

第2章 线性系统的运动分析

第1章已说明如何建立描述自动控制系统运动规律的数学模型，要全面了解系统的动态性能，就必须基于其动态数学模型进行定量分析和定性分析。

对线性系统动态性能进行定量分析，实质上是求解其动态数学模型方程并分析解的性质，有传递函数法和状态空间分析法两种方法。传递函数法是经典控制理论的主要分析方法，其通过拉普拉斯变换或 z 变换将线性系统的微分方程或差分方程化为容易处理的代数方程，并获得描述系统输入、输出关系的动态数学模型——传递函数，通过系统传递函数零、极点的分布间接确定其动态响应。状态空间分析法是现代控制理论的主要分析方法，其直接将系统的微分方程或差分方程化为描述系统输入、输出与内部状态关系的动态数学模型——状态方程，运用矩阵方法求解状态方程，直接确定其动态响应，研究系统状态方程的解法及分析解的性质是现代控制理论的主要任务之一。对系统重要的定性性质（能控性、能观测性、稳定性）的分析将在后续章节介绍。

2.1 状态方程的齐次解（自由解）

线性定常系统在输入 u 为零时，由初始状态引起的运动称为自由运动，其可用式（2-1）所示的齐次状态方程描述，即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) \\ \mathbf{X}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{X}(t_0) \end{cases} \quad (2-1)$$

式中， $\mathbf{X}$ 为线性定常系统的 n 维状态向量； $\mathbf{X}(t_0)$ 为 n 维状态向量在初始时刻 $t = t_0$ 的初值， $\mathbf{A}$ 为线性定常系统的系统矩阵。

式（2-1）的解 $\mathbf{X}(t)$ （其中 $t \geq t_0$ ）称为自由运动的解或零输入响应。若矩阵 $\mathbf{A}$ 仅为一阶，即 $A = a$ （ a 为常数），则向量-矩阵微分方程式（2-1）变为式（2-2）所示的标量微分方程，即

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) \\ x(t)|_{t=t_0} = x(t_0) \end{cases} \quad (2-2)$$

式（2-2）为一阶线性齐次常微分方程，根据常微分方程求解理论，其解为

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x(t_0), \quad t \geq t_0 \quad (2-3)$$

式（2-3）中的指数函数 $e^{a(t-t_0)}$ 可展开为泰勒级数

$$e^{a(t-t_0)} = 1 + a(t-t_0) + \frac{1}{2!}a^2(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}a^k(t-t_0)^k + \cdots$$

仿照标量微分方程的解，设式（2-1）的解为式（2-4）所示的向量幂级数，即

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1(t-t_0) + \mathbf{b}_2(t-t_0)^2 + \cdots + \mathbf{b}_k(t-t_0)^k + \cdots \quad (2-4)$$

将式（2-4）代入式（2-1）方程两边，得

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}(t) &= b_1 + 2b_2(t-t_0) + \cdots + kb_k(t-t_0)^{k-1} + \cdots \\ &= \mathbf{A} \left[b_0 + b_1(t-t_0) + b_2(t-t_0)^2 + \cdots + b_k(t-t_0)^k + \cdots \right]\end{aligned}\quad (2-5)$$

若所设解为真实解, 则式(2-5)两边同幂次项的系数应相等, 即

$$\begin{aligned}b_1 &= \mathbf{A}b_0 \\ b_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{A}b_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2b_0 \\ b_3 &= \frac{1}{3}\mathbf{A}b_2 = \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3b_0 \\ &\vdots \\ b_k &= \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kb_0\end{aligned}$$

将初始条件 $\mathbf{X}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{X}(t_0)$ 代入式(2-4), 得 $b_0 = \mathbf{X}(t_0)$, 则式(2-1)的解为

$$\mathbf{X}(t) = \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}(t-t_0) + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k(t-t_0)^k + \cdots \right] \mathbf{X}(t_0) \quad (2-6)$$

式中, $\mathbf{I}$ 为 n 维单位矩阵。仿照式(2-4)中标量指数函数 $e^{a(t-t_0)}$ 的无穷级数定义, 定义式(2-6)方括号中的 n 维矩阵无穷级数为**矩阵指数函数** $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$, 即

$$\begin{aligned}e^{\mathbf{A}(t-t_0)} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}(t-t_0) + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k(t-t_0)^k + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k(t-t_0)^k\end{aligned}$$

式中, 规定 $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ 。

则式(2-1)的解可用系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的矩阵指数函数表达为

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{X}(t_0) \quad (2-7)$$

式(2-7)表明, 线性定常系统在无输入作用即 $u(t) \equiv 0$ 时, 任一时刻 t 的状态 $\mathbf{X}(t)$ 是由起始时刻 t_0 的初始状态 $\mathbf{X}(t_0)$ 在 $t-t_0$ 时间内通过矩阵指数函数 $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ 演化而来的。鉴于此, 将矩阵指数函数 $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ 称为**状态转移矩阵**, 并记为

