

第2章 通信中的信号分析

通信系统研究的主要问题之一,就是信号与噪声的问题。它们都带有某种随机性,也就是不确定性,因此对于随机信号(噪声)的研究与分析是通信系统研究的主要内容。但是,同样也应当注意到随机信号的某一具体样本具有确知信号的特性,研究它在通信系统中的传输特性,属于确知信号分析范畴。对于通信系统传送信号的研究方法,主要包括时域分析法和频域分析法,比较而言,频域分析法在通信原理课程当中更为重要。与此同时,研究信号(噪声)和系统以及它们的相互关系也是人们关注的重点。

本章首先介绍确知信号与系统的时域分析和频域分析,在此基础之上,介绍随机过程的基本概念,并结合通信系统的特点对平稳随机过程和通信中的各类噪声进行分析讲解。

【本章核心知识点与关键词】

无失真传输 平稳随机过程 数字特征 功率谱密度 自相关函数 白噪声 窄带高斯噪声 余弦信号加窄带高斯噪声

2.1 引言

通信系统的任务是传递消息,这些消息包括语言、文字、图像、数据、指令等。为了便于传输,首先需要利用转换设备将所传消息按一定规则变换为相对应的信号,例如电信号、光信号等,这些信号通常是随时间变化的电流、电压或光强等;然后经过适当的信道,将信号传送到接收方,再转换为声音、文字、图像等。

从数学观点来分析,这些电信号、光信号都可以看成是独立时间变量 t 的函数 $f(t)$ 。在光学成像系统中,信号是分布于空间各点的灰度,它是二维空间坐标 x 和 y 的函数。如果图像信号是运动的,则可表示为空间坐标 x 、 y 和时间 t 的函数 $f(x, y, t)$ 等。如果信号是一个独立变量的函数,则称为一维信号;如果信号是 n 个独立变量的函数,就称为 n 维信号。本书只讨论一维信号。

信号与系统是紧密关联的概念。信号在系统中按一定规律运动和变化,系统在输入信号的驱动下对它进行“加工”和“处理”之后发送输出信号,因此输入信号常称为激励,而输出信号常称为响应。

在通信系统中,信道在传输信号的同时常伴随有噪声的加入,由此看来,分析与研究通信系统,离不开对信号和噪声的分析。通信系统中遇到的信号总带有某种随机性,即它们的某个或几个参数不能预知或不能完全预知。假如传输的是确知信号,通信也就失去意义,这里把这种具有随机性的信号称为随机信号。不仅如此,通信系统中还必然存在噪声,例如自然界中的各种电磁波噪声和设备本身产生的热噪声、散粒噪声等,它们也是不可预测的。因此,这些噪声就统称为随机噪声或简称为噪声。

信号通过电路和系统时,有时域和频域两种分析方法,在本课程中以信号频谱分析和信号通过系统的频域分析方法为重点。对于随机信号而言,在研究它的统计特性的基础上,对

它的数字特征以及平稳随机过程的相关函数和功率谱密度的研究,也在通信系统分析中得到了越来越多的关注。

2.2 信号与系统的频域分析

频域分析是信号与系统分析的重要手段,利用频域分析法可以直接和通信系统中极为重要的带宽联系起来,对信号的功率谱分析较为有利。

2.2.1 周期信号的频谱分析

在高等数学这门课中学过,只要周期信号满足狄里赫利条件,就能够展开成傅里叶级数。具体表达式为

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \quad \text{或} \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} \quad (2.2.1)$$

其中, $F_n = \frac{1}{2}A_n e^{j\varphi_n} = |F_n| e^{j\varphi_n}$,各谐波的振幅 A_n 或虚指数函数的幅度 $|F_n|$ 是频率 Ω 的函数,称为幅度(振幅)频谱,简称幅度谱。各谐波初相角 φ_n 同样也是频率 Ω 的函数,称为相位频谱,简称相位谱。周期信号的谱线只出现在频率为整数倍 Ω 的离散频率上,即周期信号的频谱是离散谱。可以证明幅度频谱计算公式为

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\Omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.2.2)$$

下面以周期性矩形脉冲为例,计算并分析它的频谱。设有一幅度为 1,脉冲宽度为 τ 的周期性矩形脉冲,其周期为 T 。根据式(2.2.2)可以求得其幅度频谱,也就是傅里叶系数

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jn\Omega t} dt \\ &= \frac{\tau \sin(n\Omega \tau/2)}{n\Omega \tau/2} = \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega \tau}{2}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

式中, $\text{Sa}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin x}{x}$ 。图 2.2.1(b)给出了 $T = \tau/5$ 的周期性矩形脉冲的频谱。

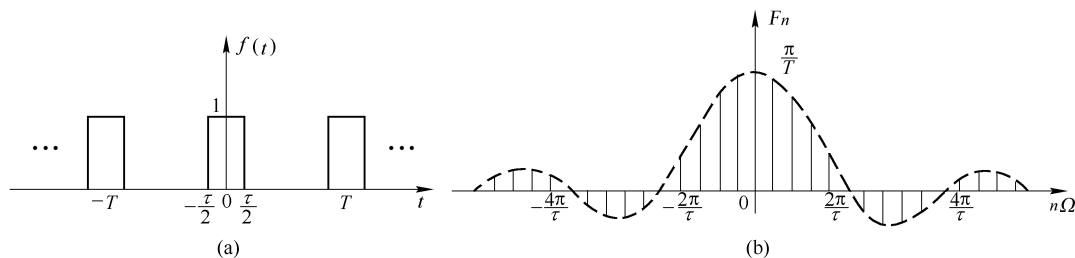


图 2.2.1 周期性矩形脉冲和它的频谱

由图 2.2.1(b)可见,周期性矩形脉冲信号的频谱具有一般周期信号频谱的共同特点,即它的频谱都是离散的,仅含有 $\omega = n\Omega$ 的各分量,其相邻两谱线的间隔是 Ω ($\Omega = 2\pi/T$),脉冲周期 T 越长,谱线间隔越小,频谱越稠密;反之,则越稀疏。

上述谱线的幅度按包络线 $\text{Sa}(\omega\tau/2)$ 的规律变化, 在 $\omega\tau/2 = m\pi (m = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 各处, 即 $\omega = 2m\pi/\tau$ 的各处, 包络为零, 其相应的谱线, 即相应的频率分量也等于零。

2.2.2 非周期信号的频谱分析

如果周期性脉冲的重复周期足够长, 这样的信号即可作为非周期信号来处理。而对于非周期信号而言, 由于周期 T 趋于无限大, 则相邻谱线的间隔趋近于无穷小, 从而信号的频谱密集成为连续频谱。为了描述非周期信号的频谱特性, 引入频谱密度的概念。结合式(2.2.2), 令

