第 2 章　电阻电路的一般分析方法

【内容提要】

本章主要介绍电阻电路的等效变换和复杂电路的系统分析方法。等效变换包括，串联、并联和 Y/Δ 转换、以及等效电阻的概念；系统分析方法包括，如何利用网络图论的初步知识保证电路方程的独立性，以及详细讨论了支路法、回路电流法(网孔电流法)和结点电压法。最后介绍了一些工程应用实例。

2.1　电路的化简与等效

2.1.1　电阻的串联和并联

1．电阻的串联

图 2-1(a)所示为由 n 个电阻 R_1、R_2、…、R_n 组成的串联电路。电阻串联时，流过每个电阻中的电流为同一电流。

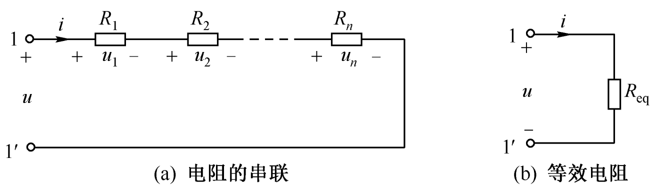


图 2-1　电阻的串联及其等效电阻

由 KVL 得

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots + u_n$$

由于流过每个电阻的电流均为 i，根据图中所示参考方向，由欧姆定律得

$$u_1 = R_1 i,\ u_2 = R_2 i,\ \cdots,\ u_k = R_k i,\ \cdots,\ u_n = R_n i$$

代入上式得

$$u = (R_1 + R_2 + \cdots + R_k + \cdots + R_n)i = \sum_{k=1}^{n} R_k i = R_{eq} i \tag{2-1}$$

式中

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_k + \cdots + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

为 n 个电阻串联的等效电阻。显然，等效电阻必大于其中任意一个串联的电阻。

电阻串联时，各电阻上的电压为

$$u_k = R_k i = R_k \frac{u}{R_{eq}} = \frac{R_k}{R_{eq}} u \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

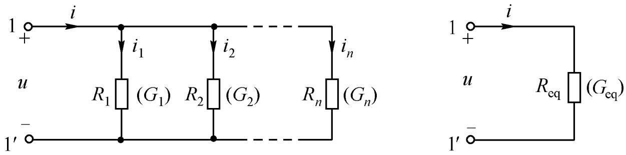
可见，串联电阻上的电压分配与电阻成正比。上式称为电压分配公式，或称为分压公式。

当只有两个电阻串联时，则由分压公式得

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u,\quad u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$

2．电阻的并联

图 2-2(a)所示为由 n 个电阻(电导)组成的并联电路。电阻并联时，各个电阻两端的电压为同一电压。



(a) 电阻(导)的并联　　(b) 等效电阻(导)

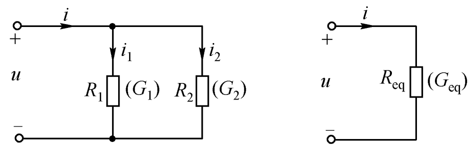
图 2-2　电阻(电导)的并联及其等效电阻(导)

由 KCL 得
$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_k + \cdots + i_n$$
由于每个电阻(电导)两端的电压相等，由欧姆定律有
$$i_1 = G_1 u\,,\quad i_2 = G_2 u\,,\quad \cdots\quad,\quad i_k = G_k u\,,\quad \cdots\quad,\quad i_n = G_n u$$
代入上式得
$$i = (G_1 + G_2 + \cdots + G_k + \cdots + G_n)u = \sum_{k=1}^{n} G_k u = G_{\mathrm{eq}} u \tag{2-2}$$
式中
$$G_{\mathrm{eq}} = G_1 + G_2 + \cdots + G_k + \cdots + G_n = \sum_{k=1}^{n} G_k$$
为 n 个电阻并联的等效电导，如图 2-2(b)所示。并联后的等效电阻为
$$R_{\mathrm{eq}} = \frac{1}{G_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} G_k} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}$$
或
$$\frac{1}{R_{\mathrm{eq}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$
可以看出，等效电阻小于其中任意一个并联电阻。在分析计算多支路并联电路时，采用电导简便些。电阻并联时，各电阻中的电流为
$$i_k = G_k u = \frac{G_k}{G_{\mathrm{eq}}} i \qquad (k = 1\,,\,2\,,\cdots,n)$$
可见，并联电阻中的电流与各自的电导成正比。上式称为电流分配公式，或称为分流公式。

当只有两个电阻并联时，如图 2-3(a)所示，其等效电路如图(b)所示。其等效电阻为
$$R_{\mathrm{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

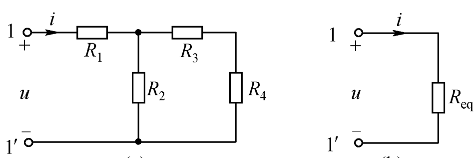
两个电阻并联的分流公式为
$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i, \qquad i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

当电路的连接中既有串联，又有并联时，称为电阻的混联(或复联)。图 2-4(a)即为混联电路，R_3 和 R_4 串联后与 R_2 并联，再与 R_1 串联，等效电路如图 2-4(b)所示。故其等效电阻为



(a) 两个电阻（导）的并联　　(b) 等效电阻(导)

图 2-3　两个电阻(电导)的并联及等效电阻(导)



(a)　　(b)

图 2-4　电阻的混联

$$R_{\mathrm{eq}} = R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}$$

注意，以上等效的概念均保证了等效前、后端口的电压和电流相同。

2.1.2　独立源的串联和并联

1．电压源的串联

图 2-5(a)所示为 n 个电压源的串联，可以用一个电压源等效替代，如图 2-5(b)所示。这个等效电压源的电压为

$$u_{\mathrm{s}} = u_{\mathrm{s}1} + u_{\mathrm{s}2} + \cdots + u_{\mathrm{s}n} = \sum_{k=1}^{n} u_{\mathrm{s}k}$$

如果 $u_{\mathrm{s}k}$ 的参考方向与 u_{s} 的参考方向一致，上式中 $u_{\mathrm{s}k}$ 前面取“+”号，否则取“－”号。

只有电压大小相等、极性相同的电压源才能并联，否则违背 KVL。其等效电路为其中任一电压源，但是这个并联组合向外部提供的电流在各个电压源之间如何分配则无法确定。

2．电流源的并联

图 2-6(a)所示为 n 个电流源的并联，可以用一个电流源等效替代，如图 2-6(b)所示。这个等效电流源的电流为

$$i_{\mathrm{s}} = i_{\mathrm{s}1} + i_{\mathrm{s}2} + \cdots + i_{\mathrm{s}n} = \sum_{k=1}^{n} i_{\mathrm{s}k}$$

如果 $i_{\mathrm{s}k}$ 的参考方向与 i_{s} 的参考方向一致，上式中 $i_{\mathrm{s}k}$ 前面取“+”号，否则取“−”号。

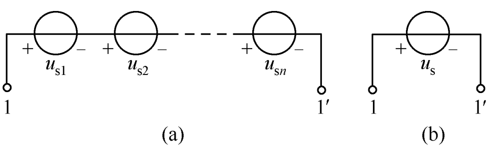


图 2-5　电压源的串联

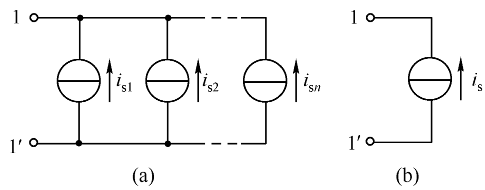


图 2-6　电流源的并联

只有电流大小相等、方向一致的电流源才能串联，否则违背 KCL。其等效电路为其中任一电流源，但是这个串联组合总电压在各个电流源之间如何分配则无法确定。

2.1.3　实际电源的两种模型及其等效变换

如图 2-7(a)所示为一实际的直流电源，例如一个电池，图 2-7(b)为它的输出电压 u 和输出电流 i 的伏安特性曲线。可见，在一定电流范围内电压和电流的关系近似为直线，电流超出这个范围后，电源会被损坏，电压下降较快。如果把直线部分延长，如图 2-7(c)所示，可以看出它和 u 轴和 i 轴都有一个交点，前者相当于 $i=0$ 时的电压，即开路电压 U_{oc}；后者相当于 $u=0$ 时的电流，即短路电流 I_{sc}。根据此伏安特性，可以用电压源和电阻的串联组合或电流源和电导的并联组合作为实际电源的电路模型，如图 2-8 所示。

