1－23】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$。

解法一：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}\right]^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}^2$

解法二：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^2\cdot\left(1+\frac{2}{x-1}\right)=\mathrm{e}^2\end{aligned}$$

【例 1－24】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-2}\right)^{2x+3}$。

解：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-2}\right)^{2x+3}&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-2}\right)^{2x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-2}\right)^{3}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\dfrac{2}{3x}}{1-\dfrac{2}{3x}}\right)^{\frac{3x}{2}\cdot\frac{4}{3}}=\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{\frac{3x}{2}}}{\left(1-\dfrac{2}{3x}\right)^{\frac{3x}{2}}}\right]^{\frac{4}{3}}=(\mathrm{e}^2)^{\frac{4}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{8}{3}}\end{aligned}$$

练习 1.3

1. 求下列函数的极限。

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3}{x+1}$　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$

(3) $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{(x+t)^3-x^3}{t}$　　(4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+2x^2+1}{4x^5+3x^4-5}$　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$　　(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+9}-3}$

2. 求下列函数的极限。

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sin2x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x^2-a^2}$　　$(a\neq0)$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2x}-1}{x^2}$　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x}\right)^{2x}$　　(a 为常数)　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

(9) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan x)^{\cot x}$　　(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x}$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}+a & x<0\\ e^x+1 & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,求 a 的值。

1.4 导数的概念

变化率问题,如人口增长率、股票价格的涨跌率以及气体分子的扩散率等,在人类社会活动中随处可见。导数就是变化率的精确化,由极限方法建立的导数概念,是微积分学最基本的概念。

1. 变化率问题举例

【例 1－25】 变速直线运动的瞬时速度。

设有一质点作变速直线运动,已知它的运动方程是 $s=f(t)$,则在时刻 t_0 到时刻 $t_0+\Delta t$ 这个时间段 Δt 内,路程的改变量为 $\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$,平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

无论 $|\Delta t|$ 取值多么小($\Delta t\neq 0$),由上式得到的都仍是平均速度。

为了得到质点在时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0)$,我们采用极限方法:若 $\Delta t\to 0$ 时平均速度有极限,则称此极限为 t_0 时刻的瞬时速度,即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

例如,自由落体的运动规律为 $s=\frac{1}{2}gt^2$,则在时刻 t_0,自由落体的瞬时速度为

$$\begin{aligned}v(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}g\ (t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt_0\end{aligned}$$

2. 导数的定义

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,当自变量 x 在 x_0 处取得改变量 Δx(点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内),相应地函数 y 有改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\tag{1-1}$$

存在,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,此极限称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数,记作 $f'(x_0)$,也可记作 $y'(x_0)$ 或 $y'\Big|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$。

若式(1－1)极限不存在,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导。

令 $x=x_0+\Delta x$ 或 $\Delta x=h$，可得到导数的其他等价形式：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{1-2}$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{1-3}$$

定义 2　若在区间(a,b)内每一点 x 处 $f(x)$都可导且对应一个确定的导数值 $f'(x)$，则称函数 $f'(x)$为 $f(x)$在区间(a,b)内对 x 的导函数，简称导数，记作 $f'(x)$或 y'。

$f'(x)$表示了函数 $f(x)$在点 x 处因变量相对于自变量的变化速率。

根据导数定义，求函数 $f(x)$的导数可分三步进行：

(1) 计算函数的改变量 Δy；

(2) 计算比值$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；

(3) 求极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$。

【例 1-26】　求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数。

解：因为　$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

所以　$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

即　$$(\sin x)'=\cos x$$

类似地可求得$(\cos x)'=-\sin x$。

【例 1-27】　求函数 $f(x)=\ln x$ 的导数。

解：　$$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

所以　$$(\ln x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$$

3. 导数的几何意义

设曲线的方程为 $f(x)$，L_P 为过曲线上两点 $P_0(x_0,y_0)$与 $P(x,y)$的割线，则 L_P 的斜率为 $k_P=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。

如图 1-6 所示，当点 $P(x,y)$ 沿着曲线趋近 $P_0(x_0,y_0)$时，割线 L_P 就趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$处的切线，k_P 趋近于切线的斜率 k，因此切线的斜率为

$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

导数的几何意义　函数 $y=f(x)$在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$，等于曲线 $y=f(x)$在点

(x_0,y_0)处切线的斜率 k，即 $k=f'(x_0)$。

因此，曲线 $y=f(x)$上的点(x_0,y_0)处的切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$。过切点与切线垂直的直线称为法线，因此，法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$。

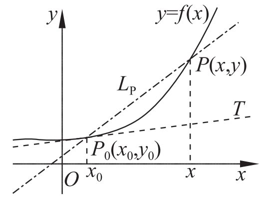

图 1－6

【例 1－28】 求曲线 $y=x^2$ 在点 $x=1$ 处的切线方程和法线方程。

解：$(x^2)'\Big|_{x=1}=2x\Big|_{x=1}=2$；$x=1$ 时，$y=x^2=1^2=1$，代入切线方程和法线方程得

切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $2x-y-1=0$

法线方程为 $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$，即 $x+2y-3=0$

注：(1) 如果函数 $y=f(x)$在 x_0 处可导，那么曲线 $y=f(x)$在点 x_0 处光滑连续(不间断且没有尖角)，且曲线 $y=f(x)$在点(x_0,y_0)处有不垂直于 x 轴的切线；

