

第 2 章 连续时间信号与系统的时域分析

【内容提要】 本章首先介绍连续信号的时域特性,包括常用信号的定义、性质、基本运算和变换。然后介绍连续系统的时域分析方法,包括零输入响应和零状态响应的求解方法。

2.1 常用信号及信号的基本运算

2.1.1 常用信号

1. 实指数信号

实指数信号的表达式为

$$f(t) = Ke^{at} \quad (2-1)$$

式中, a 和 K 为实数。若 $a > 0$, 信号将随时间而增长; 若 $a < 0$, 信号则随时间衰减; 在 $a = 0$ 的特殊情况下, 信号不随时间而变化, 成为直流信号。常数 K 表示指数信号在 $t = 0$ 点的初始值。 $K > 0$ 时实指数信号的波形如图 2-1 所示。

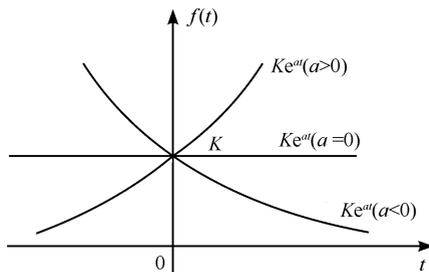


图 2-1 实指数信号

指数 a 的绝对值大小反映了信号增长或衰减的速率, $|a|$ 越大, 增长或衰减的速率越快。通常, 把

$|a|$ 的倒数称为实指数信号的时间常数, 记做 τ , 即 $\tau = 1/|a|$, τ 越大, 实指数信号增长或衰减的速率越慢。

2. 正弦信号

正弦信号和余弦信号二者仅在相位上相差 $\pi/2$, 通常统称为正弦信号, 一般写做

$$f(t) = K\sin(\omega t + \theta) \quad (2-2)$$

式中, K 为振幅, ω 为角频率, θ 为初相位, 其波形如图 2-2 所示。

正弦信号是周期信号, 其周期 T 与角频率 ω 和频率 f 满足

$$T = 2\pi/\omega = 1/f$$

在信号与系统分析中, 有时要遇到衰减的正弦信号, 波形如图 2-3 所示。此正弦振荡的幅度按指数规律衰减, 其表达式为

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Ke^{-\sigma t} \sin(\omega t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (2-3)$$

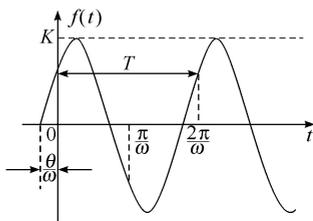


图 2-2 正弦信号

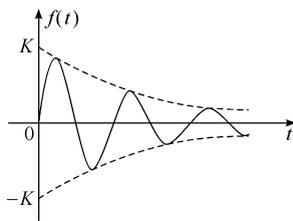


图 2-3 指数衰减的正弦信号

正弦信号和余弦信号常借助复指数信号来表示。由欧拉公式可知

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

则有

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad (2-4)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (2-5)$$

这是以后经常要用到的两对关系式。

与指数信号的性质类似,正弦信号对时间的微分与积分仍为同频率的正弦信号。

3. 复指数信号

如果指数信号的指数因子为一复数,则称之为复指数信号,其表达式为

$$f(t) = Ke^{st} \quad (2-6)$$

其中

$$s = \sigma + j\omega$$

式中, σ 为复数 s 的实部, ω 为其虚部。借助欧拉公式将式(2-6)展开,可得

$$Ke^{st} = Ke^{(\sigma + j\omega)t} = Ke^{\sigma t} \cos(\omega t) + jKe^{\sigma t} \sin(\omega t) \quad (2-7)$$

此结果表明,一个复指数信号可分解为实部、虚部两部分。其中,实部包含余弦信号,虚部则包含正弦信号。指数因子实部 σ 表征了正弦与余弦函数振幅随时间变化的情况。若 $\sigma > 0$,实部、虚部信号是增幅振荡;若 $\sigma < 0$,实部及虚部信号是衰减振荡。指数因子的虚部 ω 则表示正弦与余弦信号的角频率。3种特殊情况是:当 $\sigma = 0$,即 s 为虚数时,实部、虚部信号是等幅振荡;而当 $\omega = 0$,即 s 为实数时,复指数信号成为一般的指数信号;若 $\sigma = 0$ 且 $\omega = 0$,即 $s = 0$,则复指数信号的实部和虚部都与时间无关,成为直流信号。

尽管实际上不能产生复指数信号,但是它概括了多种情况,可以利用复指数信号来描述各种基本信号,如直流信号、指数信号、正弦或余弦信号,以及增长或衰减的正弦与余弦信号。利用复指数信号可使许多运算和分析得以简化。在信号分析理论中,复指数信号是一种非常重要的基本信号。

4. Sa(t) 信号(抽样信号)

Sa(t) 函数即 Sa(t) 信号,是指由 $\sin t$ 与 t 之比构成的函数,即

$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (2-8)$$

Sa(t) 函数的波形如图 2-4 所示。我们注意到,它是一个偶函数,在 t 的正、负两个方向上振幅都逐渐衰减;当 $t = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi$ 时,函数值等于零。

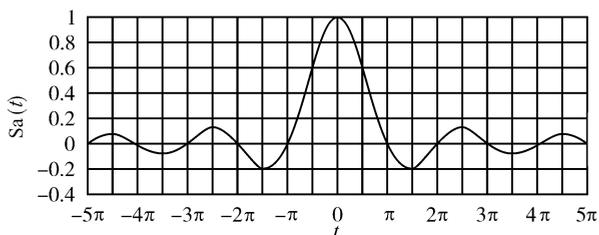


图 2-4 Sa(t) 函数

Sa(t) 函数还具有以下性质:

$$\int_0^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (2-9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \pi \quad (2-10)$$

2. 1. 2 信号的基本运算

1. 相加和相乘

信号相加是指若干信号之和,表示为

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t) \quad (2-11)$$

其相加规则是:同一瞬时各信号的函数值相加构成和信号在这一时刻的瞬时值。

信号相乘是指若干信号之积,表示为

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \cdots \cdot f_n(t) \quad (2-12)$$

其相乘规则是:同一瞬时各信号的函数值相乘构成积信号在这一时刻的瞬时值。

【例 2-1】 已知两个信号为

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sin t, & t \geq 0 \end{cases}; \quad f_2(t) = -\sin t$$

求 $f_1(t) + f_2(t)$ 和 $f_1(t) \cdot f_2(t)$ 的表达式。

解:

$$f_1(t) + f_2(t) = \begin{cases} -\sin t, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}; \quad f_1(t) \cdot f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -\sin^2 t, & t \geq 0 \end{cases}$$