对于图 2-8(a)所示电压源模型，其端口的伏安特性为

$$u = u_{\mathrm{s}} - Ri \tag{2-3}$$

对于图 2-8(b)所示电流源模型，其端口的伏安特性为

$$i = i_{\mathrm{s}} - Gu \tag{2-4}$$

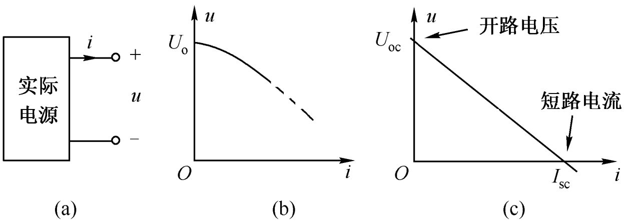


图 2-7　实际电源及其伏安特性

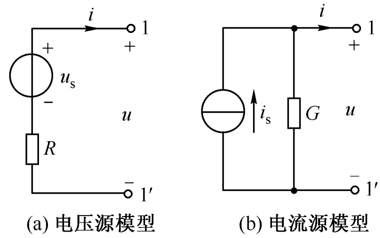


图 2-8　实际电源的两种电路模型

如果令

$$G = 1/R, \quad i_s = Gu_s \tag{2-5}$$

则式(2-3)和式(2-4)所示的两个方程完全相同，即图 2-8(a)、(b)所示端口的伏安特性相同，也就是两种模型对外电路等效。式(2-5)为两种模型等效变换的条件。

两种模型等效变换时需注意以下几个问题：

（1）等效变换时 u_s 和 i_s 的参考方向：i_s 的参考方向由 u_s 的负极指向正极。

（2）等效变换是对外电路而言的，对电源内部并不等效。

例如，图 2-8 中，当端子 1-1' 开路时，两电路对外均不发出功率，但此时电压源发出的功率为零，电流源发出的功率为 i_s^2/G，电流源发出的功率将全部被电导消耗掉。端子 1-1' 短路时，电压源发出的功率为 u_s^2/R，而电流源发出的功率为零。

利用电阻的串、并联和电源的等效变换，可以求解由电压源、电流源和电阻组成的串、并联电路。

例 2-1　试用电压源与电流源等效变换的方法计算图 2-9(a)中的电流 I。

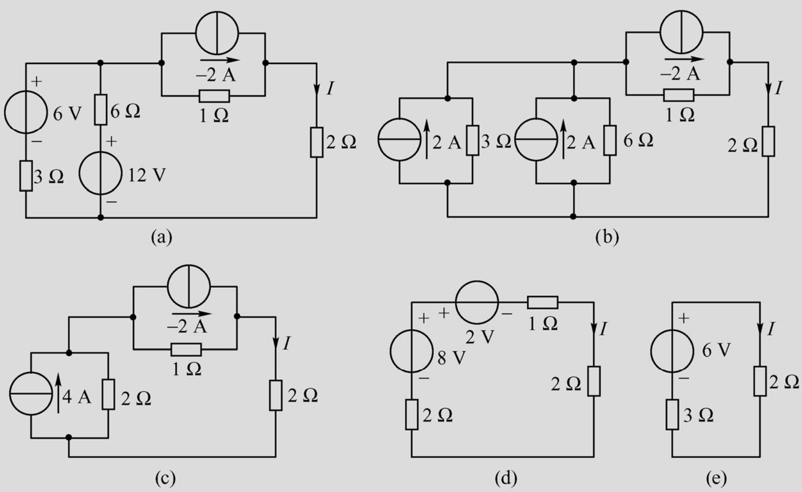


图 2-9　例 2-1 图

解　图 2-9(a)电路可化简为图(e)所示单回路结构。化简过程如图 2-9(b)～图 2-9(d)所示。由图 2-9(e)可得电流为

$$I = \frac{6}{2+3} = 1.2(\text{A})$$

受控电压源、电阻的串联组合和受控电流源、电导的并联组合也可按此方法进行变换。但在变换过程中必须保留控制量所在支路，不能把它变换掉。

例 2-2　求如图 2-10(a)所示电路中的电流 I。

解　图 2-10(a)所示电路经过变换后可得图 2-10(c)所示电路。对图 2-10(c)电路，列

KVL 方程有：$4I+4=2I$，解得 $I=-2\ \text{A}$。

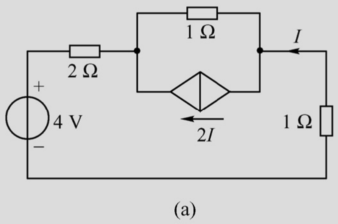


图 2-10　例 2-2 图

思考题

T2.1-1　两个电导 G_1 与 G_2 串联的等效电导 G 为多大？

T2.1-2　实际电源的两种模型在进行等效变换时需注意哪些问题？等效是对内电路等效还是对外电路等效？理想电压源和理想电流源之间能否相互转换？

T2.1-3　图 2-11 所示两电路：

（1）若 1-1' 端都接上 3Ω的电阻，电压源和电流源发出的功率是否相同？

（2）若 1-1' 端都接上 15Ω的电阻，电压源和电流源发出的功率是否相同？

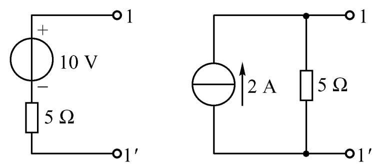


图 2-11　T2.1-3 图

（3）探索 1-1' 端接上多大值电阻时，电压源和电流源发出的功率相同，该电阻消耗的功率是否最大？

基本练习题

2.1-1　关于电源的等效变换，是指：________

A．对内部电路而言；　　B．对外部电路而言；

C．负载确定时，对内部电路而言；　　D．对内、外电路而言。

2.1-2　关于理想电压源的描述是：________

A．理想电压源的端电压为常量或者定常函数，其电流为任意值；

B．理想电压源中电流为常量或者定常函数，其端电压为任意值；

C．理想电压源中电流为常量或者定常函数，其端电压也为常量或者定常函数。

2.1-3　如图题 2.1-3 所示，若 1A 电流源输出的功率为 10W，求出电流 I_0。

2.1-4　利用电源的等效变换求出图题 2.1-4 所示电路的电流 I。

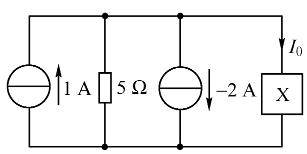


图　题 2.1-3

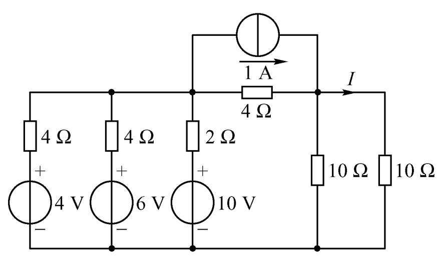


图　题 2.1-4

2.1-5　如图题 2.1-5 所示，求最右侧 1Ω 电阻消耗的功率。

2.1-6　利用电源的等效变换，求图题 2.1-6 所示电路中电压比 u_o/u_s。已知 $R_1=R_2=2\Omega$，$R_3=R_4=1\Omega$。