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} F_n T \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.2.4)$$

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.2.5)$$

利用式(2.2.4)可以计算出信号的频谱密度函数, 通常被称为傅里叶正变换或傅里叶变换; 利用式(2.2.5)通过频谱密度函数计算出时域信号, 这个计算过程通常也被称为傅里叶反变换。下面计算两个特殊函数的频谱函数。

例 2.2.1 已知宽度为 τ , 幅度为 1 的门函数 $g_\tau(t)$, 求其频谱函数。

解 利用式(2.2.4)可以计算出信号的频谱函数为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \tau \text{Sa} \frac{\omega\tau}{2}$$

由图 2.2.2 可以看到, 频谱图中第一个零值的角频率为 $2\pi/\tau$ 。当脉冲宽度减小时, 第一个零值频率也相应增高。对于矩形脉冲, 常取从零频率到第一个零值频率 $1/\tau$ 之间的频段作为信号的频带宽度。这样, 脉冲宽度越窄, 其占有的频带越宽。

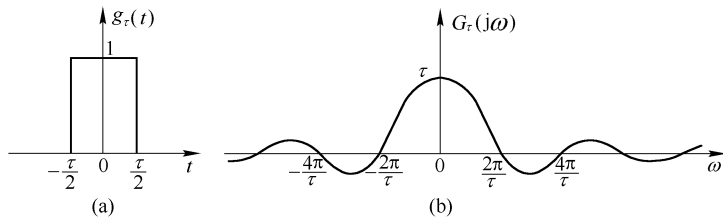


图 2.2.2 门函数及其频谱

例 2.2.2 确定单位冲激函数的频谱。

解 利用式(2.2.4)计算冲激函数的频谱为

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \end{aligned}$$

即单位冲激函数的频谱是常数 1, 如图 2.2.3(b) 所示。其频谱密度在整个频率范围内处处相等, 常称为“均匀谱”或“白色频谱”。

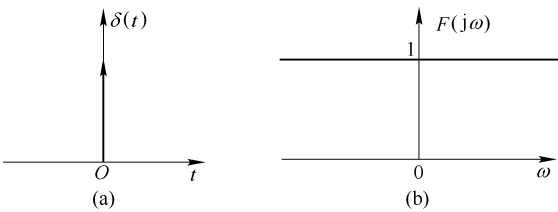


图 2.2.3 单位冲激函数的频谱

上述例题给出了两个特殊函数的傅里叶变换，为了便于查找，表 2.2.1 给出了本课程常用信号的傅里叶变换。

表 2.2.1 常用信号的傅里叶变换

序号	函数名称	函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(j\omega)$
1	矩形脉冲 (门函数)	$g_{\tau}(t) = \begin{cases} 1 & t \leq \tau/2 \\ 0 & t > \tau/2 \end{cases}$	$\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$
2	三角脉冲	$f_{\Delta}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2 t }{\tau} & t \leq \tau/2 \\ 0 & t > \tau/2 \end{cases}$	$\frac{\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega \tau}{4}\right)$
3	冲激函数	$\delta(t)$	1
4	阶跃函数	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
5	常数	K	$2K\pi\delta(\omega)$
6	符号函数	$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$	$\frac{2}{j\omega}$
7	单边指数函数	$e^{-at}u(t) \quad a > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$
8	偶双边指数函数	$e^{-a t } \quad a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
9	奇双边指数函数	$\begin{cases} -e^{at} & t < 0 \\ e^{-at} & t > 0 \end{cases} \quad a > 0$	$-j\frac{2\omega}{a^2 + \omega^2}$
10	正弦信号	$\sin\omega_c t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_c) - \delta(\omega - \omega_c)]$
11	余弦信号	$\cos\omega_c t$	$\pi[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)]$
12	余弦调制信号	$m(t)\cos\omega_c t$	$\frac{1}{2}[M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)]$
13	正弦调制信号	$m(t)\sin\omega_c t$	$\frac{j}{2}[M(\omega + \omega_c) - M(\omega - \omega_c)]$
14	复指数函数	$e^{j\omega_c t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_c)$
15	脉冲序列	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$

2.2.3 傅里叶变换的性质及应用

时间函数 $f(t)$ 可以用频谱函数 $F(j\omega)$ 表示，或者反之。也就是说，任一信号可以有两种描述方法：时域描述和频域描述。本节将研究在某一域中对函数进行某种运算，在另一域中所引起的效应，同时对通信原理课程当中可能应用的部分性质进行研究。

1. 傅里叶变换的运算特性

表 2.2.2 给出了傅里叶变换的运算特性。

表 2.2.2 傅里叶变换的性质

名 称	时 域	频 域
定 义	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ $F(j\omega) = F(j\omega) e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$
线 性	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$
反 转	$f(-t)$	$F(-j\omega)$
对 称 性	$F(jt)$	$2\pi f(-\omega)$
尺度变换	$f(at) \quad a \neq 0$	$\frac{1}{ a } F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$
时移特性	$f(t \pm t_0)$	$e^{\pm j\omega t_0} F(j\omega)$
频移特性	$f(t) e^{\pm j\omega_0 t}$	$F[j(\omega \mp \omega_0)]$
时域卷积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$
频域卷积	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$
时域微分	$f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n F(j\omega)$
频域微分	$(-jt)^n f(t)$	$F^{(n)}(j\omega)$

2. 时域卷积定理及其应用

初始状态为零的线性时变(LTI)系统响应 $y(t)$ 是激励 $f(t)$ 与系统冲激响应 $h(t)$ 的卷积积分。假设激励 $f(t)$ 的频谱函数为 $F(j\omega)$ ，冲激响应频谱函数为 $H(j\omega)$ (通常也称之为系统函数)，根据时域卷积性质，那么输出信号的频谱函数为

$$Y(j\omega) = F(j\omega) \cdot H(j\omega) \quad (2.2.6)$$

将 $Y(j\omega)$ 进行傅里叶逆变换就可以得到初始状态为零的 LTI 系统响应 $y(t)$ 。可以看到，利用时域卷积定理避免了烦琐的卷积积分运算。

3. 频率卷积定理及其应用

频率卷积定理通常可以用在调制和解调器的频谱变换过程中，调制解调器中使用到如图 2.2.4 所示的相乘器，输入调制信号为 $m(t)$ ；载波 $\cos \omega_c t$ ；已调信号为 $s(t) = m(t) \cdot \cos \omega_c t$ 。已知 $\cos \omega_c t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)]$ ， $m(t) \leftrightarrow M(\omega)$ ， $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$ ，利用频率卷积定理可以得到