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$$

状态转移矩阵是现代控制理论最重要的概念之一, 由此可将齐次状态方程的解表达为统一形式, 即

$$\mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t-t_0) \mathbf{X}(t_0)$$

由于系统输入 $u(t) \equiv 0$, 系统的运动 $\mathbf{X}(t)$ 仅由系统的初始状态 $\mathbf{X}(t_0)$ 激励, 因此系统的运动称为自由运动。而自由运动轨线的形态是由状态转移矩阵决定的, 也就是由 $\mathbf{A}$ 阵唯一确定的。很显然, 状态转移矩阵包含了系统自由运动的全部信息, 完全表征了系统中各状态变量的自由运动特性。

若 $t_0 = 0$, 则对应初始状态为 $\mathbf{X}(0)$, 自由运动的解为

$$\mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t) \mathbf{X}(0) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}(0) \quad (2-8)$$

为了表达简便, 以下的讨论若不做说明, 均设初始时刻 $t_0 = 0$ 。

2.2 状态转移矩阵

线性定常系统齐次状态方程的解为

$$X(t) = \Phi(t - t_0)X(t_0)$$

或

$$X(t) = \Phi(t)X(0)$$

由解的表达式可知, 系统的初始状态 $X(t_0)$ 和状态 $X(t)$ ($t > t_0$) 之间是一种向量变换关系, 其变换矩阵就是状态转移矩阵 $\Phi(t - t_0)$ 。状态转移矩阵的元素一般是时间 t 的函数, 即 $\Phi(t - t_0)$ 是一个时变函数矩阵。对于一个 2×2 维的状态转移矩阵, 其几何意义如图 2-1 所示。系统从初始状态 $X(t_0)$ 开始, 随着时间的推移由 $\Phi(t_1 - t_0)$ 转移到 $X(t_1)$, 再由 $\Phi(t_2 - t_1)$ 转移到 $X(t_2)$ ……运动 $X(t)$ 的形态完全由 $\Phi(t - t_0)$ 决定。

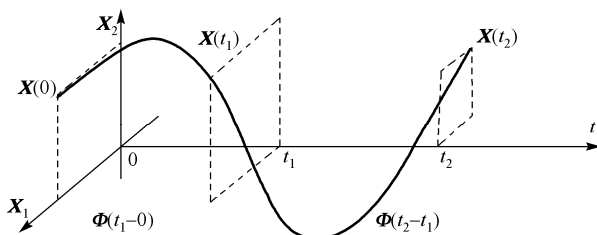


图 2-1 状态转移矩阵的几何意义

1. 线性定常系统状态转移矩阵的运算性质

(1) 不发生时间推移下的不变性

$$\Phi(t - t) = \Phi(0) = I$$

即

$$e^{A(t-t)} = e^{A0} = I$$

此性质意味着状态向量从 t 时刻又转移到 t 时刻, 也就是状态向量没有发生转移, 显然, 此时状态向量是不变的。

(2) 传递性 (组合性)

$$\Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0)$$

证明: 由于

$$X(t_1) = \Phi(t_1 - t_0)X(t_0)$$

$$X(t_2) = \Phi(t_2 - t_1)X(t_1) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0)X(t_0)$$

又

$$X(t_2) = \Phi(t_2 - t_0)X(t_0)$$

故上式成立。这意味着 $t_0 \sim t_2$ 的状态转移过程可分解为 $t_0 \sim t_1$ 和 $t_1 \sim t_2$ 的分段转移过程的组合。

(3) 可逆性

$\Phi(t) = e^{At}$ 总是非奇异的, 且

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$$

即

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

证明: 因为

$$e^{At} \cdot e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)}$$

令 $\tau = -t$, 有

$$e^{At} \cdot e^{-At} = e^{A0} = I$$

所以

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

这意味着可把状态转移过程视为在时间上是可以逆转的, 即状态转移矩阵的逆阵意味着状态向量按时间的逆向转移。利用这个性质, 可以在已知 $X(t)$ 的情况下, 求出小于 t 时刻的初始状态 $X(t_0)$ ($t_0 < t$)。

