

## 第 2 章 匹配滤波器

匹配滤波器是一种最佳滤波器，是以输出信噪比最大为准则的一种线性系统。它是信息传输系统中接收设备最佳检测系统的基本组成部分，广泛应用于通信、雷达及广播等信息传输系统的接收设备中，在最佳信号检测、信号分辨、某些信号波形的产生和压缩等方面起着重要作用。

### 2.1 概 述

信息传输系统中接收设备的任务是尽可能好地从接收信号中恢复被传送的信号，达到有效、可靠传输信息的目的。由于信号在信道中传输时受到噪声的污染，接收设备所接收的是信号加噪声的混合信号，接收设备要达到有效、可靠恢复被传送信号的目的，一种自然而简单的想法就是尽可能地压制或抑制噪声，使信号在信号加噪声中所占的比例尽可能大，从而减小噪声对信号的影响，有利于对信号的处理。这一朴素的思路就是以输出信号与噪声的功率比(简称为信噪比)达到最大作为标准来设计接收设备的。例如，在雷达、声呐及红外等探测系统中，需要在噪声背景中检测微弱信号，其接收设备输出的信噪比越高，越容易发现信号。在通信系统中，误码率与接收设备输出的信噪比有关，接收设备输出的信噪比越大，信息传输发生错误的概率越小。一般说来，对于一定的输入信号和噪声而言，使输出信噪比大的系统要比使信噪比小的系统为好。

以输出信噪比最大作为标准设计出来的接收设备是一种最佳系统。最佳系统是个相对的概念。所谓的最佳是指系统在某种标准下性能达到最佳。衡量最佳的标准通常用准则来表达，故输出信噪比最大的标准就称为输出信噪比最大准则。在某种准则下的最佳系统，在另外一种准则下就不一定是最佳的。在某些特定条件下，几种最佳准则也可能是等价的。

对于滤波器作为线性系统的设计，通常有两种最佳准则：一种是使滤波器输出的信号波形与发送信号波形之间的均方误差最小准则，由此而导出的最佳线性滤波器称为维纳滤波器和卡尔曼滤波器，将在第 10 章“波形估计”中讨论；另一种是使滤波器输出信噪比最大准则，由此而导出的最佳线性滤波器称为匹配滤波器，本章将讨论匹配滤波器理论。维纳滤波器和卡尔曼滤波器所关注的是使信号波形最佳地复现，使输出波形失真最小。匹配滤波器所关注的不是复现原来的信号波形，而是在输出端能够提供最大的信噪比，有利于判断信号能量是否存在。对于维纳滤波器和卡尔曼滤波器，所复现的信号波形通常是未知的。对于匹配滤波器，所输入的信号波形是已知的，可以达到把已知波形的信号从噪声背景中提取出来的目的。

在输入为确定信号加平稳噪声的情况下，使输出信噪比达到最大的线性系统称为匹配滤波器。关于匹配滤波器需要把握以下几点：① 匹配滤波器是线性系统，而且在大多数情况下限定为线性时不变系统。② 已经知道了输入的确定信号。③ 输入的噪声是平稳随机过程。④ 所采用的最佳准则是输出信噪比最大准则。所谓的匹配是指滤波器要与输入的已知确定信号相匹配。匹配滤波器具有较强的针对性，只能对某种或某类信号匹配，而不可能对所有信号都匹配。

在信号接收设备中，匹配滤波器的作用有两个方面：一是使滤波器输出有用信号成分尽可能强；二是抑制噪声，使滤波器输出噪声成分尽可能小，减小噪声对信号处理的影响。

对于已知的确定信号，匹配滤波器输出的信噪比能够达到最大，有利于把已知波形的信号从噪声背景中提取出来。对于未知的信号，匹配滤波器输出的信噪比不能够达到最大，不能与输入信号相匹配。

匹配滤波器理论在信号检测理论中占有十分重要的地位。在电子信息系统中，信号接收设备通常要求按匹配滤波器来设计，以改善信噪比，提高接收设备检测信号的能力。

本章所讨论的内容是匹配滤波器的设计，研究思路是在输入信号模型为确定信号加平稳噪声的情况下，已知确定信号和平稳噪声的自相关函数或功率谱密度，采用最大信噪比准则，建立或求出匹配滤波器的冲激响应或传输函数，从而为匹配滤波器的设计提供数学模型。

本章从最大信噪比准则出发，首先讨论匹配滤波器所满足的方程；在此基础上，分别讨论白噪声背景下和色噪声背景下的匹配滤波器，并讨论匹配滤波器的有关性质。

## 2.2 匹配滤波器冲激响应及传输函数

在输入信号模型为确定信号加平稳噪声的情况下，已知确定信号和平稳噪声的自相关函数或功率谱密度，采用最大信噪比准则，得出匹配滤波器冲激响应及传输函数。

### 1. 匹配滤波器的已知条件

规定匹配滤波器是线性时不变系统，并假设确定信号加平稳噪声的输入信号模型为

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (2.2.1)$$

式中， $s(t)$ 为确定信号，并存在于时间间隔 $[0, T]$ 内； $n(t)$ 为平稳噪声，其均值为0，自相关函数为 $R_n(\tau)$ 。

在上述已知条件下，下面采用最大信噪比准则来推导匹配滤波器的冲激响应 $h_0(t)$ 和传输函数 $H_0(\omega)$ 。

### 2. 匹配滤波器冲激响应

设线性时不变系统的冲激响应为 $h(t)$ ，对于输入 $x(t)$ ，它满足叠加原理，则线性时不变系统的输出为

$$y(t) = s_0(t) + n_0(t) \quad (2.2.2)$$

式中， $s_0(t)$ 是输出信号； $n_0(t)$ 是输出噪声。输出信号与输出噪声分别为

$$s_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad (2.2.3)$$

$$n_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad (2.2.4)$$

相应地，在时刻 $T$ ，输出信号与输出噪声分别为

$$s_0(T) = \int_0^T h(\tau)s(T-\tau)d\tau \quad (2.2.5)$$

$$n_0(T) = \int_0^T h(\tau)n(T-\tau)d\tau \quad (2.2.6)$$

对于线性时不变系统，输入噪声是平稳随机过程，输出噪声也是平稳随机过程。输入噪声的均值为0，则输出噪声的均值也为0。输出噪声的功率(即噪声的方差)为

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= E[n_0^2(T)] = E\left[\int_0^T h(\tau)n(T-\tau)d\tau \int_0^T h(t)n(T-t)dt\right] \\ &= \int_0^T \int_0^T h(\tau)h(t)R_n(t-\tau)dt d\tau \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

在时刻  $T$ ，输出信号的功率为  $s_0^2(T)$ ，线性时不变系统的输出信噪比为

$$\text{SNR}(T) = \frac{s_0^2(T)}{\sigma_n^2} = \frac{s_0^2(T)}{E[n_0^2(T)]} = \frac{\left[ \int_0^T h(\tau) s(T-\tau) d\tau \right]^2}{\int_0^T \int_0^T h(\tau) h(t) R_n(t-\tau) dt d\tau} \quad (2.2.8)$$