当然,也可以通过波形来进行信号的相加和相乘。

2. 微分和积分

信号 $f(t)$ 的微分是指信号对时间的导数,表示为

$$y(t) = \frac{d f(t)}{d t} = f'(t) \quad (2-13)$$

信号 $f(t)$ 的积分是指信号在区间 $(-\infty, t)$ 上的积分,表示为

$$f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \quad (2-14)$$

3. 平移

信号的平移是指信号 $f(t)$ 变化为信号 $f(t \pm t_0)$ ($t_0 > 0$) 的运算。若为 $f(t + t_0)$, 表

示信号 $f(t)$ 沿 t 轴负方向平移 t_0 时间;若为 $f(t-t_0)$,表示信号 $f(t)$ 沿 t 轴正方向平移 t_0 时间。

【例 2-2】 已知 $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t+2), & -2 < t < 0 \\ -(t-1), & 0 < t < 1 \end{cases}$, 波形如图 2-5(a) 所示, 求 $f(t+1)$, $f(t-1)$ 。

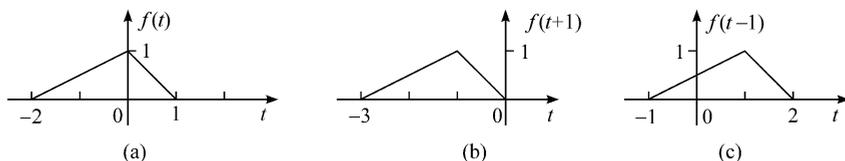


图 2-5 例 2-2 的图

解:用 $(t+1)$ 代替 t , 有

$$\begin{aligned} f(t+1) &= \begin{cases} \frac{1}{2}(t+1+2), & -2 < t+1 < 0 \\ -(t+1-1), & 0 < t+1 < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(t+3), & -3 < t < -1 \\ -t, & -1 < t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

相应的波形如图 2-5(b) 所示(超前)。

同理, $f(t-1)$ 的波形如图 2-5(c) 所示(滞后)。

4. 反折

信号的反折是指信号 $f(t)$ 变化为 $f(-t)$ 的运算。从几何意义上看, 即是把 $f(t)$ 以纵轴为中心做 180° 翻转。

【例 2-3】 已知 $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}(t+2), & -2 < t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 相应的波形如图 2-6(a) 所示, 求 $f(-t)$ 。

解: $f(-t) = \begin{cases} -\frac{1}{3}(t-2), & -1 < t < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

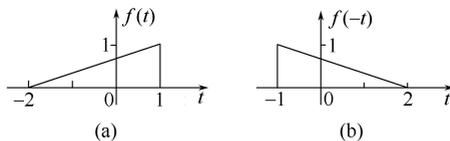


图 2-6 例 2-3 的图

5. 尺度变换(展缩)

信号的尺度变换是指将信号 $f(t)$ 变化为 $f(at)$ ($a > 0$) 的运算。若 $0 < a < 1$, 则将 $f(t)$ 以原点为基准, 沿横坐标轴展宽至 $1/a$ 倍; 若 $a > 1$, 则将 $f(t)$ 沿横坐标轴压缩至 $1/a$ 。

【例 2-4】 已知 $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 相应的波形如图 2-7(a) 所示, 求 $f(2t)$ 和 $f\left(\frac{1}{2}t\right)$ 。

解:
$$f(2t) = \begin{cases} 2t, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{2}t\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & 0 < t < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

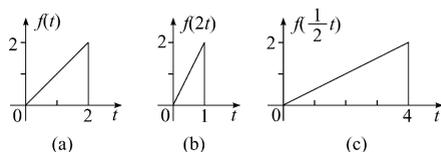


图 2-7 例 2-4 的图

相应的波形分别如图 2-7(b)和(c)所示。可见,时移、反折、展缩都是用一个新的时间变量去代换原来的时间变量。

【例 2-5】 已知 $f(t) = \begin{cases} t+2, & -2 < t < 0 \\ -2t+2, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 相应的波形如图 2-8(a)所示,求 $f(2t-1)$,

$f\left(\frac{1}{2}t-1\right)$ 。

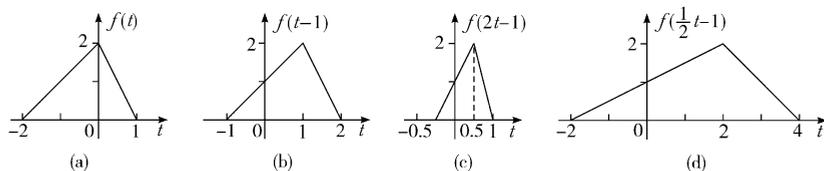


图 2-8 例 2-5 的图

解:(1) 将 $f(t)$ 的波形向右移 1, 即得 $f(t-1)$ 的波形, 如图 2-8(b)所示, 相应的表达式为:

$$f(t-1) = \begin{cases} t+1, & -1 < t < 1 \\ -2(t-2), & 1 < t < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 将 $f(t-1)$ 的波形压缩为原来的 1/2, 即得 $f(2t-1)$ 的波形, 如图 2-8(c)所示, 相应的表达式为:

$$f(2t-1) = \begin{cases} 2t+1, & -1/2 < t < 1/2 \\ -4(t-1), & 1/2 < t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 将 $f(t-1)$ 的波形扩展 2 倍, 即得 $f\left(\frac{1}{2}t-1\right)$ 的波形, 如图 2-8(d)所示, 相应的表达式为:

$$f\left(\frac{1}{2}t-1\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}t+1, & -2 < t < 2 \\ -t+4, & 2 < t < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

【例 2-6】 已知信号 $f(2-2t)$ 的波形如图 2-9 所示, 求 $f(t)$ 。

解: $f(2-2t)$ 是信号 $f(t)$ 经时移、反折和展缩后所得的信号, 可以用六种方法获得 $f(t)$, 其过程和波形如图 2-9 所示。

我们知道, 信号有数学表达式和波形两种描述形式。上面所介绍的平移、反折、尺度变换三种运算, 既可以用新时间变量替换原变量 t , 直接写出数学表达式, 又可以利用波形进行变换。从上面例题可以看出, 利用信号的波形进行运算, 更加直观一些。