(4) 分解性

设 A 为 n 维方阵, t_1 和 t_2 为两个独立自变量, 则有

$$\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2)$$

即

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2}$$

这个性质意味着从 $-t_2 \sim t_1$ 的转移可以视为从 $-t_2$ 转移到 0, 再从 0 转移到 t_1 的组合, 即

$$\Phi(t_1 + t_2) = \Phi[t_1 - (-t_2)] = \Phi[t_1 - 0]\Phi[0 - (-t_2)]$$

(5) 倍时性

$$[\Phi(t)]^k = \Phi(kt)$$

即

$$(e^{At})^k = e^{A(kt)}$$

该性质表明, 状态转移矩阵的 k 次方等于该状态转移矩阵的时间自变量扩大 k 倍。

(6) 微分性和交换性

对 $\Phi(t) = e^{At}$ 有

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A$$

即

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A$$

这个性质说明 $\Phi(t)$ 或 e^{At} 矩阵与 A 矩阵是可以交换的。

【例 2-1】根据下述状态转移矩阵，求解 $\Phi^{-1}(t)$ 、 A 。

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

解：根据状态转移矩阵性质（3），有

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

根据状态转移矩阵性质（6）、性质（1），有

$$A = \left. \frac{d}{dt} \Phi(t) \right|_{t=0} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 4e^{-2t} & e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

2. 几个特殊的矩阵指数函数

这里仅将结果列出，证明留给读者完成。

（1）若 A 为对角矩阵，即

$$A = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

则

$$\Phi(t) = e^{At} = e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

（2）若 A 通过非奇异变换为对角矩阵，即

$$T^{-1}AT = \Lambda$$

则

$$\Phi(t) = e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1} \quad (2-10)$$

（3）若 A 为约当矩阵，即

$$A = J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

则

$$\Phi(t) = e^{At} = e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{(n-1)} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}t^{(n-2)} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

(4) 若 A 为模态矩阵, 即

$$A = M = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

则

$$\Phi(t) = e^{At} = e^{Mt} = e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

3. 线性定常系统状态转移矩阵的计算方法

线性定常系统的状态转移矩阵的求法很多, 但不论采用哪种方法计算, 结果应该是一致的。下面介绍较常用的 4 种方法。

(1) 级数展开法

直接根据矩阵指数函数的定义式计算 e^{At} , 即

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k t^k \quad (2-13)$$

【例 2-2】 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, 用级数展开法求 e^{At} 。

解: 根据矩阵指数函数的定义

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} 0 & -t^3 \\ t^3 & 0 \end{bmatrix} + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \cdots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \cdots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

此法具有编程简单、适用于计算机数值求解的优点, 但一般不易写出解析式, 不适合手工运算。

(2) 约当标准型变换法

若

$$\bar{A} = T^{-1}AT$$

则

$$\Phi(t) = e^{At} = Te^{\bar{A}t}T^{-1} \quad (2-14)$$

其中, T 是使 A 变换为标准型的变换矩阵。 A 阵变换后的标准型矩阵 $\bar{A}$ 有对角型 (特征值互异)、约当型 (特征值有重根) 和模态型 (特征值有共轭复数根) 三种情况。

证明: 由矩阵指数函数的定义, 有

$$\begin{aligned} \Phi(t) = e^{At} &= e^{T\bar{A}T^{-1}t} = I + T\bar{A}T^{-1}t + \frac{1}{2!}(T\bar{A}T^{-1})^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(T\bar{A}T^{-1})^kt^k + \cdots \\ &= TIT^{-1} + T\bar{A}T^{-1}t + \frac{1}{2!}T\bar{A}^2T^{-1}t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}T\bar{A}^kT^{-1}t^k + \cdots \\ &= T\left(I + \bar{A}t + \frac{1}{2!}\bar{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\bar{A}^kt^k + \cdots\right)T^{-1} = Te^{\bar{A}t}T^{-1} \end{aligned}$$

[证毕]

【例 2-3】 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, 用约当标准型变换法求 e^{At} 。

解:
$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

得 A 的特征值 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ 。

矩阵 A 可化为对角标准型

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

由式 (2-9) 得

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

A 为底伴随矩阵, 其变换矩阵

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

将 e^{At} 、 T 、 T^{-1} 代入式 (2-14), 得

$$\begin{aligned} e^{At} &= Te^{At}T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

【例 2-4】 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$, 用约当标准型变换法求 e^{At} 。

解: $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -2 & 5 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$

得 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ 。

矩阵 A 可化为约当标准型

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

由式 (2-11)、式 (2-9) 得

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \vdots & 0 \\ 0 & e^t & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & e^{2t} \end{bmatrix}$$

A 为底伴随矩阵, 其变换矩阵

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

将 e^{Jt} 、 T 、 T^{-1} 代入式 (2-14), 得

$$\begin{aligned} e^{At} &= T e^{Jt} T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2te^t + e^{2t} & 2e^t + 3te^t - 2e^{2t} & -e^t - te^t + e^{2t} \\ -2e^t - 2te^t + 2e^{2t} & 5e^t + 3te^t - 4e^{2t} & -2e^t - te^t + 2e^{2t} \\ -4e^t - 2te^t + 4e^{2t} & 8e^t + 3te^t - 8e^{2t} & -3e^t - te^t - 4e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