式中，SNR 表示信噪比。

匹配滤波器就是使输出信噪比 SNR 为最大的线性时不变系统。使 SNR 最大等效于在  $s_0(T)$  为常数的约束条件下，使输出噪声功率  $E[n_0^2(T)]$  最小。这是一个有约束条件的最优化问题，通常应用拉格朗日 (Largrange) 乘数法解这个问题。首先构造最优化问题的目标函数为

$$\begin{aligned} J &= E[n_0^2(T)] - \mu s_0(T) = \int_0^T \int_0^T h(\tau) h(t) R_n(t-\tau) dt d\tau - \mu s_0(T) \\ &= \int_0^T \int_0^T h(\tau) h(t) R_n(t-\tau) dt d\tau - \mu \int_0^T h(\tau) s(T-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

式中， $\mu$  为拉格朗日乘数。

设  $h_0(t)$  是使  $J$  达到极小的匹配滤波器的冲激响应，则任意线性时不变系统的冲激响应可表示为

$$h(t) = h_0(t) + \alpha \varepsilon(t) \quad (2.2.10)$$

式中， $\alpha$  为一任意乘数； $\varepsilon(t)$  是定义于  $0 \leq t \leq T$  的任意函数。

将式 (2.2.10) 代入式 (2.2.9) 得

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T \int_0^T [h_0(t) + \alpha \varepsilon(t)][h_0(\tau) + \alpha \varepsilon(\tau)] R_n(t-\tau) dt d\tau - \\ &\quad \mu \int_0^T [h_0(t) + \alpha \varepsilon(t)] s(T-\tau) dt \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

对于任意给定的函数  $\varepsilon(t)$ ， $J$  应在  $\alpha = 0$  处达到极值，也就是  $h_0(t)$  应满足如下方程

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (2.2.12)$$

$$\begin{aligned} J \text{ 对 } \alpha \text{ 求导, 得} \quad \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \int_0^T \int_0^T [\varepsilon(t) h_0(\tau) + \varepsilon(\tau) h_0(t) + 2\alpha \varepsilon(\tau) \varepsilon(t)] R_n(t-\tau) dt d\tau - \\ &\quad \mu \int_0^T \varepsilon(t) s(T-t) dt \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

因为平稳随机过程的自相关函数是偶函数，即  $R_n(\tau-t) = R_n(t-\tau)$ ，故式 (2.2.13) 的重积分中第一项和第二项相等。将式 (2.2.13) 代入式 (2.2.12)，则得到匹配冲激响应  $h_0(t)$  应满足的方程，即

$$\int_0^T \varepsilon(t) \left[ \int_0^T 2h_0(\tau) R_n(t-\tau) d\tau - \mu s(T-t) \right] dt = 0 \quad (2.2.14)$$

由于  $\varepsilon(t)$  是任意给定的函数，式 (2.2.14) 等效于

$$\int_0^T 2h_0(\tau) R_n(t-\tau) d\tau - \mu s(T-t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.2.15)$$

进一步将式 (2.2.15) 写成

$$\int_0^T h_0(\tau) R_n(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} \mu s(T-t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.2.16)$$

因为拉格朗日乘数是一个常数， $\mu/2$  只改变滤波器的增益，对信号和噪声的影响相同，并不改变信噪比，可以令  $\mu/2 = 1$ 。因此，匹配滤波器冲激响应应满足的积分方程为

$$\int_0^T h_0(\tau)R_n(t-\tau)d\tau = s(T-t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.2.17)$$

式(2.2.17)就是匹配滤波器方程,它是匹配滤波器方程的普遍形式。所谓匹配滤波器方程的普遍形式是指,式(2.2.17)即适用于白噪声,也适用于色噪声。匹配滤波器冲激响应可通过求解匹配滤波器方程得到。匹配滤波器方程的物理意义为:当滤波器输入端确知信号为 $s(t)$ ,加性噪声的自相关函数为 $R_n(\tau)$ 时,则满足式(2.2.17)的滤波器 $h_0(t)$ 使输出信噪比达到最大。

将式(2.2.17)代入式(2.2.8)中,就得到匹配滤波器的最大输出信噪比,即

$$\begin{aligned} \text{SNR}_{\max} &= \frac{s_0^2(T)}{E[n_0^2(T)]} = \frac{\left[ \int_0^T h_0(\tau)s(T-\tau)d\tau \right]^2}{\int_0^T h_0(\tau) \left[ \int_0^T h_0(t)R_n(\tau-t)dt \right] d\tau} \\ &= \int_0^T h_0(\tau)s(T-\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

为了具体求出匹配滤波器的冲激响应,需要解积分方程式(2.2.17),该方程是第一类弗雷德霍姆(Fredholm)积分方程。一般来说,这样的积分方程不能直接求解。但当积分方程的核是有理核时可以直接求解,详见参考文献[27]。

### 3. 匹配滤波器传输函数

设线性时不变系统冲激响应 $h(t)$ 对应的传输函数为 $H(\omega)$ ,输入信号 $s(t)$ 的傅里叶变换为 $S(\omega)$ ,则输出信号 $s_0(t)$ 的傅里叶变换为

$$S_0(\omega) = H(\omega)S(\omega) \quad (2.2.19)$$

输出信号 $s_0(t)$ 也可以表示为

$$s_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)H(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2.2.20)$$

设平稳噪声自相关函数 $R_n(\tau)$ 的傅里叶变换(即功率谱密度)为 $S_n(\omega)$ ,则输出噪声 $n_0(t)$ 的功率谱密度为

$$S_{n_0}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_n(\omega) \quad (2.2.21)$$

$n_0(t)$ 的功率也可以表示为

$$E[n_0^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{n_0}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_n(\omega)d\omega \quad (2.2.22)$$

将式(2.2.20)和式(2.2.22)代入式(2.2.8)中,得到线性时不变系统的输出信噪比为

$$\text{SNR}(T) = \frac{s_0^2(T)}{E[n_0^2(T)]} = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)H(\omega)e^{j\omega T} d\omega \right|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_n(\omega)d\omega} \quad (2.2.23)$$

要得到使输出功率信噪比达到最大的条件,可利用施瓦兹(Schwarz)不等式。施瓦兹不等式为

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} P^*(x)Q(x)dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |P(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |Q(x)|^2 dx \quad (2.2.24)$$