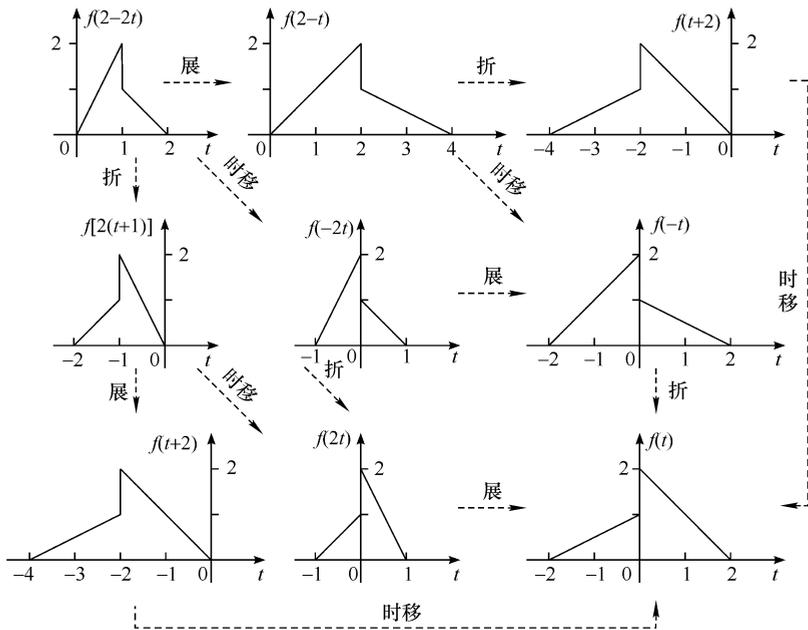


图 2-9 例 2-6 的图

2.2 单位阶跃信号和单位冲激信号

单位阶跃信号和单位冲激信号是信号与系统理论中两个重要的基本信号。由于二者的特性与前面介绍的普通信号不同,所以称为奇异信号。研究奇异信号要用广义函数理论,这里将直观地引出单位阶跃信号和单位冲激信号,不去研究广义函数的内容。

2.2.1 单位阶跃信号

单位阶跃信号(简称阶跃信号)用符号 $U(t)$ 表示。其定义为

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (2-15)$$

其波形如图 2-10 所示。

在分析电路时,单位阶跃信号实际上就表示从 $t=0^+$ 开始作用的大小为一个单位的电压或电流。

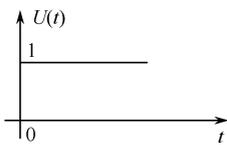


图 2-10 阶跃信号

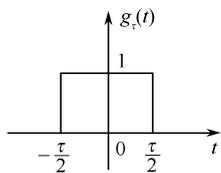


图 2-11 矩形脉冲信号

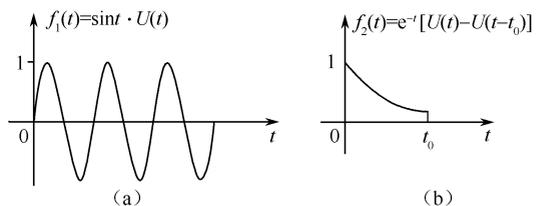


图 2-12 因果信号

利用阶跃信号 $U(t)$, 可以很容易地表示脉冲信号的存在时间, 如图 2-11 中所示的矩形脉冲信号 $g_\tau(t)$, 可以用阶跃信号表示为

$$g_\tau(t) = U\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - U\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (2-16)$$

由于阶跃信号鲜明地表现出信号的“单边”特性, 通常将 $t > 0$ 之后才有非零函数值的信号称为因果信号。例如

$$f_1(t) = \sin t \cdot U(t), \quad f_2(t) = e^{-t} [U(t) - U(t - t_0)]$$

其波形如图 2-12 所示。可见, 阶跃信号也经常用来表示信号的时间取值范围。

【例 2-7】 已知 $f(t) = \begin{cases} -0.5t, & t < -2 \\ 2, & -2 < t < 1 \\ 1, & 1 < t < 2 \\ 3-t, & 2 < t < 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$, 利用

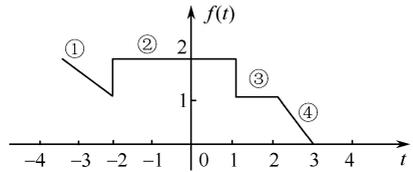


图 2-13 例 2-7 中 $f(t)$ 的波形

阶跃信号表示信号 $f(t)$ 。

解: 为直观起见, 画出 $f(t)$ 的波形如图 2-13 所示。

为了利用阶跃信号表示信号 $f(t)$, 将每一段波形的范围通过阶跃信号表示出来之后, 再将各段相加就得到信号 $f(t)$ 。

第①段为 $-0.5tU(-t-2)$

第②段为 $2[U(t+2) - U(t-1)]$

第③段为 $U(t-1) - U(t-2)$

第④段为 $(3-t)[U(t-2) - U(t-3)]$

所以 $f(t) = -0.5tU(-t-2) + 2[U(t+2) - U(t-1)] +$

$$U(t-1) - U(t-2) + (3-t)[U(t-2) - U(t-3)]$$

整理得

$$f(t) = -0.5tU(-t-2) + 2U(t+2) - U(t-1) + (2-t)U(t-2) - (3-t)U(t-3)$$

读者不妨用信号的加法和乘法运算检验上式信号 $f(t)$ 的阶跃信号表达式是否与其波形一致。

2.2.2 单位冲激信号

单位冲激信号(简称冲激信号) $\delta(t)$ 定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad \text{且} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2-17)$$

如图 2-14(a) 所示, 它是狄拉克(Dirac)最初提出并定义的, 所以又称狄拉克 δ 函数(Dirac Delta Function)。式(2-17)表示集中在 $t=0$ 、面积为 1 的冲激, 这是工程上的定义, 由于它不是普通函数, 因此从严格的数学意义来说, 它是一个颇为复杂的概念。然而为了应用, 并不强调其数学上的严谨性, 而只强调运算方便。

为了对 $\delta(t)$ 有一个直观的认识, 可将 $\delta(t)$ 看成某些普通函数的极限来定义。

观察图 2-14(b), 它是面积为 1, 脉宽为 τ , 幅值为 $1/\tau$ 的矩形脉冲。当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 其脉冲的幅值 $1/\tau \rightarrow \infty$ 。这种极限状态下的函数即为冲激信号 $\delta(t)$ 。也就是

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[U\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - U\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (2-18)$$

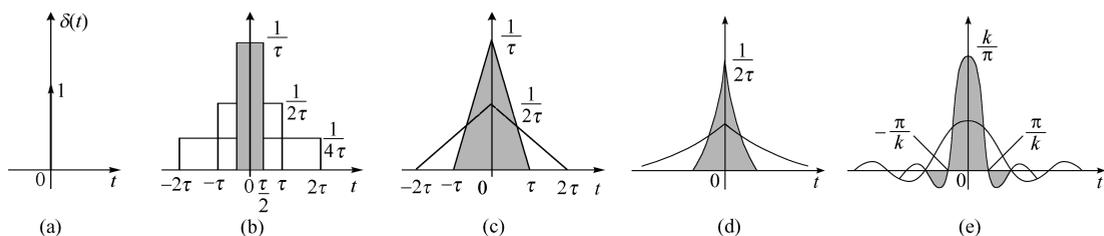


图 2-14 用矩形脉冲、三角脉冲、双边指数脉冲和抽样信号取极限定义冲激信号

除了采用矩形脉冲取极限定义冲激信号外,也可以用三角形脉冲、双边指数脉冲或抽样函数取极限定义冲激信号,如图 2-14(c) ~ (e) 所示。

对于三角脉冲,有

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{|t|}{\tau} \right) [U(t+\tau) - U(t-\tau)] \right\} \quad (2-19)$$