【例 2-5】 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}$, 用约当标准型变换法求 e^{At} 。

解: $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 6 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)(\lambda + 2)$

得 A 的特征值 $\lambda_{1,2} = -1 \pm j1$, $\lambda_3 = -2$ 。

矩阵 A 可化为模态标准型

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

由式 (2-12)、式 (2-9) 得

$$\mathbf{e}^{\mathbf{M}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t & \vdots & 0 \\ -e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

对应于特征值 $\lambda_1 = -1 + j1$ 的特征向量为

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + j1 \\ -j2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \mathbf{q}_1 + j\mathbf{q}_2$$

$\mathbf{A}$ 为底伴随矩阵, 其变换矩阵

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{Q}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda_3 \\ 0 & -2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

将 $\mathbf{e}^{\mathbf{M}t}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{Q}^{-1}$ 代入式 (2-14), 得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{Q} \mathbf{e}^{\mathbf{M}t} \mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t & 0 \\ -e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} \sin t + e^{-2t} & e^{-t} (2 \sin t - \cos t) + e^{-2t} & \frac{1}{2} e^{-t} (\sin t - \cos t) + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ 2e^{-t} (\cos t - \sin t) - 2e^{-2t} & e^{-t} (3 \cos t - \sin t) - 2e^{-2t} & e^{-t} \cos t - e^{-2t} \\ -4e^{-t} \cos t + 4e^{-2t} & -2e^{-t} (\sin t + 2 \cos t) + 4e^{-2t} & -e^{-t} (\sin t + \cos t) + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3) 待定系数法

待定系数法是应用凯利-哈密尔顿 (Cayley-Hamilton) 定理将 $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ 的无穷级数定义式简化为有限项多项式计算, 从而求出 $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ 的解析形式。

1) 凯利-哈密尔顿定理

所谓凯利-哈密尔顿定理是指, n 维方阵 $\mathbf{A}$ 满足其自身的特征方程, 即设 n 维方阵 $\mathbf{A}$ 的特征方程为

$$f(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

则

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I} = 0$$

2) 化 $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ 为 $\mathbf{A}$ 的有限项

根据凯利-哈密尔顿定理, 有

$$\mathbf{A}^n = -a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - a_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} - a_{n-3}\mathbf{A}^{n-3} - \cdots - a_0\mathbf{I}$$

上式表明, $\mathbf{A}^n$ 可以用 $\mathbf{A}^{n-1}$ 、 $\mathbf{A}^{n-2}$ 、 $\cdots$ 、 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{I}$ 的线性组合表示。

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{n+1} &= \mathbf{A}\mathbf{A}^n = \mathbf{A}(-a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - a_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} - a_{n-3}\mathbf{A}^{n-3} - \cdots - a_0\mathbf{I}) \\ &= -a_{n-1}\mathbf{A}^n - a_{n-2}\mathbf{A}^{n-1} - a_{n-3}\mathbf{A}^{n-2} \cdots - a_0\mathbf{A} \\ &= -a_{n-1}(-a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - a_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} - a_{n-3}\mathbf{A}^{n-3} - \cdots - a_0\mathbf{I}) \\ &\quad + (-a_{n-2}\mathbf{A}^{n-1} - a_{n-3}\mathbf{A}^{n-2} - \cdots - a_0\mathbf{A}) \\ \mathbf{A}^{n+2} &= \mathbf{A}^2\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^2(-a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - a_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} - a_{n-3}\mathbf{A}^{n-3} - \cdots - a_0\mathbf{I}) \\ &= -a_{n-1}\mathbf{A}^{n+1} - a_{n-2}\mathbf{A}^n + (-a_{n-3}\mathbf{A}^{n-1} - \cdots - a_0\mathbf{A}^2) \\ &\quad \cdots\end{aligned}$$

可见, $\mathbf{A}^{n+1}$ 、 $\mathbf{A}^{n+2}$ 、 $\cdots$ 、 $\mathbf{A}^\infty$ 都可以用 $\mathbf{A}^{n-1}$ 、 $\mathbf{A}^{n-2}$ 、 $\cdots$ 、 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{I}$ 的线性组合表示。