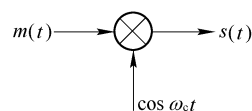


图 2.2.4 乘法器

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} M(\omega) * \pi[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)] = \frac{1}{2} [M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)]$$

从上述计算过程可以看到，载波 $\cos \omega_c t$ 调制过程实际上就是一个频谱搬移过程。

4. 帕塞瓦尔定理

设能量信号 $f(t)$ ，它的频谱函数为 $F(j\omega)$ ，这时信号定义在时间 $(-\infty, \infty)$ 区间上的能

量为 $E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$ ，结合式(2.2.5)对信号 $f(t)$ 进行傅里叶变换后再计算能量，可得

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F(-j\omega) d\omega \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

至此，就得到了帕塞瓦尔能量等式

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.2.8)$$

帕塞瓦尔定理表明，对于信号的能量或功率的计算不仅可以从时域计算，也可以在频域计算。

5. 能量谱密度和功率谱密度

为了表征能量在频域中的分布状况，可以借助于密度的概念，定义一个能量密度函数，简称能量频谱或能量谱。能量频谱 $G(\omega)$ 定义为单位频率的信号能量，因而结合式(2.2.8)，信号在整个频率区间 $(-\infty, \infty)$ 的总能量可以表示为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega \quad (2.2.9)$$

因此，能量谱可以表示为

$$G(\omega) = |F(j\omega)|^2 \quad (2.2.10)$$

利用式(2.2.10)，进而可以得到功率谱的表达式

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{G(\omega)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(j\omega)|^2}{T} \quad (2.2.11)$$

从式(2.2.10)和式(2.2.11)可以看到，能量谱和功率谱只与信号频谱函数的模有关，而与相位无关。

6. 信号带宽 B

研究能量谱 $G(\omega)$ 和功率谱 $P(\omega)$ 的目的，主要为研究信号能量(功率)在频域内的分布规律，以便合理地选择信号的通频带，对传输电路提出恰当的频带要求，可以尽量使信号在传输过程中不失真或少失真，进而提高信噪功率比。因此，信号带宽的定义非常重要，常用的定义有以下三种。

(1) 以集中一定百分比的能量(功率)来定义。

$$\frac{2 \int_0^B G(f) df}{E} = \gamma \quad \text{或} \quad \frac{2 \int_0^B P(f) df}{S} = \gamma \quad (2.2.12)$$

利用式(2.2.12)计算带宽 B ，这个百分比 γ 可取 90%、95% 或 99% 等。

(2) 以能量谱(功率谱)密度下降 3 dB 内的频率间隔作为带宽。

(3) 等效矩形带宽。

用一个矩形的频谱代替信号的频谱，矩形具有的能量与信号的能量相等。

7. 信号通过线性系统的不失真条件

所谓不失真传输,是指信号经过线性系统后,输出信号 $y(t)$ 与输入信号 $x(t)$ 相比较只是有衰减、放大和时延,而没有波形的失真,用数学式表示:

$$y(t) = K_0 x(t - t_d) \quad (2.2.13)$$

K_0 和 t_d 均为常数, K_0 是衰减(或放大)系数; t_d 是时延常数, $t_d > 0$ 表示时间迟后, $t_d < 0$ 表示时间超前,实际电路中都是时间迟后($t_d > 0$)。设 $X(\omega)$ 是输入信号 $x(t)$ 的频谱函数,对式(2.2.13)左右两边同时进行傅里叶变换,可得

$$Y(\omega) = K_0 X(\omega) e^{-j\omega t_d} \quad (2.2.14)$$

这样系统函数可以表示为

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = K_0 e^{-j\omega t_d} = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.2.15)$$

因此

$$|H(\omega)| = K_0, \quad \varphi(\omega) = -\omega t_d \quad (2.2.16)$$

至此得到结论,要使任意信号通过线性系统不产生波形失真,要求系统应具备以下两个条件:

- (1) 系统的幅频特性应该是一个不随频率变化的常数,如图 2.2.5(a) 所示。
- (2) 系统的相频特性应与频率成直线关系,如通过原点的负斜率直线如图 2.2.5(b) 所示。

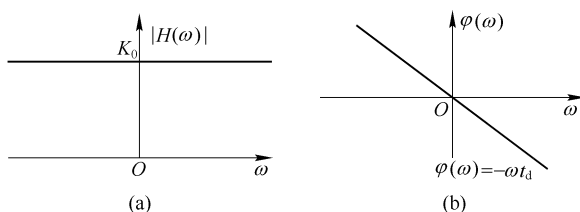


图 2.2.5 不失真传输系统的幅频和相频特性

2.3 随机过程的概念与描述

通信的目的在于传递消息,传递消息有时也称为传输信息,信息是利用各种信号形式进行描述的。在通信系统中,由信源发出的信号是随机的或者说是不可预知的,如话音信号、数字信号等,这类信号称为随机信号。不仅如此,携带了信息的信号在传输过程中将受到噪声的污染,噪声也是一种随机的波形。因此,在通信系统中对于随机信号(噪声)的分析与研究得到了人们的广泛关注。

2.3.1 随机过程的基本概念

自然界中事物的变化过程可以分为两类。一类是其变化过程具有确定的形式,或者说具有必然的变化规律,其变化过程基本特征可以用一个或几个时间 t 的确定函数来描述,这类过程称为确定性过程。例如,电容器通过电阻放电时,电容两端的电压随时间的变化就是一个确定性函数。但另一类事物的变化过程就复杂多了。它没有确定的变化形式,也就是说,每次对它的测量结果没有一个确定的变化规律,用数学语言来说,这类事物变化的过程不可

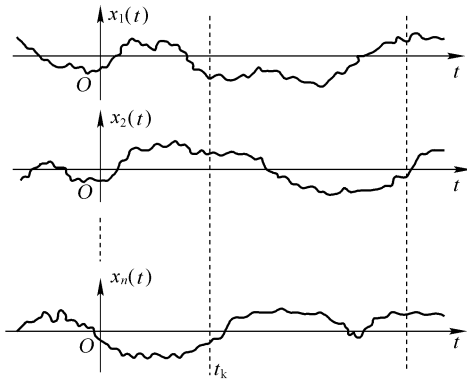


图 2.3.1 n 部通信机的噪声输出记录

能用一个或几个时间 t 的确定函数来描述, 这类过程称为随机过程。

例如, 有 n 台性能完全相同的通信机, 它们的工作条件也都相同, 现用 n 部记录仪同时记录各部通信机的输出噪声波形, 测试结果表明, 得到的 n 个记录并没有因为有相同的条件而输出相同的波形。恰恰相反, 即使 n 足够大, 也找不到两个完全相同的波形, 具体情况如图 2.3.1 所示。可以发现, 通信机输出的噪声电压随时间的变化是不可预知的, 因而它是一个随机过程。这里的一次记录(图 2.3.1 中的一个波形)就是一个实现, 无数个记录构成的