对于双边指数脉冲,有

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\tau} e^{-\frac{|t|}{\tau}} \right) \quad (2-20)$$

对于抽样信号,有

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{k}{\pi} \text{Sa}(kt) \right] \quad (2-21)$$

总之,在取极限时,在整个横坐标轴上曲线面积恒为定值的函数,都可用做冲激信号的定义,如

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-kt^2} \quad (2-22)$$

2.2.3 冲激信号与阶跃信号的关系

由于 $\delta(t) = 0, t \neq 0$, 且 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$, 故

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (2-23)$$

即

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = U(t) \quad (2-24)$$

$$\frac{dU(t)}{dt} = \delta(t) \quad (2-25)$$

式(2-24)和式(2-25)表明,单位阶跃信号是单位冲激信号的积分,而单位冲激信号是单位阶跃信号的导数。很明显, $\delta(t)$ 和 $U(t)$ 均不是普通函数,因为一个普通函数从 $-\infty$ 到 t 的积分,应该是积分上限 t 的连续函数,而 $U(t)$ 在 $t=0$ 这一点明显地不连续。同样,一个普通函数在间断点上不存在导数。但在以后的分析中,从物理或工程的角度来看,为了便于描述某些物理量及简化计算,引入 $\delta(t)$ 这个独特的信号后,就能够表达具有间断点的连续信号的导数了。

同样,由于 $\int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$

所以 $\int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau = U(t - t_0) \quad (2-26)$

$$\frac{dU(t-t_0)}{dt} = \delta(t-t_0) \quad (2-27)$$

式中, $\delta(t-t_0)$ 是集中在 t_0 的面积为 1 的冲激。

2.2.4 冲激信号的性质

1. 相乘筛选与积分筛选

如果信号 $f(t)$ 是一个连续的普通函数, 则有

$$f(t) \cdot \delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \quad (2-28)$$

上式表明, 连续信号 $f(t)$ 与冲激信号相乘, 只有 $t=t_0$ 时的样本值 $f(t_0)$ 才对冲激信号有影响, 也即筛选出信号在 $t=t_0$ 处的函数值。所以, 这个性质称为相乘筛选特性, 如图 2-15 所示。

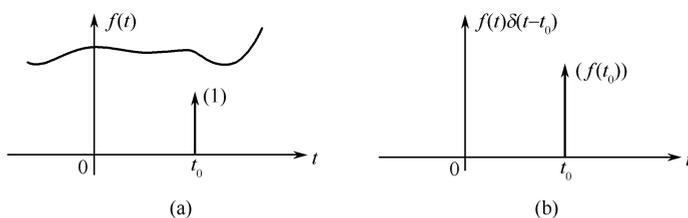


图 2-15 冲激信号的筛选特性

同样条件下, 对 $f(t)\delta(t-t_0)$ 进行积分, 可得:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0) dt = f(t_0) \quad (2-29)$$

式(2-29)称为积分筛选特性, 利用式(2-28)很容易证明, 这里从略。

【例 2-8】 利用冲激信号的性质计算:

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{1}{4}\right) \cdot \sin(\pi t) dt \quad (2) \int_{0^-}^{3^+} e^{-2t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k) dt$$

$$(3) \int_{0^+}^{3^+} e^{-2t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k) dt \quad (4) \int_{-\infty}^t (t^2 - 1)\delta(t+2) dt$$

解: 根据取样特性, 有

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{1}{4}\right) \cdot \sin(\pi t) dt = \sin\left(\pi \times \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(2) \int_{0^-}^{3^+} e^{-2t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k) dt = \int_{0^-}^{3^+} [e^{-2t}\delta(t) + e^{-2t}\delta(t-2)] dt = 1 + e^{-4}$$

$$(3) \int_{0^+}^{3^+} e^{-2t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k) dt = \int_{0^+}^{3^+} e^{-2t}\delta(t-2) dt = e^{-4}$$

$$(4) \int_{-\infty}^t (t^2 - 1)\delta(t+2) dt = \int_{-\infty}^t [(-2)^2 - 1]\delta(t+2) dt = 3U(t+2)$$

2. 尺度变换特性

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t), \quad a \neq 0 \quad (2-30)$$

由尺度变换特性可得出以下推论:

$$\delta(-t) = \delta(t), \quad a = -1 \quad (2-31)$$

上式说明, $\delta(t)$ 是一个偶函数。

$$\delta(at + b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t + \frac{b}{a}\right) \quad (2-32)$$

【例 2-9】 求下列积分。

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} 2\delta(t) \frac{\sin(2t)}{t} dt \quad (2) \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + 2t + 3)\delta(1 - 2t) dt$$

解: (1) 原式 = $\int_{-\infty}^{\infty} 4\delta(t) \frac{\sin(2t)}{2t} dt = 4 \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \delta(t) dt = 4$

(2) 由于 $\delta(1 - 2t) = \delta\left[-2\left(t - \frac{1}{2}\right)\right] = \delta\left[2\left(t - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$

所以 原式 = $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + 2t + 3)\delta\left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{2} (t^2 + 2t + 3) \Big|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{17}{8}$

3. $\delta(t)$ 的各阶导数及其性质

$\delta(t)$ 的各阶导数是不能用常规方法来求的, 在此不进行深入讨论, 只用近似波形来说明 $\delta(t)$ 的一阶导数 $\delta'(t)$ 的形成, 如图 2-16 所示。 $\delta'(t)$ 也叫冲激偶。

下面利用式(2-29)研究 $\delta(t)$ 导数的取样性。

因为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \tau) dt = f(\tau)$

两边对 τ 微分 n 次, 得

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t - \tau) dt = f^{(n)}(\tau)$$

两边乘以 $(-1)^n$, 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t - \tau) dt = (-1)^n f^{(n)}(\tau)$$

令 $\tau = 0$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t) dt = (-1)^n f^{(n)}(0) \quad (2-33)$$

令 $n = 1$, 则 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t) dt = -f'(0) \quad (2-34)$

通常称 $\delta(t)$ 的一阶导数 $\delta'(t)$ 为二次冲激 (或叫冲激偶), 则其二阶导数 $\delta''(t)$ 称为三次冲激。对于冲激偶, 除了式(2-34)表示的取样性之外, 还有以下特性:

(1) 奇函数性: 由图 2-16 可以看出, $\delta'(t)$ 是奇函数, 所以有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = 0 \quad (2-35)$$

(2) 与普通信号相乘:

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t) \quad (2-36)$$

【例 2-10】 求以下两个信号的一阶导数。

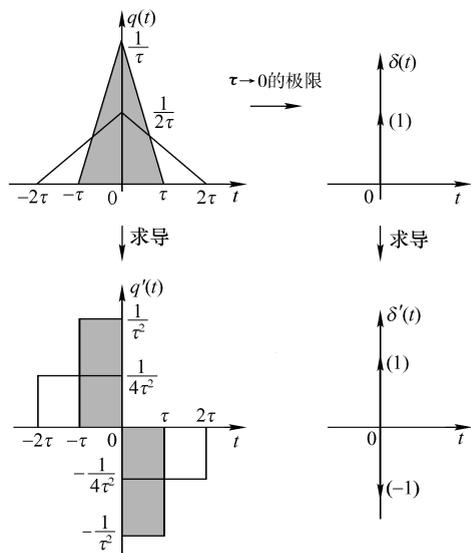


图 2-16 冲激偶的形成

$$f_1(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\delta(t), \quad f_2(t) = (-3t+3)[U(t) - U(t-1)]$$

解: $f_1'(t) = \left[\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\delta(t)\right]' = \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\delta(t)\right]' = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta'(t)$

$$\begin{aligned} f_2'(t) &= \frac{d}{dt}\{(-3t+3)[U(t) - U(t-1)]\} \\ &= (-3t+3)'[U(t) - U(t-1)] + (-3t+3)[U(t) - U(t-1)]' \\ &= -3[U(t) - U(t-1)] + (-3t+3)[\delta(t) - \delta(t-1)] \\ &= -3[U(t) - U(t-1)] + 3\delta(t) \end{aligned}$$

正如前面所讲的, δ 函数不是一般函数, 而是广义函数, 因此对 δ 函数进行常规的加减、微分、积分等运算是不合理的。但在 20 世纪 50 年代, 它们严密的数学基础已由 L. Schwartz 所提出的广义函数建立起来。尽管这种理论可以使 δ 函数和各种运算建立在合乎逻辑的基础上, 但从工程观点来看, 直观地理解 δ 函数的意义还是十分重要的。实际上某些理想化的物理量已经隐藏着 δ 函数的概念。例如以电学中经常提到的点电荷而言, 其几何尺寸为零, 那么其电荷密度就是冲激函数; 另外对于作用在一个点的力, 该点的压强也为冲激函数。推广来说, 如果某物理量的分布是离散的, 只存在于各个点上, 那么这些点上的分布密度为无限大, 而其积分为有限值。换句话说, 离散量在各个点的分布密度都是冲激函数。

2.3 连续系统的零输入响应

在电路分析理论学习中我们知道, 线性系统的全响应包括两部分, 即零输入响应和零状态响应。当已知一个系统的微分方程、激励和初始状态时, 可以通过解微分方程的方法, 求出全响应, 从而得到零输入响应和零状态响应。这种解微分方程求响应的方法叫经典时域分析法。解微分方程的方法在高等数学和电路分析基础中已经熟悉, 此处不再介绍这种经典法。而零输入响应是由系统的初始状态单独作用系统时所产生的响应, 与激励信号无关。因此系统的响应往往仅指零状态响应。在本章的时域分析方法中, 重点研究零状态响应的求解方法。零输入响应的时域求解方法与微分方程的齐次解非常类似, 比较容易理解和掌握, 所以下面仅以几个例子说明系统的零输入响应的分析方法。

【例 2-11】 已知某因果系统的微分方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$$

初始状态 $y(0^-) = 1$, $y'(0^-) = 2$ 。求系统的零输入响应 $y_x(t)$ 。

解: 在零输入条件下, 微分方程等号右端为零, 变为齐次方程, 即

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$$

其特征方程为

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

特征根为 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$ (两不等单根), 故系统的零输入响应为

$$y_x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

由于输入为零, 所以初始值为

$$y_x(0^+) = y_x(0^-) = y(0^-) = 1$$

$$y_x'(0^+) = y_x'(0^-) = y'(0^-) = 2$$

将 $y_x(0^+) = 1, y'_x(0^+) = 2$ 代入 $y_x(t)$ 中,有

$$\begin{aligned} y_x(0^+) &= C_1 + C_2 = 1 \\ y'_x(0^+) &= -2C_1 - 3C_2 = 2 \end{aligned}$$

联立上面两式,得 $C_1 = 5, C_2 = -4$ 。因此,该系统的零输入响应为

$$y_x(t) = 5e^{-2t} - 4e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

【例 2-12】 如图 2-17 所示 RLC 电路。已知 $i_L(0^-) = 1A, u_C(0^-) = 10V$, 求电流 $i(t)$ 的零输入响应 $i_x(t)$ 。

解: 要求系统的响应,先必须建立系统的数学模型,即列写描述输入、输出关系的微分方程。

由 KVL 得 $Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = f(t)$

两边取微分并将 R, L, C 的值代入整理得

$$i''(t) + 2i'(t) + i(t) = f'(t)$$

系统的特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (两重根), 所以该系统的零输入响应为

$$i_x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-t}, \quad t \geq 0$$

要求出系数 C_1 和 C_2 , 需要两个初始条件 $i_x(0^+)$ 和 $i'_x(0^+)$ 。已知 $i_x(0^+) = i_x(0^-) = i_L(0^-) = 1A$, 还要求出 $i'_x(0^+)$ 。由 $t=0^+$ 时求出电感两端的电压 $u_L(0^+) = -12V$, 所以

$$i'_x(0^+) = u_L(0^+) / L = -12A/s$$

将 $i_x(0^+) = 1A, i'_x(0^+) = -12A/s$ 代入 $i_x(t)$ 中,得

$$i_x(0^+) = C_1 = 1, \quad i'_x(0^+) = -C_1 + C_2 = -12$$

解得 $C_1 = 1, C_2 = -11$, 所以, 电流 $i(t)$ 的零输入响应为

$$i_x(t) = (1 - 11t) e^{-t}, \quad t \geq 0$$

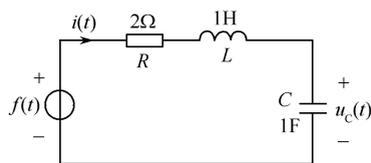


图 2-17 例 2-12 的图

2.4 冲激响应和阶跃响应

系统的冲激响应定义为:在冲激信号激励下系统所产生的零状态响应。这个定义说明,冲激响应包含两个含义,一是激励是冲激信号,二是初始状态为零。系统的冲激响应用 $h(t)$ 来表示。图 2-18 说明了 $h(t)$ 的产生条件。

从冲激响应的定义可知,对于不同的系统,就有不同的冲激响应,可见冲激响应 $h(t)$ 也可以表征系统的特性。所以,通常将系统的 $h(t)$ 叫做系统的时间特性,即意味着不同的 $h(t)$, 系统的特征不同,它在系统分析中占有很重要的地位。

与冲激响应 $h(t)$ 的定义类似,系统在阶跃信号激励下产生的零状态响应称为阶跃响应,用 $g(t)$ 表示,如图 2-18 所示。

考虑到 $\delta(t)$ 信号与 $U(t)$ 信号之间存在微分与积分关系,因而对 LTI 系统的 $h(t)$ 和 $g(t)$ 也同样存在微分与积分的关系,即