矩阵指数函数 $\mathbf{e}^{At}$ 的无穷级数定义式为

$$\mathbf{e}^{At} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k$$

而 $\mathbf{A}^n$ 、 $\mathbf{A}^{n+1}$ 、 $\mathbf{A}^{n+2}$ 、 $\cdots$ 、 $\mathbf{A}^\infty$ 均可以用 $\mathbf{A}^{n-1}$ 、 $\mathbf{A}^{n-2}$ 、 $\cdots$ 、 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{I}$ 的线性组合表示, 故矩阵指数函数 $\mathbf{e}^{At}$ 可用 $\mathbf{A}$ 的 $(n-1)$ 次多项式表示, 即

$$\mathbf{e}^{At} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\mathbf{A}^{n-1} \quad (2-15)$$

式中, $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\cdots$, $\alpha_i(t)$, $\cdots$, $\alpha_{n-1}(t)$ 均是待定的时间标量函数。这样求 $\mathbf{e}^{At}$ 的问题就转化为求待定系数 $\alpha_i(t)$ 的问题。

3) $\alpha_i(t)$ 的计算

下面按 $\mathbf{A}$ 的特征值形态分两种情况讨论。

① $\mathbf{A}$ 的特征值互异时

由于 $\mathbf{A}$ 和特征值 λ_1 , λ_2 , $\cdots$, λ_n 都是特征方程 $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ 的根, $\mathbf{e}^{At}$ 可用 $\mathbf{A}$ 的 $(n-1)$ 次多项式表示, 则用同样方法可以证明, $\mathbf{e}^{\lambda_i t}$ 也可用 λ_i 的 $(n-1)$ 次多项式表示, 即

$$\begin{aligned}\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} &= \mathbf{e}^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2(t)\lambda_2^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} &= \mathbf{e}^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_n + \alpha_2(t)\lambda_n^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} &= \mathbf{e}^{\lambda_n t}\end{aligned}$$

解此方程组, 即可求得系数 $\alpha_i(t)$ 为

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda_1 t} \\ \mathbf{e}^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \mathbf{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

② $\mathbf{A}$ 有 n 重特征值 λ_1 时

根据①, λ_1 必然满足

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \alpha_3(t)\lambda_1^3 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} = \mathbf{e}^{\lambda_1 t}$$

将上式依次对 λ_1 求偏导 $n-1$ 次, 得到 $n-1$ 个方程

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) + 2\lambda_1\alpha_2(t) + 3\lambda_1^2\alpha_3(t) + \cdots + (n-1)\lambda_1^{n-2}\alpha_{n-1}(t) &= te^{\lambda_1 t} \\ 2\alpha_2(t) + 6\lambda_1\alpha_3(t) + \cdots + (n-1)(n-2)\lambda_1^{n-3}\alpha_{n-1}(t) &= t^2e^{\lambda_1 t} \\ &\vdots \\ (n-1)!\alpha_{n-1}(t) &= t^{n-1}e^{\lambda_1 t}\end{aligned}$$

解此 n 个方程, 即可求得系数 $\alpha_i(t)$ 为

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & (n-1)\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\lambda_1^{n-3} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \cdots & (n-1)\lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda_1 t} \\ te^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

【例 2-6】 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$, 用待定系数法求 e^{At} 。

解: $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & 5 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2)$

得 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$ 。

对重特征值按式 (2-17) 计算 $\alpha_i(t)$, 非重特征值按式 (2-16) 计算 $\alpha_i(t)$ 。则

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\lambda_1 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} te^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2te^{-t} + e^{-2t} \\ 3te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

利用式 (2-15) 求得系统状态转移矩阵

$$\begin{aligned}e^{At} &= \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 \\ &= (2te^{-t} + e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (3te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \\ &\quad + (te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}^2\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 2te^{-t} + e^{-2t} & 3te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t} & te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t} \\ -2te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 3te^{-t} - 5e^{-t} + 4e^{-2t} & te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 2te^{-t} - 4e^{-t} + 4e^{-2t} & 3te^{-t} - 8e^{-t} + 8e^{-2t} & te^{-t} - 3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(4) 拉普拉斯变换法

设 $t_0 = 0$, 对式 (2-1) 两边取拉普拉斯变换得

$$sX(s) - X(0) = AX(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}X(0)$$

取拉普拉斯逆变换得, $t_0 = 0$ 时, 式 (2-1) 的解为

$$X(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]X(0)$$

与式 (2-8) 对比, 得

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] \quad (2-18)$$

【例 2-7】 如例 2-3, 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, 用拉普拉斯变换法求 e^{At} 。

解:

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由式 (2-18) 得

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

结果与例 2-3 相同。

当 A 维数较高时, 直接计算 $(sI - A)^{-1}$ 比较困难, 使用 1.4.2 节介绍的法捷耶夫算法求逆。

2.3 线性系统的运动分析

2.3.1 线性系统的运动规律

当系统具有输入控制作用时, 必须用非齐次状态方程对系统进行描述。

线性定常系统的非齐次状态方程为

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (2-19)$$

式中, $X(t)$ 是 n 维状态向量, $U(t)$ 是 r 维控制向量, A 是 $n \times n$ 常数阵, B 是 $n \times r$ 常数阵。

设初始时刻 t_0 的初始状态为 $X(t_0)$, 若非齐次状态方程的解存在, 则解形式如下

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)d\tau \quad (2-20)$$

式中, $\Phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}$, $\Phi(t-\tau) = e^{A(t-\tau)}$ 。

证明: 将式(2-19)移项, 可得

$$\dot{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{X}(t) = \mathbf{B}\mathbf{U}(t)$$

上式两边分别左乘 e^{-At} , 则有

$$e^{-At}[\dot{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{X}(t)] = e^{-At}\mathbf{B}\mathbf{U}(t)$$

即

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}\mathbf{X}(t)] = e^{-At}\mathbf{B}\mathbf{U}(t)$$

对上式在 $[t_0, t]$ 区间内进行积分, 得

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt}[e^{-A\tau}\mathbf{X}(\tau)]d\tau &= \int_{t_0}^t e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)d\tau \\ e^{-A\tau}\mathbf{X}(\tau)\Big|_{t_0}^t &= \int_{t_0}^t e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)d\tau \\ e^{-At}\mathbf{X}(t) - e^{-At_0}\mathbf{X}(t_0) &= \int_{t_0}^t e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)d\tau \\ \mathbf{X}(t) &= e^{A(t-t_0)}\mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)d\tau \quad [\text{证毕}]$$

从式(2-20)看出, 非齐次状态方程的解由两项组成: 第一项与式(2-7)所示的齐次状态方程的解相同, 由初始状态 $\mathbf{X}(t_0)$ 引起, 称为自由运动解分量; 第二项由控制作用 $\mathbf{U}(t)$ 引起, 称为强制运动解分量。

当 $t_0 = 0$ 时, 则有

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\mathbf{X}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)d\tau \quad (2-21)$$

【例 2-8】 试求下述系统在单位阶跃函数作用下的解

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

式中, $u(t)$ 为单位阶跃函数; $\mathbf{X}(0) = [1 \quad 2]^T$, 求系统的状态 $\mathbf{X}(t)$ 。

解: 由例 2-3 或例 2-7 已求出

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

由式(2-21)得

$$X(t) = \Phi(t)X(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau$$

其中, 自由运动解分量

$$\Phi(t)X(0) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -4e^{-t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$u(t) = 1$, 强迫运动解分量

$$\begin{aligned} \int_0^t \Phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau &= \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} X(t) &= \Phi(t)X(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -4e^{-t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 3e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 5e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

若输入改为单位斜坡函数 $u(t) = t$, 则强迫运动解分量

$$\begin{aligned} \int_0^t \Phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau &= \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau d\tau \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} \tau e^{-(t-\tau)} - \tau e^{-2(t-\tau)} \\ -\tau e^{-(t-\tau)} + 2\tau e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} \\ \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

状态方程的解为

$$\begin{aligned} X(t) &= \Phi(t)X(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -4e^{-t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} \\ \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + 5e^{-t} - \frac{13}{4}e^{-2t} \\ \frac{1}{2} - 5e^{-t} + \frac{13}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.3.2 特定输入下线性系统的状态响应

与经典控制理论对应, 下面讨论系统在典型输入信号(脉冲函数、阶跃函数和斜坡函数)作用下, 系统的状态解和输出解。

设 $X(0) = X_0$ 。

1. 脉冲响应

当输入为脉冲函数, 即 $u(t) = K\delta(t)$ 时, 系统的状态响应

$$\begin{aligned}
 X(t) &= e^{At} X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} BK \delta(\tau) d\tau \\
 &= e^{At} X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau BK \\
 &= e^{At} X_0 + e^{At} BK
 \end{aligned} \tag{2-22}$$

系统的输出响应

$$Y(t) = CX(t) = Ce^{At} X_0 + Ce^{At} BK$$

当 $X(0) = 0$ 时, 系统的单位脉冲响应

$$Y(t) = Ce^{At} B = L^{-1}[C(sI - A)^{-1} B]$$

即系统传递函数阵的拉普拉斯逆变换。

2. 阶跃响应

当输入为阶跃函数, 即 $u(t) = K1(t)$ 时, 系统的状态响应

$$\begin{aligned}
 X(t) &= e^{At} X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} BK 1(\tau) d\tau \\
 &= e^{At} X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau BK \\
 &= e^{At} X_0 - A^{-1} e^{A(t-\tau)} \Big|_0^t BK \\
 &= e^{At} X_0 + A^{-1} (e^{At} - I) BK
 \end{aligned} \tag{2-23}$$