的总体是一个样本空间。

为此, 可以把对通信机输出噪声波形的观测看作一次随机试验, 每次随机试验的结果是得到一条时间波形, 记作 $x_i(t)$, 由此而得到的时间波形的全体 $\{x_1(t), x_2(t), \dots\}$ 就构成一个随机过程, 记作 $X(t)$ 。 $X(t)$ 基本特征主要体现在两个方面: 其一, 它是时间的函数; 其二, 它具有随机特性。而某次试验的结果 $x_i(t)$ 则称作随机过程 $X(t)$ 的一个样本函数或实现。

2.3.2 随机过程的统计描述

应当注意, 仅观察图 2.3.1 所给出的样本函数, 很难定量地描述这个随机过程的变化规律。因此, 需要从统计的意义上研究样本波形, 将它们具有的共性, 即相同的统计特性提纯出来, 这也就是随机过程的统计描述。

在某一固定的时刻 t_1 , 随机过程 $X(t)$ 的取值就是一个一维随机变量 $X_1(t)$, 根据概率论的知识, 它的一维概率分布函数为

$$F_1(x_1, t_1) = P[X(t_1) \leq x_1] \quad (2.3.1)$$

设式(2.3.1)对 x_1 的偏导数存在, 这时一维概率密度函数可以定义为

$$f_1(x_1, t_1) = \frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} \quad (2.3.2)$$

式(2.3.1)和式(2.3.2)描述了随机过程 $X(t)$ 在特定时刻 t_1 的统计分布情况, 但它们只是一维概率分布函数和概率密度函数, 仅描述了随机过程在某个时刻上的统计分布特性, 并没有反映出随机过程在不同时刻取值间的关联程度。因此, 有必要再研究随机过程 $X(t)$ 的二维分布。

设随机过程 $X(t)$ 在 $t=t_1$ 时, $X(t_1) \leq x_1$, 与此同时, 在 $t=t_2$ 时, $X(t_2) \leq x_2$, 则随机过程 $X(t)$ 的二维概率分布函数可以表示为

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2] \quad (2.3.3)$$

设式(2.3.3)对 x_1 和 x_2 的二阶偏导数存在, 这时二维概率密度函数可以定义为

$$f_n(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_n(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.3.4)$$

为了更加充分地描述随机过程 $X(t)$, 就需要考虑随机过程在更多时刻上的多维联合分布函数, 这时随机过程 $X(t)$ 的 n 维概率分布函数为

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P[X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n] \quad (2.3.5)$$

设式(2.3.5)对 $x_1, \dots, x_n$ 的偏导数存在, 这时 n 维概率密度函数可以定义为

$$f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \quad (2.3.6)$$

显然, 随着 n 的增大, 对随机过程 $X(t)$ 的统计特性的描述也越充分, 但问题的复杂性也随之增加。实际上, 掌握二维分布函数就已经足够了。

2.3.3 随机过程的数字特征

随机过程的统计描述, 除了可以用概率分布函数来描述外, 还可以利用随机过程的数字特征进行描述。因为这些数字特征可以较容易地用实验方法来确定, 从而更简洁地解决实际问题。随机过程的数字特征包括数学期望、方差和相关函数, 它们是由概率论中随机变量的数字特征的概念推广而来的, 但不再是确定的数值, 而是确定的时间函数。

1. 随机过程 $X(t)$ 的数学期望 $m(t)$

对某个固定的时刻 t , 随机过程 $X(t)$ 的一维随机变量的数学期望可以表示为

$$m(t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x; t) dx \quad (2.3.7)$$

显然数学期望 $m(t)$ 是一个依赖于时间 t 变化的函数。随机过程 $X(t)$ 的数学期望 $m(t)$ 是一个平均函数, 表明随机过程 $X(t)$ 的所有样本都围绕着 $m(t)$ 变化。有时数学期望又被称为统计平均值或均值。

在通信中, 假定传送的是确定的时间信号 $s(t)$, 噪声 $n(t)$ 是数学期望为零的随机过程, 那么接收信号 $x(t) = s(t) + n(t)$ 为一随机过程, 它的数学期望就是信号 $s(t)$ 。

2. 随机过程的方差 $\sigma^2(t)$

为了描述随机过程 $X(t)$ 的各个样本对数学期望的偏离程度, 可以引入随机过程的方差这个数字特征量。具体定义为

$$\sigma^2(t) = E\{[X(t) - m(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m(t)]^2 f_1(x; t) dx \quad (2.3.8)$$

由式(2.3.7)和式(2.3.8)可见, 随机过程的数学期望和方差都只与随机过程的一维概率密度函数有关。因此, 它们只是描述了随机过程在各时间点的统计性质, 而不能反映随机过程在任意两个时刻之间的内在联系。为了定量地描述随机过程的这种内在联系特征, 即随机过程在任意两个不同时刻上取值之间的相关程度, 可以引入自相关函数的概念。具体定义如下

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.3.9)$$

式中, t_1, t_2 为任意两个时刻。

有时, 也可以用自协方差函数来作为随机过程内在联系特征, 它定义为

$$\begin{aligned}
C_X(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - m(t_1)][X(t_2) - m(t_2)]\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m(t_1)] \cdot [x_2 - m(t_2)] \cdot f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2
\end{aligned} \quad (2.3.10)$$

显然, 自相关函数和自协方差函数有如下关系

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m(t_1) \cdot m(t_2) \quad (2.3.11)$$

相关函数的概念也可以引入到两个随机过程中, 用来描述它们之间的关联程度, 这种关联程度被称为互相关函数。设有随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$, 那么它们的互相关函数为

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)Y(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_2(x, y; t_1, t_2) dx dy \quad (2.3.12)$$

式中, $f_2(x, y; t_1, t_2)$ 为过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的二维联合概率密度函数。

2.4 平稳随机过程及其特性分析

2.4.1 平稳随机过程

随机过程的种类很多, 但在通信系统中广泛应用的是一种特殊类型的随机过程, 即平稳随机过程。所谓平稳随机过程, 是指它的任何 n 维分布函数或概率密度函数与时间起点无关。也就是说, 如果对于任意的正整数 n 和任意实数 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 和 τ , 随机过程 $X(t)$ 的 n 维概率密度函数满足

$$f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f_n(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) \quad (2.4.1)$$

则称 $X(t)$ 是平稳随机过程。

特别地, 对一维分布有

$$f_1(x, t) = f_1(x, t + \tau) = f_1(x) \quad (2.4.2)$$

对二维分布有

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t) = f_2(x_1, x_2; \tau) \quad (2.4.3)$$