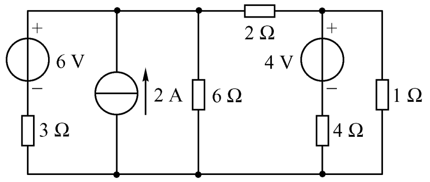


图　题 2.1-5

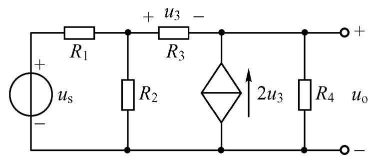


图　题 2.1-6

2.2　电阻星形连接与三角形连接的等效变换

在电路分析中，除了经常遇到电阻的串、并联电路外，还会遇到电阻既非串联又非并联的电路，如图 2-12(a)所示，R_1、R_2、R_5 构成三角形(Δ)连接，R_1、R_4、R_5 构成星形(Y)连接。如果 Y 和 Δ 连接可以等效变换，如由 R_1、R_2、R_5 组成的三角形连接变成如图 2-12(b)所示的星形连接，就可以利用电阻的串、并联来求解。

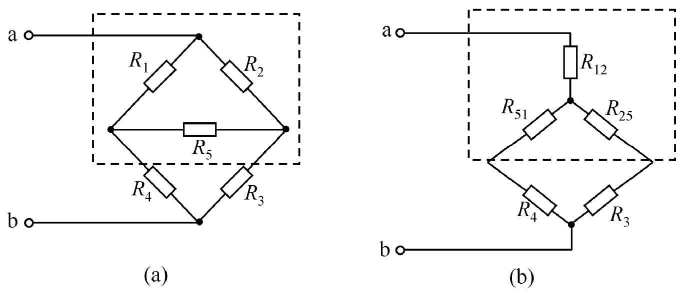


图 2-12　Δ 与 Y 连接的例子

讨论图 2-13 所示电路。Y-Δ 等效变换的条件是：对应端子流入(或流出)的电流(如 i_1, i_2, i_3)相等，对应端子间的电压(如 u_{12}, u_{23}, u_{31})相等。

当满足上述条件后，在两种接法中，对应的任意两端间的等效电阻也必然相等。在图 2-13 中，1、2 端的等效电阻(3 端开路)为

$$R_1+R_2=\frac{R_{12}(R_{23}+R_{31})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

同理可得

$$R_2+R_3=\frac{R_{23}(R_{31}+R_{12})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

$$R_3+R_1=\frac{R_{31}(R_{23}+R_{12})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

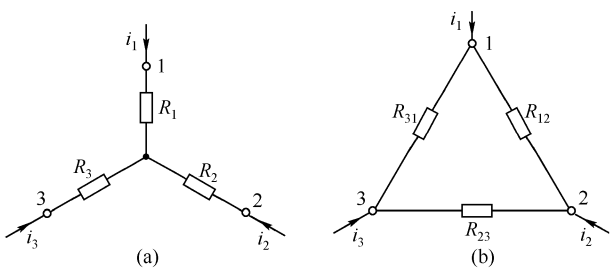


图 2-13　Y-Δ 等效变换

由上述三式可以解得：

- Y 连接变换为 Δ 连接的公式

$$R_{12}=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3},\quad R_{23}=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1},\quad R_{31}=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_2} \tag{2-6}$$

- Δ 连接变换为 Y 连接的公式

$$R_1=\frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}},\quad R_2=\frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}},\quad R_3=\frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \tag{2-7}$$

为了便于记忆，以上互换公式可归纳为：

$$\text{Y连接电阻}=\frac{\Delta\text{连接相邻电阻的乘积}}{\Delta\text{连接电阻之和}}，\quad \Delta\text{连接电阻}=\frac{\text{Y连接电阻两两乘积之和}}{\text{Y连接不相邻电阻}}$$

当 Y 连接中 3 个电阻相等，即 $R_1=R_2=R_3=R_Y$ 时，则等效 Δ 连接中 3 个电阻也相等，即

$$R_\Delta=R_{12}=R_{23}=R_{31}=3R_Y$$

或

$$R_Y=\frac{1}{3}R_\Delta$$

例 2-3 求图 2-14(a)所示电路 a、b 端的等效电阻 R_{ab}。

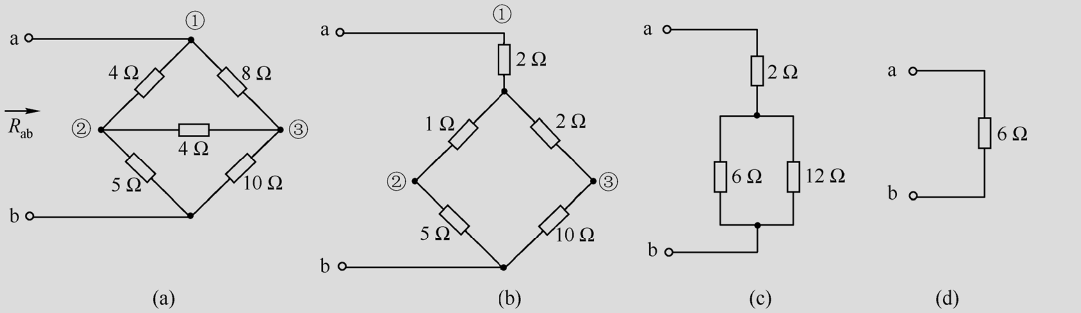


图 2-14 例 2-3 图

解 将结点①、②、③内 Δ 连接变换成如图 2-14(b)所示的 Y 连接，其中

$$R_1=\frac{4\times8}{4+4+8}=2\ \Omega，\quad R_2=\frac{4\times8}{4+4+8}=2\ \Omega，\quad R_3=\frac{4\times4}{4+4+8}=1\ \Omega$$

利用电阻的串、并联化简，如图 2-14(c)和(d)所示，最后可求得 $R_{ab}=6\ \Omega$。

图 2-12(a)中，电阻 R_1～R_5 组成的电路是电桥电路，当 $R_1R_3=R_2R_4$ 时，电桥处于平衡，此时 R_5 中的电流为零，R_5 相当于开路。

对于例 2-3 所示的电桥电路，也处于平衡，所以②、③结点间相当于开路，可得

$$R_{ab}=(4+5)//(8+10)=6\ \Omega$$

与上述结果相同。

思考题

T2.2-1 采用 Y-Δ 等效变换公式，把图 2-14(a)中②结点连接的三个电阻，转换成 Δ 连接三个电阻，再分析等效电阻 R_{ab}。

T2.2-2 推导星形电阻网络变成三角形电阻网络的方程。

基本练习题

2.2-1 将图题 2.2-1 所示电路变换为等效 Y 形连接，三个等效电阻各为多少？图中各个电阻均为 R。

2.2-2 计算图题 2.2-2 所示电路的等效电阻 R_{ab}。

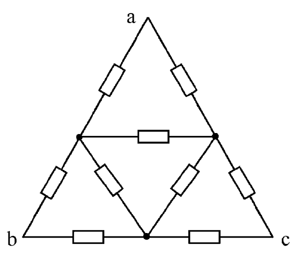


图 题 2.2-1

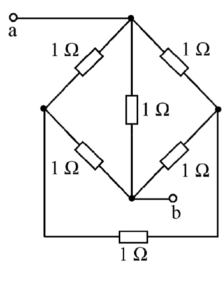


图 题 2.2-2

2.3　等效电路及等效电阻

2.3.1　等效电路及等效电阻的概念

前面涉及到“等效”一词，下面对等效的概念做进一步阐述。首先定义单口网络，所谓单口网络(又称一端口或二端网络)是指向外引出两个端子的网络，其中从它的一个端子流入的电流等于从另一个端子流出的电流。图 2-15 所示为一个单口网络 N 的符号表示。

如果一个单口网络 N 的伏安与另一个单口网络 N′ 的伏安完全相同，则这两个单口网络对外电路是等效的。

如图 2-16(a)所示，R_1 和 R_2 组成的串联电路，可以用一个等效电阻 $R_{eq}=R_1+R_2$ 来代替，如图 2-16(b)所示，替代后单口网络的端口的伏安关系未变。也就是说等效是指对任意外电路而言的，等效电路与被替代的那部分电路显然不同。对于单口内部各元件的电压、电流则必须按原电路计算。