系统的输出响应

$$Y(t) = CX(t) = Ce^{At} X_0 + CA^{-1} (e^{At} - I) BK$$

3. 斜坡响应

当输入为斜坡函数, 即 $u(t) = Kt$ 时, 系统的状态响应

$$\begin{aligned}
 X(t) &= e^{At} X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} BK \tau d\tau \\
 &= e^{At} X_0 + \int_0^t \tau e^{A(t-\tau)} d\tau BK \\
 &= e^{At} X_0 - A^{-1} [\tau e^{A(t-\tau)} + A^{-1} e^{A(t-\tau)}]_0^t BK \\
 &= e^{At} X_0 + [A^{-2} (e^{At} - I) - A^{-1} t] BK
 \end{aligned} \tag{2-24}$$

系统的输出响应

$$Y(t) = CX(t) = Ce^{At} X_0 + C[A^{-2} (e^{At} - I) - A^{-1} t] BK$$

式 (2-23) 和式 (2-24) 只有在矩阵 A 为非奇异, 即 A^{-1} 存在的条件下, 才能使用。

【例 2-9】 已知系统

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

试使用式(2-22)、式(2-23)和式(2-24)分别求系统在单位脉冲函数、单位阶跃函数及单位斜坡函数作用下的状态响应。

解: 由例 2-8 知

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad e^{At}X(0) = \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -4e^{-t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 单位脉冲响应

$u(t) = \delta(t)$, 由式(2-22)得

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At}X_0 + e^{At}B \\ &= \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -4e^{-t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -4e^{-t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{-t} - 4e^{-2t} \\ -5e^{-t} + 8e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 单位阶跃响应

$u(t) = 1(t)$, 由式(2-23)得

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At}X_0 + A^{-1}(e^{At} - I)B \\ &= \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -4e^{-t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} - 1 & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -4e^{-t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ -3e^{-t} + 5e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3) 单位斜坡响应

$u(t) = t$, 由式(2-24)得

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At}X_0 + [A^{-2}(e^{At} - I) - A^{-1}t]B \\ &= e^{At}X_0 - A^{-1}Bt + A^{-2}(e^{At} - I)B \\ &= \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -4e^{-t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \left[\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right]^2 \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} - 1 & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -4e^{-t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -t \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4e^{-t} - e^{-2t} - 3 \\ -4e^{-t} + 2e^{-2t} + 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5e^{-t} - \frac{13}{4}e^{-2t} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t \\ -5e^{-t} + \frac{13}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由例 2-8 和例 2-9 求得的状态响应可见, 使用式(2-22)、式(2-23)和式(2-24)的结果, 与直接使用式(2-21)的结果完全相同。

2.4 连续系统的时间离散化

2.4.1 问题的提出

无论是利用数字计算机分析时间连续系统，还是利用计算机等离散控制装置对时间连续的被控对象进行控制，都会遇到一个把时间连续系统化为等价的时间离散系统的问题。

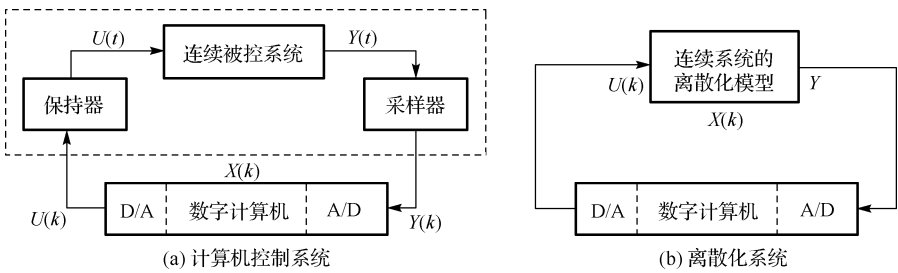


图 2-2 连续系统的时间离散化

图 2-2 所示为将时间连续系统化为时间离散系统的一种典型情况。被控对象是一个时间连续系统，其状态 $X(t)$ 、输入 $U(t)$ 和输出 $Y(t)$ 都是时间 t 的连续函数向量。控制装置由数模转换 (D/A)、数字计算机和模数转换 (A/D) 构成。它只能输入时间离散变量 $Y(k)$ ，输出时间离散变量 $U(k)$ ，其中离散时间序列 $k = 0, 1, 2, \dots$ 。为了使这两部分能够连接起来，分别引入采样器和保持器。采样器的作用是把连续变量 $Y(t)$ 转换为离散变量 $Y(k)$ ，常用的采样器是一种周期性动作的采样开关，当开关接通时，将变量输入，而当开关断开时，将变量阻断。保持器的作用则是把离散信号 $U(k)$ 变换为连续信号 $U(t)$ 。它是由电子元件组成的一种保持电路，可分为零阶保持器、一阶保持器等。这样，如果把保持器-连续系统-采样器视为一个整体，并用 $X(k)$ 表示其离散状态向量，那么它就组成了以 $X(k)$ 、 $U(k)$ 和 $Y(k)$ 为变量的时间离散系统，其状态空间方程即为连续系统的时间离散化模型。而控制装置所面对的正是这个离散化模型，其示意图如图 2-2(b) 所示。

