第 2 章　z 变换

信号与系统的分析方法除时域分析法外，还有变换域分析法。在离散时间信号与系统中，变换域分析就是 z 变换和傅里叶变换分析。在分析过程中，采用 z 变换往往比时域分析或傅里叶变换分析更方便，因此，z 变换是一个极其重要的数学工具。本章和第 3 章分别介绍离散时间信号的 z 变换和傅里叶变换，第 4 章将两种变换分别应用于离散时间系统的单位脉冲响应，得到系统函数和频率响应，从而引入系统的变换域分析法。

2.1　z 变换的定义

序列 $x[n]$ 的双边 **z** 变换（简称 **z** 变换）定义是

$$X(z) = \mathscr{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{2.1-1}$$

式中，z 是一个连续复变量，表示成 $z=re^{j\theta}$ 或 $z=\mathrm{Re}\{z\}+j\mathrm{Im}\{z\}$，它所在的复平面称为 z 平面。

单边 **z** 变换的定义是

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{2.1-2}$$

对于因果序列，两种 z 变换的计算结果是一样的。本书中如不特别说明，均指双边 z 变换,并且本书也只涉及双边 z 变换的应用。

只有当式(2.1-1)的无限项求和收敛，即 $|X(z)|<\infty$ 时，z 变换才存在。对任意给定的序列 $x[n]$，使其 z 变换收敛的所有 z 值的集合称为 $X(z)$ 的收敛域(ROC：Region of Convergence)。式(2.1-1)收敛的充分条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| < \infty \tag{2.1-3}$$

即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z^{-n}| < \infty \tag{2.1-4}$$

可见，若某个 z 值，例如 $z=z_0$ 在 ROC 内，则全部在 $|z|=|z_0|$ 确定的圆上的 z 值也一定在收敛域内。因此 z 变换是否收敛只取决于 $|z|$。也就是说，ROC 一定由 z 平面内以原点为中心的圆环所组成，圆环的外边界可以向外延伸至无穷大，内边界也可向内缩小到包括原点。所以 ROC 常表示成如下的不等式形式

$$R_- < |z| < R_+ \tag{2.1-5}$$

其中 R_- 和 R_+ 可以是包括 0 和 ∞ 在内的非负实数。ROC 也可采用图 2.1-1 所示的阴影部分表示。

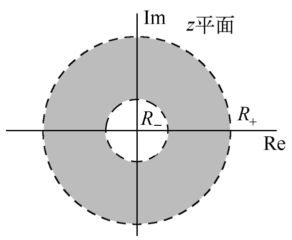


图 2.1-1　z 变换的收敛域

例 2.1-1　求单位阶跃序列 $x[n]=u[n]$ 的 z 变换及收敛域。

解：

$$X(z) = \mathscr{Z}\{u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots$$

这是 z 变换的级数形式，该级数当 $|z^{-1}| \geqslant 1$ 时是发散的，当 $|z^{-1}|<1$ 时收敛，可表示成封

闭函数形式

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

所以收敛域是 $1<|z|\leqslant\infty$，或简写成 $|z|>1$。

当 z 变换收敛并且可以表示成一个简单的有理函数，即

$$X(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-k}}=\frac{P(z)}{Q(z)} \tag{2.1-6}$$

时，z 变换是最重要和最有用的。使 $X(z)=0$ 的 z，称为 $X(z)$的零点；使 $X(z)$无穷大的 z，称为 $X(z)$的极点。式(2.1-6)给出的 z 变换，$P(z)$有 M 个根是 $X(z)$的零点，$Q(z)$有 N 个根是 $X(z)$的极点。这些根位于 z 平面的非零区域(包括∞，不包括原点)。除此之外，若 $M>N$，则还有 $M-N$ 阶极点在 $z=0$；若 $M<N$，则还有 $N-M$ 阶零点在 $z=0$。也就是说，z 变换在 z 平面内总是具有相同数目的零点和极点。

例 2.1-2　写出 z 变换 $X(z)=\dfrac{1-z}{1+2z+3z^2}$的所有零点和极点。

解：分别求 $X(z)$的分子和分母的根得出零点 $z=1$，极点 $z=-1+\sqrt{2}\mathrm{j}$ 和 $z=-1-\sqrt{2}\mathrm{j}$。

根据 z 变换的零点极点个数相等，判断还有一个零点。将 $z=0$ 和 $z=\infty$ 分别带入 $X(z)$ 求极限

$$\lim_{z\to 0}X(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1-z}{1+2z+3z^2}=1$$

$$\lim_{z\to\infty}X(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1-z}{1+2z+3z^2}=\lim_{z\to\infty}\frac{1/z^2-1/z}{1/z^2+2/z+3}=0$$

所有还有一个零点在 $z=\infty$。本例的 z 变换以 z 的正幂次方的形式给出，$z=\infty$ 处的零点或极点无法由分子和分母的根求出。

无论 z 变换以何种形式给出，只要分子和分母的根的个数不相等，就需将 $z=0$ 和 $z=\infty$ 分别带入检测遗漏的零点或极点。另外也容易证明，对于系数全部为实数的 z 变换，其复数零点或极点一定是以两两互为共轭的形式成对出现的，而实数零点和极点则可以单独存在。

根据 ROC 的定义，显然 ROC 内不能包括极点，因此 ROC 都是以极点所在的圆为边界的。在 z 变换的收敛域图上，常常用“o”标出零点，用“×”标出极点。

需要注意的是，任何封闭函数形式的 $X(z)$只代表在 ROC 内的函数，不在 ROC 内的点不一定是 $X(z)$的极点，因为若 $z=z_0$ 不在 ROC 内，则意味着当 z 取 z_0 时，z 变换按照定义式求和不收敛，无法得到 $X(z)$的封闭形式。例如 $X(z)=\dfrac{1}{1+2z^{-1}}$，$|z|>2$，虽然 $z=1$ 不在 ROC 内，但是 $X(1)=1/3\neq\infty$，可见 $z=1$ 并不是极点。所以要注意区分使 $X(z)$的封闭形式等于无穷大的点(极点)和使 z 变换求和不收敛的点(ROC 以外的点)，前者一定是后者，但后者不一定是前者。