(2) 若 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$存在，则必在 x_0 处连续。但连续未必可导。

练习 1.4

1. 求函数 $y=2x^2$ 从 $x=1$ 变化到 $x=1+\Delta x$ 处的改变量 Δy，并求$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$的值。

2. 用导数的定义求下列函数在指定点的导数。

(1) $y=\sqrt{x+1}$在点 $x_0=3$ 处　　　　(2) $y=\sin(2x+1)$在点 $x=x_0$ 处

3. 证明　$(\cos x)'=-\sin x$。

4. 证明　$(x^n)'=nx^{n-1}$(n 为正整数)。

5. 求下列曲线在给定点处的切线方程和法线方程。

(1) $y=\ln x$ 在点$(1,0)$处　　　　(2) $y=\cos x$ 在点$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$处

6. 自变量 x 取何值时，曲线 $y=\ln x$ 的切线与 $y=\sqrt{x}$ 的切线平行？

1.5　导数运算法则

根据导数的定义，可以计算部分基本初等函数的导数。但直接用导数定义计算复杂函数导数很繁琐，本节将建立一系列导数运算法则，从而使求导数的计算简单化。求导数的方法称为微分法。

1. 导数的四则运算法则

定理 1　设函数 $u(x)$与 $v(x)$都在点 x 处可导，则它们的和、差、积、商(分母不为零)

在点 x 处仍可导，并且

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$

(2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad(v(x)\neq 0)$

证明：仅对(2)进行证明。

令 $y=u(x)\cdot v(x)$，则

$$\begin{aligned}\Delta y&=[u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)]-[u(x)v(x)]\\&=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)\\&=[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)+u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)+u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

即
$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

推论 1　$[ku(x)]'=ku'(x)$(k 为常数)

推论 2　$\left[\dfrac{1}{u(x)}\right]'=-\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$

推论 3　$[u(x)v(x)w(x)]'=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x)$

【例 1-29】　设 $y=\dfrac{1}{3}x^3+\sqrt{x}-\cos x$，求 y'。

解：
$$y'=\left(\frac{1}{3}x^3+\sqrt{x}-\cos x\right)'=x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sin x$$

【例 1-30】　设 $f(x)=x\mathrm{e}^x$，求 $f'(x)$ 及 $f'(0)$。

解：$f'(x)=x'\mathrm{e}^x+x(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^{\mathrm{e}}=(x+1)\mathrm{e}^x$

$f'(0)=\mathrm{e}^0=1$

【例 1-31】　设 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$，求 $f'(x)$。

解：
$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(x-1)'(x^2+1)-(x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-(x-1)\times 2x}{(x^2+1)^2}\\&=\frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

【例 1-32】　设 $f(x)=\tan x$，求 $f'(x)$。

解：
$$\begin{aligned}f'(x)&=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x(\sin x)'-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}\\&=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x\end{aligned}$$

同理可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x$。

【例 1-33】　设 $f(x)=\sec x$，求 $f'(x)$。

解：$f'(x)=(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=-\dfrac{1}{\cos^2 x}(-\sin x)=\sec x\tan x$

同理可得$(\csc x)'=-\csc x\cot x$。

【例 1－34】 设 $f(x)=\log_a x \quad (a>0$ 且 $a\neq 1)$，求 $f'(x)$。

解：$f'(x)=(\log_a x)'=\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)'=\dfrac{1}{\ln a}(\ln x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

即
$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a} \qquad (a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$$

根据相关知识还可以求得：

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　$(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

这样可以得到基本初等函数及常数的导数公式，为了方便查阅，汇总如下：

(1) $(C)'=0$　　(2) $(x^a)'=ax^{a-1}$

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$　　(4) $(e^x)'=e^x$

(5) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　　(6) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

(7) $(\sin x)'=\cos x$　　(8) $(\cos x)'=-\sin x$

(9) $(\tan x)'=\sec^2 x$　　(10) $(\cot x)'=-\csc^2 x$

(11) $(\sec x)'=\sec x\tan x$　　(12) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　(16) $(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

2. 复合函数的求导法则

定理 2 设函数 $y=f(u)$与函数 $u=\varphi(x)$构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，如果

① 函数 $u=\varphi(x)$在点 x 处可导；

② 函数 $y=f(u)$在对应点 $u=\varphi(x)$可导。

则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 x 处可导，且

$$f'[\varphi(x)]=[f(u)]'_u[\varphi(x)]'_x, \quad \text{即 } y'_x=y'_u u'_x \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

这个法则说明：复合函数的导数，等于复合函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数。这一法则又称为链式法则。

【例 1－35】 求下列函数的导数。

(1) $y=(3x^2+1)^3$　　(2) $y=\sin(\sqrt{x}-2)$

(3) $y=\ln\cos x$　　(4) $y=e^{\tan x}$