# 第 2 章　极限与连续

## 2.1　知 识 要 点

### 2.1.1　极限的概念

#### 1．数列的极限

设有数列$\{u_n\}$和常数$A$，对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使得当$n>N$时，恒有$|u_n-A|<\varepsilon$成立，则称数列$\{u_n\}$以$A$为**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A \quad 或 \quad u_n\to A(n\to\infty).$$

**注**：定义中的$\varepsilon$刻画了$u_n$与$A$之间的接近程度，$N$刻画了$n$需要增大到什么程度，它与$\varepsilon$的取值有关．当$n$取第$N$项以后的各项时，$u_n$与$A$的距离小于$\varepsilon$，而$\varepsilon$可以任意小，这正是数列$\{u_n\}$中的各项随着$n$的增大而无限接近$A$的精确刻画．

#### 2． $x\to\infty$时函数$f(x)$的极限

设有函数$y=f(x)$和常数$A$，对于任意给定的$\varepsilon>0$，若存在$M>0$，使当$|x|>M$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称当$x\to\infty$时，$y=f(x)$的**极限**为$A$，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty).$$

类似地，可以定义$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$和$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

#### 3． $x\to x_0$时函数$f(x)$的极限

设有函数$y=f(x)$和常数$A$，如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称当$x\to 0$时$f(x)$的**极限**为$A$，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

类似地，可以定义**右极限**$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$和**左极限**$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

### 2.1.2　无穷小量与无穷大量

#### 1．无穷小量的定义与性质

以 0 为极限的变量称为**无穷小量**．需要注意的是，0 是一种特殊的无穷小量．无穷小量的概念在整个微积分中有着重要的作用，需要读者引起重视．

无穷小量有如下性质：

（1）有限个无穷小量的和是无穷小量；

（2）有界变量与无穷小量的乘积是无穷小量；

（3）$\lim Y=A \Leftrightarrow Y=A+\alpha$，其中$\alpha$是无穷小量（与$Y$同在一个变化过程中）.

**2．无穷小量的阶**

设$\alpha,\beta$是同一变化过程中的两个无穷小量，则

（1）若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称$\beta$是比$\alpha$**高阶的无穷小量**（或$\alpha$是$\beta$比**低阶的无穷小量**），记为$\beta=o(\alpha)$.

（2）若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称$\beta$是与$\alpha$**同阶的无穷小量**，记为$\beta=O(\alpha)$. 特殊地，当$c=1$时，称$\beta$与$\alpha$是**等价的无穷小量**，记为$\alpha\sim\beta$.

**3．等价无穷小量的性质**

**性质 1**　设$\alpha,\beta,\gamma$是同一变化过程中的无穷小量，则

（1）若$\alpha\sim\beta$，则$\beta\sim\alpha$；

（2）若$\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则$\alpha\sim\gamma$.

**性质 2**　设$\alpha$，$\beta$，$\overline{\alpha}$和$\overline{\beta}$是同一变化过程中的无穷小量，且$\alpha\sim\overline{\alpha}$，$\beta\sim\overline{\beta}$，$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$存在，则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\overline{\alpha}}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\overline{\beta}}=\lim\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}.$$

**4．常见的等价无穷小量公式**

当$x\to 0$时：

（1）$\sin x\sim x$；　（2）$\arcsin x\sim x$；

（3）$\tan x\sim x$；　（4）$\arctan x\sim x$；

（5）$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；　（6）$\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$；

（7）$\log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a}\ (a>0,a\neq 1)$；　（8）$\ln(1+x)\sim x$[为（7）式的特殊情况]；

（9）$a^x-1\sim x\ln a\ (a>0,a\neq 1)$；　（10）$\mathrm{e}^x-1\sim x$[为（9）式的特殊情况]；

（11）$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$；　（12）$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$[为（11）式的特殊情况]；

（13）$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}$[为（11）式的特殊情况].

