

## 第4章 光学成像的几何理论

### 4.1 哈密顿特征函数

3.1 节业已证明,在几何光学近似范围内,场可用单一的标量函数 $\mathcal{S}(\mathbf{r})$ 来表征。因为 $\mathcal{S}(\mathbf{r})$ 满足程函方程 § 3.1(15),所以这个函数只要用折射率 $n(\mathbf{r})$ 加上适当的边界条件即可完全确定。

人们也常不用函数 $\mathcal{S}(\mathbf{r})$ 而采用一些与其有密切关系的函数,即通常所说的媒质特征函数。这些函数是很早以前由哈密顿的一系列经典论文引进光学的<sup>①</sup>。由于代数上的复杂性,除最简单媒质外,其他所有情况均不可能确定其特征函数显式。虽然如此,哈密顿方法对于系统分析研究光学系统的一般性质来说,仍可作为一个有力的工具。

在讨论这些函数的性质及其应用时,将假定媒质是各向同性的,但一般是非均匀的。

#### 4.1.1 点特征函数

设 $(x_0, y_0, z_0)$ 和 $(x_1, y_1, z_1)$ 分别是 $P_0$ 和 $P_1$ 两点的坐标,各以不同的一套直角坐标轴为参考系,两套轴互相平行<sup>②</sup>(见图 4.1)。设想这两点被所有可能的曲线连接起来,一般地说,其中会有一些线(光线)满足费马原理。现在假定,连接任意两点的光线不多于一条,则特征函数 $V$ ,即点特征函数,定义为这两点之间光线的光学长度 $[P_0P_1]$ ,看作是这两点坐标的函数,

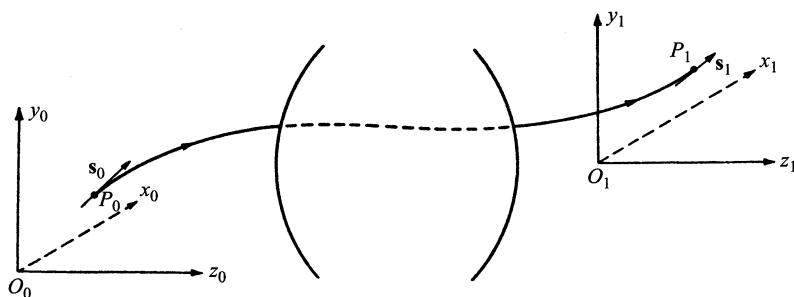


图 4.1 点特征函数定义图示

① W. R. Hamilton, *Trans. Roy. Irish Acad.*, **15** (1828), 69; *ibid.*, **16** (1830), 1; *ibid.*, **16** (1831), 93; *ibid.*, **17** (1837), 1。重印于 *The Mathematical Papers of Sir W. R. Hamilton*, Vol. I (*Geometrical Optics*), eds. A. W. Conway and J. L. Synge (Cambridge, Cambridge University Press, 1931)。

多年以后, Bruns 独立研究了类似的函数, 他称之为程函 [H. Bruns, *Abh. Kgl. Sächs. Ges. Wiss., math.-phys. Kl.*, **21** (1895), 323]。第 100 页中已经提到, 这个名词如今已在更广的意义上使用。哈密顿特征函数本身就常被称为程函。J. L. Synge 的专著, *Geometrical Optics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1937), 概要介绍哈密顿方法, 可资参考。哈密顿的工作和 Bruns 的工作的关系已有多人讨论过, 见 F. Klein, *Z. Math. Phys.*, **46** (1901), 376 和 *Ges. Math. Abh.*, **2** (1922), 603, C. Carathéodory, *Geometrische Optik* (Berlin, Springer, 1937), p. 4, 以及 M. Herzberger 和 J. L. Synge 之间的一次争论, *J. Opt. Soc. Amer.*, **27** (1937), 75, 133, 138。

② 使用两套参考系, 具有一些优点, 因为  $P_0$  和  $P_1$  通常位于一个光学系统的不同区域, 即分别位于它的物空间和像空间。

$$V(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1) = \int_{P_0}^{P_1} n \, ds \quad (1)$$

重要的是,要注意这个函数是由媒质确定的。

由(1)式和 § 3.1(26)得到,

$$V(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1) = \mathcal{S}(x_1, y_1, z_1) - \mathcal{S}(x_0, y_0, z_0) \quad (2)$$