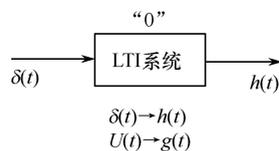


图 2-18 冲激响应和阶跃响应

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad (2-37)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (2-38)$$

下面主要研究如何求得因果系统的冲激响应 $h(t)$ 。

对于由式(1-4)所描述的因果系统,根据定义,它的冲激响应 $h(t)$ 应满足微分方程

$$\begin{aligned} & h^{(n)}(t) + a_{n-1}h^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1h'(t) + a_0h(t) \\ & = b_m\delta^{(m)}(t) + b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1\delta'(t) + b_0\delta(t) \end{aligned} \quad (2-39)$$

初始状态 $h^{(i)}(0^-) = 0 (i=0, 1, \dots, n-1)$ 。由于 $\delta(t)$ 及其各阶导数在 $t \geq 0^+$ 时都等于零,因此式(2-39)右端各项在 $t \geq 0^+$ 时恒等于零,这时式(2-39)成为齐次方程,这样冲激响应 $h(t)$ 的形式应与齐次解的形式相同。在 $n > m$ 时, $h(t)$ 可以表示为

$$h(t) = \left(\sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \right) U(t) \quad (\text{特征单根情形}) \quad (2-40)$$

式中,待定系数 $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 可以采用冲激平衡法确定,即将式(2-40)代入式(2-39)中,为保持系统对应的动态方程式恒等,方程式两边所具有的冲激信号及其各阶导数相等。在 $n \leq m$ 时,要使方程两边所具有的冲激信号及其各阶导数相等,则 $h(t)$ 的表达式中还应含有 $\delta(t)$ 及其各阶导数 $\delta^{(m-n)}(t), \delta^{(m-n-1)}(t), \dots, \delta'(t)$ 等项。下面举例说明冲激响应的求解。

【例 2-13】 已知某因果系统的微分方程为

$$y'(t) + 2y(t) = f(t)$$

求该系统的冲激响应 $h(t)$ 。

解: 特征方程为 $\lambda + 2 = 0$, 特征根为 $\lambda = -2$

所以 $h(t) = Ce^{-2t}U(t)$ ($U(t)$ 表示取 $t \geq 0^+$) ①

将式①代入 $h(t)$ 的微分方程中有

$$-2Ce^{-2t}U(t) + Ce^{-2t}\delta(t) + 2Ce^{-2t}U(t) = \delta(t)$$

为了保持方程恒等,利用冲激平衡法,则有 $C=1$ 。所以 $h(t) = e^{-2t}U(t)$

【例 2-14】 某 LTI 系统如图 2-19 所示,求该系统的冲激响应。

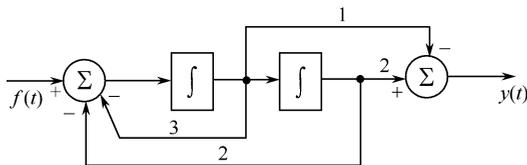


图 2-19 例 2-14 的系统框图

解: 我们在第 1 章的例 1-4 中已经求得该系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = -f'(t) + 2f(t)$$

对 $h(t)$, 微分方程为 $h''(t) + 3h'(t) + 2h(t) = -\delta'(t) + 2\delta(t)$

特征方程为 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

所以 $h(t) = (C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t})U(t)$

将上式微分得 $h'(t) = (-C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t})U(t) + (C_1 + C_2)\delta(t)$

再微分一次得 $h''(t) = (C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{-2t})U(t) + (-C_1 - 2C_2)\delta(t) + (C_1 + C_2)\delta'(t)$

将 $h''(t)$, $h'(t)$ 和 $h(t)$ 代入 $h(t)$ 的微分方程中得

$$\begin{aligned} & (C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{-2t})U(t) + (-C_1 - 2C_2)\delta(t) + (C_1 + C_2)\delta'(t) + \\ & 3(-C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t})U(t) + 3(C_1 + C_2)\delta(t) + 2(C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t})U(t) \\ & = -\delta'(t) + 2\delta(t) \end{aligned}$$

为了使方程平衡,利用冲激平衡法,则有

$$\begin{cases} -C_1 - 2C_2 + 3(C_1 + C_2) = 2 \\ C_1 + C_2 = -1 \end{cases}$$

解得

$$C_1 = 3, \quad C_2 = -4$$

所以

$$h(t) = (3e^{-t} - 4e^{-2t})U(t)$$

【例 2-15】如图 2-20 所示 RC 电路,已知 $u_C(0^-) = 0$,以电流 $i(t)$ 为响应,求系统的冲激响应。

解:由 KVL 写出 $f(t)$ 与 $i(t)$ 之间关系的方程为

$$\frac{1}{2}i(t) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = f(t)$$

两边微分并整理得 $i'(t) + i(t) = 2f'(t)$

对冲激响应 $h(t)$ 有

$$h'(t) + h(t) = 2\delta'(t), \quad h(0^-) = 0 \quad \text{①}$$

从式①可知,要使方程两端恒等, $h(t)$ 中必然含有冲激信号 $\delta(t)$ 项,易知特征根为 -1 ,故设:

$$h(t) = C_1 e^{-t} U(t) + C_2 \delta(t)$$

将其代入 $h(t)$ 的方程中有

$$-C_1 e^{-t} U(t) + C_1 \delta(t) + C_2 \delta'(t) + C_1 e^{-t} U(t) + C_2 \delta(t) = 2\delta'(t)$$

根据冲激平衡法有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

解得 $C_1 = -2, C_2 = 2$,所以系统的冲激响应为

$$h(t) = -2e^{-t} U(t) + 2\delta(t)$$

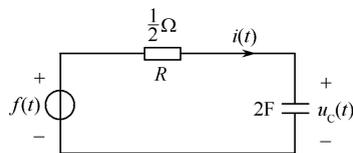


图 2-20 例 2-15 的图

2.5 连续系统的零状态响应——卷积积分

卷积积分在信号与系统理论中占有重要地位。本节介绍的卷积积分是连续系统时域分析中求解系统零状态响应的主要方法。

2.5.1 卷积积分

任意信号 $f(t)$ 都可以根据不同需要进行不同的分解。如信号 $f(t)$ 可分解为直流分量和交流分量,也可分解为奇分量和偶分量,或分解为实部分量和虚部分量。我们在此讨论的是将信号 $f(t)$ 分解为冲激信号的线性组合。下面以图 2-21 为例说明这种分解方法。

由图 2-21(a) 可见,任意信号 $f(t)$ 都可分解为矩形窄脉冲信号的叠加,即

$$f(t) \approx f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_k(t) + \cdots \quad (2-41)$$