线性连续系统的时间离散化问题的数学实质，就是在一定的采样方式和保持方式下，由系统的时间连续状态空间方程导出其对应的时间离散状态空间方程，并建立起两者的系数矩阵间的关系式。

2.4.2 三点基本假设

为了使离散化后的状态空间方程具有简单的形式，并保证它是可复原的，先引入如下三点基本假设。

(1) 采样器的采样方式取为以常数 T 为周期的等间隔采样。采样瞬时为 $t_k = kT, k = 0, 1, 2, \dots$ 。采样脉冲宽度 $\Delta \ll T$ ，因而可视为 $\Delta \approx 0$ 。于是有

$$Y(k) = \begin{cases} Y(t), & t = kT \\ 0, & t \neq kT \end{cases}$$

式中， $k = 0, 1, 2, \dots$

(2) 采样周期 T 的值要满足香农 (Shannon) 采样定理给出的条件，即离散信号 $Y(k)$ 可以

完全复原为原来的连续信号 $Y(t)$ 的条件为采样角频率 ω_s 满足

$$\omega_s > 2\omega_m$$

式中, ω_m 为 $Y(t)$ 的幅频谱 $Y(j\omega)$ 的上限频率。考虑到 $\omega_s = 2\pi/T$, 则采样周期 T 满足

$$T < \pi / \omega_m$$

(3) 保持器是零阶的, 即把离散信号转换为连续信号是按零阶保持方式来实现的。零阶保持器的特点是: 保持器输出 $U(t)$ 在两个采样瞬时之间保持为常值且等于前一采样瞬时的值, 即

$$U(t) = U(kT) = \text{常数}, \quad kT \leq t < (k+1)T$$

2.4.3 线性定常连续系统状态空间方程的离散化

线性定常连续系统的状态空间方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{U} \end{cases} \quad (2-25)$$

状态方程的解为

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{U}(\tau) d\tau$$

设初始时刻 $t_0 = kT$, 考虑采样时刻 $t = (k+1)T$, 则状态方程的解为

$$\mathbf{X}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{X}(kT) + \int_{kT}^{[(k+1)T]} e^{\mathbf{A}[(k+1)T-\tau]} \mathbf{B}\mathbf{U}(\tau) d\tau$$

在 $kT \leq t < (k+1)T$ 时, 输入向量 $\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}(kT) = \text{常数}$, 则

$$\mathbf{X}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{X}(kT) + \int_{kT}^{[(k+1)T]} e^{\mathbf{A}[(k+1)T-\tau]} \mathbf{B} d\tau \mathbf{U}(kT)$$

令 $t = (k+1)T - \tau$, 则

$$\mathbf{X}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{X}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} dt \mathbf{U}(kT)$$

令

$$\mathbf{G}(T) = e^{\mathbf{A}T}, \quad \mathbf{H}(T) = \int_0^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} dt \quad (2-26)$$

得线性定常连续系统状态方程的离散化方程

$$\mathbf{X}[(k+1)T] = \mathbf{G}(T) \mathbf{X}(kT) + \mathbf{H}(T) \mathbf{U}(kT) \quad (2-27)$$

由于输出方程是线性方程, 离散化后, 在采样时刻 $t = kT$, 系统的离散输出 $\mathbf{Y}(kT)$ 与离散状态 $\mathbf{X}(kT)$ 和离散输入 $\mathbf{U}(kT)$ 之间仍保持原来的线性关系。因此, 离散化前后的矩阵 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 均不改变。离散化后的系统输出方程为

$$\mathbf{Y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{X}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{U}(kT) \quad (2-28)$$

对 SISO 系统, 离散化状态空间方程记为

$$\begin{cases} \mathbf{X}[(k+1)T] = \mathbf{G}(T) \mathbf{X}(kT) + \mathbf{h}(T) \mathbf{u}(kT) \\ \mathbf{y}(kT) = \mathbf{c} \mathbf{X}(kT) + d \mathbf{u}(kT) \end{cases} \quad (2-29)$$