2.2　z 变换的收敛域性质

不同类型的序列其收敛域的形式不同，分别讨论如下。设 N_1 和 N_2 是有限整数，R_- 和

R_+是有限正数。

1. 有限长序列

设有限长序列 $x[n]$ 的非零区间为 $N_1 \leqslant n \leqslant N_2$，则其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] z^{-n} \tag{2.2-1}$$

$X(z)$是有限项级数之和，只要级数的每一项有界，则级数就收敛。因此收敛域是整个 z 平面。当式(2.2-1)包含 z 的正幂项时，收敛域不包括 $z=\infty$。当式(2.2-1)包含 z 的负幂项时，收敛域不包括 $z=0$。所以收敛域有四种可能：

① 如果 $N_1<0$，$N_2>0$，则 $0<|z|<\infty$；

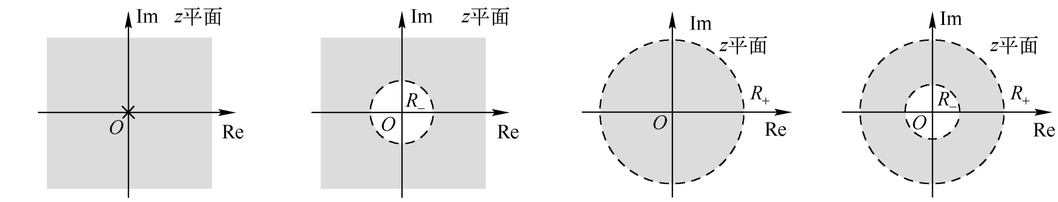
② 如果 $N_1 \geqslant 0$，$N_2>0$，即 $x[n]$因果，则 $0<|z| \leqslant \infty$；

③ 如果 $N_1<0$，$N_2 \leqslant 0$，则 $0 \leqslant |z|<\infty$；

④ 如果 $N_1=0$，$N_2=0$，即 $x[n]=\delta[n]$，则 $0 \leqslant |z| \leqslant \infty$。

图 2.2-1(a)给出了上述情况②的 ROC 图。

由于 ROC 内不能有极点，所以有限长序列的 z 变换的极点只可能位于 $z=0$ 或 $z=\infty$。



(a) 有限长序列($N_1 \geqslant 0$, $N_2>0$)　(b) 右边序列　(c) 左边序列($N_2 \leqslant 0$)　(d) 双边序列

图 2.2-1　不同类型序列的收敛域

2. 右边序列

设右边序列 $x[n]$ 的非零区间为 $n \geqslant N_1$，则其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n] z^{-n} \tag{2.2-2}$$

如果 $N_1<0$，则上式可以表示成

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{-1} x[n] z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \tag{2.2-3}$$

式(2.2-3)的第一项为有限长序列的 z 变换，收敛域为 $0 \leqslant |z|<\infty$；第二项是 z 的负幂级数，如果 $|z_0|=r_0$ 在 ROC 内，即 $x[n]z_0^{-n}$ 绝对可加，则 $|z_1|=r_1 \geqslant r_0$ 时，因为 r_1^{-n} 比 r_0^{-n} 衰减更快，所以 $x[n]z_1^{-n}$ 也一定绝对可加。所以其 ROC 是一个圆的外部。将式(2.2-3)中两项(可能没有第一项)的 ROC 取交集，得到右边序列的 ROC 是 z 平面上一个圆的外部($z=\infty$ 可能除外)，有两种可能：

① 如果 $N_1<0$，则 $R_-<|z|<\infty$；

② 如果 $N_1 \geqslant 0$，即 $x[n]$因果，则 $R_-<|z| \leqslant \infty$。

图形表示如图 2.2-1(b)所示。因为收敛域以极点所在圆为边界，所以右边序列的 z 变换的 ROC 一定在幅度(又称模)最大的有限极点所在圆的外部。

3. 左边序列

设左边序列 $x[n]$ 的非零区间为 $n \leqslant N_2$，则其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n]z^{-n} \tag{2.2-4}$$

如果 $N_2 > 0$，则上式可以表示成

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} x[n]z^{-n} + \sum_{n=1}^{N_2} x[n]z^{-n} \tag{2.2-5}$$

式(2.2-5)的第二项是因果有限长序列的 z 变换，收敛域为 $0 < |z| \leqslant \infty$；第一项是 z 的正幂级数，如果 $|z_0| = r_0$ 在 ROC 内，即 $x[x]z_0^{-n}$ 绝对可加，则 $|z_1| = r_1 \leqslant r_0$ 时，因为 r_1^{-n} 比 r_0^{-n} 增长得更慢，所以 $x[n]z_1^{-n}$ 也一定绝对可加。所以其 ROC 是一个圆的内部。将式(2.2-5)中两项(可能没有第二项)的 ROC 取交集，得到左边序列的 ROC 是 z 平面上一个圆的内部($z=$ **0** 可能除外)，有两种可能：

① 如果 $N_2 > 0$，则 $0 < |z| < R_+$；

② 如果 $N_2 \leqslant 0$，则 $0 \leqslant |z| < R_+$。

图 2.2-1(c)给出了上述情况②的 ROC 图。左边序列的 z 变换的 ROC 一定在模最小的有限极点所在圆的内部。

4. 双边序列

因为双边序列 $x[n]$ 的非零区间为 $-\infty \leqslant n \leqslant \infty$，所以其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{2.2-6}$$

式(2.2-6)的两项分别是左边序列和因果的右边序列的 z 变换，收敛域分别为 $0 \leqslant |z| < R_+$ 和 $R_- < |z| \leqslant \infty$，取它们的交集就得到双边序列的 ROC，有两种可能：

① 如果 $R_- < R_+$，则 ROC 是 z 平面上的一个圆环，$R_- < |\mathrm{z}| < R_+$；

② 如果 $R_- \geqslant R_+$，没有交集，则 z 变换不收敛。

图 2.2-1(d)给出了情况①的 ROC 图。双边序列 z 变换 ROC 的内边界是右边序列的 z 变换中模最大的极点所在的圆，外边界是左边序列的 z 变换中模最小的极点所在的圆。可见，只要是无限长序列，其 z 变换在 z 平面上一定有原点和无穷远以外的极点。

5. 因果序列

因果序列 $x[n]$ 的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N_2} x[n]z^{-n} \tag{2.2-7a}$$

或

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{2.2-7b}$$

式(2.2-7)不包含 z 的正幂项，当 $z=\infty$ 时，$X(\infty) = x[0] < \infty$，所以因果序列的 z 变换的 ROC 总是包含 $z=\infty$。