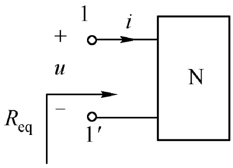


图 2-15　单口网络 N 的符号表示

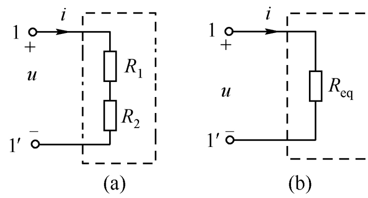


图 2-16　等效电路

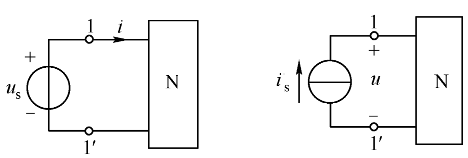
运用等效的概念可以把一个结构复杂的单口网络用一个结构简单的单口网络替代，从而简化电路的计算。

对于不含独立电源，仅含受控源和电阻或仅含电阻的单口网络，若端口电压和端口电流采用图 2-15 所示的参考方向，则其等效电阻为

$$R_{eq} \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{u}{i}$$

2.3.2　等效电阻的计算

对于仅含电阻的单口网络，可以利用前面所讲的电阻的串、并联和 Y-Δ 变换的方法来求它的等效电阻。若单口网络内部还含有受控源，则采用外加电源法：① 在端口加电压源 u_s，然后求出端口电流 i，如图 2-17(a)所示，则 $R_{eq}=u_s/i$，此法称为外加电压源法。② 端口加电流源 i_s，然后求出端口电压 u，如图 2-17(b)所示，则 $R_{eq}=u/i_s$，此法称为外加电流源法。



(a) 外加电压源法　　(b) 外加电流源法

图 2-17　外加电源法

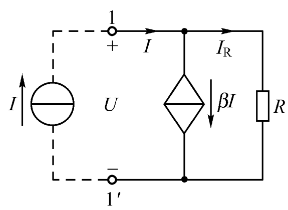


图 2-18　例 2-4 图

例 2-4　求图 2-18 所示一端口的等效电阻 R_{eq} $(\beta \neq 1)$。

解　采用外加电压源法。在端口 1-1′ 处加一电压源 I，求电压 U。由 KCL 及欧姆定律可得

$$I_R = I - \beta I$$

$$U = RI_R = R(1-\beta)I$$

则等效电阻为

$$R_{eq} = U/I = R(1-\beta)$$

当β=1 时，该电路的等效电阻为零。分析表明在一定的参数条件下，R_{eq} 有可能为负值。因此电路中含受控源时，其等效电阻可为零，无穷大或负值。

思考题

T2.3-1　在图 2-15 所示单口网络中，如果端口电压和端口电流为非关联参考方向，则等效电阻为多少？

T2.3-2　在例 2-4 所示电路中，若采用外加电压源法，应如何求等效电阻？

基本练习题

2.3-1　计算如图题 2.3-1 所示电路中 ab 两端的等效电阻。

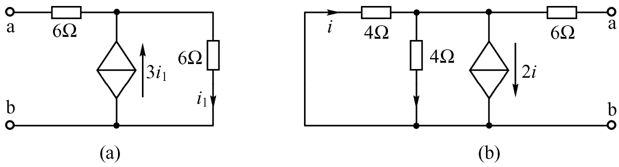


图　题 2.3-1

2.3-2　求如图题 2.3-2 所示电路的等效电阻 R_{ab}。

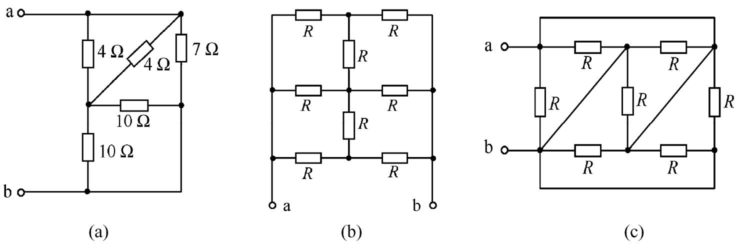


图　题 2.3-2

2.4　电路的拓扑图及电路方程的独立性

对于复杂的电路一般不采用化简的方法，本章后面几节将介绍电路的一般分析方法，这些方法不要求改变电路的结构。其基本步骤如下：

（1）选取一组合适的电路变量(电压和/或电流)；

（2）根据 KVL 和 KCL，以及元件的电压和电流关系(VCR)，建立该组变量的独立的电路方程；

（3）求解电路变量。

在电路分析中，如何选取电路变量并建立独立的电路方程呢？下面介绍的网络图论的初步知识就提供了一个选择电路变量和建立独立的电路方程的方法。

2.4.1　网络图论的初步知识

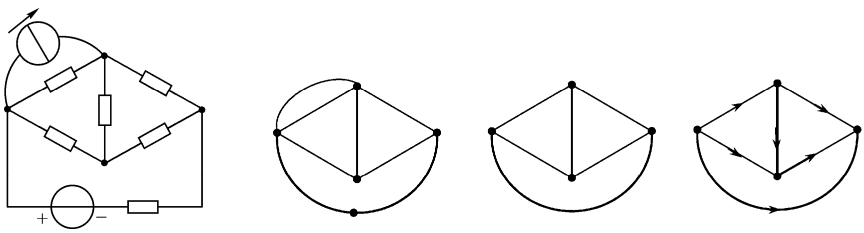
1．网络的图

对于一个由集总元件组成的网络 N，以线段(线段的长短或曲直无关紧要)表示支路，以黑

点表示结点，得到一个由线段和黑点组成的图形，这个图形用 G(Graph)表示。图 G 称为网络 N 的拓扑图(或线图)，简称为图。由此可得图的定义为：图是一组结点和支路的集合，其中每条支路的两端都连到相应的结点上。电路的图是一个几何图形，它只反映电路的支路和结点之间的连接关系。在图的定义中，结点和支路各自是一个整体，但任一条支路必须终止在结点上。移去一条支路并不意味着同时把它连接的结点也移去，所以允许有孤立的结点存在。若移去一个结点，则应当把与该结点连接的全部支路都同时移去。在电路的图中，支路是由具体元件构成的，结点是支路的汇集点。

图 2-19(a)是一个由 6 个电阻和 2 个独立电源组成的电路。如果将每一个二端元件作为一条支路，则图 2-19(b)就是该电路的图，它共有 5 个结点和 8 条支路。有时常把电压源和电阻的串联组合及电流源和电阻的并联组合(实际电源的两种电路模型)当成一条支路，这样电路的图就如图 2-19(c)所示，它共有 4 个结点和 6 条支路。所以，当用不同的元件结构定义电路的一条支路时，该电路及它的图的结点数和支路数也会随之不同。

在电路中通常每一条支路都指定电流的参考方向，而且电压和电流一般采用关联参考方向。电路的图中每一条支路也可以指定一个方向，此方向与该支路电流(和电压)的参考方向相同。标明支路参考方向的图称为有向图，否则就称为无向图。图 2-19(b)、(c)为无向图，图 2-19(d)为有向图。

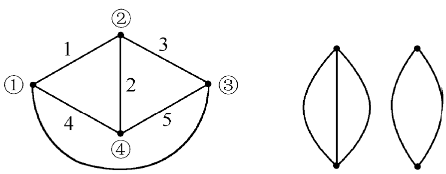


(a)　　(b)　　(c)　　(d)

图 2-19　电路的图

从图 G 的某一结点出发，沿着一些支路移动，从而到达另一结点(或回到原出发点)，这样的一系列支路就构成图 G 的一条路径。一条支路本身也算一条路径。当图 G 中的任意两个结点之间至少存在一条路径时，图 G 就称为连通图，否则就是非连通图。图 2-20(a)是连通图，而 2-20(b)是非连通图。