其中, $\tau = t_2 - t_1$ 。表明平稳随机过程的二维分布仅与所取的两个时间点的间隔 τ 有关。或者说, 平稳随机过程在相同间隔的任意两个时间点之间的联合分布保持不变。根据平稳随机过程的定义, 可以求得平稳过程 $X(t)$ 的数学期望、方差和自相关函数:

$$E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx = m \quad (2.4.4a)$$

$$E\{[X(t) - m(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m]^2 f_1(x) dx = \sigma^2 \quad (2.4.4b)$$

$$R_X(t, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R_X(\tau) \quad (2.4.4c)$$

可见, 平稳过程的数字特征变得简单了, 数学期望和方差是与时间无关的常数, 自相关函数只是时间间隔 τ 的函数。这样可以进一步引出另外一个非常有用的概念: 若一个随机过程的数学期望与时间无关, 而其相关函数仅与 τ 有关, 则称这个随机过程是广义平稳的; 相应地, 由式(2.4.1)定义的过程被称为严格平稳或狭义平稳随机过程。

在通信系统中所遇到的信号及噪声,大多数均可视为平稳的随机过程。因此,研究平稳随机过程很有意义。

上述数字特征的计算,实际上是对随机过程的全体样本函数按概率密度函数加权积分求得,所以它们都是统计平均量。这样的求法在原则上是可行的,但实际系统中却是极为困难的,因为在通常情况下无法确切知道随机过程 $X(t)$ 的一维和二维概率密度函数。

为了解决在实际中遇到的问题,经过对多个随机过程观察发现,部分平稳随机过程的数字特征,完全可由随机过程中任一实现的数字特征来决定,即随机过程的数学期望(统计平均值),可以由任一实现的时间平均值来代替;随机过程的自相关函数,也可以由“时间平均”来代替“统计平均”。

用数学语言描述,对于部分平稳随机过程 $X(t)$ 的数字特征,可以用式(2.4.5)表示:

$$m = E\{X(t)\} = \bar{m} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (2.4.5a)$$

$$\sigma^2 = E\{[X(t) - m(t)]^2\} = \bar{\sigma}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - \bar{m}]^2 dt \quad (2.4.5b)$$

$$R_X(\tau) = R_X(t, t + \tau) = \overline{R_X(\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (2.4.5c)$$

如果平稳随机过程 $X(t)$ 的数字特征满足式(2.4.5)关系,就称该平稳随机过程 $X(t)$ 有各态历经性,因此,平稳随机过程的各态历经性可以理解为平稳过程的各个样本都同样地经历了随机过程的各种可能状态。由于任一样本都内蕴着平稳过程的全部统计特性信息,因而任一样本的时间特征就可以充分地代表整个平稳随机过程的统计特性。

如果一个平稳随机过程具有各态历经性,就可以通过过程的一个样本求得平稳过程的各数字特征,这是很有实际意义的结论。如果按电信号分析,从式(2.4.5)可以看到,实际上 $X(t)$ 的数学期望就是其时间均值,也就是直流分量; $R_X(0)$ 表示信号总平均功率; σ^2 是交流平均功率。

需要注意,具有各态历经性的随机过程一定是平稳随机过程,但平稳随机过程却并不都具有各态历经性。在实际工作中经常把各态历经性作为一种假设,有兴趣的读者可参阅有关书籍。

2.4.2 平稳随机过程的特性分析

相关函数 $R(\tau)$ 是在时域上描述平稳随机过程的主要方式。对于平稳随机过程而言,相关函数是一个重要的函数。这是因为,一方面,平稳随机过程的统计特性,可通过相关函数来描述;另一方面,相关函数还揭示了随机过程的频谱特性。为此,有必要了解平稳随机过程自相关函数的一些性质。

(1) $R(\tau)$ 是偶函数,即

$$R(\tau) = R(-\tau) \quad (2.4.6)$$

证明:根据定义 $R(\tau) = E\{X(t)X(t + \tau)\}$, 令 $t' = t + \tau$, 则 $t = t' - \tau$, 代入式(2.4.6)中,有

$$R(\tau) = E\{X(t)X(t + \tau)\} = E\{(X(t' - \tau)X(t'))\} = R(-\tau)$$

证毕。

$$(2) |R(\tau)| \leq R(0) \quad (2.4.7)$$

证明：显然有 $E\{[X(t) \pm X(t+\tau)]^2\} \geq 0$ ，展开后可以得到

$$\begin{aligned} E\{[X(t) \pm X(t+\tau)]^2\} &= E\{X^2(t)\} \pm 2E\{X(t)X(t+\tau)\} + E\{[X(t+\tau)]^2\} \\ &= 2[R(0) \pm R(\tau)] \geq 0 \end{aligned}$$

则有 $|R(\tau)| \leq R(0)$ ，证毕。

(3) $R(\tau)$ 与协方差函数、数学期望、方差的关系

$$C(\tau) = E\{[X(t) - m] \cdot [X(t+\tau) - m]\} = R(\tau) - m^2 \quad (2.4.8)$$

从物理意义来讲，随机过程在相距非常远的两个时间点上的取值毫无关联性可言。因此 $C(\infty) = 0$ ，这时利用式(2.4.8)就可以得到

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = m^2 \quad (2.4.9)$$

进一步可以得到

$$C(0) = \sigma^2 = R(0) - m^2 = R(0) - R(\infty) \quad (2.4.10)$$

大家知道，对于确知信号可以从时域和频域两方面进行分析，随机信号也同样存在时域和频域两种分析手段。

设平稳随机过程 $X(t)$ 的一个样本为 $x(t)$ ，它的频谱函数 $X(\omega)$ 可以利用式(2.2.4)求得。根据帕塞瓦尔定理有

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

截取其中 $2T$ 长的一段计算功率，其中 $T \rightarrow \infty$ ，这时上式的能量信号就可以表示为功率信号

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(\omega)|^2}{2T} d\omega \quad (2.4.11)$$

需要强调指出，式(2.4.11)仅仅给出平稳随机过程 $X(t)$ 的一个样本 $x(t)$ 的平均功率，当然它不能代表整个随机过程的平均功率。样本 $x(t)$ 只是对平稳随机过程 $X(t)$ 作一次观测的结果，所以样本 $x(t)$ 的平均功率是一个随机变量，而平稳随机过程 $X(t)$ 的平均功率 S 只要对所有样本的平均功率进行统计平均即可，于是有

$$S = E\left\{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [X(t)]^2 dt\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{|X(\omega)|^2\}}{2T} d\omega \quad (2.4.12)$$

令

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{|X(\omega)|^2\}}{2T} \quad (2.4.13)$$