式中

$$f_1(t) = f(0) [U(t) - U(t - \Delta\tau)]$$

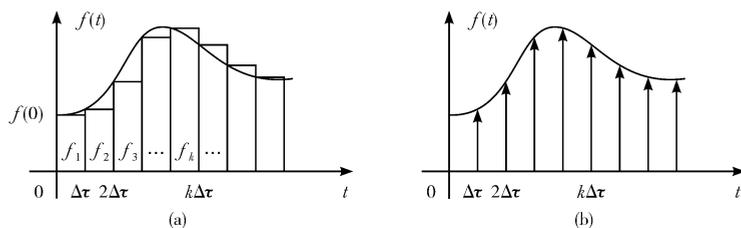


图 2-21 有始信号分解为冲激信号的叠加

$$\begin{aligned}
 f_2(t) &= f(\Delta\tau) [U(t - \Delta\tau) - U(t - 2\Delta\tau)] \\
 &\vdots \\
 f_k(t) &= f(k\Delta\tau) [U(t - k\Delta\tau) - U(t - (k+1)\Delta\tau)] \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

用求和式表示为
$$f(t) \approx \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta\tau) [U(t - k\Delta\tau) - U(t - (k+1)\Delta\tau)] \quad (2-42)$$

当 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 时, 上式就可以完全表示信号 $f(t)$ 了。这时 $k\Delta\tau \rightarrow \tau, \Delta\tau \rightarrow d\tau$, 且有

$$\frac{U(t - k\Delta\tau) - U(t - (k+1)\Delta\tau)}{\Delta\tau} \rightarrow \delta(t - \tau)$$

所以
$$\begin{aligned}
 f(t) &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta\tau) \delta(t - k\Delta\tau) \Delta\tau \\
 &= \int_0^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (2-43)
 \end{aligned}$$

式(2-43)表明任意信号 $f(t)$ 可以分解为一系列具有不同强度、不同时延的冲激信号的叠加, 如图 2-21(b) 所示。当式(2-43)中 k 取 $-\infty \sim \infty$, 即信号 $f(t)$ 是双边信号时, $f(t)$ 可表示为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (2-44)$$

将信号 $f(t)$ 分解为冲激信号的线性组合之后, 我们就可以讨论当信号 $f(t)$ 通过一个 LTI 系统时产生的零状态响应了。

设 $\delta(t) \rightarrow h(t)$, 由式(2-43)及 LTI 系统的特性有

$$f(k\Delta\tau) \delta(t - k\Delta\tau) \Delta\tau \rightarrow f(k\Delta\tau) h(t - k\Delta\tau) \Delta\tau$$

当 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 时有
$$f(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

即 $f(t)$ 产生的零状态响应为

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2-45)$$

上式中的积分称为 $f(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积积分, 简称卷积, 记为 $f(t) * h(t)$, 即:

$$f(t) * h(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

于是, 式(2-45)可表示为:

$$y_f(t) = f(t) * h(t)$$

因此, LTI 连续时间系统的零状态响应为激励信号 $f(t)$ 与系统单位冲激响应 $h(t)$ 的卷积积分。利用卷积积分求零状态响应是连续系统时域分析中的主要方法。

卷积积分运算可以推广到任意两个信号上。一般地, 任意两个信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积积分记为:

$$f_1(t) * f_2(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

【例 2-16】 已知某 LTI 系统的冲激响应 $h(t) = e^{-t}U(t)$ 。若输入为 $f(t) = U(t)$, 试求其输出。
解: 这里的输出指零状态响应 $y_f(t)$ 。

$$\begin{aligned} y_f(t) &= f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} U(\tau) e^{-(t-\tau)} U(t - \tau) d\tau \\ &\stackrel{t > 0}{=} \int_0^t e^{-t} \cdot e^{\tau} d\tau \stackrel{t > 0}{=} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau \stackrel{t > 0}{=} (e^{-t} \cdot e^{\tau} \Big|_0^t) U(t) \\ &= (1 - e^{-t}) U(t) \end{aligned}$$

这里计算卷积积分时, 考虑到 $U(t)$ 的定义, 所以 $U(\tau)$ 中的 τ 必取 $\tau > 0$, $U(t - \tau)$ 中的 τ 必取 $\tau < t$, 这样 τ 的取值范围就是 $0 < \tau < t$, 且 $t > 0$, 故加写 $U(t)$ 。

【例 2-17】 已知 $f_1(t) = e^{-3t}U(t)$, $f_2(t) = e^{-5t}U(t)$, 计算 $f_1(t) * f_2(t)$ 。

解: 根据卷积积分定义, 有

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\tau} U(\tau) \cdot e^{-5(t-\tau)} U(t - \tau) d\tau \\ &\stackrel{t > 0}{=} \int_0^t e^{-3\tau} \cdot e^{-5(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2} (e^{-3t} - e^{-5t}) U(t) \end{aligned}$$

2.5.2 卷积积分的图解法

卷积积分除了用定义直接计算之外, 还可以用图解的方法计算, 更能直观地理解卷积积分的计算过程。

由卷积积分的定义知, 要用图解法计算卷积积分 $f(t) * h(t)$, 一般按照下面的步骤进行:

- (1) 将 $f(t)$ 和 $h(\tau)$ 的自变量 $t \rightarrow \tau$ 。
- (2) 反折, 将 $h(\tau)$ 绕纵坐标反折得 $h(-\tau)$ 。
- (3) 时移, 将 $h(-\tau)$ 沿 τ 轴移动某时刻 t_1 得 $h(t_1 - \tau)$ 。
- (4) 相乘, 将时移后的 $h(t_1 - \tau)$ 乘以 $f(\tau)$ 得 $f(\tau)h(t_1 - \tau)$ 。

(5) 积分, 沿 τ 轴对上述乘积信号 $f(\tau)h(t_1 - \tau)$ 积分, 即 $y_f(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t_1 - \tau) d\tau$, 其值 $y_f(t_1)$ 正是 t_1 时刻 $f(\tau)h(t_1 - \tau)$ 曲线下的面积。

(6) 以 t 为变量, 将波形 $h(t - \tau)$ 连续地沿 τ 轴平移, 从而得到在任意时刻 t 的卷积积分, 即 $f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau) d\tau$, 它是时间 t 的函数。

【例 2-18】 已知 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 如图 2-22 所示, 用图解法求 $f_1(t) * f_2(t)$ 。

解: 当 t 从 $-\infty$ 向 $+\infty$ 改变时, $f_2(t - \tau)$ 自左向右平移, 对应不同的 t 值范围, $f_2(t - \tau)$ 与 $f_1(\tau)$ 相乘、积分的结果如下, 相应的波形如图 2-23 所示。

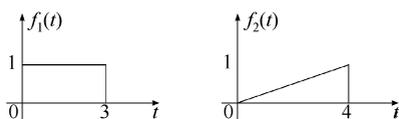


图 2-22 例 2-18 中 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的波形

(1) $t < 0$, $f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) = 0$, $f_1(t) * f_2(t) = 0$ 。