6. 绝对可和序列

设序列 $x[n]$ 绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \tag{2.2-8}$$

则其在单位圆上的 z 变换满足

$$|X(z)|\Big|_{|z|=1} \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \tag{2.2-9}$$

即 z 变换在单位圆上收敛，所以 ROC 包含单位圆 $|z|=1$。

序列的收敛域性质如表 2.2-1 所示。

表 2.2-1　序列的收敛域性质

序列类型	非零区间	收敛域
有限长序列	$[N_1, N_2]$	整个平面（如果 $N_1<0$，$z=\infty$ 除外；如果 $N_2>0$，$z=0$ 除外）
右边序列	$[N_1, \infty]$	圆的外部（如果 $N_1<0$，$z=\infty$ 除外）
左边序列	$[-\infty, N_2]$	圆的内部（如果 $N_2>0$，$z=0$ 除外）
双边序列	$[-\infty, \infty]$	圆环（不包括 $z=0$ 和 $z=\infty$）或 ROC 为空
因果序列	$[0, N_2]$ 或 $[0, \infty]$	包含 $z=\infty$
绝对可和序列	任意	包含 $|z|=1$

下面举例说明 z 变换的计算及如何根据序列类型和极点确定 ROC。

例 2.2-1　已知序列 $x[n]=a^n u[n]$，求其 z 变换及收敛域。

解：
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

因为是右边序列，$z=a$ 是极点，所以 ROC 为极点所在圆 $|z|=|a|$ 的外部；又由于是因果序列，所以 ROC 包含 $z=\infty$。因此 ROC 是 $|z|>|a|$。

例 2.2-2　已知序列 $x[n]=-a^n u[-n-1]$，求其 z 变换及收敛域。

解：$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u[-n-1] z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n}=\sum_{n=\infty}^{1} -a^{-n} z^{n}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

因为是左边序列，$z=a$ 处为极点，所以 ROC 为极点所在圆 $|z|=|a|$ 的内部；又由于 $X(z)$ 的级数展开式中无 z 的负幂项，所以 ROC 包含原点。因此 ROC 是 $|z|<|a|$。

由以上两例看出，一个左边序列与一个右边序列的 z 变换的数学表达式可能完全一样。所以，在给出 z 变换的闭式的同时，必须给出收敛域范围，才能唯一地确定一个序列。

例 2.2-3　已知序列 $x[n]=\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$，求其 z 变换及收敛域。

解：这是一个双边序列，其 z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$$
$$=\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{2-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

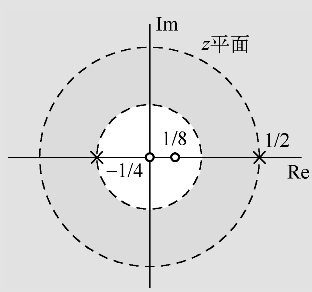


图 2.2-2　例 2.2-3 的 z 变换的收敛域

零点是 $z=1/8$ 和 $z=0$，极点 $z=-1/4$ 和 $z=1/2$ 分别由右边序列和左边序列产生，根据 ROC 的内边界是右边序列的极点所在的圆，外边界是左边序列的极点所在的圆，所以 ROC 是 $1/4<|z|<1/2$。本例的 ROC 及零极点图如图 2.2-2 所示。

表 2.2-2 给出了常见序列的 z 变换及收敛域，其中前 3 个是最基本的，其余的都可以利用 z 变换的性质(见 2.4 节)根据前 3 个得到。

表 2.2-2　常见序列的 z 变换及收敛域

序列	z 变换	收敛域	序列	z 变换	收敛域
$\delta[n]$	1	$0\leqslant\|z\|\leqslant\infty$	$na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$	$-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|<\|a\|$
$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|<1$	$e^{-j\omega_0 n}u[n]$	$\dfrac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}$	$\|z\|>1$
$R_N[n]$	$\dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}=$ $1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-(N-1)}$	$\|z\|>0$	$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$	$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-(\cos\omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|<\|a\|$	$r^n\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{r(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-2r(\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>\|r\|$
$a^n R_N[n]$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>0$	$r^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-r(\cos\omega_0)z^{-1}}{1-2r(\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>\|r\|$
$nu[n]$	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\|>1$			

2.3　z 反变换

从给定的 z 变换闭式 $X(z)$ 及收敛域还原出原序列 $x[n]$ 的过程称为 **z 反变换**，表示为

$$x[n]=\mathscr{Z}^{-1}\{X(z)\} \tag{2.3-1}$$

求 z 反变换的方法通常有四种：围线积分法(留数法)、观察法、部分分式展开法和幂级数展开法。由于围线积分法相对烦琐，对于在离散时间 LTI 系统分析中遇到的典型序列和 z 变换，后面三种方法已经足够了，所以本书不介绍围线积分法。

1. 观察法

这一方法适用于表 2.2-2 中列出的一些常用的变换。

2. 部分分式法

对于不是表 2.2-2 所列的有理函数形式的 z 变换，可以将 $X(z)$ 分解成一些简单项之和，其中每一项可以通过查表得到反变换，然后利用 z 变换的线性性质(见 2.4 节)，整个 z 变换的反变换取各项的反变换之和。

假设 $X(z)$ 具有式(2.1-6)的有理函数形式，它有一个 s 阶极点 z_0 和 $(N-s)$ 个一阶极点 z_k，$k=1, 2, \cdots, N-s$，则 $X(z)$ 可以展开成以下的部分分式形式

$$X(z)=\sum_{n=0}^{M-N}B_n z^{-n}+\sum_{k=1}^{N-s}\frac{A_k}{1-z_k z^{-1}}+\sum_{m=1}^{s}\frac{C_m}{(1-z_0 z^{-1})^m} \tag{2.3-2}$$

其中 B_n 是 $X(z)$ 的整式部分的系数，可用长除法求出。当 $M<N$ 时，各个 $B_n=0$。系数 A_k 和

C_m 的求解公式分别是

$$A_k=\left[(1-z_kz^{-1})X(z)\right]_{z=z_k},\quad k=1,2,\cdots,N-s \tag{2.3-3}$$

$$C_m=\frac{1}{(s-m)!\ (-z_0)^{s-m}}\left\{\frac{\mathrm{d}^{s-m}}{\mathrm{d}(z^{-1})^{s-m}}[(1-z_0z^{-1})^sX(z)]\right\}\Bigg|_{z=z_0},\quad m=1,2,\cdots,s \tag{2.3-4}$$