如果一条路径的起点和终点重合，且经过的其他结点都相异，这条闭合路径就构成图 G 的一个回路。例如图 2-20(a)中，支路集合(1, 2, 4)、(2, 3, 5)、(4, 5, 6)、(1, 2, 5, 6)等都是回路，该图共有 7 个回路，但并非这些回路全是独立的。独立回路数总少于总的回路数。



(a) 连通图　　(b) 非连通图

图 2-20　连通图与非连通图

2．树和基本回路

一个图的回路数很多，如何确定它的独立回路有时不太容易。利用“树”的概念有助于寻找一个图的独立回路组。树的定义是：一个连通图 G 的树 T，包含图 G 中的全部结点和部分支路，而树 T 本身又是连通的且不包含回路。树中包含的支路称为该树的树枝，而其他支路则称为树的连枝。树枝和连枝一起构成图 G 的全部支路。

对于图 2-20(a)所示的图，几种不同的树分别如图 2-21(a)、(b)和(c)所示。而图 2-21(d)和(e)不是该图的树，因为图(d)包含了回路，而图(e)是不连通的。在图 2-21(a)所示的树中，(1,

2, 5)为树枝，(3, 4, 6)为连枝；图(b)中，(2, 4, 5)为树枝，(1, 3, 6)为连枝。无论哪一个树，可以看出其树枝数总是 3。

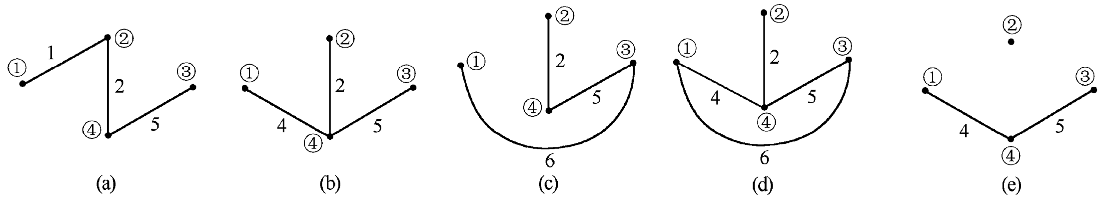


图 2-21　树

可以证明，对于任一个具有 n 个结点，b 条支路的连通图，它的任一个树的树枝数为($n-1$)，连枝数为($b-n+1$)。

由于连通图 G 的树连接所有结点又不形成回路，因此，对于图 G 的任意一个树，每加入一个连枝后，就会形成一个回路。由一个连枝与相应的树枝构成的回路称为单连枝回路或基本回路。对于图 2-21(a)所示的树，其基本回路为 l_1(1, 2, 4)、l_2(2, 3, 5)、l_3(1, 2, 5, 6)，分别如图 2-22(a)、(b)和(c)所示，每一个基本回路仅含一个连枝。由全部连枝回路形成的基本回路构成基本回路组。显然，基本回路组是独立回路组。基本回路数为连枝数，即为($b-n+1$)。选择不同的树就可得到不同的基本回路组。

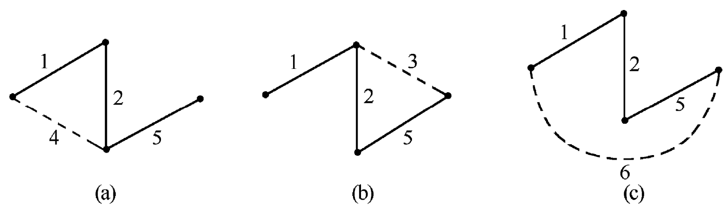


图 2-22　基本回路

3．割集

图论中另一个重要的概念是割集。所谓连通图 G 的一个割集是指一组支路集合，它必须同时满足下列两个条件：

（1）移去该集合中的所有支路，图 G 将分成两个部分；

（2）当少移去其中任一支路时，图 G 仍是连通的。

割集的确定：可以借助在连通图上作闭合面(平面图中为闭合线)，寻找与闭合面(线)仅切割一次的所有支路即为一个割集。

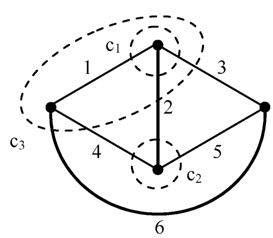


图 2-23　割集的定义

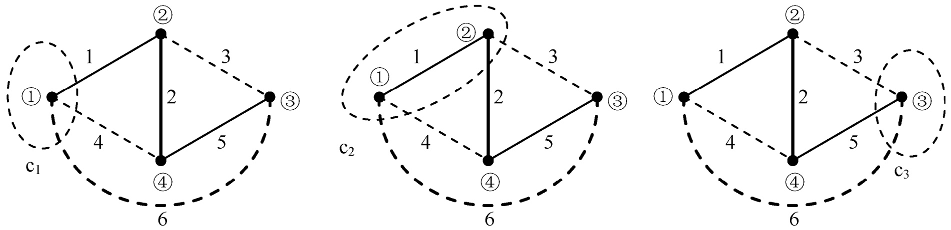
如在图 G 上作一个闭合面(线)，使其包围图 G 的一个(或多)结点，一般情况下与此闭合面(线)相切割的所有支路作为一个割集。在一个连通图中，可以选取很多个割集。如图 2-23 所示的连通图 G 中，支路集合 c_1(1, 2, 3)是割集。而闭合线 c_3 包含了两个结点，其切割的支路(2, 3, 4, 6)也是一个割集。但注意，当把割集的支路去除后，连通 G 图应该剩下仅为闭合面内部和外部两个部分，且分别连通。

由于 KCL 适用于任何一个闭合面(线)，因此属于同一割集的所有支路的电流的代数和为零。当一个割集的所有支路都连接在同一结点上时，如图 2-23 中割集 c_1、c_2，则割集的 KCL 方程变为结点的 KCL 方程。对于每一割集都可以写出一个 KCL 方程，但这些方程并非都是独立的。对应于一组线性独立的 KCL 方程的割集称为独立割集。可以借助“树”来确定一组独

立割集。

对于一个连通图，如任选一个树，由一个树枝与相应的一些连枝构成的割集称为单树枝割集或基本割集。如图 2-23 所示图 G，若选择(1, 2, 5)为树，则基本割集为 $c_1(1, 4, 6)$，$c_2(2, 3, 4, 6)$，$c_3(3, 5, 6)$，分别如图 2-24(a)、(b)和(c)所示，其中实线表示树枝，虚线表示连枝，闭合虚线表示为寻找割集支路而画的辅助闭合面(线)。

对于任一个具有 n 个结点，b 条支路的连通图，其树枝数为$(n-1)$，则其基本割集数等于树枝数，也为$(n-1)$。基本割集是独立割集，但独立割集不一定是基本割集，就如同独立回路不一定是基本回路一样。



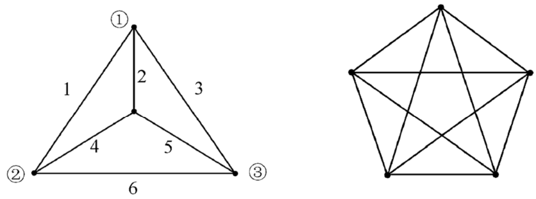
(a)　　(b)　　(c)

图 2-24　基本割集

如果把一个图画在平面上，能使它的各条支路除连接的结点外不再交叉，这样的图称为平面图，否则称为非平面图。图 2-25(a)所示为平面图，而图 2-25(b)所示为非平面图。

在平面图上，网孔是一个回路，但在此回路所包围的区域内，不能包含有其他支路。例如，对于图 2-25(a)所示的平面图，支路(1, 2, 4)，(2, 3, 5)，(4, 5, 6)都是网孔[①]。平面图的全部网孔是一组独立回路，所以平面图的网孔数也是独立回路数，也为$(b-n+1)$(个)。

例如，图 2-25(a)所示的平面图有 4 个结点，6 条支路，独立回路数 $l=(6-4+1)=3$，它的网孔数也正好是 3 个。需要注意的是：网孔只适用于平面图。