**5．无穷大量的定义**

如果在某个变化过程中，对于$\forall\ M>0$，存在某个时刻，使得在那个时刻以后恒有$|Y|>M$成立，则称变量$Y$为**无穷大量**，记为$\lim Y=\infty$或$Y\to\infty$.

在同一个变化趋势下，无穷小量与无穷大量有如下关系：

（1）若变量$Y$为无穷大量，则$\dfrac{1}{Y}$为无穷小量；

（2）若变量$Y$为无穷小量（$Y\neq 0$），则$\dfrac{1}{Y}$为无穷大量.

注：从本质上来讲，在相应的变化趋势下，无穷大量的极限是不存在的，常用的极限运算法则不适用，因此无穷大量的问题往往需要转化为无穷小量来讨论.

## 2.1.3　极限的性质与运算法则

### 1．极限的性质

（1）**唯一性**　若极限 $\lim Y$ 存在，则极限值唯一.

（2）**有界性**　如果 $\lim Y$ 存在，则 $Y$ 是局部有界的. 特别地，若数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在，则 $\{u_n\}$ 不仅是局部有界的，而且是全局有界的.

（3）**保号性**　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某个空心邻域内恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

（4）若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且在 $x_0$ 的某个空心邻域内恒有 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），则有 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

（5）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且在 $x_0$ 的某个空心邻域内恒有 $f(x)\geqslant g(x)$（或 $f(x)\leqslant g(x)$），则有 $A\geqslant B$（或 $A\leqslant B$）.

### 2．极限的运算法则

设极限 $\lim X$，$\lim Y$ 均存在，则

（1）$\lim(X\pm Y)$ 存在，且 $\lim(X\pm Y)=\lim X\pm\lim Y$；

（2）$\lim(X\cdot Y)$ 存在，且 $\lim(X\cdot Y)=\lim X\cdot\lim Y$；

（3）若 $\lim Y\neq 0$，则 $\lim\dfrac{X}{Y}$ 存在，且有 $\lim\dfrac{X}{Y}=\dfrac{\lim X}{\lim Y}$.

**推论 1**　若 $\lim X$ 存在，$C$ 为一常数，则 $\lim(CX)$ 存在，且 $\lim(CX)=C\cdot\lim X$.

**推论 2**　若 $\lim X$ 存在，$k$ 为一正整数，则 $\lim X^k$ 存在，且 $\lim(X^k)=(\lim X)^k$.

### 3．复合函数的极限运算法则

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成，$y=f[g(x)]$ 在点 $x_0$ 的某个去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，且 $g(x)$ 在 $x_0$ 的某个去心邻域满足 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A.$$

## 2.1.4　极限存在准则与两个重要极限

### 1．夹逼定理

如果变量 $X,Y,Z$ 满足 $X\leqslant Y\leqslant Z$，且 $\lim X=\lim Z=A$（$A$ 为某常数），那么 $\lim Y$ 也存在且 $\lim Y=A$.

### 2．单调有界准则

若数列 $\{u_n\}$ 单调且有界，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 一定存在.

### 3．数列与子数列的关系

从数列$\{u_n\}$中抽取无穷多项，在不改变原有次序的情况下构成的新数列称为原数列$\{u_n\}$的**子数列**，简称**子列**．记为$\{u_{n_k}\}$：$u_{n_1},u_{n_2},\cdots,u_{n_k},\cdots$．其中$n_k$表示$u_{n_k}$在原数列$\{u_n\}$中的位置，$k$表示$u_{n_k}$在子列中的位置．

数列$\{u_n\}$与子数列$\{u_{n_k}\}$之间的关系：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A\Leftrightarrow$ 对$\{u_n\}$的任何子数列$\{u_{n_k}\}$有$\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=A$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A\Leftrightarrow$偶数子列$\{u_{2k}\}$和奇数子列$\{u_{2k+1}\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k+1}=A$；

（3）当$\{u_n\}$是单调数列时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A\Leftrightarrow$存在某个子数列$\{u_{n_k}\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=A$．