式中, $P(x)$ 、 $Q(x)$ 都是实变量 $x$ 的复函数;\*表示复共轭。当且仅当满足

$$Q(x) = \beta P(x) \quad (2.2.25)$$

时,式(2.2.24)的等号才成立。其中, $\beta$ 为任意非0常数。

为了利用施瓦兹不等式,令

$$P^*(x) = \frac{S(\omega)e^{j\omega T}}{\sqrt{S_n(\omega)}} \quad (2.2.26)$$

$$Q(x) = \sqrt{S_n(\omega)}H(\omega) \quad (2.2.27)$$

和

将施瓦兹不等式用于式(2.2.23)的分子, 有

$$\begin{aligned} \text{SNR}(T) &= \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \sqrt{S_n(\omega)} \frac{S(\omega)}{\sqrt{S_n(\omega)}} e^{j\omega T} d\omega \right|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega} \\ &\leq \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H^2(\omega) S_n(\omega) d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

根据施瓦兹不等式中等号成立的条件式(2.2.25), 可得到不等式(2.2.28)中等号成立的条件是

$$H_0(\omega) = \frac{\beta S^*(\omega) e^{-j\omega T}}{S_n(\omega)} \quad (2.2.29)$$

式(2.2.29)就是匹配滤波器传输函数的普遍形式。所谓匹配滤波器传输函数的普遍形式是指, 式(2.2.29)即适用于白噪声, 也适用于色噪声。任意非零常数 $\beta$ 表示匹配滤波器的相对放大量和引入的固定相移。对于匹配滤波器来说, 重要的是它的传输函数的形状, 而不是此传输函数的相对大小以及它的固定相移。为了简化运算而又不影响分析的一般性, 可以令 $\beta = 1$ 。

由式(2.2.29)所示匹配滤波器的传输函数可以看出, 匹配滤波器传输函数的幅频特性与信号频谱的幅度成正比, 与噪声的功率谱密度成反比; 对于某个频率点, 信号越强, 该频率点的加权系数越大, 噪声越强, 加权越小。可见, 匹配滤波器具有抑制噪声的作用。

匹配滤波器传输函数的普遍形式也可以由匹配滤波器方程的普遍形式得到。将式(2.2.17)中积分限的限制由 $[0, T]$ 扩充为 $(-\infty, \infty)$ , 于是式(2.2.17)便可作为一个卷积积分来求解。

将式(2.2.17)的积分限扩充后的形式为

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau) R_n(t - \tau) d\tau = s(T - t) \quad (2.2.30)$$

这相当于求 $h_0(t)$ 的近似最佳非因果解。积分限扩充之后, 式(2.2.30)就是如下的卷积运算:

$$h_0(t) * R_n(t) = s(T - t) \quad (2.2.31)$$

对式(2.2.30)取傅里叶变换, 有

$$H_0(\omega) S_n(\omega) = S^*(\omega) e^{-j\omega T} \quad (2.2.32)$$

于是有

$$H_0(\omega) = \frac{S^*(\omega) e^{-j\omega T}}{S_n(\omega)} \quad (2.2.33)$$

式(2.2.33)与式(2.2.29)相同。由于在得到式(2.2.33)的过程中, 将积分限由 $[0, T]$ 扩充到 $(-\infty, \infty)$ , 故式(2.2.33)所示的匹配滤波器传输函数的表示式是物理不可实现的。为了保证匹配滤波器的物理可实现性, 将式(2.2.33)分解为2部分:  $H_0(\omega) = [H_0(\omega)]^+ + [H_0(\omega)]^-$ , 其中 $[H_0(\omega)]^+$ 表示 $H_0(\omega)$ 的极、零点都在 $S$ 左半平面的部分,  $[H_0(\omega)]^-$ 表示 $H_0(\omega)$ 的极、零点都在

$S$  右半平面的部分, 而物理可实现匹配滤波器的传输函数仅取  $H_0(\omega)$  的极、零点都在  $S$  左半平面的部分, 即

$$H_{oc}(\omega) = [H_0(\omega)]^+ = \left[ \frac{S^*(\omega)e^{-j\omega T}}{S_n(\omega)} \right]^+ \quad (2.2.34)$$

## 2.3 白噪声背景下的匹配滤波器

为了进一步讨论匹配滤波器, 将输入的平稳噪声分为白噪声和色噪声两种情况, 分别讨论这两种情况下的匹配滤波器。本节将讨论白噪声背景下的匹配滤波器。

### 1. 白噪声背景下匹配滤波器的冲激响应

设白噪声的自相关函数为  $R_n(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$ , 功率谱密度为  $S_n(\omega) = N_0/2$ 。

将白噪声的自相关函数代入到匹配滤波器方程式(2.2.17), 就可以直接求出白噪声背景下匹配滤波器的冲激响应, 即

$$h_0(t) = \frac{2}{N_0}s(T-t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.3.1)$$

由式(2.3.1)可见: 白噪声背景下匹配滤波器的冲激响应是输入的已知确定信号沿时间轴反褶, 并延迟时间  $T$ 。因此, 如果设计白噪声背景下的匹配滤波器, 需要知道输入确定信号的波形。

根据式(2.3.1)和式(2.2.18), 白噪声背景下匹配滤波器的输出信噪比为

$$\text{SNR}_{\max} = \int_0^T \frac{2}{N_0}s^2(T-\tau)d\tau = \int_0^T \frac{2}{N_0}s^2(t)dt = \frac{2E}{N_0} \quad (2.3.2)$$

式中,  $E$  为输入信号能量。

由式(2.3.2)可见: 白噪声背景下匹配滤波器的输出信噪比只与输入信号能量  $E$  和白噪声功率谱密度  $N_0/2$  有关, 而与输入信号的波形和噪声的概率分布无关。

白噪声背景下匹配滤波器在时刻  $T$  的输出为

$$y_0(T) = \int_0^T x(T-t)h_0(t)dt = \int_0^T \frac{2}{N_0}x(T-t)s(T-t)dt = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t)dt \quad (2.3.3)$$

### 2. 白噪声背景下匹配滤波器的传输函数

将白噪声的功率谱密度代入式(2.2.33), 就可以直接求出白噪声背景下匹配滤波器的传输函数, 即

$$H_0(\omega) = \frac{2S^*(\omega)e^{-j\omega T}}{N_0} = KS^*(\omega)e^{-j\omega T} \quad (2.3.4)$$

式中,  $K = 2/N_0$ 。通常取  $K = 1$ 。

当然, 白噪声背景下匹配滤波器的传输函数可以直接由冲激响应的傅里叶变换得到。由式(2.3.4)可见: 白噪声背景下匹配滤波器的传输函数为输入的已知确定信号频谱的共轭, 并附加相移  $-j\omega T$ 。因此, 白噪声背景下匹配滤波器的幅频特性等于输入确定信号的幅频特性, 或者说二者是相匹配的。这也是把此种滤波器称为匹配滤波器的缘故。