式中函数 $\mathcal{S}$ 这时与通过 $P_0$ 和 $P_1$ 的自然光线所属的任一光锥(例如, $P_0$ 处的点源所产生的一锥光线<sup>①</sup>)相关联。因此,利用 § 3.1(24), $P_0$ 和 $P_1$ 处沿光线方向的单位矢量 $\mathbf{s}_0$ 和 $\mathbf{s}_1$ 由下式给出:

$$\left. \begin{aligned} \text{grad}^0 V &= -n_0 \mathbf{s}_0, \\ \text{grad}^1 V &= n_1 \mathbf{s}_1, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

上标0和1意指算符 grad 的运算分别对应于坐标 $(x_0, y_0, z_0)$ 和 $(x_1, y_1, z_1)$ 。

矢量

$$\mathbf{g} = n\mathbf{s} \quad (4)$$

有时称为光线矢量。设 $\alpha, \beta$ 和 $\gamma$ 是光线矢量与各坐标轴的夹角,则光线矢量在各轴上的投影<sup>②</sup>

$$p = n \cos \alpha, \quad q = n \cos \beta, \quad m = n \cos \gamma \quad (5)$$

称为光线分量。由于恒等式

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

因此三个光线分量满足关系式

$$p^2 + q^2 + m^2 = n^2 \quad (6)$$

由(3)式得出, $P_0$ 和 $P_1$ 处的光线分量为

$$p_0 = -\frac{\partial V}{\partial x_0}, \quad p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1} \quad (7)$$

$q_0, q_1$ 和 $m_0, m_1$ 的表达式与此类似。这些关系式表明,知道了点特征函数,就可以直接确定连接媒质中任何两点的光线的分量。此外,由(6)和(7)两式得到,点特征函数满足两组变量的程函方程:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_0}\right)^2 = n_0^2 \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)^2 = n_1^2 \quad (9)$$

时常为了方便,不用点特征函数而采用一些与它有关的函数(也是由哈密顿引进的),即通常所说的混合特征函数和角特征函数。这些函数可由点特征函数通过勒让德(A. M. Legendre)变换导出<sup>③</sup>;当 $P_0$ 或 $P_1$ ,或这两点都在无穷远时,它们特别有用。

① 用变分法的数学语言来说, $\mathcal{S}$ 代表与费马变分问题相关联的哈密顿-雅可比方程的一种解,它包含一个二参量的致极曲线族( $\infty^2$ )。点特征函数 $V$ 代表一般解,它包含全部( $\infty^4$ )致极曲线(见附录A)。

② 这里故意选择这种“不对称”符号,以便提醒我们,由于恒等式(6),只有两个光线分量是独立的。

③ 勒让德变换一般是把函数 $f(x, y)$ 变换为函数 $g(x, z)$ ,其中 $z = \partial f / \partial y$ ,而 $g$ 对新变量 $z$ 的导数须等于旧变量 $y$ 。

### 4.1.2 混合特征函数

混合特征函数  $W$  由下式来定义<sup>①</sup>,

$$W = V - \Sigma p_1 x_1 \quad (10)$$

式中  $\Sigma$  表示对三个具有下标 1 的类似项求和。(10)式把  $W$  表示为 9 个变量的函数,但一般只有 6 个(在均匀媒质中只有 5 个)是独立的。要证明这一点,考虑点  $P_0$  和  $P_1$  的微小位移的影响。此时  $W$  的相应改变由下式给出:

$$\delta W = \delta V - \Sigma p_1 \delta x_1 - \Sigma x_1 \delta p_1 \quad (11)$$

现在利用(7)式,则

$$\delta V = \Sigma p_1 \delta x_1 - \Sigma p_0 \delta x_0 \quad (12)$$

将(12)式代入(11)式,得到

$$\delta W = -\Sigma p_0 \delta x_0 - \Sigma x_1 \delta p_1 \quad (13)$$

这个关系式表明, $W$  一般可表示为 6 个变量  $x_0, y_0, z_0, p_1, q_1$  和  $m_1$  的函数,并且当它如此表示时,

$$p_0 = -\frac{\partial W}{\partial x_0}, \quad x_1 = -\frac{\partial W}{\partial p_1} \quad (14)$$