### 4．海涅（Heine）定理

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\ \Leftrightarrow$对任何数列$\{x_n\}$，$x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，且$x_n\neq x_0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$．

注：海涅定理给出了数列极限与函数极限之间的关系．

### 5．两个重要公式

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$．该极限属于$\dfrac{0}{0}$类型的未定式，它可以推广到$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$，其中$\alpha$为任意趋于 0 的表达式．

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$或者$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$．该极限属于$1^\infty$类型的未定式．它可以推广到$\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$．

## 2.1.5　函数的连续性

函数$y=f(x)$在点$x_0$处连续的三个等价定义为：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；

（2）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，其中$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

（3）$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$成立．

$y=f(x)$在区间内连续的定义如下：

如果函数$y=f(x)$在区间$(a,b)$内每一点处都连续，则称$y=f(x)$在$(a,b)$内连续；如果$y=f(x)$在$(a,b)$内连续且在$a$处右连续，则称$y=f(x)$在$[a,b)$上连续．类似地，可以定义$y=f(x)$在区间$(a,b]$和$[a,b]$上的连续性．

## 2.1.6　函数的间断点

### 1．间断点的定义

若$y=f(x)$在点$x_0$处出现如下三种情况之一，则称$x_0$为$y=f(x)$的间断点：

（1）$y=f(x)$在点$x_0$处无定义；

（2） $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

（3） $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处有定义， $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$ .

2．间断点的类型

设 $x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的**第一类间断点**，其中：

（1）**可去间断点**： $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ ;

（2）**跳跃间断点**： $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ .

设 $x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 中至少有一个不存在，则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

特殊地，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 中至少有一个为 $\infty$，则称 $x_0$ 为**无穷间断点**．例如 $x=0$ 就是 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的第二类间断点中的无穷间断点.

## 2.1.7 连续函数的性质

### 1．连续函数的四则运算

若函数 $f(x)$，$g(x)$ 都在点 $x_0$ 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $[g(x_0)\neq 0]$ 在点 $x_0$ 处也连续.

### 2．复合函数的连续性

若 $y=f(u)$ 在点 $u_0$ 处连续， $u=g(x)$ 在点 $x_0$ 处连续且 $u_0=g(x_0)$，则 $y=f[g(x)]$ 在点 $x_0$ 处连续.

### 3．反函数的连续性

若 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调、连续，则其反函数在相应的定义区间上单调、连续.

### 4．初等函数的连续型

初等函数在其定义区间内都是连续的.

## 2.1.8 闭区间上的连续函数的性质

### 1．有界性定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 一定在 $[a,b]$ 上有界，即 $\exists M>0$，对于 $\forall x\in[a,b]$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ .

### 2．最值定理

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定存在最大值和最小值.

3．介值定理

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$m$ 和 $M$ 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，且 $M>m$，则对介于 $m$ 与 $M$ 之间的任意数 $C$，即 $m<C<M$，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=C$.

注：定理中的条件如果改为 $m\leqslant C\leqslant M$，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=C$.

4．零点存在定理

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

### 2.1.9　一些重要的结论

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0, & |a|<1,\\ 1, & a=1,\\ \text{不存在}, & \text{其他}.\end{cases}$

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & n=m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$　其中 $a_n\neq0, b_m\neq0$.

## 2.2　典型例题分析

### 2.2.1　题型一：极限的概念与性质问题

**例 2.2.1**　【2014（3）】设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a\neq0$，则当 $n$ 充分大时，有（　　）.

（A）$|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$　　（B）$|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$　　（C）$a_n>a-\dfrac{1}{n}$　　（D）$a_n<a+\dfrac{1}{n}$

**解**　根据数列极限的定义，对于 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 $N$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 由于

$$|a|-|a_n|\leqslant\big||a_n|-|a|\big|\leqslant|a_n-a|<\varepsilon,$$

从而有 $|a_n|>|a|-\varepsilon$，取 $\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}$，则 $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$，故选项 A 正确.