### 3. 白噪声背景下匹配滤波器的性质

匹配滤波器的概念在信号检测理论中起着重要的和基本的的作用, 匹配滤波理论是信号检测

理论中的特别重要的一个论题。为了更好地理解和应用匹配滤波理论，下面对白噪声背景下匹配滤波器的某些性质做进一步的讨论。

(1) 在所有线性滤波器中，匹配滤波器输出的信噪比最大，其数值等于  $2E/N_0$ 。

(2) 匹配滤波器的输出信噪比，仅与输入信号能量  $E$  和白噪声的功率谱密度  $N_0/2$  有关，而与输入信号的波形、噪声的分布律无关。输入信号的波形只影响匹配滤波器冲激响应或传输函数的形状。只要各种信号的能量相同，白噪声的功率谱密度相同，与它们相应的匹配滤波器的输出信噪比就都一样。换句话说，在同样的噪声干扰条件下，只有增加信号的能量，才能提高匹配滤波器的检测能力。

(3) 匹配滤波器的幅频特性与输入信号的幅频特性一致，而匹配滤波器的相频特性与输入信号的相频特性相反，并有一附加的相位项  $-\omega T$ 。

设输入信号的频谱和匹配滤波器的传输函数分别为

$$S(\omega) = |S(\omega)| \exp[j\varphi_s(\omega)] \quad (2.3.5)$$

$$H_0(\omega) = |H_0(\omega)| \exp[j\varphi_h(\omega)] \quad (2.3.6)$$

式中， $|S(\omega)|$  和  $\varphi_s(\omega)$  分别为输入信号的幅频特性和相频特性； $|H_0(\omega)|$  和  $\varphi_h(\omega)$  分别为传输函数的幅频特性和相频特性。

根据式 (2.3.4)，有

$$H_0(\omega) = |H_0(\omega)| \exp[j\varphi_h(\omega)] = |S(\omega)| \exp[-j\varphi_s(\omega) - j\omega T] \quad (2.3.7)$$

$$\text{故有} \quad |H_0(\omega)| = |S(\omega)| \quad (2.3.8)$$

$$\varphi_h(\omega) = -\varphi_s(\omega) - \omega T \quad (2.3.9)$$

由式 (2.3.8) 可见，匹配滤波器的幅频特性与输入信号的幅频特性一致，说明匹配滤波器对输入信号中较强的频率成分给以较大的权重，而对输入信号中较弱的频率成分，则给以较小的权重，这显然是在白噪声（它具有均匀的功率谱密度）中过滤信号的一种最有效的权重方式。

由式 (2.3.9) 可见，匹配滤波器的相频特性与输入信号的相位谱互补（除线性相位项  $\omega T$  外）。它说明，不管输入信号有怎样复杂的非线性相位谱，经过匹配滤波器以后，这些非线性相位谱将全部被补偿掉，输出信号仅保留有线性相位谱。这就意味着输出信号的各不同频率成分将在某一时刻  $T$  达到同一相位，振幅代数相加，从而形成输出信号的峰值。至于噪声，由于它固有的随机性，匹配滤波器的相位特性对它没有任何影响。因此，匹配滤波器对信号的各频率分量起到同相相加的作用，而对噪声仍按照随机相位的情形相加，从而使输出端的信噪比得到提高。

(4) 匹配滤波器的物理可实现性。

为了保证匹配滤波器的物理可实现性，式 (2.3.4) 的右端必须取  $S$  左半平面的极、零点，即

$$H_0(\omega) = [S^*(\omega) e^{-j\omega T}]^+ \quad (2.3.10)$$

或者表示成另外一种形式

$$H_0(\omega) = \int_0^\infty \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty S^*(\omega) e^{-j\omega T} e^{j\omega t} d\omega \right] e^{-j\omega t} dt \quad (2.3.11)$$

若输入信号  $s(t)$  为实函数（物理上存在的信号都是实函数），即有  $S^*(\omega) = S(-\omega)$ ，则

$$H_0(\omega) = \int_0^\infty \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty S(-\omega) e^{-j\omega(T-t)} d\omega \right] e^{-j\omega t} dt = \int_0^\infty s(T-t) e^{-j\omega t} dt$$

因此，匹配滤波器的冲激响应为

$$h_0(t) = \begin{cases} s(T-t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.3.12)$$

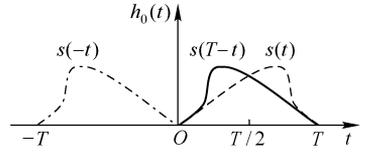


图 2.3.1 白噪声背景下匹配滤波器的冲激响应

式(2.3.12)说明，匹配滤波器的冲激响应是输入信号的镜像函数，对称点在时间轴的  $T/2$  点上，如图 2.3.1 所示。在图 2.3.1 中，虚线表示输入信号  $s(t)$ ，点划线表示  $s(-t)$ ，实线表示  $s(T-t)$ 。

(5) 匹配滤波输出的观测时刻选择在输入信号的末尾。

由于输入信号  $s(t)$  的持续时间为  $(0, T)$ ，根据式(2.3.12)所示的匹配滤波器冲激响应，可知匹配滤波器输出信号在时刻  $T$  达到最大，在时刻  $T$  瞬时功率也达到最大，从而在时刻  $T$  输出信噪比达到最大值。设对匹配滤波输出的观测时刻为  $t_0$ ，根据卷积运算的特性，在  $t_0 \leq T$  时，匹配滤波输出信噪比随着观测时刻  $t_0$  逐渐增大；在  $t_0 = T$  时，匹配滤波输出信噪比达到最大值；在  $t_0 > T$  时，匹配滤波输出信噪比随着观测时刻  $t_0$  逐渐减小。因为在输入信号未全部结束之前，便无从得到它的全部能量，滤波器的输出信噪比当然也不可能达到它的最大值  $2E/N_0$ 。输入信号全部送入匹配滤波器的时刻，使输出信噪比达到最大值。因此，匹配滤波输出的观测时刻选择在输入信号的末尾，即  $t_0 = T$ 。

如果输入信号  $s(t)$  的持续时间为  $(0, \infty)$ ，则以匹配滤波输出信噪比  $2E/N_0$  达到要求值的时刻  $t_0$  作为观测时刻；并且，为了满足物理可实现性的要求，匹配滤波器的冲激响应为

$$h_0(t) = \begin{cases} s(t_0 - t) & 0 < t \leq t_0 \\ 0 & t < 0, t > t_0 \end{cases} \quad (2.3.13)$$

(6) 匹配滤波器对于波形相似而振幅和时延参量不同的信号具有适应性。就是说，对与信号  $s(t)$  匹配的匹配滤波器，对于所有与  $s(t)$  波形相似仅振幅及时延不同的其他信号，也是匹配的。