$q_0, y_1, m_0$  和  $z_1$  的表达式与此类似。由于(6)式,  $W(x_0, y_0, z_0; p_1, q_1, m_1)$  满足程函方程

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z_0}\right)^2 = n_0^2 \quad (15)$$

可以看到(见图 4.2),  $\Sigma p_1 x_1$  具有一种简单的几何解释:

$$\Sigma p_1 x_1 = n_1 d_1 \quad (16)$$

式中  $d_1 = Q_1 P_1$ , 是  $O_1 P_1$  在光线  $P_1$  点切线上的投影。如果  $P_1$  位于均匀区,则靠近  $P_1$  的那一段光线与线段  $Q_1 P_1$  重合;根据(10)和(16)两式,  $W$  这时代表光线从  $P_0$  到  $Q_1$  的光学长度,  $Q_1$  是从原点  $O_1$  到光线末段的垂足(见图 4.3):

$$W = [P_0 Q_1] \quad (17)$$

因为在这种情况下  $P_1$  附近的媒质折射率具有恒定值,由(6)式得到,

$$\delta m_1 = -\frac{p_1 \delta p_1 + q_1 \delta q_1}{m_1} \quad (18)$$

把(18)式代入(13)式,则(13)式变为<sup>②</sup>

① 为了更清楚地显示出它的物理意义,我们按照 Sygne 的方式(见前引文献)来定义混合特征函数,其符号与哈密顿所用的相反。

也可以把混合特征函数定义为

$$W' = V + \Sigma p_0 x_0$$

$\Sigma$  为对具有下标 0 的类似项求和。 $W$  和  $W'$  的性质当然完全类似。

② 如果函数所依赖的各个变量之间以(6)式那样的辅助关系式相联系,则有可能消去一些变量,或者有可能用这样的关系式把函数表示为对所有变量的齐次函数。哈密顿经常使用后一种方法,它有点更难以掌握。

$$\delta W = -\Sigma p_0 \delta x_0 - \left( x_1 - \frac{p_1}{m_1} z_1 \right) \delta p_1 - \left( y_1 - \frac{q_1}{m_1} z_1 \right) \delta q_1 \quad (19)$$

所以当末媒质均匀时,混合特征函数可表成为 5 个变量的函数:

$$W = W(x_0, y_0, z_0; p_1, q_1) \quad (20)$$

这时它的导数满足下列关系式:

$$p_0 = -\frac{\partial W}{\partial x_0}, \quad q_0 = -\frac{\partial W}{\partial y_0}, \quad m_0 = -\frac{\partial W}{\partial z_0} \quad (21)$$

$$x_1 - \frac{p_1}{m_1} z_1 = -\frac{\partial W}{\partial p_1}, \quad y_1 - \frac{q_1}{m_1} z_1 = -\frac{\partial W}{\partial q_1} \quad (22)$$

(21) 和 (22) 两式表明,如果给定始媒质内光线上的一点和末媒质内的光线分量,则知道了混合特征函数,就可以直接确定始媒质内的光线分量和末媒质内光线上的各点。

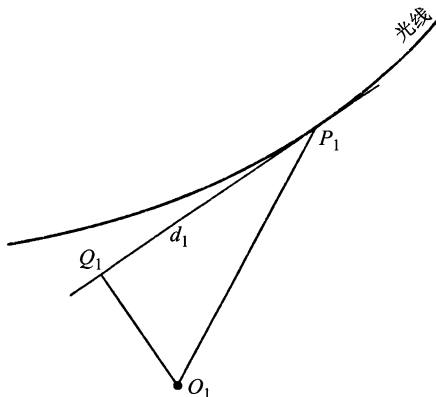


图 4.2 混合特征函数意义的图示

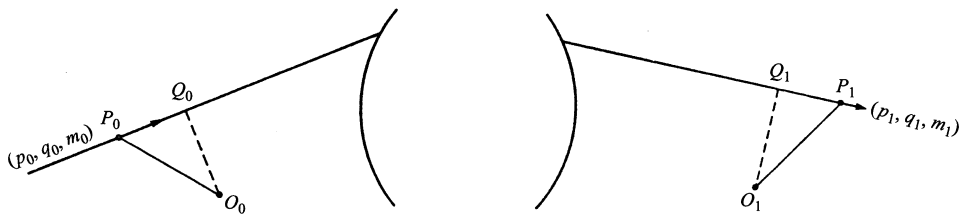


图 4.3 当始媒质和末媒质都均匀时,哈密顿特征函数  $V, W, T$  的几何意义:

$$V(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1) = [P_0 P_1]$$

$$W(x_0, y_0, z_0; p_1, q_1) = [P_0 Q_1]$$

$$T(p_0, q_0; p_1, q_1) = [Q_0 Q_1]$$

### 4.1.3 角特征函数

角特征函数  $T$  可用下式来定义,

$$T = V + \Sigma p_0 x_0 - \Sigma p_1 x_1 \quad (23)$$

如果  $P_0$  和  $P_1$  稍有位移,则  $T$  的相应改变由下式给出,

$$\delta T = \Sigma x_0 \delta p_0 - \Sigma x_1 \delta p_1 \quad (24)$$

其中利用了(12)式,所以  $T$  可表成为 6 个光线分量的函数,当这样表示时,

$$x_0 = \frac{\partial T}{\partial p_0}, \quad x_1 = -\frac{\partial T}{\partial p_1} \quad (25)$$

其他坐标也有类似的关系式。

由(23)式可以看出,如果  $P_0$  和  $P_1$  所在的两区都是均匀的,则  $T$  代表光线在  $Q_0$  和  $Q_1$  之间的光学长度, $Q_0$  和  $Q_1$  分别是  $O_0$  和  $O_1$  到光线始段和末段的垂足(见图 4.3),

$$T = [Q_0 Q_1] \quad (26)$$

在这种情况下,角特征函数可表成为只有 4 个变量的函数。因为如果在(24)式中用(18)式代替  $\delta m_1$ ,用类似的关系代替  $\delta m_0$ ,则(24)式变为

$$\begin{aligned} \delta T = & \left( x_0 - \frac{p_0}{m_0} z_0 \right) \delta p_0 + \left( y_0 - \frac{q_0}{m_0} z_0 \right) \delta q_0 \\ & - \left( x_1 - \frac{p_1}{m_1} z_1 \right) \delta p_1 - \left( y_1 - \frac{q_1}{m_1} z_1 \right) \delta q_1 \end{aligned} \quad (27)$$

这个关系式表明,当始媒质和末媒质都均匀时,角特征函数可表示为 4 个变量  $p_0, q_0, p_1$  和  $q_1$  的函数:

$$T = T(p_0, q_0; p_1, q_1) \quad (28)$$

这时它的导数满足下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} x_0 - \frac{p_0}{m_0} z_0 &= \frac{\partial T}{\partial p_0}, & y_0 - \frac{q_0}{m_0} z_0 &= \frac{\partial T}{\partial q_0}, \\ x_1 - \frac{p_1}{m_1} z_1 &= -\frac{\partial T}{\partial p_1}, & y_1 - \frac{q_1}{m_1} z_1 &= -\frac{\partial T}{\partial q_1}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

如果给定一条光线始段和末段的光线分量,则按(29)式,知道了角特征函数,就可以直接确定这两段光线上各点的坐标。

#### 4.1.4 旋转折射面的角特征函数近似形式

设

$$z = c_2(x^2 + y^2) + c_4(x^2 + y^2)^2 + \cdots \quad (30)$$

式中  $c_2, c_4, \cdots$  是常数。这是旋转折射面方程,以笛卡尔坐标轴为参考系,其原点  $O$  与这个面的轴点(称为极点)重合,其  $z$  方向沿着对称轴。设  $r$  代表这个面极点处的曲率半径(当这个面凸向来自负  $z$  方向的入射光时,其值设为正),则

$$c_2 = \frac{1}{2r} \quad (31)$$

对于半径为  $r$  的球面,  $c_4 = 1/8r^3$ 。对于一般的旋转面,  $c_4$  可写成

$$c_4 = \frac{1}{8r^3}(1+b) \quad (32)$$

常数  $b$  (有时称为形变系数) 是这个面偏离球面形状的一种粗略量度。用  $r$  和  $b$  表示时,

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2r} + \frac{(x^2 + y^2)^2}{8r^3}(1+b) + \dots \quad (33)$$