若取 $a_n=a-\dfrac{1}{n}$ 或 $a_n=a+\dfrac{1}{n}$，显然满足题设条件，因此选项 C 和选项 D 错误.

**例 2.2.2**　已知 $f(x)=x^3+\dfrac{\sin x}{x}+2\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\lim\limits_{x\to0}f(x)$，求 $f(x)$ 的表达式.

**解**　记 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=A$，则

$$f(x)=x^3+\frac{\sin x}{x}+2A\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

从而

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^3 + \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0} 2A\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

即有 $A = 1 + 2A\cdot(-1)$， $A=\frac{1}{3}$，因此有

$$f(x) = x^3 + \frac{\sin x}{x} + \frac{2}{3}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

**例 2.2.3** 【2013（3）】当 $x\to 0$ 时，用“ $o(x)$ ”表示比 $x$ 高阶的无穷小量，则下列式子中错误的是（　　）.

（A） $x\cdot o(x^2) = o(x^3)$　　（B） $o(x)\cdot o(x^2) = o(x^3)$

（C） $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$　　（D） $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

**解**　根据高阶无穷小量的定义，若选项 D 成立，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x)+o(x^2)}{x^2} = 0 .$$

事实上，

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x)+o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{o(x)}{x^2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}\cdot\frac{1}{x},$$

当 $x\to 0$ 时， $\frac{o(x)}{x}$ 为无穷小量，而 $\frac{1}{x}$ 为无穷大量，因此极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}$ 不一定存在．例如取 $o(x) = x^2$， $o(x) = x^3$， $o(x) = x^{\frac{3}{2}}$ 等，上述极限结果均不相同，故选项 D 错误.

## 2.2.2　题型二：利用极限的四则运算法则求极限

**例 2.2.4**　求极限 $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x+5}-2x+2}{\sqrt{x^2+\sin x+1}}$ .

**解法 1**　本题属于 $\frac{\infty}{\infty}$ 类型，分子分母同时除以 $x$（注意 $x$ 为负值），有

$$原式 = \lim_{x\to -\infty}\frac{-\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-2+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-2-2}{-1} = 4 .$$

**解法 2**　该类型问题常用的方法是做替换 $t=-x$，当 $x\to -\infty$ 时， $t\to +\infty$，从而

$$原式 = \lim_{t\to +\infty}\frac{\sqrt{4t^2+2t+5}+2t+2}{\sqrt{t^2-\sin t+1}} = \lim_{t\to +\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{2}{t}+\frac{5}{t^2}}+2+\frac{2}{t}}{\sqrt{1-\frac{\sin t}{t^2}+\frac{1}{t^2}}} = \frac{2+2}{1} = 4 .$$

**例 2.2.5**　求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$.

**解**　本题属于 $\infty-\infty$ 类型，进行分子有理化，有

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-(x+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}=0\,.$$

**例 2.2.6**　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n+5)^{10}(3n-1)^{5}}{(2n+3)^{15}}$.

**解**
$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(4n+5)^{10}}{n^{10}}\cdot\frac{(3n-1)^{5}}{n^{5}}}{\frac{(2n+3)^{15}}{n^{15}}}=\frac{\left(4+\frac{5}{n}\right)^{10}\left(3-\frac{1}{n}\right)^{5}}{\left(2+\frac{3}{n}\right)^{15}}=\frac{4^{10}\cdot 3^{5}}{2^{15}}=6^{5}\,.$$

**例 2.2.7**　设 $x_n=1+\dfrac{1}{1+1}+\dfrac{1}{1+2}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}$，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**解**　由于

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

因此，当 $n\geqslant 3$ 时，

$$x_n=1+\frac{1}{1+1}+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1+\frac{1}{1+1}+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1+\frac{1}{1+1}+1=\frac{5}{2}\,.$$

## 2.2.3　题型三：利用单侧极限的性质求极限

**例 2.2.8**　【2000（1）】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

**解**　由于

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1\,,$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

由于左右极限均存在且相等，因此原式$=1$.