例 2.3-1　已知序列的 z 变换是

$$X(z)=\frac{3-4z^{-1}+2z^{-2}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}=\frac{3-4z^{-1}+2z^{-2}}{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})},\quad \frac{1}{2}<|z|<2$$

利用部分分式法求 z 反变换。

解：根据极点 $z=2$ 和 $z=1/2$，将 $X(z)$ 展开成部分分式：

$$X(z)=B_0+\frac{A_1}{1-2z^{-1}}+\frac{A_2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

B_0 利用长除法求得(分子、分母均按照 z^{-1} 的降幂排列)：

$$\begin{array}{r} 2\\ z^{-2}-\frac{5}{2}z^{-1}+1\ \overline{\big)\,2z^{-2}-4z^{-1}+3}\\ \underline{2z^{-2}-5z^{-1}+2}\\ z^{-1}+1 \end{array}$$

所以

$$X(z)=2+\frac{z^{-1}+1}{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

系数 A_1 和 A_2 利用式(2.3-3)求得：

$$A_1=[(1-2z^{-1})X(z)]_{z=2}=2,\quad A_2=\left[(1-\frac{1}{2}z^{-1})X(z)\right]_{z=1/2}=-1$$

所以

$$X(z)=2+\frac{2}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

由收敛域可知，极点 $z=2$ 对应的是左边序列，$z=1/2$ 对应的是右边序列。上式的 3 项可分别查表 2.2-2 得到反变换，所以最终的结果是

$$x[n]=2\delta[n]-2\times 2^nu[-n-1]-\left(\frac{1}{2}\right)^nu[n]$$

3. 幂级数展开法

因为 $x[n]$ 的 z 变换定义为 z^{-1} 的幂级数，即

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\cdots+x[-1]z+x[0]z^0+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots$$

所以只要把 $X(z)$ 展开成幂级数，则级数的系数就是序列 $x[n]$ 的样本。

对于对数、正弦等超越函数，幂级数展开已经列成表格可查；对于有限长序列的 z 变换，其本身就是幂级数展开式；对于有理分式形式的 $X(z)$（序列无限长），可以采用长除法得到幂级数展开式。在用长除法时，如果 $X(z)$ 的 ROC 为一个圆的外部，则 $x[n]$ 必为右边序列，$X(z)$ 的分子、分母应按 z^{-1} 的升幂（或 z 的降幂）排列；如果 ROC 是一个圆的内部，则 $x[n]$ 必

然是左边序列，$X(z)$的分子、分母应按z^{-1}的降幂（或z的升幂）排列。

例2.3-2　已知序列的z变换为

$$X(z)=(1+0.5z^{-1})(1-0.1z^{-1}),\quad |z|>0$$

求反变换。

解：很容易直接得到幂级数展开式为

$$X(z)=(1+0.5z^{-1})(1-0.1z^{-1})=1+0.4z^{-1}-0.05z^{-2}$$

观察得到序列有限长，为

$$x[n]=\delta[n]+0.4\delta[n-1]-0.05\delta[n-2]$$

例2.3-3　已知序列的z变换为

$$X(z)=\frac{3-2z^{-1}-2z^{-5}}{(1-z^{-5})(1-2z^{-1})},\quad 1<|z|<2$$

利用长除法求z反变换。

解：根据ROC可知是双边序列，需要分成两部分分别求反变换。

首先将$X(z)$展开成部分分式

$$X(z)=\frac{2}{1-2z^{-1}}+\frac{1}{1-z^{-5}}$$

根据ROC，上式第一项对应于左边序列，可以查表2.2-2得到反变换是$-2^{n+1}u[-n-1]$。第二项对应于右边序列，按z^{-1}的升幂排列做长除法：

$$\begin{array}{r l}
 & 1+z^{-5}+z^{-10}+\cdots \\
1-z^{-5} & \overline{)\,1\qquad\qquad\qquad} \\
 & \underline{1-z^{-5}} \\
 & \quad z^{-5} \\
 & \quad \underline{z^{-5}-z^{-10}} \\
 & \qquad z^{-10} \\
 & \qquad \underline{z^{-10}-z^{-15}} \\
 & \qquad\quad z^{-15} \\
 & \qquad\quad \vdots
\end{array}$$

所以$X(z)$反变换的结果是

$$x[n]=-2^{n+1}u[-n-1]+\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-5k]$$

2.4　z变换的性质

z变换的性质在求z变换及反变换，以及求卷积和解差分方程等方面特别有用。为了表述方便，引入如下符号表示

$$x[n]\overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow}X(z),\ \mathrm{ROC}=R_x$$

$$y[n]\overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow}Y(z),\quad \mathrm{ROC}=R_y$$

1. 线性性质

$$ax[n]+by[n]\overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow}aX(z)+bY(z),\quad \mathrm{ROC}\ 包含\ R_x\cap R_y \tag{2.4-1}$$

其中 a，b 为任意常数。ROC 一般为两个序列的 ROC 的交集。如果线性组合使得引入的某些零点抵消了极点，则 ROC 可能扩大。这一性质在 z 反变换中已经用过。

2. 移位性质

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} z^{-n_0}X(z), \qquad \mathrm{ROC}=R_x \tag{2.4-2}$$

其中 n_0 为任意整数。其 ROC 同原序列的 ROC，除了可能加上或去除 $z=0$ 或 $z=\infty$ 以外。例如，$\mathscr{Z}\{\delta[n]\}=1$，在 z 平面处处收敛，而 $\mathscr{Z}\{\delta[n-1]\}=z^{-1}$，在 $z=0$ 处不收敛。

证明：按 z 变换的定义

$$\mathscr{Z}\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n}$$

做变量代换令 $m=n-n_0$，得到

$$\mathscr{Z}\{x[n-n_0]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-(m+n_0)} = z^{-n_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m} = z^{-n_0}X(z)$$

由于乘以 z^{-n_0}，在 $z=0$ 或 $z=\infty$ 处可能会出现新的极点或消去原有极点，所以 ROC 与 $X(z)$ 相同，除了可能加上或去除 $z=0$ 或 $z=\infty$ 以外。得证。