设信号  $s(t)$  的持续时间为  $(0, T)$ ，其频谱为  $S(\omega)$ ，与之相匹配的匹配滤波器的传输函数  $H_0(\omega)$  为

$$H_0(\omega) = S^*(\omega) \exp(-j\omega T) \quad (2.3.14)$$

设另一个信号为  $s_1(t) = as(t - \tau)$ ，其频谱为

$$S_1(\omega) = aS(\omega) \exp(-j\omega\tau) \quad (2.3.15)$$

式中， $a$  为任意实常数； $\tau$  为延迟时间。

与信号  $s_1(t)$  匹配的匹配滤波器的传输函数  $H_1(\omega)$  为

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= S_1^*(\omega) \exp(-j\omega T_1) = aS^*(\omega) \exp[-j\omega(T_1 - \tau)] \\ &= aH_0(\omega) \exp\{-j\omega[(T_1 - (T + \tau))]\} \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

式中， $T$  表示匹配滤波器  $H_0(\omega)$  输出信噪比达到最大值的时刻； $T_1$  表示匹配滤波器  $H_1(\omega)$  输出信噪比达到最大值的时刻。若观测时刻都选在信号的末尾，由于  $s_1(t)$  相对于  $s(t)$  延迟了时间  $\tau$ ，所以  $T_1$  也比  $T$  延迟时间  $\tau$ ，即  $T_1 = T + \tau$ 。在式(2.3.16)中，令  $T_1 = T + \tau$ ，便有

$$H_1(\omega) = aH_0(\omega) \quad (2.3.17)$$

由式(2.3.17)可见，两个匹配滤波器之间除了一个表示相对放大量的常数  $a$  以外，它们的传输函数完全一致。所以，匹配滤波器  $H_0(\omega)$  对于信号  $s_1(t) = as(t - \tau)$  来说，也是匹配的，只是最大信噪比出现的时刻平移了而已。

(7) 匹配滤波器对于频移信号不具有适应性。

设信号  $s(t)$  的持续时间为  $[0, T]$ ，其频谱为  $S(\omega)$ ，与之相匹配的匹配滤波器的传输函数为  $H_0(\omega)$ 。设另一个信号为  $s_2(t) = s(t)\exp(-j\gamma t)$ ，其频谱为  $S_2(\omega) = S(\omega + \gamma)$ ，与之相应的匹配滤波器的传输函数为

$$H_2(\omega) = S^*(\omega + \gamma)\exp(-j\omega T) \quad (2.3.18)$$

显然， $H_2(\omega)$  与  $H_0(\omega)$  是不相同的，故匹配滤波器对于频移信号没有适应性。

(8) 匹配滤波器与相关器是完全等效的。

设两个信号  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$ ，持续时间均为  $[0, T]$ ，它们的相关运算定义为

$$r(T) = \int_0^T x_1(\tau)x_2(\tau)d\tau \quad (2.3.19)$$

完成相关运算的装置称为相关器。

在输入为  $x(t) = s(t) + n(t)$  时，白噪声背景下匹配滤波器在时刻  $T$  的输出为

$$y_0(T) = \int_0^T x(T-t)h_0(t)dt = \int_0^T \frac{2}{N_0} x(T-t)s(T-t)dt = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t)dt \quad (2.3.20)$$

显然，在时刻  $T$ ，白噪声背景下匹配滤波器的输出与相关器的输出是相等的。由此称：匹配滤波器与相关器是完全等效的。

相关器和匹配滤波器各有特点，采用哪个合适要根据具体情况而定。一般来说，相关器需要一个与有用信号相同的本地相干信号，而且要求它和接收信号中的有用信号严格同步，这一点是难以实现的。匹配滤波器不需要本地相干信号，因此结构比较简单，但其冲激响应与有用信号的匹配往往难以精确做到。此外，要求有准确的抽样时刻，这也不是轻而易举能办到的。

(9) 匹配滤波器的输出信号是输入信号的自相关函数。

对于输入信号  $s(t)$ ，匹配滤波器的输出信号为

$$s_0(t) = \int_0^\infty h_0(\tau)s(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty s(T-\tau)s(t-\tau)d\tau \quad (2.3.21)$$

式(2.3.21)的积分下限实际上不可能小于 0，因而，不妨将积分下限改为  $-\infty$ ，于是有

$$s_0(t) = \int_{-\infty}^\infty s(T-\tau)s(t-\tau)d\tau = R_s(t-T) \quad (2.3.22)$$

式中， $R_s(t-T)$  表示输入信号的自相关函数。

设输入信号  $s(t)$  的频谱为  $S(\omega)$ ，输出信号  $s_0(t)$  的频谱  $S_0(\omega)$  为

$$S_0(\omega) = H_0(\omega)S(\omega) = S^*(\omega)\exp(-j\omega T)S(\omega) = |S(\omega)|^2 \exp(-j\omega T) \quad (2.3.23)$$

式中， $|S(\omega)|^2$  是输入信号频谱  $S(\omega)$  模的平方，称为输入信号  $s(t)$  的能量频谱。因此，匹配滤波器输出信号的频谱  $S_0(\omega)$  与输入信号的能量频谱成正比，同时乘以与频率成比例的时延因子  $\exp(-j\omega T)$ 。

**例 2.3.1** 设输入信号为单个矩形脉冲，即

$$s(t) = \begin{cases} a & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t < 0, t > \tau \end{cases}$$

求与之相匹配的白噪声背景下匹配滤波器及对应于  $s(t)$  的输出信号。

**解：**输入信号  $s(t)$  的频谱为

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = a \int_0^{\tau} e^{-j\omega t} dt = \frac{a}{j\omega}(1 - e^{-j\omega\tau})$$

与输入信号  $s(t)$  对应的白噪声背景下匹配滤波器的传输函数为

$$H(\omega) = \frac{a}{j\omega}(e^{j\omega\tau} - 1)e^{-j\omega\tau} = \frac{a}{j\omega}(1 - e^{-j\omega\tau})$$

由上式所示的传输函数可得到匹配滤波器的组成, 如图 2.3.2 所示。匹配滤波器由视频放大器(放大系数为  $a$ )、积分器、延迟时间为  $\tau$  的延迟线及减法器组成。

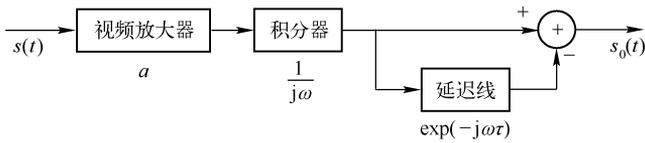


图 2.3.2 单个矩形脉冲信号匹配滤波器组成

与输入信号  $s(t)$  对应的白噪声背景下匹配滤波器的冲激响应为

$$h(t) = \begin{cases} a & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$$

将输入信号和匹配滤波器的冲激响应进行卷积运算, 可得匹配滤波器的输出信号为

$$s_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ a^2 t & 0 \leq t \leq \tau \\ a^2(2\tau - t) & \tau \leq t \leq 2\tau \\ 0 & t > 2\tau \end{cases}$$

输出信号峰值出现在  $t = \tau$  时刻并等于  $E$ , 这里有  $E = a^2\tau$ 。输入信号  $s(t)$  的波形及匹配滤波器的冲激响应, 如图 2.3.3 所示; 输出信号  $s_0(t)$  的波形如图 2.3.4 所示; 匹配滤波器把矩形脉冲变成了持续期加倍的三角形脉冲。