以下假定这个面两侧的区域都是均匀的,其折射率分别为  $n_0$  和  $n_1$ 。角特征函数在两侧取不同的参考系,其轴平行于  $O$  处的轴,其原点分别在轴点  $O_0(0,0,a_0)$  和  $O_1(0,0,a_1)$  (在图 4.4 中,  $a_0 < 0, a_1 > 0, r > 0$ )。

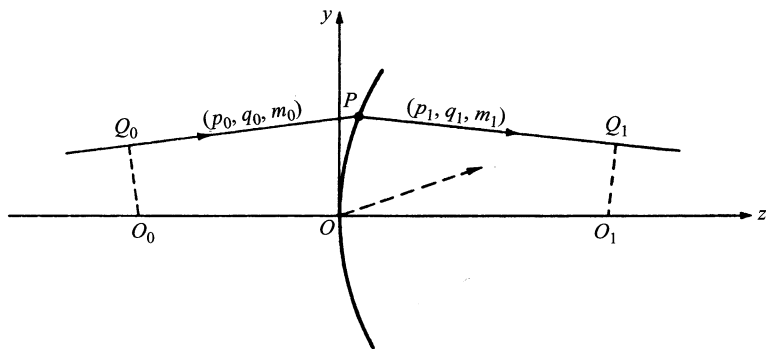


图 4.4 旋转折射面的角特征函数( $O_0, O, O_1, Q_1, P, Q_0$  各点不一定是共面的)

如果  $P$  是入射光线与折射面的交点,  $Q_0$  和  $Q_1$  是从  $O_0$  和  $O_1$  到入射光线和折射光线的垂足,则根据 (26) 式,角特征函数  $T$  为:

$$\begin{aligned} T &= [Q_0P] + [PQ_1] \\ &= \{xp_0 + yq_0 + (z - a_0)m_0\} - \{xp_1 + yq_1 + (z - a_1)m_1\} \end{aligned} \quad (34)$$

式中,  $(x, y, z)$  是  $P$  相对于  $O$  处各轴的坐标,  $(p_0, q_0, m_0)$  和  $(p_1, q_1, m_1)$  是  $P$  处的入射光线和折射光线的光线分量。

利用折射定律,可从 (34) 式中消去坐标  $(x, y, z)$ 。根据 3.2.2 节,折射定律与下述说法是等效的,即矢量  $\mathbf{N}(p_0 - p_1, q_0 - q_1, m_0 - m_1)$  在  $P$  处与折射面相垂直。所以,如果将 (33) 式写成下列形式:

$$F(x, y, z) \equiv z - \frac{x^2 + y^2}{2r} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{8r^3}(1+b) - \dots = 0 \quad (35)$$

则

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\partial F}{\partial x} &= -\lambda \left[ \frac{x}{r} + \dots \right] = p_0 - p_1, \\ \lambda \frac{\partial F}{\partial y} &= -\lambda \left[ \frac{y}{r} + \dots \right] = q_0 - q_1, \\ \lambda \frac{\partial F}{\partial z} &= \lambda = m_0 - m_1. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

这些方程的意思是

$$\left. \begin{aligned} x &= -r \frac{p_0 - p_1}{m_0 - m_1} + \Delta x, \\ y &= -r \frac{q_0 - q_1}{m_0 - m_1} + \Delta y, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

式中,  $\Delta x$  和  $\Delta y$  是用  $p, q, x/r, y/r$  表示的三阶量。为了用光线分量来表示  $z$ , 把(37)式代入(35)式, 从而得到

$$\begin{aligned} z &= \frac{r}{2(m_1 - m_0)^2} [(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2] + \frac{1}{m_1 - m_0} [\Delta x(p_0 - p_1) + \Delta y(q_0 - q_1)] \\ &+ \frac{1}{8} \frac{r(1+b)}{(m_1 - m_0)^4} [(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2]^2 + \cdots \end{aligned} \quad (38)$$

要求出  $T$  直到包含四阶项的展开式, 不必去计算  $\Delta x$  和  $\Delta y$  的值; 因为把(37)和(38)两式代入(34)式时, 就会看到包含  $\Delta x$  和  $\Delta y$  的贡献是高于四阶的, 因此可以忽略。这时(34)式变为

$$\begin{aligned} T(p_0, q_0, m_0; p_1, q_1, m_1) &= -m_0 a_0 + m_1 a_1 + \frac{r}{2(m_1 - m_0)} [(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2] \\ &- \frac{1}{8} \frac{r(1+b)}{(m_1 - m_0)^3} [(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2]^2 \end{aligned} \quad (39)$$