例 2.4-1　求 $X(z)=\dfrac{1}{z-1}$，$|z|>1$ 的 z 反变换。

解：
$$X(z)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}=z^{-1}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$$

因为
$$u[n] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{1}{1-z^{-1}}, \qquad |z|>1 \tag{2.4-3}$$

利用移位性质，得到 $x[n]=u[n-1]$。

3. 乘以指数序列（z 域尺度变换性质）

$$a^n x[n] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} X\left(\frac{z}{a}\right), \qquad \mathrm{ROC}=|a|R_x \tag{2.4-4}$$

其中 a 为任意常数。

证明：
$$\mathscr{Z}\{a^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

如果 $X(z)$ 在 $z=z_0$ 处有零点或极点，则 $X(a^{-1}z)$ 将在 $a^{-1}z=z_0$，即 $z=az_0$ 处有零点或极点。也就是说，如果 a 为实数，则零点和极点在 z 平面沿径向移动，所以 ROC 也根据 $|a|$ 向外或向内变化；如果 a 是模为 1 的复数，即 $a=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$，则零点和极点沿着以原点为圆心的圆旋转一个角度 α，ROC 不变。若 a 是模不为 1 的复数，则零点和极点既有旋转又有径向运动。所以收敛域的边界也乘以 $|a|$。得证。

例 2.4-2　求 $x[n]=r^n\sin(\omega_0 n)u[n]$ 的 z 变换，其中 $r>0$。

解：因为
$$x[n]=\frac{1}{2\mathrm{j}}(r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0})^n u[n]-\frac{1}{2\mathrm{j}}(r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0})^n u[n]$$

利用线性性质和乘以指数序列性质

$$X(z)=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)\Bigg|_{z\to\frac{z}{r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}}}-\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)\Bigg|_{z\to\frac{z}{r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}}}=\frac{r(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-2r(\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

ROC 是 $|z|>r$。

4. 线性加权（z 域微分性质）

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} -z\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z),\qquad \mathrm{ROC}=R_x \tag{2.4-5}$$

证明：将式(2.1-1)两边对 z 求导，得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^{-n})\\ &= -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx[n]z^{-n} = -z^{-1}\mathscr{Z}\{nx[n]\}\end{aligned}$$

所以

$$\mathscr{Z}\{nx[n]\} = -z\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)$$

得证。

例 2.4-3　求 $X(z)=\dfrac{3z^{-3}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2}$，$|z|<\dfrac{1}{4}$ 的 z 反变换。

解：因为

$$Y(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}},\qquad |z|<\frac{1}{4}$$

其 z 反变换是

$$y[n]=-\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1]$$

根据微分性质得到

$$-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}Y(z)=\frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}$$

其 z 反变换是

$$ny[n]=-n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1]$$

将 $-z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}Y(z)$ 与 $X(z)$ 比较，再利用时移性质得到 $X(z)$ 的反变换是

$$x[n]=12(n-2)y[n-2]=-12(n-2)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}u[-n+1]$$

5. 取共轭

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} X^*(z^*),\qquad \mathrm{ROC}=R_x \tag{2.4-6}$$

证明：$\mathscr{Z}\{x^*[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*[n]z^{-n} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n](z^*)^{-n}\right]^* = X^*(z^*)$

若 $X(z)$ 的极点是 z_0，则 $X^*(z^*)$ 的极点是 $z_0{}^*$，两个极点的模相同，所以 ROC 不变。得证。

对于实数序列，由于其虚部为 0，所以有 $x[n]=x^*[n]$，则 $x[n]$ 和 $x^*[n]$ 的 z 变换相等，根据上述性质就有 $X(z)=X^*(z^*)$。所以如果 $X(z_0)=0$，则一定有 $X^*(z_0^*)=X(z_0)=0$，即 z_0 和 z_0^* 都是零点。因此实序列的 z 变换的复数零点一定以两两互为共轭的形式成对出现。

对于实数零点，其共轭就等于其本身，所以实数零点可以单独存在。同理复数极点也以共轭对的形式成对出现。实际上，实序列的 z 变换即是 2.1 节提到的系数全部为实数的情况。

6. 反转

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} X\left(\frac{1}{z}\right), \quad \mathrm{ROC} = \frac{1}{R_x} \tag{2.4-7}$$

由于自变量取倒数，所以零点和极点取倒数，ROC 的边界也取倒数。需要注意的是，序列反转后如果类型改变了，则收敛域的特点也应相应地改变。

例 2.4-4　设 $x[n]$ 的 z 变换的 ROC 为 $b<|z|<a$，写出 $x[-n]$ 的 z 变换的 ROC。

解：设 $z=z_0$ 是 $X(z)$ 的极点，即 $X(z_0)=\infty$，则根据式(2.4-7)知 $x[-n]$ 的 z 变换在 $z=1/z_0$ 处的取值为

$$X(1/z)\big|_{z=1/z_0} = X(z_0) = \infty$$

所以 $z=1/z_0$ 是 $x[-n]$ 的 z 变换的极点。所以新序列的 ROC 是 $\frac{1}{a}<|z|<\frac{1}{b}$。

例 2.4-5　已知 $x[n]$ 的 z 变换是 $X(z)$，用 $X(z)$ 表示 $x^*[-n]$ 的 z 变换，并证明共轭对称序列的 z 变换的零点以两两互为共轭倒数的形式成对出现，极点也以两两互为共轭倒数的形式成对出现，单位圆上的零极点可以单独存在。

解：根据式(2.4-6)和式(2.4-7)写出 $x^*[-n]$ 的 z 变换是

$$x^*[-n] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} X^*(1/z^*), \quad \mathrm{ROC} = 1/R_x$$

共轭对称序列满足 $x^*[-n]=x[n]$，所以二者的 z 变换相等，即

$$X^*(1/z^*) = X(z)$$

所以，若 z_0 是 $X(z)$ 的零点，即 $X(z_0)=0$，则

$$X(1/z_0^*) = X^*(z_0) = 0$$

说明 $1/z_0^*$ 也是 $X(z)$ 的零点，即零点以共轭倒数的形式成对存在。当 z_0 在单位圆上，即 $z_0=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ 时，$1/z_0^* = 1/\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$，所以单位圆上的零点的共轭倒数就是其本身。同理可证极点也如此。需要注意的是，互为共轭倒数的两个复数的相角是相同的，即同在实轴的上方或下方。