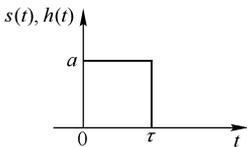


图 2.3.3 单个矩形脉冲信号波形及匹配滤波器冲激响应

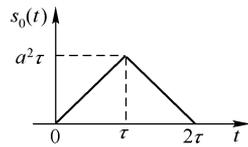


图 2.3.4 输出信号波形

**例 2.3.2** 设输入信号为单个射频脉冲信号, 脉冲宽度为  $\tau$ , 射频角频率为  $\omega_0$ , 其表示式为  $s(t) = aP(t)\cos\omega_0 t$ , 式中

$$P(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t < 0, t > \tau \end{cases}$$

求与之相匹配的白噪声背景下的匹配滤波器。

**解:** 输入信号  $s(t)$  的频谱为

$$S(\omega) = \frac{a}{2j(\omega - \omega_0)}[1 - e^{-j(\omega - \omega_0)\tau}] + \frac{a}{2j(\omega + \omega_0)}[1 - e^{-j(\omega + \omega_0)\tau}]$$

与输入信号  $s(t)$  对应的白噪声背景下匹配滤波器的传输函数为

$$H(\omega) = \frac{a(e^{-j\omega_0\tau} - e^{-j\omega\tau})}{2j(\omega - \omega_0)} + \frac{a(e^{j\omega_0\tau} - e^{-j\omega\tau})}{2j(\omega + \omega_0)}$$

与输入信号  $s(t)$  对应的白噪声背景下匹配滤波器的冲激响应为

$$h(t) = aP(\tau - t) \cos \omega_0(\tau - t)$$

## 2.4 色噪声背景下的匹配滤波器

上一节讨论了白噪声背景下的匹配滤波器，本节将讨论色噪声背景下的匹配滤波器问题。色噪声就是指非白噪声，它的功率谱密度不再是均匀的，相应地，它的相关函数也不再是  $\delta$  函数型的。色噪声背景下已知确定信号的匹配滤波器一般称为广义匹配滤波器，它应满足匹配滤波器方程及传输函数的普遍形式。

解决色噪声下的匹配滤波问题，可以用时域分析方法，也可以用频域分析方法。时域分析方法就是直接求解积分方程式(2.2.17)，得出色噪声背景下匹配滤波器的冲激响应  $h(t)$ ，具体方法见参考文献[27]。本节讨论色噪声背景下匹配滤波器的频域分析方法，通常应用白化处理方法求广义匹配滤波器的频域解。

白化处理方法就是：先将含有色噪声的输入信号通过一个白化滤波器，把色噪声变为白噪声，然后让白化滤波器输出通过白噪声背景下的匹配滤波器，从而实现色噪声背景下的匹配滤波。这样，就可将在白噪声下得到的结果应用到色噪声情况中。具体地说，就是把传输函数为  $H(\omega)$  的色噪声背景下匹配滤波器等效为两个滤波器的级联，它们的传输函数分别为  $H_w(\omega)$  和  $H_m(\omega)$ ，如图 2.4.1 所示。在图 2.4.1 中，第一个滤波器用来作为白化滤波器，将输入色噪声  $n(t)$  变换成白噪声  $n_1(t)$ ，因此，在它的输出端为已知信号  $s_1(t)$  与相加白噪声  $n_1(t)$  之和。第二个滤波器则是在白噪声下对于信号  $s_1(t)$  的匹配滤波器。

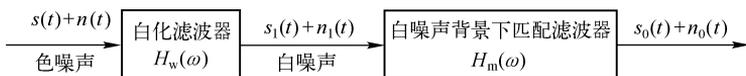


图 2.4.1 色噪声背景下匹配滤波器

### 1. 白化滤波器

设色噪声的功率谱密度为  $S_n(\omega)$ ，对于白化滤波器  $H_w(\omega)$ ，要使其输出噪声变为白噪声，则需满足

$$|H_w(\omega)|^2 S_n(\omega) = c \quad (2.4.1)$$

式中， $c$  为任意常数。为了简化运算，后面取  $c = 1$ 。

由式(2.4.1)得到

$$|H_w(\omega)|^2 = \frac{1}{S_n(\omega)} \quad (2.4.2)$$

由于噪声的功率谱密度  $S_n(\omega)$  为非负的实函数，则  $S_n(\omega)$  可分解为

$$S_n(\omega) = S_n^+(\omega) S_n^-(\omega) \quad (2.4.3)$$

式中， $S_n^+(\omega)$  的零、极点都在  $S$  的左半平面，即对于  $t < 0$ ，它的逆傅里叶变换为 0； $S_n^-(\omega)$  的零、极点都在  $S$  的右半平面，即对于  $t > 0$ ，它的逆傅里叶变换为 0。

由于噪声的功率谱密度  $S_n(\omega)$  为实函数，所以其零、极点是成对共轭出现的，即在  $S$  平面上关于虚轴对称。所以出现在  $S$  平面左半面的零点(或极点)，其在右半平面的对称点也一定是它的零点(或极点)。由此得到

$$S_n^+(\omega) = [S_n^-(\omega)]^* \quad (2.4.4)$$

故有

$$S_n(\omega) = S_n^+(\omega)S_n^-(\omega) = S_n^+(\omega)[S_n^+(\omega)]^* = S_n^-(\omega)[S_n^-(\omega)]^*$$

$$= |S_n^+(\omega)|^2 = |S_n^-(\omega)|^2 \quad (2.4.5)$$

由式(2.4.1)得到

$$|H_w(\omega)|^2 = \frac{1}{|S_n^+(\omega)|^2} = \frac{1}{|S_n^-(\omega)|^2} \quad (2.4.6)$$

进一步得到白化滤波器的传输函数为

$$H_w(\omega) = \frac{1}{S_n^+(\omega)} \quad (2.4.7)$$

注意：在构造式(2.4.7)所示的白化滤波器传输函数时，没有选择式(2.4.6)中的 $S_n^-(\omega)$ ，而是选择了 $S_n^+(\omega)$ 。这是因为 $S_n^+(\omega)$ 的零、极点均在 $S$ 平面的左半面，所以 $H_w(\omega)$ 的零、极点也全部在 $S$ 平面的左半面，其逆傅里叶变换是正时间函数，也就是说，这样构造的白化滤波器是物理可实现滤波器。