**例 2.2.9**　设

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}-1, & x<1, \\ \dfrac{\ln(2-x)}{x-1}, & x\geqslant 1, \end{cases}$$

试求 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

**解**　$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的分段点，因此需要考察左右极限，

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(e^{\frac{1}{x-1}}-1\right)=-1,$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(2-x)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln[1+(1-x)]}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{x-1}=-1,$$

由于 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-1$，故 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$.

## 2.2.4　题型四：利用两个重要极限求极限

**例 2.2.10**　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(2nx)-\cos(nx)}{x^2}$，其中 $n$ 为正整数.

**解法 1**　利用第一个重要极限，有

$$\begin{aligned}
原式&=\lim_{x\to0}\frac{[1-\cos(nx)]-[1-\cos(2nx)]}{x^2}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(nx)}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(2nx)}{x^2}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{nx}{2}}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2(nx)}{x^2}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{nx}{2}}{\frac{4}{n^2}\cdot\left(\frac{nx}{2}\right)^2}-\lim_{x\to0}\frac{2n^2\sin^2(nx)}{(nx)^2}\\
&=\frac{1}{2}n^2-2n^2=-\frac{3}{2}n^2.
\end{aligned}$$

**解法 2**　利用等价无穷小量替换，有

$$\begin{aligned}
原式&=\lim_{x\to0}\frac{[1-\cos(nx)]-[1-\cos(2nx)]}{x^2}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(nx)}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(2nx)}{x^2}
\end{aligned}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(nx)^2}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2nx)^2}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}n^2-2n^2=-\frac{3}{2}n^2.$$

**例 2.2.11**　【2003（1）】求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

**解**　利用第二个重要极限，有

$$原式=\lim_{x\to0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}},$$

又因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

所以原式 $=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

## 2.2.5　题型五：利用等价无穷小量替换求极限

**例 2.2.12**　【2002（3）】设 $a\neq\frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$________.

**解**　利用等价无穷小量替换公式 $\ln(1+x)\sim x\ (x\to0)$，于是

$$原式=\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}=\lim_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

**例 2.2.13**　【2004（2）】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

**解**　由于当 $x\to0$ 时，$\mathrm{e}^x-1\sim x$　$\ln(1+x)\sim x$，因此

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

**例 2.2.14**　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $a,b,c$ 均为正数.

**分析**：本题属于 $1^\infty$ 类型，常用的方法有两种，一是利用第二个重要极限进行求解，二是利用对数恒等式，将表达式 $f(x)$ 其转化为 $\mathrm{e}^{\ln f(x)}$ 的形式，再使用洛必达法则或等价无穷小量等方法进行求解（洛必达法则见第 4 章）.

**解**　利用对数恒等式，有

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\exp\left\{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)\right\},$$

利用等价无穷小量替换，于是

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)=\lim_{x\to0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{b^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{c^x-1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to0}\frac{x\ln a}{x}+\lim_{x\to0}\frac{x\ln b}{x}+\lim_{x\to0}\frac{x\ln c}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\frac{1}{3}\ln(abc),$$

所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln(abc)}=\sqrt[3]{abc}.$$

### 2.2.6　题型六：利用极限存在准则求极限

**例 2.2.15**　设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0$，$2x_{n+1}=x_n+\dfrac{4}{x_n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限值.

**证**　因为 $2x_{n+1}=x_n+\dfrac{4}{x_n}\geqslant2\sqrt{x_n\cdot\dfrac{4}{x_n}}=4$，所以 $x_{n+1}\geqslant2$，即数列 $\{x_n\}$ 有下界. 又

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}x_n+\frac{2}{x_n}-x_n=\frac{2}{x_n}-\frac{1}{2}x_n=\frac{4-x_n^2}{2x_n}\leqslant0,$$

即有 $x_{n+1}\leqslant x_n$，所以数列 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调收敛准则可知，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则等式 $2x_{n+1}=x_n+\dfrac{4}{x_n}$ 两边同时取极限，有 $2A=A+\dfrac{4}{A}$，因此 $A=\pm2$，由保号性可知 $A\geqslant2$，所以 $A=2$.