(39)式是角特征函数直到四阶的展开式, 这里角特征函数被看作是所有6个光线分量的函数。利用恒等式(6), 可消去其中两个分量。由(6)式得到

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= n_0 - \frac{1}{2n_0} (p_0^2 + q_0^2) - \frac{1}{8n_0^3} (p_0^2 + q_0^2)^2 + \cdots \\ m_1 &= n_1 - \frac{1}{2n_1} (p_1^2 + q_1^2) - \frac{1}{8n_1^3} (p_1^2 + q_1^2)^2 + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

因此,

$$\frac{1}{m_1 - m_0} = \frac{1}{n_1 - n_0} \left[ 1 - \frac{1}{2n_0(n_1 - n_0)} (p_0^2 + q_0^2) + \frac{1}{2n_1(n_1 - n_0)} (p_1^2 + q_1^2) + \cdots \right] \quad (41)$$

把(40)和(41)两式代入(39)式, 得到

$$\begin{aligned} T(p_0, q_0; p_1, q_1) &= n_1 a_1 - n_0 a_0 \\ &+ \frac{r}{2(n_1 - n_0)} [(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2] + \frac{a_0}{2n_0} (p_0^2 + q_0^2) - \frac{a_1}{2n_1} (p_1^2 + q_1^2) \\ &- \frac{r}{4(n_1 - n_0)^2} [(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2] \left[ \frac{p_0^2 + q_0^2}{n_0} - \frac{p_1^2 + q_1^2}{n_1} \right] \\ &- \frac{(1+b)r}{8(n_1 - n_0)^3} [(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2]^2 \\ &+ \frac{a_0}{8n_0^3} (p_0^2 + q_0^2)^2 - \frac{a_1}{8n_1^3} (p_1^2 + q_1^2)^2 + \cdots \end{aligned} \quad (42)$$

可以看出,这4个变量  $p_0, q_0, p_1$  和  $q_1$  在这个表达式中只以三种组合的形式出现<sup>①</sup>:

$$p_0^2 + q_0^2 = u^2, \quad p_1^2 + q_1^2 = v^2, \quad \text{和} \quad p_0 p_1 + q_0 q_1 = w^2 \quad (43)$$

以此代入(42)式,按各阶分开后,得到

$$T(p_0, q_0; p_1, q_1) = T^{(0)} + T^{(2)} + T^{(4)} + \dots$$

式中

$$\left. \begin{aligned} T^{(0)} &= n_1 a_1 - n_0 a_0, \\ T^{(2)} &= \mathcal{A}u^2 + \mathcal{B}v^2 + \mathcal{C}w^2, \\ T^{(4)} &= \mathcal{D}u^4 + \mathcal{E}v^4 + \mathcal{F}w^4 + \mathcal{G}u^2v^2 + \mathcal{H}u^2w^2 + \mathcal{K}v^2w^2, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

而

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{r}{n_1 - n_0} + \frac{a_0}{n_0} \right], \\ \mathcal{B} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{r}{n_1 - n_0} - \frac{a_1}{n_1} \right], \\ \mathcal{C} &= -\frac{r}{n_1 - n_0}, \\ \mathcal{D} &= -\frac{r}{4(n_1 - n_0)^2} \left[ \frac{1+b}{2(n_1 - n_0)} + \frac{1}{n_0} \right] + \frac{a_0}{8n_0^3}, \\ \mathcal{E} &= -\frac{r}{4(n_1 - n_0)^2} \left[ \frac{1+b}{2(n_1 - n_0)} - \frac{1}{n_1} \right] - \frac{a_1}{8n_1^3}, \\ \mathcal{F} &= \frac{-(1+b)r}{2(n_1 - n_0)^3}, \\ \mathcal{G} &= -\frac{r}{4(n_1 - n_0)^2} \left[ \frac{1+b}{n_1 - n_0} + \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1} \right], \\ \mathcal{H} &= \frac{r}{2(n_1 - n_0)^2} \left[ \frac{1+b}{n_1 - n_0} + \frac{1}{n_0} \right], \\ \mathcal{K} &= \frac{r}{2(n_1 - n_0)^2} \left[ \frac{1+b}{n_1 - n_0} - \frac{1}{n_1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