## 2. 白噪声下的匹配滤波器

由于输入确定信号 $s(t)$ 也通过了白化滤波器 $H_w(\omega)$ ，白化滤波器的输出确定信号 $s_1(t)$ 的频谱 $S_1(\omega)$ 为

$$S_1(\omega) = H_w(\omega)S(\omega) \quad (2.4.8)$$

由于白化滤波器 $H_w(\omega)$ 后串接的白噪声背景下匹配滤波器是针对白化滤波器的输出确定信号 $s_1(t)$ 的，故与 $s_1(t)$ 相匹配的白噪声背景下匹配滤波器的传输函数 $H_m(\omega)$ 为

$$H_m(\omega) = S_1^*(\omega)e^{-j\omega T} = H_w^*(\omega)S^*(\omega)e^{-j\omega T} \quad (2.4.9)$$

## 3. 色噪声下的匹配滤波器

由式(2.4.7)和式(2.4.9)，得到色噪声背景下广义匹配滤波器的传输函数为

$$H(\omega) = H_w(\omega)H_m(\omega) = H_w(\omega)H_w^*(\omega)S^*(\omega)e^{-j\omega T}$$

$$= \frac{1}{S_n^+(\omega)} \frac{1}{[S_n^+(\omega)]^*} S^*(\omega)e^{-j\omega T} = \frac{S^*(\omega)}{S_n(\omega)} e^{-j\omega T} \quad (2.4.10)$$

式(2.4.10)与式(2.2.33)完全一致。注意：在式(2.4.10)中， $H_w(\omega)$ 是物理可实现滤波器，但滤波器 $H_m(\omega)$ 有可能是物理不可实现的。因此，在构造式(2.4.10)所示的色噪声背景下匹配滤波器的传输函数时，若要求匹配滤波器物理可实现，式(2.4.10)中的 $H_m(\omega)$ 应该用物理可实现的 $H_m(\omega)$ 代替，或直接通过式(2.4.10)求取 $H(\omega)$ 所对应的物理可实现的广义匹配滤波器的传输函数 $[H(\omega)]^+$ 。

**例 2.4.1** 已知信号 $s(t) = \begin{cases} e^{-t/2} - e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ ，噪声的功率谱密度为 $S_n(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}$ ，求对于 $s(t)$ 匹配的广义匹配滤波器。

**解：**将色噪声的功率谱密度分解为因子乘式，即

$$S_n(\omega) = S_n^+(\omega)S_n^-(\omega) = \left( \frac{1}{1+j\omega} \right) \left( \frac{1}{1-j\omega} \right)$$

则白化滤波器的传输函数为

$$H_w(\omega) = \frac{1}{S_n^+(\omega)} = 1 + j\omega$$

已知信号  $s(t)$  的频谱为 
$$S(\omega) = \frac{2}{1+2j\omega} - \frac{1}{1+j\omega}$$

白化滤波器输出信号  $s_1(t)$  的频谱为

$$S_1(\omega) = S(\omega)H_w(\omega) = \left( \frac{2}{1+2j\omega} - \frac{1}{1+j\omega} \right) (1+j\omega) = \frac{1}{1+2j\omega}$$

白化滤波器输出噪声  $n_1(t)$  的功率谱密度为

$$S_{n1}(\omega) = S_n(\omega)|H_w(\omega)|^2 = 1$$

白化滤波器输出信号为 
$$s_1(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \quad t \geq 0$$

在白噪声  $n_1(t)$  下对  $s_1(t)$  的匹配滤波器的传输函数为

$$H_m(\omega) = S_1^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

式中,  $t_0$  是观测时刻。将  $S_1^*(\omega)$  代入上式, 得

$$H_m(\omega) = \frac{1}{1-2j\omega}e^{-j\omega t_0}$$

与  $H_m(\omega)$  相应的冲激响应为

$$h_m(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{(t-t_0)/2}, & -\infty < t < t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases}$$

可见, 在白噪声  $n_1(t)$  下对  $s_1(t)$  的匹配滤波器是物理不可实现滤波器。因此, 取  $h_m(t)$  的物理可实现部分作为物理可实现滤波器, 于是有

$$h_{mc}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{(t-t_0)/2}, & 0 < t < t_0 \\ 0, & t > t_0, \quad t < 0 \end{cases}$$

相应的传输函数为 
$$H_{mc}(\omega) = \int_0^{t_0} \frac{1}{2}e^{(t-t_0)/2}e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{1-2j\omega}(e^{-j\omega t_0} - e^{-t_0/2})$$

广义匹配滤波器的传输函数为

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H_w(\omega)H_{mc}(\omega) = \frac{1+j\omega}{1-2j\omega}(e^{-j\omega t_0} - e^{-t_0/2}) \\ &= \left( -\frac{1}{2} + \frac{3/2}{1-2j\omega} \right) (e^{-j\omega t_0} - e^{-t_0/2}) \end{aligned}$$

广义匹配滤波器的冲激响应为

$$h(t) = -\frac{1}{2}\delta(t-t_0) + \frac{1}{2}e^{-t_0/2}\delta(t) + \frac{3}{4}e^{(t-t_0)/2}[u(t_0-t) - u(-t)]$$

式中,  $u(t)$  表示单位阶跃函数。

## 本章小结

匹配滤波器是电子信息系统的基本组成部分, 其作用是使输出信噪比达到最大, 减小噪声对信号处理的影响。它只要求输出信噪比最大, 不要求输出信号波形和输入信号波形之间的相

似程度。

匹配滤波器具有以下特点：① 输入信号是确定信号加平稳噪声，而且信号与噪声相互独立。② 匹配滤波器是线性时变系统。③ 采用输出信噪比最大准则作为最佳准则。④ 若要得到匹配滤波器的时域冲激响应或传输函数，要求掌握确定信号的特性和噪声的部分统计特性，也就是，要求已知确定信号的波形和噪声的一、二阶矩，即噪声的平均值和自相关函数或功率谱密度。

本章首先讨论了匹配滤波器的概念、作用及研究思路。3.2 节依据最大信噪比准则，从时域和频域两个方面，推导出既适合于白噪声，又适合于色噪声的匹配滤波器方程的普遍形式和匹配滤波器传输函数的普遍形式。3.3 节针对白噪声，根据匹配滤波器方程的普遍形式和匹配滤波器传输函数的普遍形式，得出白噪声背景下匹配滤波器的冲激响应和传输函数，进一步讨论了白噪声背景下匹配滤波器的一些性质。3.4 节针对色噪声，采用白化处理方法，从频域求解色噪声背景下匹配滤波器的传输函数。

匹配滤波器是一种与输入确定信号相匹配的最佳线性滤波器，对输入确定信号具有针对性。匹配滤波器的设计需要注意物理可实现性。

匹配滤波器这种实现系统最佳的方法称为限定结构型方法。即首先限定了系统的结构，然后在给定的最佳准则下，寻求在此条件下的最佳系统。这种限定结构型方法的特点是：

(1) 在给定的最佳准则下，所得到的系统只是在所限定那类系统中的最佳者，但并不一定是所有系统中的最佳系统，例如，匹配滤波器只是最大信噪比准则下的最佳线性系统，但还可能其他结构的系统(比如非线性系统)比它更好，能给出更大的信噪比。