则有

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega \quad (2.4.14)$$

这里将 $P(\omega)$ 称为平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度或简称功率谱。它具有如下的性质：

(1) $P(\omega)$ 是确定函数而不再具有随机特性。

(2) $P(\omega)$ 是偶函数，即

$$P(\omega) = P(-\omega) \quad (2.4.15)$$

(3) $P(\omega)$ 是非负函数。

(4) 可以证明, $P(\omega)$ 和 $R(\tau)$ 为傅里叶变换对, 即

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega; \quad P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.4.16)$$

2.5 通信系统中常见的噪声

在通信过程中不可避免地存在着噪声, 它们对通信质量的好坏有着极大的影响。如果根据噪声的来源对它进行分类, 噪声大致有三类。

(1) 自然噪声: 例如闪电而产生的天电噪声; 雨点、沙尘和下雪等产生的噪声; 宇宙中的太阳和其他星体发出的噪声电波等。

(2) 人为噪声: 例如各种电气设备、汽车的火花塞所产生的火花放电; 高压输电线路的电晕放电以及邻近电台信号的干扰等。

(3) 电路噪声: 器件内部电子、空穴运动所产生的散弹噪声; 电阻内部的热噪声等。

按噪声出现的特性来看, 噪声可以分为脉冲型噪声和连续型噪声。

按功率谱形状来分类, 噪声可以分为具有均匀分布功率谱的白噪声和不具有均匀分布功率谱的有色噪声。

根据噪声对信号作用的方式不同, 还可以将其分成加性噪声和乘性噪声。

当然, 如果噪声瞬时幅度值的概率分布服从高斯分布就称它为高斯噪声。最后, 还可以研究噪声是平稳还是非平稳随机过程, 等等。

总之, 噪声的来源和表现形式是复杂多样的, 下面就从最简单的白噪声开始对它们进行研究。

2.5.1 白噪声

所谓白噪声, 是指它的功率谱密度函数在整个频率域服从均匀分布的一类噪声。它类似于光学中包括全部可见光频率在内的白光, 凡是不符合上述条件的噪声就称为有色噪声。但是, 实际上完全理想的白噪声是不存在的, 通常只要噪声功率谱密度函数均匀分布的频率范围超过通信系统工作频率范围很多很多时, 就可近似认为是白噪声。例如, 热噪声的频率可以高达 10^{13} Hz, 且功率谱密度函数在 $0 \sim 10^{13}$ Hz 内基本均匀分布, 因此可以将它看作白噪声。而理想的白噪声功率谱密度通常被定义为

$$P_n(\omega) = \frac{n_0}{2} \quad (-\infty < \omega < \infty) \quad (2.5.1)$$

式中, n_0 是常数, 单位为 W/Hz。

根据式(2.5.1)可以求得白噪声的自相关函数为

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_0}{2} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{n_0}{2} \delta(\tau) \quad (2.5.2)$$

可见, 白噪声的自相关函数仅在 $\tau=0$ 时才不为零; 而对于其他任意的 τ , 自相关函数都为零。这说明, 白噪声只有在 $\tau=0$ 时才相关, 而它在任意两个时刻上的随机变量都是不相关的。白噪声的自相关函数及其功率谱密度, 如图 2.5.1 所示。

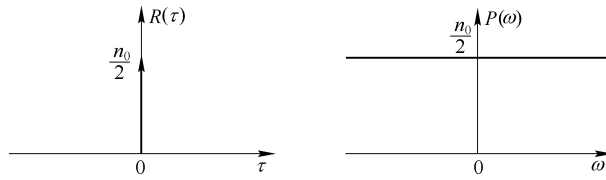


图 2.5.1 白噪声的自相关函数及其功率谱密度

有些文献采用单边频谱表示, 白噪声的功率谱密度函数又可以写为

$$P_n(\omega) = n_0 \quad (0 < \omega < \infty) \quad (2.5.3)$$

2.5.2 带限白噪声

我们都知道实际通信系统的频带宽度都是有限的, 那么通信系统中的噪声的带宽也是有限的。白噪声经过一个通信系统后, 其带宽自然受到了限制, 视其为带限白噪声。带限白噪声是通信系统中常见的一种形式。下面来看一下带限白噪声的功率谱密度和自相关函数的特性。若白噪声的频带限制在 $(-f_H, f_H)$ 之间, 且在该区间内噪声仍具有白色特性, 即其功率谱密度仍然为一常数:

$$P_n(\omega) = \begin{cases} n_0/2 & -\omega_H < \omega < \omega_H \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2.5.4)$$

则其自相关函数可以由式(2.5.4)进行傅里叶反变换得出:

$$R(\tau) = \int_{-f_H}^{f_H} \frac{n_0}{2} e^{j\omega\tau} df = \frac{n_0 f_H}{2} \frac{\sin 2\pi f_H \tau}{\pi f_H \tau} \quad (2.5.5)$$

按照以上两式画出的曲线如图 2.5.2 所示。由图可见, 带限白噪声的自相关函数 $R(\tau)$ 只在 τ 等于 $1/2f_H$ 的整数倍时才等于 0, 即此时才不相关。也就是说, 在按照抽样定理(见第 6 章)对带限白噪声抽样时, 各抽样值互不相关的随机变量。

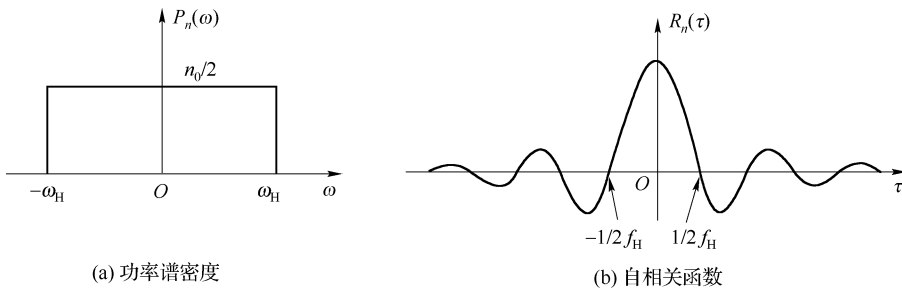


图 2.5.2 带限白噪声的功率谱密度和自相关函数曲线

2.5.3 高斯噪声

如果噪声瞬时幅度值的概率分布服从高斯分布(正态分布)时, 就称它为高斯噪声。因此在介绍高斯噪声之前, 首先介绍一下高斯随机过程。

高斯随机过程简称为高斯过程, 在通信理论中应用得最为广泛。所谓高斯过程, 是指它的任意 n 维($n=1, 2, \dots$)概率密度函数, 可以表示为

$$f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma_1 \cdots \sigma_n |\boldsymbol{\rho}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2|\boldsymbol{\rho}|} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |\boldsymbol{\rho}|_{jk} \left(\frac{x_j - m_j}{\sigma_j} \right) \left(\frac{x_k - m_k}{\sigma_k} \right) \right] \quad (2.5.6)$$