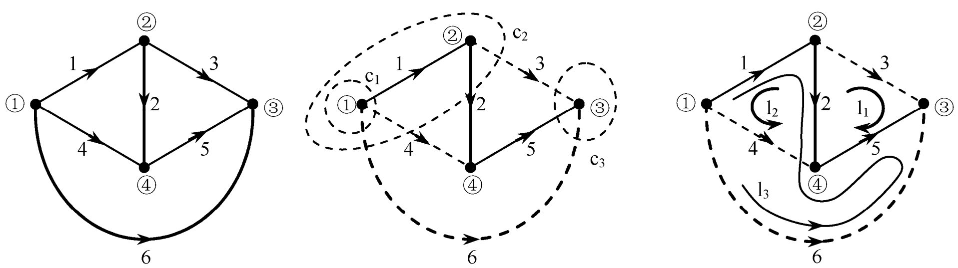


(a) **平面图**　　(b) **非平面图**

图 2-25　平面图与非平面图

2.4.2　KCL 方程的独立性

电路方程的列写关键是要保证其独立性。下面利用电路的拓扑图 G 来讨论 KCL 和 KVL 方程的独立性。图 2-26(a)所示为一个电路的有向图 G，它的结点和支路已加以编号，并给出了各支路的电流方向(电压和电流取关联参考方向)。



(a) 电路的图　　(b) 利用基本割集列 KCL 方程　　(c) 利用基本回路列 KVL 方程

图 2-26　KCL 独立方程和 KVL 独立方程

① 这些都是“内网孔”。平面图周界形成的回路有时称为“外网孔”。本节中所讲的网孔都是指内网孔。

图 2-26(a)中，对结点①、②、③、④分别列 KCL 方程，有

$$i_1+i_4+i_6=0，-i_1+i_2+i_3=0，-i_3-i_5-i_6=0，-i_2-i_4+i_5=0$$

由于对所有结点都列了 KCL 方程，而每一条支路都与 2 个结点相连，且每个支路电流必然从其中一个结点流出，流入另一个结点。因此，在所有 KCL 方程中支路电流必然出现 2 次，1 次为正，1 次为负。将上述 4 个方程相加，必然得到方程两边均为零的结果。这就是说，这 4 个方程并不是相互独立的，其中只有 3 个是独立的。可以证明，对于具有 n 个结点的电路，其独立的 KCL 方程为$(n-1)$个，相应的$(n-1)$个结点称为独立结点。通常选取某个结点为参考结点，则其余结点为独立结点。对独立结点所列的 KCL 方程是相互独立的。

同理，对基本割集(单树枝割集)所列的 KCL 方程也是相互独立的。对于图 2-26(a)所示电路，若选取(1，2，5)为树，则其基本割集如图(b)所示，对基本割集列 KCL 方程为

$$c_1：i_1+i_4+i_6=0，\quad c_2：i_2+i_3+i_4+i_6=0，\quad c_3：i_3+i_5+i_6=0$$

上述方程是相互独立的。实际上，若选取(2，4，5)为树，则基本割集的 KCL 方程就变成了结点的 KCL 方程。

2.4.3 KVL 方程的独立性

前面讲过，独立回路可以选取网孔或基本回路，对独立回路所列的 KVL 方程也是相互独立的。对于具有 n 个结点，b 条支路的电路，其独立的 KVL 方程为$(b-n+1)$个。

对于图 2-26(a)所示电路，若选取(1,2,5)为树，则其基本回路(单连枝回路)如图 2-26(c)所示，取连枝方向为基本回路绕行方向，列 KVL 方程为

$$l_1：-u_2+u_3-u_5=0，\quad l_2：-u_1-u_2+u_4=0，\quad l_3：-u_1-u_2-u_5+u_6=0$$

这是一组相互独立的方程。实际上，若选取(2, 4, 5)为树，则基本回路的 KVL 方程就变成了网孔的 KVL 方程。

思考题

T2.4-1　对于图 2-21(b)、(c)所示的树，其基本回路是什么？基本回路数是多少？

T2.4-2　对于图 2-21(b)、(c)所示的树，其基本割集是什么？基本割集数是多少？

基本练习题

2.4-1　判断题

（1）已知某线性电路，支路数为 b 条，结点数为 n 个，则其独立回路方程数为$(n-1)$个。

（2）一个图 G 的树枝数一定等于该图 G 的基本割集的个数。

2.4-2　下列说法所构成的某电路的所有回路若都是独立回路，则正确的是：______。

A．由单树枝构成的回路；　　B．若干连枝和树枝构成的回路；

C．由单连枝和部分树枝构成的回路；　　D．所有的回路。

2.4-3　画出图题 2.4-3 所示电路的图，并说明其结点数和支路数。按照要求：

（1）每个元件作为一条支路处理；

（2）电压源(独立或受控)和电阻的串联组合，电流源(独立或受控)和电阻的并联组合作为一条支路处理。

2.4-4　对于如图题 2.4-4 所示图 G，各画出 4 个不同的树，树枝数为多少？任选一个树，确定其基本回路组，并且指出独立回路数和独立结点数各为多少？

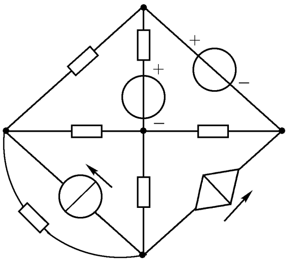


图　题 2.4−3

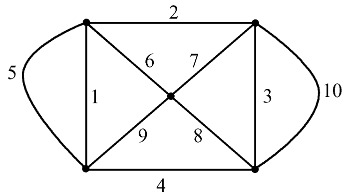


图　题 2.4−4

2.5　支　路　法

对于具有 n 个结点，b 条支路的电路，可以选取 b 个支路电压和 b 个支路电流作为电路变量，然后根据 KCL 对 $(n-1)$ 个独立结点列方程，根据 KVL 对 $(b-n+1)$ 个独立回路列方程，根据元件的 VCR 列 b 个支路方程，共计 $2b$ 个方程，由此可解出 b 个支路电压和 b 个支路电流。这种方法称为 $2b$ 法。这种方法虽然简单，但所需列的方程数多，为了减少求解的方程数，可采用支路电流法和支路电压法(又称为 $1b$ 法)。

支路电流法是以支路电流作为电路的独立变量的解题方法。以图 2−27(a)所示的电路为例来说明支路电流法。作出电路的有向图如图 2−27(b)所示，其结点数 n=2，支路数 b=3，各支路的方向和编号均已标于图中。

选 0 为参考结点，对结点①列 KCL 方程，有

$$-i_1+i_2+i_3=0 \tag{2-8}$$

选取网孔作为独立回路，采用图 2−27(b)所示的绕行方向列 KVL 方程，有

$$\begin{cases} u_1+u_2=0 \\ -u_2+u_3=0 \end{cases} \tag{2-9}$$

利用元件的 VCR，将支路电压用支路电流表示出来，有

$$\begin{cases} u_1=-u_{s1}+R_1i_1 \\ u_2=R_2i_2 \\ u_3=u_{s3}+R_3i_3 \end{cases} \tag{2-10}$$

将式(2−10)代入式(2−9)得

$$\begin{cases} -u_{s1}+R_1i_1+R_2i_2=0 \\ -R_2i_2+R_3i_3+u_{s3}=0 \end{cases} \tag{2-11}$$

式(2−8)和式(2−11)就是以支路电流为变量的支路电流方程。式(2−11)常可以根据 KVL 结合元件的 VCR 直接列出。

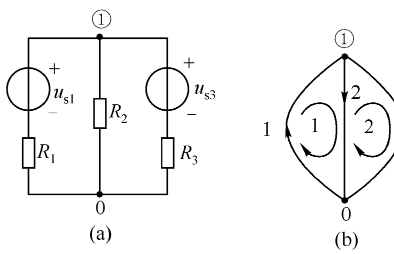


图 2−27　支路电流法

利用支路电流法分析电路的一般步骤为：

（1）选取各支路电流的参考方向和独立回路的绕行方向；

（2）根据 KCL 对 $(n-1)$ 个独立结点列方程；

（3）根据 KVL 和 VCR 对 $(b-n+1)$ 个独立回路列以支路电流为变量的方程；

（4）求解各支路电流，进而求出其他所需求的量。

若电路中含有无伴电流源(无电阻与之并联)，可设电流源两端的电压为未知量，在列 KVL 方程时将出现该未知量，在求解支路电流时将一并求出。

例 2-5 列写图 2-28 所示电路的支路电流方程。

解 选取支路电流和方向如图中所示，对结点①，②列 KCL 方程，有

$$-i_1 - i_2 + i_3 = 0$$
$$-i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