(2) 实现这种系统，只要求掌握信号与噪声的部分统计特性，而无须掌握它们的完备统计知识。

## 思考题

2.1 论述匹配滤波器的概念和特点，写出匹配滤波器方程的表达式并解释其物理意义。

2.2 简述白噪声、高斯白噪声和色噪声的含义。

2.3 简述匹配滤波器及广义匹配滤波器的含义，说明采用白化处理法求解广义匹配滤波器的方法并画出广义匹配滤波器原理框图。

2.4 说明匹配滤波器输出的观测时刻选择在输入信号末尾的原因。

2.5 简述白噪声背景下匹配滤波器与相关器的关系。

## 习题

2.1 设线性滤波器的输入为  $x(t) = s(t) + n(t)$ ，其中  $n(t)$  是功率谱密度为  $N_0/2$  的白噪声，信号为

$$s(t) = \begin{cases} A, & T \leq t \leq 2T \\ 0, & t < T, t > 2T \end{cases}, \text{ 式中, } A > 0, T > 0.$$

(1) 试求匹配滤波器的冲激响应及对应于  $s(t)$  的输出信号。

(2) 画出输入信号  $s(t)$  的波形、匹配滤波器冲激响应及输出信号  $s_0(t)$  的波形。

(3) 求匹配滤波器输出的信噪比。

2.2 设信号是矩形脉冲，脉冲持续时间为  $\tau_0$ 。信号表示式为  $s(t) = A \text{rect}(t/\tau_0)$ ，其中  $\text{rect}(x)$  为矩形函数，即  $\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & |x| > 1/2 \end{cases}$ ，设白噪声均值为 0、功率谱密度为  $N_0/2$ 。

(1) 求匹配滤波器的传输函数及冲激响应；

(2) 求输出信噪比;

(3) 求匹配滤波器的输出信号, 并画出其波形。

2.3 假设信号是具有矩形包络的高频脉冲, 脉冲持续时间为  $\tau_0$ , 高频信号频率为  $\omega_0$ 。信号表示式为

$$s(t) = A \text{rect}(t/\tau_0) \cos \omega_0 t, \text{ 其中 } \text{rect}(x) \text{ 为矩形函数, 即 } \text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & |x| > 1/2 \end{cases}, \text{ 设白噪声均值为 } 0、\text{ 功率谱密度为 } N_0/2。$$

(1) 求匹配滤波器的传输函数及冲激响应;

(2) 求匹配滤波器的输出信噪比;

(3) 求匹配滤波器的输出信号, 并画出其波形。

2.4 对于白噪声背景下正弦信号的非相干匹配滤波器(即匹配滤波器后接一个包络检波器), 证明其相位选择是任意的。

2.5 设线性滤波器的输入为  $x(t) = s(t) + n(t)$ , 其中  $n(t)$  是功率谱密度为  $N_0/2$  的白噪声, 信号为

$$s(t) = \begin{cases} A \exp[\alpha(t-T)], & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t < 0, t > T \end{cases}, \text{ 式中, } \alpha > 0. \text{ 试求匹配滤波器的传输函数和冲激响应。}$$

2.6 设线性滤波器的输入为  $x(t) = s(t) + n(t)$ , 其中  $n(t)$  是功率谱密度为  $N_0/2$  的白噪声, 信号为

$$s(t) = \begin{cases} \exp(-t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}。$$

(1) 求物理不可实现匹配滤波器的传输函数及冲激响应。

(2) 求物理可实现匹配滤波器的传输函数及冲激响应。

2.7 设线性滤波器的输入为  $x(t) = s(t) + n(t)$ , 其中  $n(t)$  是功率谱密度为  $N_0/2$  的白噪声, 信号为

$$s(t) = \begin{cases} \exp(-t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t < 0, t > T \end{cases}, \text{ 求匹配滤波器的传输函数及冲激响应。}$$

2.8 已知输入色噪声的功率谱密度为  $S_n(\omega) = 2\beta/(\omega^2 + \beta^2)$ , 其中  $\beta > 0$ , 求白化滤波器的传输函数  $H_w(\omega)$ 。

2.9 已知色噪声的功率谱密度为  $S_n(\omega) = \frac{2(\omega^2 + 1)}{\omega^2 + 4}$ , 求白化滤波器传输函数  $H_w(\omega)$ 。

2.10 已知输入色噪声的功率谱密度为  $S_n(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + \omega_0^2}$ , 求与已知信号  $s(t)$  匹配的广义匹配滤波器的冲激响应。

2.11 设线性滤波器的输入为  $x(t) = s(t) + n(t)$ , 其中信号为  $s(t) = A \cos \omega_0 t$ , 色噪声的功率谱密度为  $S_n(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + \omega_0^2}$ , 求对应于已知信号  $s(t)$  的非因果广义匹配滤波器的冲激响应。

2.12 设线性滤波器的输入为  $x(t) = s(t) + n(t)$ , 其中信号为  $s(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t < 0, t > \tau \end{cases}$ ; 平稳色噪声  $n(t)$  的功率谱密度为  $S_n(\omega) = \frac{2\alpha\omega^2}{\omega^2 + \alpha^2}$ , 求与已知信号  $s(t)$  匹配的广义匹配滤波器的传输函数。

2.13 设线性滤波器的输入为  $x(t) = s(t) + n(t)$ , 其中  $n(t)$  是功率谱密度为  $N_0/2$  的白噪声, 信号为  $s(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \tau_0 \\ 0, & t < 0, t > \tau_0 \end{cases}$ , 对输入  $x(t)$  的观测时间为  $(0, T)$ , 且  $T > \tau_0$ 。

(1) 试求匹配滤波器的冲激响应及对应于  $s(t)$  的输出信号。

(2) 求匹配滤波器输出的信噪比。

2.14 设线性滤波器的输入为  $x(t) = s(t) + n(t)$ , 其中  $n(t)$  是功率谱密度为  $N_0/2$  的白噪声, 信号为

$$s(t) = \begin{cases} \exp(j\omega_0 t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t < 0, t > T \end{cases}。$$

(1) 求匹配滤波器的传输函数、冲激响应及对应于  $s(t)$  的输出信号。

(2) 求匹配滤波器的输出信噪比。

2.15 设线性滤波器的输入为  $x(t) = s(t) + n(t)$ ，其中信号为  $s(t) = A \cos \omega_0 t$ ，色噪声的功率谱密度为

$S_n(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + \omega_0^2}$ ，求对应于已知信号  $s(t)$  的物理可实现的广义匹配滤波器的冲激响应。

2.16 设线性滤波器的输入为  $x(t) = s(t) + n(t)$ ，其中信号为  $s(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t < 0, t > \tau \end{cases}$ ，平稳色噪声  $n(t)$  的功

率谱密度为  $S_n(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}$ ，求对应于已知信号  $s(t)$  的广义匹配滤波器的冲激响应。