**例 2.2.16**　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$.

**解**　由于

$$4=(4^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant4^{\frac{1}{n}}\cdot4,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}4\cdot4^{\frac{1}{n}}=4$，由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}=4.$$

**注**：本例题的结论可以推广到一般情况，例如求极限

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_K^n)^{\frac{1}{n}},$$

其中 $K$ 为某个正整数，$a_i>0$，$i=1,\cdots,K$，则

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_K^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_K\}.$$

**例 2.2.17**　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x^n)^{\frac{1}{n}}$，其中 $x>0$.

**解**　利用例 2.2.16 的结论，当 $0<x<1$ 时，原式 $=1$；当 $x=1$ 时，原式 $=1$；当 $x>1$ 时，原式 $=x$，因此

$$\text{原式}=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\\ x, & x>1.\end{cases}$$

****例 2.2.18**　证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

**证**　取两个子数列

$$\{x_n^{(1)}\}=\left\{\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right\}\text{和}\{x_n^{(2)}\}=\left\{\frac{1}{n\pi}\right\},$$

显然满足

$$x_n^{(1)}\neq 0,\lim_{n\to\infty}x_n^{(1)}=0;\quad x_n^{(2)}\neq 0,\lim_{n\to\infty}x_n^{(2)}=0,$$

但是

$$\sin\frac{1}{x_n^{(1)}}=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n^{(1)}}=1,$$

$$\sin\frac{1}{x_n^{(2)}}=\sin(n\pi)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n^{(2)}}=0,$$

由海涅定理可知，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

## 2.2.7　题型七：函数的连续性问题

**例 2.2.19**　讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的连续性.

**解**　当 $|x|<1$ 时，$f(x)=1+x$；当 $|x|=1$ 时，$f(x)=\dfrac{1+x}{2}$；当 $|x|>1$ 时，$f(x)=0$.

从而

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1,\\ 1+x, & -1<x<1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=f(-1)=0$，所以 $x=-1$ 为函数 $f(x)$ 的连续点．又因为 $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=0$，$f(1)=0$，所以 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点．综上可得，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 内连续．

**例 2.2.20**　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ a\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 $a$ 的值．

**解**　由于

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{2}}=-2,$$

而 $f(0)=a\mathrm{e}^0=a$，因此 $a=-2$．

**例 2.2.21**　求函数 $f(x)=\dfrac{\arctan x}{|x(x-1)|}$ 的间断点，并指出其类型．

**解**　显然 $x=0$ 和 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点．因为

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x}{x(1-x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x(1-x)}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\arctan x}{x(x-1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x(x-1)}=-1,$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$，因此 $x=0$ 是第一类间断点中的跳跃间断点．又因为

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x\cdot|x-1|}{\arctan x}=0,$$

因此 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\infty$，故 $x=1$ 是第二类间断点中的无穷间断点．

## 2.2.8　题型八：连续函数的等式证明问题

**例 2.2.22**　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，求证存在 $\xi\in[0,1]$，使得

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right).$$

**证法 1**　利用零点定理，构造辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

则

$$\varphi(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right),\quad \varphi\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1).$$

若 $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)$，则取 $\xi=\frac{1}{2}$，结论成立．若 $f(0)\neq f\left(\frac{1}{2}\right)$，则 $\varphi(0)$ 和 $\varphi(1)$ 一定异号，由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)\subset[0,1]$，使得 $\varphi(\xi)=0$，从而有

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right).$$

**证法 2**　利用介值定理，构造辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

由题意可知，$\varphi(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上连续,由闭区间上连续函数的最值定理可知，$\varphi(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上一定能够取到最大值 $M$ 和最小值 $m$，因此有 $2m\leqslant\varphi(0)+\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant 2M$，而

$$\varphi(0)+\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)=0,$$

因此有 $m\leqslant 0\leqslant M$，由介值定理可知，至少存在一点 $\xi\in[0,1]$，使得 $\varphi(\xi)=0$，结论得证.