取回路绕行方向如图 2-28 中虚线所示，列回路的 KVL 方程，有

$$R_1 i_1 - R_2 i_2 = u_{s1}$$
$$R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 = 0$$
$$-R_4 i_4 + R_5 i_5 = -u_{s2}$$

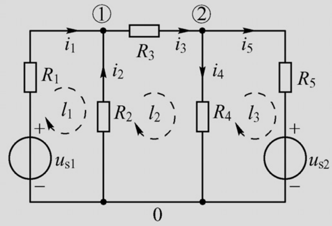


图 2-28 例 2-5 图

支路电压法与支路电流法类似。支路电压法是以支路电压为电路变量，它是将支路电流用支路电压表示，代入 KCL 方程后，得出以支路电压为变量的方程，把它们和 KVL 方程联立，即可求得所需的支路电压。若电路中含有无伴电压源(无电阻与之串联)时，可设电压源的电流为未知量，则在 KCL 方程中将出现该未知量，在求解支路电压时将一并求出。

支路电流法和支路电压法与 $2b$ 法相比，方程数减少了一半，但要求每个支路电压(电流)能用支路电流(电压)表示，使得该方法有一定局限性，而 $2b$ 法则不存在此问题。

思考题

T2.5-1 如何使用支路电流法或支路电压法求解电路？

T2.5-2 支路法求解电路的适用范围是哪些电路？支路电流法和支路电压法又适用于哪些电路？

T2.5-3 支路法为什么可以不需要再化简电路了？

基本练习题

2.5-1 图题 2.5-1(a)所示电路中，电阻 R_1～R_6 和电源 u_{s3} 已知，图(b)为其有向图 G，列写支路电流法方程。

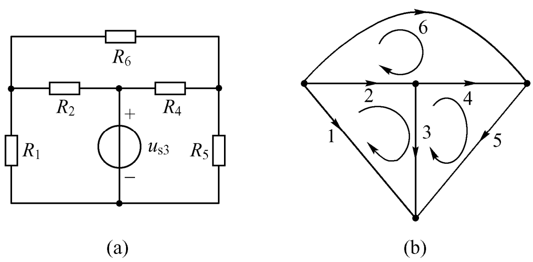


图 题 2.5-1

2.6 网孔电流法和回路电流法

2.6.1 网孔电流法

网孔电流法是以网孔电流作为电路独立变量的解题方法，它仅适用于平面电路。下面以图 2-29 所示电路为例来说明。网孔电流是一组假想的沿网孔流动的电流，可以指定为顺时针方向，也可为逆时针方向。图中指定了两个网孔电流方向，用 i_{m1} 和 i_{m2} 表示(下标 m 表示网孔)。由于网孔电流是环流，在电路的每一结点上它们流入，又流出同一结点，所以网孔电流自动地满足了 KCL，各网孔电流之间是相互独立的(支路电流是不独立的)。而各支

路电流又可用网孔电流表示出来，在图 2-29 中，有 $i_1 = i_{m1}$，$i_2 = i_{m1} - i_{m2}$，$i_3 = i_{m2}$，所以网孔电流是一组独立和完备的变量，以网孔电流为变量所列的方程是独立的。

由于网孔电流满足 KCL，所以只需利用 KVL 和 VCR 来列写方程。对图 2-29 所示电路，对网孔 1 和网孔 2 列 KVL 方程，列方程时，以网孔电流方向为绕行方向，有

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = 0 \\ -u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \tag{2-12}$$

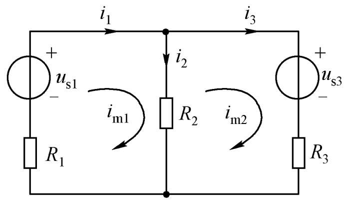


图 2-29　网孔电流法

将各支路电压用网孔电流表示为

$$\begin{cases} u_1 = -u_{s1} + R_1 i_1 = -u_{s1} + R_1 i_{m1} \\ u_2 = R_2 i_2 = R_2 (i_{m1} - i_{m2}) \\ u_3 = u_{s3} + R_3 i_3 = u_{s3} + R_3 i_{m2} \end{cases} \tag{2-13}$$

将式(2-13)代入式(2-12)，整理后得

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) i_{m1} - R_2 i_{m2} = u_{s1} \\ -R_2 i_{m1} + (R_2 + R_3) i_{m2} = -u_{s3} \end{cases} \tag{2-14}$$

式(2-14)即是以网孔电流为变量的网孔电流方程。

具有两个网孔的电路，网孔电流方程的一般形式为：

$$\begin{cases} R_{11} i_{m1} + R_{12} i_{m2} = u_{s11} \\ R_{21} i_{m1} + R_{22} i_{m2} = u_{s22} \end{cases} \tag{2-15}$$

式中，R_{11} 和 R_{22} 分别称为网孔 1 和网孔 2 的自阻，它们分别是网孔 1 和网孔 2 中所有电阻之和。例如，本例中 $R_{11} = R_1 + R_2$，$R_{22} = R_2 + R_3$。R_{12} 和 R_{21} 代表网孔 1 和网孔 2 的互阻，即两个网孔的公有电阻。当通过网孔 1 和网孔 2 的公共电阻上的两个网孔电流的参考方向相同时，互阻为正，否则为负。如果两个网孔之间没有公共支路，或者有公共支路但其电阻为零(例如公共支路仅有电压源)，则互阻为零。如果所有网孔电流都取顺(或逆)时针，则所有互阻总是负的。例如，本例中 $R_{12} = R_{21} = -R_2$。在不含有受控源的电阻电路中，$R_{12} = R_{21}$。在计算自阻和互阻时，独立电源都置零(电压源用短路代替，电流源用开路代替)。u_{s11}、u_{s22} 分别为网孔 1 和网孔 2 中所有电压源电压的代数和，当电压源的方向与网孔电流一致时，前面取“－”号，反之取“+”号。例如，本例中 $u_{s11} = u_{s1}$，$u_{s22} = -u_{s3}$。

式(2-15)实质上是 KVL 的体现，方程的左边是由网孔电流在各电阻上所产生的电压之和，方程的右边是网孔内所有电压源电压的代数和。

对于具有 m 个网孔的平面电路，网孔电流方程的一般形式为

$$\begin{cases} R_{11} i_{m1} + R_{12} i_{m2} + \cdots + R_{1m} i_{mm} = u_{s11} \\ R_{21} i_{m1} + R_{22} i_{m2} + \cdots + R_{2m} i_{mm} = u_{s22} \\ \qquad \vdots \\ R_{m1} i_{m1} + R_{m2} i_{m2} + \cdots + R_{mm} i_{mm} = u_{smm} \end{cases} \tag{2-16}$$

用网孔电流法求解电路的一般步骤为：

（1）选择合适的网孔电流。

（2）按照式(2-16)列网孔电流方程。注意：自阻总是正的，互阻可正可负；并注意电压源前面的“+”、“−”号。

（3）求解网孔电流。

（4）根据所求得的网孔电流来求其他的电压和电流。

例 2-6　用网孔电流法求图 2-30 所示含受控电压源电路的各支路电流。

解 （1）选取网孔电流 i_{m1}、i_{m2}、i_{m3} 如图中所示；

（2）列网孔电流方程，先计算各个网孔的自阻、互阻以及独立电压源的压降。

$R_{11}=1+3=4\ \Omega$，$R_{22}=3+2+1=6\ \Omega$，$R_{33}=3\ \Omega$， $R_{12}=R_{21}=-3\ \Omega$，$R_{23}=R_{32}=-1\Omega$；$R_{13}=R_{31}=0\ \Omega$，$U_{s11}=2$ V。