另外，满足 $x[n]=x[-n]$ 的偶序列既是实序列又是共轭对称序列，所以结合实序列 z 变换的零点(极点)特点以及例 2.4－5 的结论可以得出，偶序列的 z 变换的零点(极点)具有以下特点：不在单位圆上的复数零点(极点)均以 z_0、z_0^*、$1/z_0$ 和 $1/z_0^*$ 的形式 4 个一组地出现，单位圆上的零点(极点)以共轭对 z_0 和 z_0^* 的形式成对出现，实数零点(极点)以倒数对 z_0 和 $1/z_0$ 的形式成对出现，单位圆上的实数零点(极点)即 1 和 －1 可以单独存在。

7. 卷积性质

$$x[n]*y[n] \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} X(z)Y(z), \quad \mathrm{ROC}\ 包含\ R_x \cap R_y \tag{2.4-8}$$

ROC 是两个 ROC 的交集。如果一个 z 变换的极点和另一个 z 变换的零点互相抵消，则 ROC 可能扩大。

证明：

$$\mathscr{Z}\{x[n]*y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[n-m]\right)z^{-n}$$

交换求和顺序，得到 $$\mathscr{Z}\{x[n]*y[n]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-m]z^{-n}\right)$$

并利用时移性质，有 $$\mathscr{Z}\{x[n]*y[n]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m}Y(z) = X(z)Y(z)$$

得证。

利用 z 变换的卷积定理求两个序列的卷积或求 LTI 系统的输出会比在时域直接求更方便。

例 2.4-6　设 $x_1[n]=a^n u[n]$，$x_2[n]=\delta[n]-a\delta[n-1]$，求卷积 $x_3[n]=x_1[n]*x_2[n]$。

解：
$$X_1(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},\qquad |z|>|a|$$
$$X_2(z)=1-az^{-1},\qquad 0<|z|\leqslant\infty$$

所以 $$X_3(z)=X_1(z)X_2(z)=1,\ 0\leqslant|z|\leqslant\infty$$

其 z 反变换为 $$x_3[n]=\delta[n]$$

显然，在 $z=a$ 处，$X_1(z)$的极点被 $X_2(z)$的零点所抵消，所以 $X_3(z)$的 ROC 扩大了。

8. 初值定理

如果 $x[n]$是因果序列，那么 $x[0]=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)$。（2.4-9）

证明：对于因果序列
$$\lim_{z\to\infty}X(z) = \lim_{z\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n} = \lim_{z\to\infty}\{x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots\} = x[0]$$
得证。

例 2.4-7　设序列 $x[n]$ 的 z 变换为 $X(z)=\dfrac{2-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$，ROC 包括单位圆。求$x[0]$的值。

解：
$$X(z)=\frac{2-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}=\frac{2-\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})}=\frac{-4/9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{22/9}{1-2z^{-1}}$$

因为 ROC 包括单位圆，所以 $1/2<|z|<2$，因此 $x[n]$是双边序列，不能直接应用式(2.4-9)的初值定理。根据 $X(z)$的级数展开
$$X(z)=(\cdots+x[-2]z^2+x[-1]z^1)+(x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots)$$
可知当第 1 个括号内 $z=0$ 以及第 2 个括号内 $z=\infty$ 时，$X(z)=x[0]$，所以我们对 $X(z)$对应于左边序列的部分和对应于右边序列的两部分分别求极限得到
$$x[0]=\lim_{z\to\infty}\frac{-4/9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\lim_{z\to0}\frac{22/9}{1-2z^{-1}}=-4/9$$

9. 终值定理

如果 $x[n]$ 是因果序列，且 $X(z)$ 的极点处于单位圆 $|z|=1$ 以内（单位圆上最多在 $z=1$ 处有一阶极点），那么

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)] \tag{2.4-10}$$

证明：利用序列的移位性质和 $x[n]$ 为因果序列可得

$$\begin{aligned}(z-1)X(z) &= \mathscr{Z}\{x[n+1]-x[n]\} = \sum_{n=-1}^{\infty}(x[n+1]-x[n])z^{-n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{m=-1}^{n}(x[m+1]-x[m])z^{-m}\end{aligned}$$

已知 $X(z)$ 的极点在单位圆内，最多可能在 $z=1$ 处有一阶极点。由于 $X(z)$ 乘以因子 $(z-1)$ 将抵消 $z=1$ 处可能的极点，所以 $(z-1)X(z)$ 在 $1\leqslant|z|\leqslant\infty$ 上都收敛。所以可以取 $z\to 1$ 的极限，即

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)] &= \lim_{n\to\infty}\sum_{m=-1}^{n}(x[m+1]-x[m])\\ &= \lim_{n\to\infty}\{(x[0]-0)+(x[1]-x[0])+(x[2]-x[1])+\cdots+(x[n+1]-x[n])\}\\ &= \lim_{n\to\infty}x[n+1] = \lim_{n\to\infty}x[n]\end{aligned}$$

得证。

例 2.4-8　已知因果序列 $y[n]=x[n]*u[n]$，且有 $\lim_{n\to\infty}y[n]=0$，由此推断 $x[n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 的零点或极点情况。

解：利用卷积性质有

$$Y(z)=X(z)U(z)=\frac{X(z)}{1-z^{-1}}$$

又利用终值定理有

$$\lim_{n\to\infty}y[n]=\lim_{z\to 1}[(z-1)Y(z)]=0$$

所以 $\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\dfrac{X(z)}{1-z^{-1}}\right]=\lim_{z\to 1}[zX(z)]=0$

所以可以断定 $X(z)$ 在 $z=1$ 处有零点。

z 变换的性质总结于表 2.4-1 中。

表 2.4-1　z 变换的性质

序　　列	z 变换	收　敛　域
$x[n]$ $y[n]$	$X(z)$ $Y(z)$	R_x R_y
$ax[n]+by[n]$	$aX(z)+bY(z)$	包含 $R_x\cap R_y$
$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x，可能加上或去除 $z=0$ 或 $z=\infty$
$a^n x[n]$	$X\left(\dfrac{z}{a}\right)$	$\|a\|R_x$
$nx[n]$	$-z\cdot\dfrac{d}{dz}X(z)$	R_x
$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
$x[n]*y[n]$	$X(z)Y(z)$	包含 $R_x\cap R_y$
$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$		$x[n]$ 因果，ROC 包括∞
$x[\infty]=\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$		$x[n]$ 因果，ROC 包括∞