**注**：本例采用了两种方法，证法 1 的主要优势是能够在开区间 $(0,1)$ 内找到一点 $\xi$，使得结论成立，而证法 2 只能在闭区间 $[0,1]$ 上找到一点 $\xi$.

**例 2.2.23**　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，求证至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{3}\right).$$

**解**　构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{3}\right),$$

则

$$F(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{3}\right),\quad F\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(\frac{2}{3}\right),\quad F\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)-f(1).$$

（1）若 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$ 和 $f\left(\frac{2}{3}\right)$ 至少有两个相等，例如 $f(0)=f\left(\frac{1}{3}\right)$，则取 $\xi=\frac{1}{3}$，结论成立.

（2）若 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$ 和 $f\left(\frac{2}{3}\right)$ 都互不相等，则 $F(0)\neq 0$，$F\left(\frac{1}{3}\right)\neq 0$，$F\left(\frac{2}{3}\right)\neq 0$.

不妨设 $F(0)>0$，接下来又分两种情况进行讨论：

若 $F\left(\frac{1}{3}\right)<0$，则由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in\left(0,\frac{1}{3}\right)\subset(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，结论得证；

若 $F\left(\frac{1}{3}\right)>0$，则有 $f(0)>f\left(\frac{1}{3}\right)>f\left(\frac{2}{3}\right)$，从而 $F\left(\frac{2}{3}\right)<0$，由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in\left(0,\frac{2}{3}\right)\subset(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，从而结论得证.

## 2.3　深 化 训 练

**2.3.1**　填空题.

（1）对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-0|<\delta$ 时，有 $\left|\frac{f(x)}{x}-1\right|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

（2）【2005（3）】 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$________.

（3）【2006（1）】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________.

（4）【2006（3）】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$________.

（5） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+5^{n+1}}{2^n+5^{n+2}}=$________.

（6） $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}=$________.

（7）已知 $f(x)=2x+4\sin x\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$，则 $f(x)=$________.

（8） $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3nx}{1-nx}$ 的连续区间为__________.

**2.3.2** 单项选择题.

（1）【2015（3）】设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是（　　）.

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=a$

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=a$

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

（2）对 $\forall x$，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$（　　）.

（A）存在且一定不等于零　　（B）存在但不一定为零

（C）一定不存在　　（D）不一定存在

（3）设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，则数列 $\{b_n\}$ 满足条件（　　）时， $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n$ 存在.

（A） $\{b_n\}$ 有界　　（B） $\{b_n\}$ 单调　　（C） $\{b_n\}$ 单调有界　　（D）不能确定

（4）设 $f(x),\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义， $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0$， $\varphi(x)$ 有间断点，则下列结论正确的是（　　）.

（A） $\varphi[f(x)]$ 必有间断点　　（B） $\varphi[f^2(x)]$ 必有间断点

（C） $f[\varphi(x)]$ 必有间断点　　（D） $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

（5）下列说法正确的是（　　）.

（A）若 $f(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

（B）若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则必存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内有界

（C）若 $f(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内有界且可导，则 $f'(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内有界

（D）若 $f(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内有界，且有 $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$，则有 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

**2.3.3** 求下列极限：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$；　　（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos\sqrt{1-\cos x}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$；　　（4）【2009（3）】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

**2.3.4**　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 $a$ 和 $b$ 的值.

**2.3.5**　已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}[2x-\sqrt{x^2-1}-(ax+b)]=0$，试确定常数 $a$ 与 $b$ 的值.

**2.3.6**　设当 $x\to 1$ 时，$1-\dfrac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}$ 是 $x-1$ 的等价无穷小，试求 $m$ 的值.

**2.3.7**　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$，求函数 $f(x)$ 的表达式.

**2.3.8**　设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(2^t+x^t)}{t}$，其中 $x>0$，求 $f(x)$ 的表达式.

**2.3.9**　设 $x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{8}{x_n^2}\right)$（$n=0,1,2,\cdots$），其中 $x_0>0$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**2.3.10**　设数列 $\{x_n\}$ 由以下等式给定，

$$x_1=\sqrt{a}，\quad x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}，\quad x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}，\quad \cdots，$$

其中 $a>0$，试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**2.3.11**　试求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}$ 的间断点，并指出其类型.