式中, $m_k = E\{x(t_k)\}$; $\sigma_k^2 = E\{[X(t_k) - m_k]^2\}$; $|\boldsymbol{\rho}|$ 为相关系数矩阵的行列式,

$$|\boldsymbol{\rho}| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\rho_{jk} = \frac{E\{[X(t_j) - m_j] \cdot [X(t_k) - m_k]\}}{\sigma_j \sigma_k}$$

$|\boldsymbol{\rho}|_{jk}$ 是行列式中元素 ρ_{jk} 所对应的代数余因子。

高斯过程具有下面几个重要性质。

(1) 由式(2.5.6)可以看出, 高斯过程的 n 维分布完全由各个随机变量的数学期望、方差及两两之间的相关函数所决定。因此, 对高斯过程来说, 只要研究它的数字特征就可以了。

(2) 由上面的特点可以看出, 如果高斯过程是广义平稳的, 即数学期望、方差与时间无关, 相关函数仅取决于时间间隔而与时间起点无关, 那么, 高斯过程的 n 维分布也与时间起点无关。所以, 广义平稳的高斯过程也是严格平稳的。

(3) 如果高斯过程在不同时刻的取值是不相关的, 即有 $\rho_{jk} = 0, j \neq k$, 而 $\rho_{jk} = 1, j = k$, 那么式(2.5.6)就变为

$$\begin{aligned} f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \prod_{j=1}^n \sigma_j} \exp \left[-\sum_{j=1}^n \frac{(x_j - m_j)^2}{2\sigma_j^2} \right] \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp \left[-\frac{(x_j - m_j)^2}{2\sigma_j^2} \right] = f(x_1, t_1) \cdot f(x_2, t_2) \cdots f(x_n, t_n) \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

这就是说, 如果高斯过程中的随机变量之间互不相关, 则它们也是统计独立的。

(4) 如果一个线性系统的输入随机过程是高斯的, 那么线性系统的输出过程仍然是高斯的。

当噪声 $n(t)$ 瞬时幅度值的概率密度函数如式(2.5.6)所示时, 这个噪声就被称为高斯噪声, 与此同时, 当噪声的功率谱密度函数在整个频率域内服从均匀分布时, 这个噪声就被称为高斯白噪声。

在通信系统理论分析中, 特别在分析、计算系统抗噪声性能时, 经常假定系统信道中噪声为高斯型白噪声。这主要是鉴于以下两个原因: 第一, 高斯型白噪声可用具体数学表达式表述, 因此便于推导、分析和运算; 第二, 高斯型白噪声确实也反映了具体信道中的噪声情况, 比较真实地代表了信道噪声的特性。

2.5.4 窄带高斯噪声

当高斯白噪声通过以 f_c 为中心频率的窄带系统时, 就形成窄带高斯噪声。而窄带系统是

指通频带宽度远远小于通带中心频率($B \ll f_c$), 且通带的中心频率满足 $f_c \gg 0$ 的系统。大多数通信信道实际都是窄带系统, 信号通过窄带系统后就形成了窄带信号。高斯白噪声通过窄带系统后就形成了窄带高斯噪声。无论是窄带信号还是窄带噪声, 其频谱都局限在 f_c 附近很窄的频率范围内, 观察图 2.5.3 可以看到, 其包络和相位都在做缓慢随机变化。

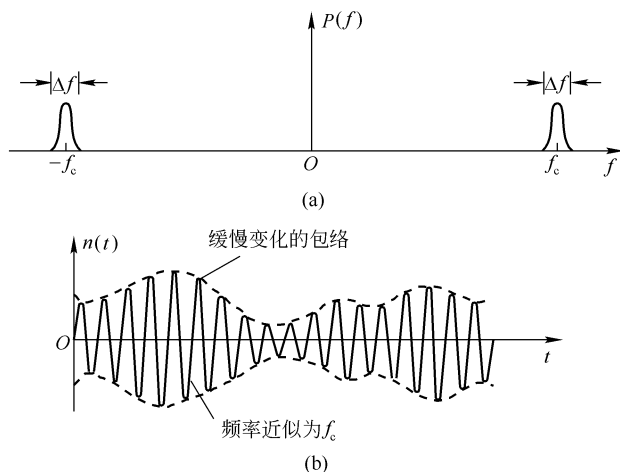


图 2.5.3 窄带噪声的功率谱和时间波形

这样, 窄带高斯噪声就可以表示成为

$$n(t) = \rho(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t)], \quad \rho(t) \geq 0 \quad (2.5.8)$$

进一步将式(2.5.8)展开可以得到

$$\begin{aligned} n(t) &= \rho(t) \cos \varphi(t) \cos \omega_c t - \rho(t) \sin \varphi(t) \sin \omega_c t \\ &= n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

式中, $n_c(t)$ 称为噪声的同相分量, 即

$$n_c(t) = \rho(t) \cos \varphi(t) \quad (2.5.10)$$

$n_s(t)$ 称为噪声的正交分量, 即

$$n_s(t) = \rho(t) \sin \varphi(t) \quad (2.5.11)$$

而噪声的随机包络函数为

$$\rho(t) = \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} \quad (2.5.12)$$

噪声的随机相位函数为

$$\varphi(t) = \arctan \frac{n_s(t)}{n_c(t)} \quad (2.5.13)$$

从式(2.5.10) ~ 式(2.5.13)可以看出, 窄带噪声 $n(t)$ 的统计特性将表现在 $n_c(t)$ 、 $n_s(t)$ 、 $\rho(t)$ 和 $\varphi(t)$ 中, 当窄带噪声 $n(t)$ 的统计特性确定之后, 就可以进一步确定 $n_c(t)$ 、 $n_s(t)$ 、 $\rho(t)$ 和 $\varphi(t)$ 的统计特性。对于某些特定的窄带噪声 $n(t)$, 可以较为方便地求出 $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 的统计特性, 结合概率论的知识, 利用式(2.5.10)和式(2.5.11)就可以求出 $\rho(t)$ 和 $\varphi(t)$ 的统计特性。

假设 $n(t)$ 是平稳高斯窄带噪声, 其均值为 0、方差为 σ_n^2 , 可以证明随机过程 $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 有如下特性。

(1) $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 都是平稳的高斯过程。

(2) 它们的均值为0, 即 $E\{n_c(t)\} = E\{n_s(t)\} = 0$; 方差均为 σ_n^2 , 也就是 $\sigma_{nc}^2 = \sigma_{ns}^2 = \sigma_n^2$ 。