2.5　小　　结

本章内容包括 z 变换及 z 反变换的定义、收敛域及性质。z 变换的收敛域很重要，它与 z 变换的数学表达式联合起来才能唯一确定一个序列。ROC 的性质以及 z 变换的性质在正变换和反变换计算等场合都需要加以充分利用。最后要说明的是，z 变换只是一种数学工具，不像我们第 3 章将要讲的傅里叶变换那样代表具体的物理意义，但是它能方便离散时间信号和系统的分析。本章已经看到它在求卷积方面的应用，后面章节还会涉及更多的应用。

习　　题

单项选择题(2-1 ~2-8 题)

2-1　实序列的 z 变换的零极点图可以是图 T2-1 中的(　　)。

2-2　共轭对称序列的 z 变换的零极点图可以是图 T2-1 中的(　　)。

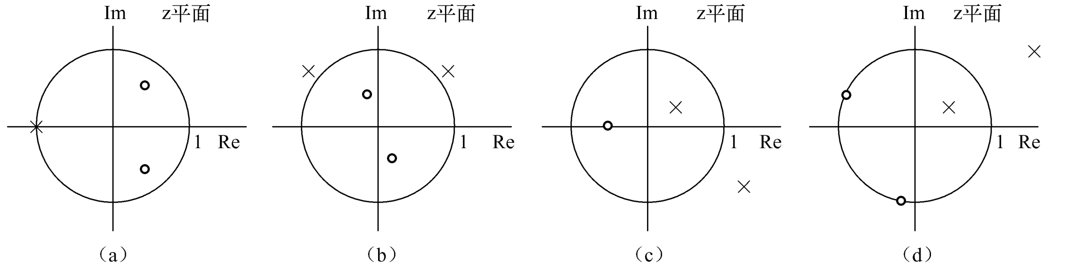


图 T2-1

2-3　左边序列 $x[n]$ 的 z 变换是 $X(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+2z^{-1}}$，则其零极点图及 ROC 是图 T2-2 中的(　　)。

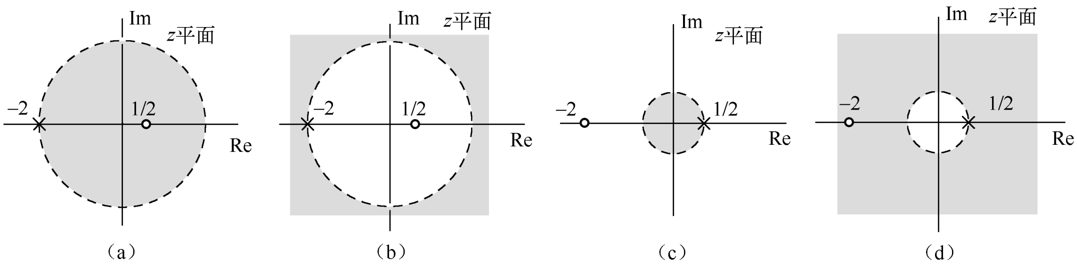


图 T2-2

2-4　以下几个 z 变换的 ROC(其中 a 和 b 是有限正数)，对应左边序列的是(　　)。

(A) $|z|>b$　　(B) $0<|z|<a$　　(C) $b<|z|<a$　　(D) $b<|z|<\infty$

2-5　序列 $x[n]=(1/2)^{|n|}$ 的 z 变换及收敛域为(　　)。

(A) $X(z)=\dfrac{3}{(2z-1)(2-z)}$，$\dfrac{1}{2}<|z|<2$　　(B) $X(z)=\dfrac{-3}{(2z-1)(2-z)}$，$|z|>2$

(C) $X(z)=\dfrac{3z}{(2z-1)(2-z)}$，$|z|>2$　　(D) $X(z)=\dfrac{-3z}{(2z-1)(2-z)}$，$\dfrac{1}{2}<|z|<2$

2-6　已知 $x[n]$ 的 z 变换是 $X(z)$，ROC 是 $|z|>a$，则 $x[-n-5]$ 的 z 变换和 ROC 是(　　)。

(A) $z^{-5}X(1/z)$，$|z|>1/a$　　(B) $z^{5}X(1/z)$，$|z|>1/a$

(C) $z^{-5}X(1/z)$，$|z|<1/a$　　(D) $z^{5}X(1/z)$，$|z|<1/a$

2-7　已知 $n>0$ 时序列 $x[n]=0$，其 z 变换为 $X(z)=\dfrac{2-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-2z^{-1}}$，则 $x[0]$ 的值为(　　)。

(A) 2　　(B) 1　　(C) 1/3　　(D) 1/6

2-8　已知 $x[n]$ 是一个长度大于 1 的因果序列，且 $x[0]\neq 0$，其 z 变换是 $X(z)$。以下说法错误的是(　　)。

(A) $X(z)$ 在 $z=\infty$ 处没有零点　　(B) $X(z)$ 在 $z=\infty$ 处没有极点

(C) $X(z)$ 在 $z=0$ 处有零点　　(D) $X(z)$ 在 $z=0$ 处有极点

填空题(2-9 ~2-17 题)

2-9 考虑 $x[n]$ 的 z 变换 $X(z)$，其零极点图如图 T2-3 所示。

(a) 已知 $x[n]$ 绝对可和，则 $X(z)$ 的收敛域为________，这时相应的序列是________边序列；

(b) 有________种可能的双边序列具有如 T2-2 所示的零极点图；

(c) 如果 $x[n]$ 是因果序列，则 $X(z)$ 的收敛域为________。

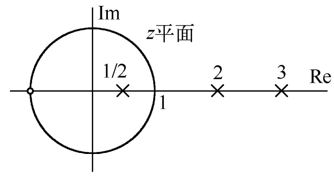


图 T2-3

2-10 不需求出 $X(z)$，直接写出下列序列 z 变换的 ROC。

(a) $x[n]=\begin{cases}1, & -10\leqslant n\leqslant -5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 的 ROC 是________；

(b) $x[n]=3^n u[-n+2]$ 的 ROC 是________；

(c) $x[n]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}-(2e^{j\pi/5})^n\right]u[n+2]$ 的 ROC 是________；