#### 4.1.5 旋转反射面的角特征函数近似形式

与一个旋转反射面相关联的角特征函数直到四次方的展开式,可以用类似的方法导出,但是不必全部进行计算。使用与前一节相同的符号(见图4.4和图4.5),4.1.4节中直到包括

① 可以更一般地证明,任何绕  $z$  轴旋转对称的媒质,其角特征函数的4个变量只以(43)式的三种组合形式出现。要看出这一点,可利用5.1节中证明的一个结果,根据这个结果,任何一个函数  $F(x_0, y_0; x_1, y_1)$ , 如果当  $xy$  平面上各轴绕原点转动时它保持不变,则它必定只依赖两个矢量  $\mathbf{r}_0(x_0, y_0)$  和  $\mathbf{r}_1(x_1, y_1)$  的三个标量积

$$\mathbf{r}_0^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad \mathbf{r}_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_1 = x_0 x_1 + y_0 y_1$$

把  $\mathbf{r}_0$  和  $\mathbf{r}_0$  分别看作传播矢量  $\mathbf{g}_0(p_0, q_0, m_0)$  和  $\mathbf{g}_1(p_1, q_1, m_1)$  在  $xy$  平面上的投影,则得到(43)式的结果。



(39)式在内的所有方程,均可应用于本节反射情况而不作改变;因此,当(39)式看作是**所有6个光线分量的函数**时,它也是**旋转反射面的角特征函数**。但是,当利用光线分量之间的两个恒等式从(39)式中消去 $m_0$ 和 $m_1$ 时,这两种情况的 $T$ 表达式(作为4个光线分量的函数)结果并不相同。用 $n$ 表示光线所在媒质的折射率,这时取代(40)式而有

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= n - \frac{1}{2n}(p_0^2 + q_0^2) - \frac{1}{8n^3}(p_0^2 + q_0^2)^2 + \cdots, \\ m_1 &= -\left[ n - \frac{1}{2n}(p_1^2 + q_1^2) - \frac{1}{8n^3}(p_1^2 + q_1^2)^2 + \cdots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

在第二个关系式中,采取了负的平方根 $-\sqrt{n^2 - (p^2 + q^2)}$ ,因为我们假定,反射光线返回到光来自的那个区域( $z < 0$ );所以反射光线相对于正 $z$ 方向的方向余弦以及由此而得出的 $m$ 都是负的。因为令(40)式中 $n_0 = -n_1 = n$ 即得到(46)式,可见**旋转反射面的角特征函数**,作为4个光线分量 $p_0, q_0, p_1$ 和 $q_1$ 的函数,可以利用**旋转折射面的角特征函数**令 $n_0 = -n_1 = n$ 而求得。所以对于反射的情况,有

$$\left. \begin{aligned} T^{(0)} &= -n(a_0 + a_1), \\ T^{(2)} &= \mathcal{A}'u^2 + \mathcal{B}'v^2 + \mathcal{C}'w^2, \\ T^{(4)} &= \mathcal{D}'u^4 + \mathcal{E}'v^4 + \mathcal{F}'w^4 + \mathcal{G}'u^2v^2 + \mathcal{H}'u^2w^2 + \mathcal{K}'v^2w^2, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}' &= \frac{1}{2n}[-\tfrac{1}{2}r + a_0], \\ \mathcal{B}' &= \frac{1}{2n}[-\tfrac{1}{2}r + a_1], \\ \mathcal{C}' &= \frac{r}{2n}, \\ \mathcal{D}' &= -\frac{r}{16n^3}\left[-\frac{1+b}{4} + 1\right] + \frac{a_0}{8n^3}, \\ \mathcal{E}' &= -\frac{r}{16n^3}\left[-\frac{1+b}{4} + 1\right] + \frac{a_1}{8n^3}, \\ \mathcal{F}' &= \frac{(1+b)r}{16n^3}, \\ \mathcal{G}' &= \frac{r}{16n^3}\left[\frac{1+b}{2} - 2\right], \\ \mathcal{H}' &= \frac{r}{8n^3}\left[-\frac{1+b}{2} + 1\right], \\ \mathcal{K}' &= \frac{r}{8n^3}\left[-\frac{1+b}{2} + 1\right]. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