(3) $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 在同一时刻的取值是线性不相关的随机变量。因为它们是高斯的, 所以也是统计独立的。

根据高斯过程的特点, 当已知其均值方差和相关函数后, 可以立即得到它的分布函数。根据 $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 的特性, 可以得到它们的联合概率密度函数

$$f(n_c, n_s) = f(n_c) \cdot f(n_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{n_c^2 + n_s^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (2.5.14)$$

根据概率论知识, 利用式(2.5.14), 可以计算 $\rho(t)$ 和 $\varphi(t)$ 的联合概率密度函数

$$f(\rho, \varphi) = f(n_c, n_s) \cdot \left| \frac{\partial(n_c, n_s)}{\partial(\rho, \varphi)} \right| \quad (2.5.15)$$

利用式(2.5.10)和式(2.5.11)的关系, 可得

$$\left| \frac{\partial(n_c, n_s)}{\partial(\rho, \varphi)} \right| = \begin{vmatrix} \partial n_c / \partial \rho & \partial n_s / \partial \rho \\ \partial n_c / \partial \varphi & \partial n_s / \partial \varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho$$

所以, 得到

$$f(\rho, \varphi) = \rho \cdot f(n_c, n_s) = \frac{\rho}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{n_c^2 + n_s^2}{2\sigma_n^2}\right) = \frac{\rho}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (2.5.16)$$

在式(2.5.16)中, $\rho \geq 0$; φ 在 $(0, 2\pi)$ 内取值, 这样利用概率论中边际分布知识, 可分别求得 $f(\rho)$ 和 $f(\varphi)$

$$f(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho, \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma_n^2}\right) d\varphi = \frac{\rho}{\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad \rho \geq 0 \quad (2.5.17)$$

可见, 包络服从瑞利(Rayleigh)分布; 而

$$f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho, \varphi) d\rho = \int_0^{\infty} \frac{\rho}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma_n^2}\right) d\rho = \frac{1}{2\pi} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (2.5.18)$$

相位服从均匀分布, 且有

$$f(\rho, \varphi) = f(\rho) \cdot f(\varphi) \quad (2.5.19)$$

这样可以得到结论: 一个均值为0、方差为 σ_n^2 的平稳高斯窄带过程, 其包络服从瑞利分布, 相位服从均匀分布。并且就一维分布而言, 随机包络和随机相位是统计独立的。

2.6 噪声对信号和系统的影响

2.6.1 正弦波加窄带高斯噪声

信号经过信道传输后总会受到噪声的干扰, 为了减少噪声的影响, 通常在接收机前端设置一个带通滤波器, 滤除信号频带以外的噪声。因此, 带通滤波器的输出是信号与窄带噪声的混合波形, 最常见的是正弦波加窄带高斯噪声的合成波。这是通信系统中常会遇到的一种情况, 所以有必要了解混合信号的包络和相位的统计特性。

设混合信号的输出为

$$\begin{aligned}
r(t) &= s(t) + n(t) \\
&= A \cos(\omega_c t + \theta) + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \\
&= [A \cos \theta + n_c(t)] \cos \omega_c t - [A \sin \theta + n_s(t)] \sin \omega_c t \\
&= z_c(t) \cos \omega_c t - z_s(t) \sin \omega_c t \\
&= z \cos(\omega_c t + \varphi)
\end{aligned} \tag{2.6.1}$$

则信号 $r(t)$ 的包络和相位分别为

$$z(t) = \sqrt{z_c^2(t) + z_s^2(t)} \tag{2.6.2}$$

$$\varphi(t) = \arctan \frac{z_s(t)}{z_c(t)} \tag{2.6.3}$$

以及

$$z_c(t) = z(t) \cos \varphi(t) = A \cos \theta(t) + n_c(t) \tag{2.6.4}$$

$$z_s(t) = z(t) \sin \varphi(t) = A \sin \theta(t) + n_s(t) \tag{2.6.5}$$

如果 θ 值已给定, 则 z_c 及 z_s 都是相互独立的高斯随机变量, 其数字特征为

$$E\{z_c(t)\} = A \cos \theta \quad E\{z_s(t)\} = A \sin \theta \quad \sigma_{z_c}^2 = \sigma_{z_s}^2 = \sigma_n^2$$

所以, 给定相位 θ 为条件的 z_c 及 z_s 的联合密度函数为

$$f(z_c, z_s/\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \exp \left[-\frac{(z_c - A \cos \theta)^2 + (z_s - A \sin \theta)^2}{2\sigma_n^2} \right] \tag{2.6.6}$$

利用式(2.6.4)和式(2.6.5)的关系, 可得包络和相位联合概率密度

$$f(z, \varphi/\theta) = f(z_c, z_s/\theta) \left| \frac{\partial(z_c, z_s)}{\partial(z, \varphi)} \right| = \frac{z}{2\pi\sigma_n^2} \exp \left[-\frac{z^2 + A^2 - 2Az \cos(\theta - \varphi)}{2\sigma_n^2} \right] \tag{2.6.7}$$

求条件边际分布, 经推导有

$$f(z/\theta) = \frac{z}{\sigma_n^2} \exp \left(-\frac{z^2 + A^2}{2\sigma_n^2} \right) I_0 \left(\frac{Az}{\sigma_n^2} \right) \tag{2.6.8}$$

这个概率密度函数称为广义瑞利分布, 也称莱斯(Rice)密度函数。式中 $I_0(x)$ 为零阶修正贝塞尔函数, 当 $x \geq 0$ 时, $I_0(x)$ 是单调上升函数, 且有 $I_0(0) = 1$ 。因此, 式(2.6.8)存在两种极限情况:

(1) 当信号很小, 也就是 $A \rightarrow 0$ 时, 即信号功率与噪声功率之比 $A^2/2\sigma_n^2 = r \rightarrow 0$ 时, 有 $I_0(x) = 1$, 这时混合信号中只存在窄带高斯噪声, 式(2.6.8)近似为式(2.5.15), 即由莱斯分布退化为瑞利分布。

(2) 当信噪比 r 很大, 也就是 $z \approx A$ 时, $f(z)$ 近似于高斯分布, 即

$$f(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left[-\frac{(z - A)^2}{2\sigma_n^2} \right] \tag{2.6.9}$$

需要指出, 信号加噪声后的随机相位分布也与信噪比有关。小信噪比时, $f(\varphi/\theta)$ 接近于均匀分布, 它反映这时窄带高斯噪声为主的情况; 大信噪比时, $f(\varphi/\theta)$ 主要集中在有用信号相位附近。图 2.6.1 给出了不同的 r 值时 $f(z)$ 和 $f(\varphi/\theta)$ 的曲线。