**2.3.12**　试求函数 $f(x)=\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x-1}}{\sin\dfrac{\pi x}{2}}$ 的间断点，并指出其类型.

**2.3.13**　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$0<f(x)<1$，证明方程 $f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

**2.3.14**　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，$c_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}.$$

# 2.4　深化训练详解

**2.3.1**　填空题.

（1）0；　（2）2；　（3）2；

（4）1；**提示**　因为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}\leqslant\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}\leqslant\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n},$$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1$.

（5）$\dfrac{1}{5}$；（6）4；

（7）$f(x)=2x-\dfrac{4\pi}{3}\sin x$；**提示** 因为极限值等于某个常数，因此不妨设

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=A,$$

原题等式两边同时求极限，得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2x+\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 4A\sin x,$$

即有 $A=\pi+4A$，所以 $A=-\dfrac{\pi}{3}$，从而 $f(x)=2x-\dfrac{4\pi}{3}\sin x$ .

（8）$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ .

**2.3.2** 单项选择题.

（1）D；**提示** 根据数列极限与子数列极限之间的关系可知，选项 D 错误．例如

$$x_n=\begin{cases} a+\dfrac{1}{n}, & n=3k,3k-1, \\ n^2, & n=3k-2. \end{cases}$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=a$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在.

（2）D；**提示** 若取 $\varphi(x)=f(x)=g(x)=1$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$；若取 $\varphi(x)=f(x)=g(x)=x^2$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$，故选项 D 正确.

（3）C；（4）D；（5）B.

**2.3.3** 求下列极限：

（1）
$$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0 .$$

（2）由于当 $x\to 0$ 时，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，因此

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}(\sqrt{1-\cos x})^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}(1-\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{4}x^2}=4 .$$

（3）
$$原式=\lim_{x\to\infty} x\left(1+\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}\right)=\lim_{x\to\infty}(-x)\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}(-x)\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^3}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^2}=0 .$$

（4）　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\cos x}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{1-\cos x}-1}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\mathrm{e}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\dfrac{3\mathrm{e}}{2}$.

**2.3.4**　由于

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=0,$$

所以 $\begin{cases}1-a=0\\a+b=0\end{cases}$，因此 $a=1,\quad b=-1$.

**2.3.5**　由于

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}[2x-\sqrt{x^2-1}-(ax+b)]=\lim_{x\to+\infty}[x-\sqrt{x^2-1}+(1-a)x-b]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+(1-a)x-b\right]=0,$$

则 $1-a=0$，即 $a=1$. 从而

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

**2.3.6**　根据等价无穷小的定义，有

$$1=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+\cdots+x^{m-1}-m}{x^m-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+2x+\cdots+(m-1)x^{m-2}}{mx^{m-1}}=\frac{1+2+\cdots+(m-1)}{m}=\frac{m-1}{2},$$

所以 $m=3$.

**2.3.7**　$f(x)=\begin{cases}x, & x<-1,\\0, & x=-1,\\-x, & -1<x<1,\\0, & x=1,\\x, & x>1.\end{cases}$

**2.3.8**　当 $0<x<2$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t\ln 2+\ln\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)^t\right]}{t}=\ln 2$；

当 $x=2$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(2^t+2^t)}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{(t+1)\ln 2}{t}=\ln 2$；

当 $x>2$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t\ln x+\ln\left[1+\left(\frac{2}{x}\right)^t\right]}{t}=\ln x$.