(d) $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u[n]+(1+j)^{n-2}u[-n-1]$ 的 ROC 是________。

2-11 已知序列 $x[n]=\{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 2, 1\}$，写出其 z 变换 $X(z)=$________，ROC 为________。

2-12 $x[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-2k]$ 的 z 变换是 $X(z)=$________，ROC 为________。

2-13 $X(z)=(1-2z)(1+3z^{-1})(1-z^{-1})$ 的反变换为 $x[n]=$________。

2-14 已知序列 $x[n]$ 的 z 变换是 $X(z)$，其零点和极点分别是 c_k，$k=0, 1, \cdots, N-1$ 和 d_k，$k=0, 1, \cdots, M-1$。则序列 $y[n]=(-1)^n x[n]$ 的 z 变换 $Y(z)=$________(用 $X(z)$ 表示)，零点是________，极点是________。

2-15 一实数序列满足 $x[n]=x[10-n]$，已知其 z 变换在有限 z 平面上有一个复数零点 $re^{j\theta}(r\neq 1, r\neq 0, \theta\neq 0)$ 和一个实数极点 $\rho(\rho\neq 0, |\rho|\neq 1)$，可以推断出的其他零点有______________，其他极点有______________。

2-16 某序列 $x[n]$ 的 z 变换为 $X(z)=\dfrac{5}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\dfrac{1}{1-3z^{-1}}$，收敛域包括单位圆。则其 $x[0]$ 的值为________。

2-17 已知 $x[n]$ 的 z 变换是 $X(z)$，写出序列 $r_{xx}[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x^*[k]x[k+n]$ 的 z 变换 $R_{xx}(z)=$________。

计算、证明与作图题(2-18 ~2-28 题)

2-18 画出下面每个 z 变换的零极点图，并标出其收敛域。

(a) $X(z)=\dfrac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)}$，$x[n]$ 为因果序列；　(b) $X(z)=\dfrac{1+z^{-1}-2z^{-2}}{1-\frac{25}{12}z^{-1}+z^{-2}}$，$x[n]$ 绝对可和。

2-19 已知 $x[n]$ 的 z 变换是 $X(z)=\dfrac{1-\frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{9}z^{-2}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}\right)}$，$X(z)$ 可能有多少种不同的收敛域？分别对应什么类型的序列？

2-20 利用 z 变换的性质求下列序列的 z 变换，并画出零极点图和收敛域。

(a) $x[n]=(0.5e^{j0.3\pi})^n R_N[n]$　(b) $x[n]=\begin{cases}n, & 0\leqslant n\leqslant N\\ 2N-n, & N+1\leqslant n\leqslant 2N\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

2-21 利用 z 变换的性质求下列序列的 z 变换及 ROC。

(a) $x[n]=n(1/2)^n u[n-2]$ (b) $x[n]=n\cos(\omega_0 n)u[n]$，其中 ω_0 为常数 (c) $x[n]=|n|(1/4)^{|n|}$

2-22 求以下 z 变换的反变换。

(a) $X(z)=\dfrac{1}{1-a^2z^{-2}}$，$|z|>|a|$ (b) $X(z)=\dfrac{1}{1-a^3z^{-3}}$，$|z|>|a|$ (c) $X(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-z^{-5}}$，$|z|>1$

2-23 用长除法求以下 z 反变换。

(a) $X(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-3}}$，$|z|>2^{-1/3}$ (b) $X(z)=\dfrac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$，$x[n]$为右边序列

(c) $X(z)=\dfrac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}$，$|z|>2$

2-24 序列 $x_1[n]=(1/2)^n u[n]$，$x_2[n]=-3^n u[-n-1]$，利用 z 变换求以下序列。

(a) $y[n]=x_1[n-3]*x_2[n+1]$ (b) $y[n]=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]x_2[k+n]$

2-25* 图 T2-4 是一个因果序列 $x[n]$ 的 z 变换的零极点图，不用求 z 变换，直接画出以下序列 z 变换的零极点图和收敛域。

(a) $y[n]=x[n-3]$ (b) $y[n]=x[-n]$ (c) $y[n]=x[4-n]$

(d) $y[n]=x^*[n]$ (e) $y[n]=0.2^n x[n]$

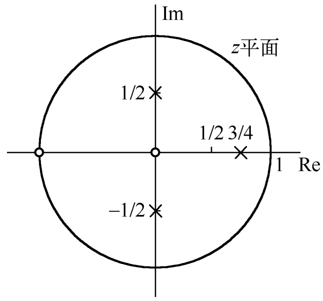


图 T2-4

2-26* 已知 $x[n]$是因果序列，其 z 变换为 $X(z)$，收敛域为 $|z|>|a|$，且 $X(z)$在 $z=1$ 处没有零点。考虑序列 $y[n]=\sum\limits_{m=0}^{n}x[m]$，用 $X(z)$表示其 z 变换 $Y(z)$，并写出收敛域。

2-27* 利用序列的线性加权性质求解本题。

(a) 证明 $\mathscr{Z}\{n^2x[n]\}=-z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[-z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)\right]$；

(b) 求 $x[n]=n^2a^nu[n]$的 z 变换；

(c) 求 $x[n]=(n-1)^2u[n-1]$的 z 变换；

(d) 求 $x[n]=(n+1)^2(u[n]-u[n-3])*(u[n]-u[n-4])$的 z 变换。

2-28* 设因果序列 $g[n]$的 z 变换为 $G(z)=\sin(z^{-1})(1+2z^{-1}+3z^{-2})$，求 $g[11]$的值。

MATLAB 上机题(2-29 ~2-31 题)

2-29 已知 $X(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+2z^{-1}+3z^{-2}}$，ROC 包括单位圆。

(a) 求零点和极点；(b) 画出零点和极点图；(c) 画出 $X(z)$在单位圆上的函数值(包括幅度和相位)。

(提示：可以调用的函数有 tf2zp( )、zplane( )和 freqz( )等)

2-30 已知因果序列 $x[n]$的 z 变换为

$$X(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}-\frac{1}{1-0.2z^{-1}},\quad |z|>0.5$$

画出序列 $x[n]$的前 20 个样本。

(提示：可以调用的函数有 impz( )等)

2-31 将以下 z 变换分解成部分分式形式

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}},\quad \frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{2}$$

(提示：可以调用的函数有 residuez( )等)