所以网孔电流方程为

$$4i_{m1}-3i_{m2}=2$$
$$-3i_{m1}+6i_{m2}-i_{m3}=-3u_2$$
$$-i_{m2}+3i_{m3}=3u_2$$

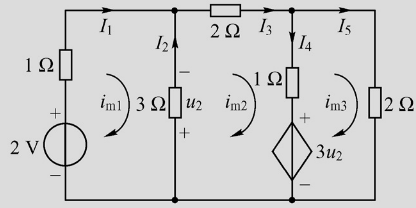


图 2-30　例 2-6 图

因为上述 3 个式子中后两个式子中有受控源，使得线性方程组的变量增加了一个，因此，需要补充一个方程用于消除增加的变量，即

$$u_2=3(i_{m2}-i_{m1})$$

（3）解方程组，得 $i_{m1}=1.19$A，$i_{m2}=0.92$A，$i_{m3}=-0.52$A，$u_2=-0.823$V。

而利用网孔电流与支路电流的关系，得出各个支路电流

$I_1=1.19$ A， $I_2=-0.27$ A， $I_3=0.92$ A， $I_4=1.44$ A， $I_5=-0.52$ A

显然，在采用网孔电流法列写网孔电流方程，遇到支路中含有受控电压源(受控电流源或独立电流源，另有方法处理)时，可以先把受控电压源作为独立电压源，列到网孔方程右侧，然后通过补充方程，与网孔方程形成线性惟一解的方程组。要注意补充方程是把受控源的控制量用网孔电流的线性函数描述，如例 2-6 中补充方程为 $u_2=3(i_{m2}-i_{m1})$。

2.6.2　回路电流法

回路电流法是以回路电流作为电路变量的解题方法，它不仅适用于平面电路，而且适用于非平面电路。回路电流是在一个回路中连续流动的假想电流。通常选择基本回路作为独立回路，这样，回路电流就将是相应的连枝电流，它们是一组独立的、完备的电流变量。

以图 2-31 所示电路的图为例。如果选取(4, 5, 6)为树，可以得到以支路(1, 2, 3)为单连枝的 3 个基本回路，连枝电流 i_1、i_2、i_3 分别作为在单连枝回路中流动的假想回路电流 i_{l1}、i_{l2}、i_{l3}。

树枝电流可以用连枝电流表示为

$$i_4=i_{l2}-i_{l1}，\quad i_5=-i_{l1}-i_{l3}，\quad i_6=i_{l2}-i_{l1}-i_{l3}$$

即全部支路电流可以通过回路电流表示出来，回路电流是完备的。

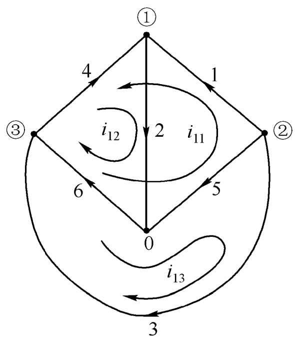


图 2-31　回路电流法

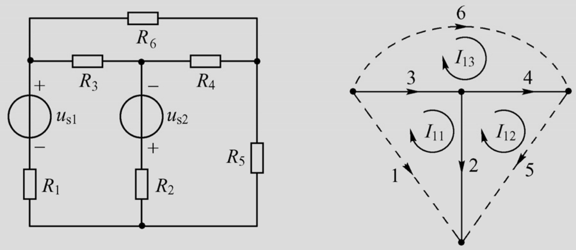
另一方面，对结点①、②、③分别列 KCL 方程，有

$$i_4+i_1-i_2=i_{l2}-i_{l1}+i_{l1}-i_{l2}=0$$
$$i_1+i_5+i_3=i_{l1}-i_{l1}-i_{l3}+i_{l3}=0$$
$$i_4-i_3-i_6=i_{l2}-i_{l1}-i_{l3}-i_{l2}+i_{l1}+i_{l3}=0$$

可见，回路电流是一组独立的变量，它们自动地满足 KCL。

对于图 2-31 所示电路，若选取(2, 5, 6)为树，则此时的基本回路就成为网孔。所以网孔电流法是回路电流法的特例，而回路电流法是网孔电流法的推广。回路电流方程与网孔电流方程类似。在列方程时同样要注意：自阻总是正的，互阻取正、取负则由公共支路上两回路电流的方向决定。

例 2-7　如图 2-32(a)所示电路中，电路的有向图如图 2-32(b)所示。若选择(2, 3, 4)为树，试列出回路电流方程。



(a)　　　　　　　　(b)

图 2-32　例 2-7 图

解　单连枝回路如图 2-32(b)所示，设回路电流为 I_{l1}、I_{l2}、I_{l3}，则

$$R_{11}=R_1+R_2+R_3,\quad R_{12}=R_{21}=-R_2,\quad R_{22}=R_2+R_4+R_5$$

$$R_{23}=R_{32}=-R_4,\quad R_{33}=R_3+R_4+R_6,\quad R_{31}=R_{13}=-R_3$$

$$u_{s11}=u_{s1}+u_{s2},\ u_{s22}=-u_{s2},\ u_{s33}=0$$

故回路电流方程为

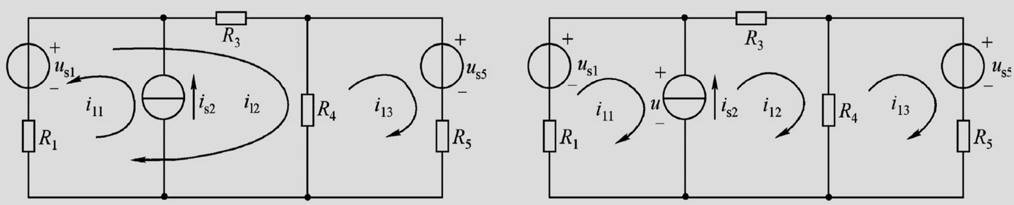
$$(R_1+R_2+R_3)I_{11}-R_2I_{12}-R_3I_{13}=u_{s1}+u_{s2}$$

$$-R_2I_{11}+(R_2+R_4+R_5)I_{12}-R_4I_{13}=-u_{s2}$$

$$-R_3I_{11}-R_4I_{12}+(R_3+R_4+R_6)I_{13}=0$$

如果电路中有电流源和电阻的并联组合，可以先经等效变换成为电压源和电阻的串联后，再列回路电流方程。但当电路中存在无伴电流源时，可采用下述两种方法处理：①在选取回路电流时，仅让一个回路电流流过该支路，则就不必再列该回路电流方程。②将无伴电流源两端的电压作为一个求解变量列方程，虽然多了一个变量，但是无伴电流源所在支路的电流为已知，故增加了一个回路电流的附加方程。

例 **2-8**　试用回路电流法列出图 2-33(a)所示电路的方程。



(a)　　　　　　　　(b)

图 2-33　例 2-8 图

解　方法一：选取图 2-33(a)中所示的回路。回路 1 的回路电流方程为

$$i_{l1}=i_{s2}$$

回路 2、3 的回路电流方程为

$$-R_1i_{11}+(R_1+R_3+R_4)i_{12}-R_4i_{13}=u_{s1}$$

$$-R_4i_{12}+(R_4+R_5)i_{13}=-u_{s5}$$

方法二：设电流源 i_{s2} 两端的电压为 u，选取图 2-33(b)中所示的回路，则回路电流方程为

$$R_1i_{11}+u=u_{s1}$$

$$(R_3+R_4)i_{12}-R_4i_{13}-u=0$$

$$-R_4i_{12}+(R_4+R_5)i_{13}=-u_{s5}$$

增加一个方程

$$-i_{11}+i_{12}=i_{s2}$$