(2) $0 < t < 3$, 积分区间为公共非零区间 $(0, t)$ 。

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t 1 \times \frac{1}{4}(t - \tau) d\tau = \frac{t}{4} \cdot \tau \Big|_0^t - \frac{1}{8}\tau^2 \Big|_0^t = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t^2 = \frac{1}{8}t^2$$

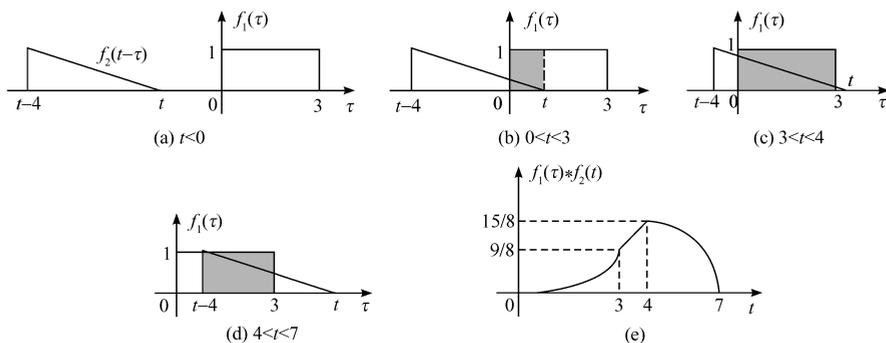


图 2-23 例 2-18 的波形

$$(3) \quad 3 < t < 4, f_1(t) * f_2(t) = \int_0^3 \frac{1}{4}(t - \tau) d\tau = \frac{3}{4}t - \frac{9}{8}$$

$$(4) \quad 4 < t < 7, f_1(t) * f_2(t) = \int_{t-4}^3 \frac{1}{4}(t - \tau) d\tau = \frac{1}{4}t \cdot \tau \Big|_{t-4}^3 - \frac{1}{8}\tau^2 \Big|_{t-4}^3 = \frac{1}{8}(-t^2 + 6t + 7)$$

$$(5) \quad t > 7, f_1(t) * f_2(t) = 0。$$

$$\text{所以} \quad f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{8}t^2, & 0 < t < 3 \\ \frac{3}{4}t - \frac{9}{8}, & 3 < t < 4 \\ \frac{1}{8}(-t^2 + 6t + 7), & 4 < t < 7 \\ 0, & t > 7 \end{cases}$$

通过上例分析,可以得到如下结论:

(1) 积分上下限是两信号重叠部分的边界,下限为两信号左边界的最大者,上限为两信号右边界的最小者。

(2) 卷积后信号的时限等于两信号时限之和。

【例 2-19】 求 $y(t) = g_{\tau_1}(t) * g_{\tau_1}(t)$ 。

解: 分别画出不同时刻 t 两个时间信号相重叠的波形如图 2-24 所示,分别对不同的时刻 t 的区间做卷积运算,可最终求得 $y(t)$ 。

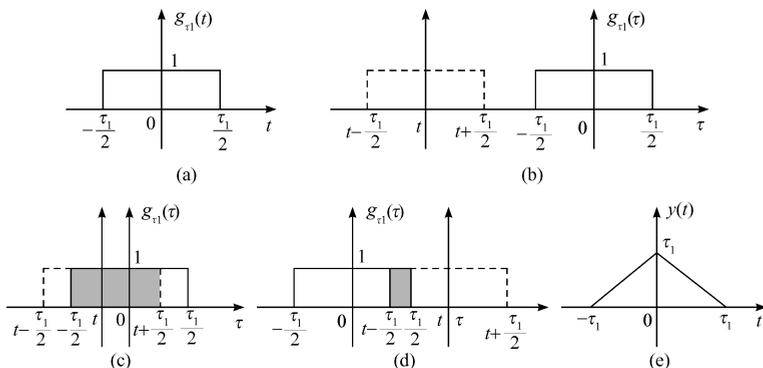


图 2-24 例 2-19 的波形

(1) $-\infty < t < -\tau_1$, $y(t) = 0$, 如图 2-24(b) 所示。

(2) $-\tau_1 < t < 0$, $y(t) = \int_{-\frac{\tau_1}{2}}^{t+\frac{\tau_1}{2}} 1 d\tau = \tau \Big|_{-\frac{\tau_1}{2}}^{t+\frac{\tau_1}{2}} = t + \tau_1$, 如图 2-24(c) 所示。

(3) $0 < t < \tau_1$, $y(t) = \int_{t-\frac{\tau_1}{2}}^{\frac{\tau_1}{2}} 1 d\tau = \tau_1 - t$, 如图 2-24(d) 所示。

(4) $t > \tau_1$, $y(t) = 0$ 。

所以

$$y(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau_1 \\ t + \tau_1, & -\tau_1 < t < 0 \\ \tau_1 - t, & 0 < t < \tau_1 \\ 0, & t > \tau_1 \end{cases}$$

$y(t)$ 的波形如图 2-24(e) 所示。可见, 两个门宽相等的门信号卷积, 得到一个三角脉冲信号。

2.5.3 卷积积分的性质

卷积积分是一种数学运算, 它有一些重要的运算规则。灵活运用这些规则可以简化计算过程。

1. 卷积积分的代数律

(1) 交换律

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (2-46)$$

证明: 因为 $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$

令 $\lambda = t - \tau$, 则有 $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \lambda) f_2(\lambda) d\lambda = f_2(t) * f_1(t)$

若将 $f_1(t)$ 看成系统的激励, 而将 $f_2(t)$ 看成是一个系统的单位冲激响应, 则卷积的结果就是该系统对 $f_1(t)$ 的零状态响应。卷积的交换律说明, 也可将 $f_2(t)$ 看成系统的激励, 而将 $f_1(t)$ 看成系统的单位冲激响应, 即图 2-25(a) 和(b) 两个系统的零状态响应是一样的。

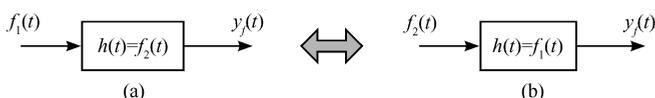


图 2-25 卷积交换律的图示

从图 2-25 可见, 信号可由系统来实现, 系统也可用信号来模拟。

(2) 结合律

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] \quad (2-47)$$

这里包含两次卷积运算, 是一个二重积分, 只要改换积分次序即可证明此定律。

证明: $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(\tau - \lambda) d\lambda \right] f_3(t - \tau) d\tau$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau - \lambda) f_3(t - \tau) d\tau \right] d\lambda$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_3(t - \tau - \lambda) d\tau \right] d\lambda$
 $= f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$
 $= f_1(t) * [f_3(t) * f_2(t)]$