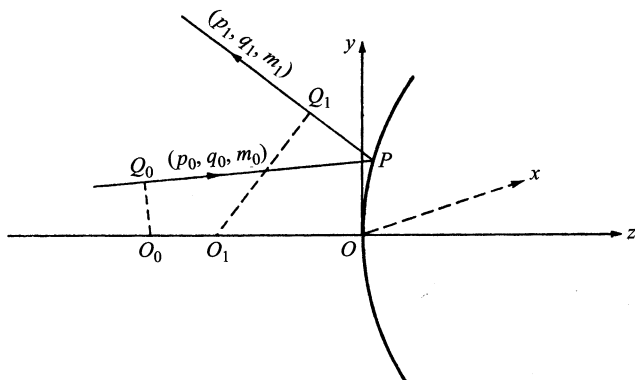


图 4.5 旋转反射面的角特征函数( $O_0, O_1, O, Q_0, P, Q_1$  各点不一定是共面的)

## 4.2 理想成像

现在考虑在折射率为  $n(x, y, z)$  的媒质中一个点源所发射的光的传播情况, 这里的媒质泛指折射率函数  $n(x, y, z)$  所规定的光学空间。设该点源位于媒质内  $P_0$  点, 这时从  $P_0$  将发出无限条光线, 但在媒质其他任何点, 一般而言, 将只有有限条光线通过。然而, 在特殊情况下, 可能会找到一点  $P_1$ , 有无限条光线经它而过。这样的  $P_1$  点称为  $P_0$  点的一个消散像(无散像, 共点像)(stigmatic image), 或称锐像(sharp image)。

在一个理想的光学仪器中, 有一个称为物空间的三维区域, 其中每一点  $P_0$  都将产生一个消散像  $P_1$ 。全部像点所在区域定义为像空间。物空间和像空间中的这种对应点称为共轭点。从  $P_0$  发出的光线, 一般不是全都能到达像空间的; 例如, 有些光线将被仪器的光阑遮挡在外, 那些到达像空间的光线就称为处在仪器的视场之中。当  $P_0$  在物空间移动, 描出一条曲线  $C_0$  时,  $P_1$  将描出一条共轭曲线  $C_1$ 。这两条曲线不一定在几何上彼此相似。如果物空间的每一条曲线  $C_0$  都与它的像在几何上相似, 我们就可以说, 物空间和像空间之间的成像是理想的。我们也可以用类似的方法来定义两个面之间的理想成像。

符合上述理想成像定义的光学仪器是很令人关注的, 因此我们将先表述关于三维区域理想成像(或至少是锐成像)的一些一般定理。关于二维区域(面)锐成像的一些结果, 将在 4.2.3 节中简单加以讨论。

### 4.2.1 一般定理

一个能将三维区域无像散成像的光学系统  $\mathcal{J}$ , 常称为绝对仪器。下面即将证明: 在一个绝对仪器中, 物空间内任何一条曲线的光学长度, 都等于其像的光学长度。这一定理首先由麦克斯韦<sup>①</sup>于 1858 年提出, 但他讨论的是物、像二空间皆为均匀空间这一特殊情况。后来, 布伦斯

① J. C. Maxwell, *Quart. J. Pure Appl. Maths.*, **2** (1858), p. 233。又见于他的 *Scientific Papers*, Vol. 1 (Cambridge, Cambridge University Press, 1890), p. 271。

(H. Bruns, 1895)、克莱茵(F. Klein, 1901)和利布曼(H. Liebmann, 1916)<sup>①</sup>给予了更严格的证明。

之后,卡拉西奥多里(C. Carathéodory)<sup>②</sup>证明,这个定理并不限于均匀媒质,当媒质不均匀和各向异性时,它亦属有效。我们对这个定理的证明将采用卡拉西奥多里的方法,但讨论将限于物空间和像空间都是各向同性的(但一般而言是非均匀的)绝对仪器<sup>③</sup>。

设  $A_0B_0$  和  $A_1B_1$  是绝对仪器  $\mathcal{I}$  视场之中某条光线在物空间和像空间内的线段(见图 4.6)。其他任何一条光线,如果它有一个线元同  $A_0B_0A_1B_1$  的一个线元在位置和方向上都没有明显的偏离,则这条光线也将在仪器的视场之中。

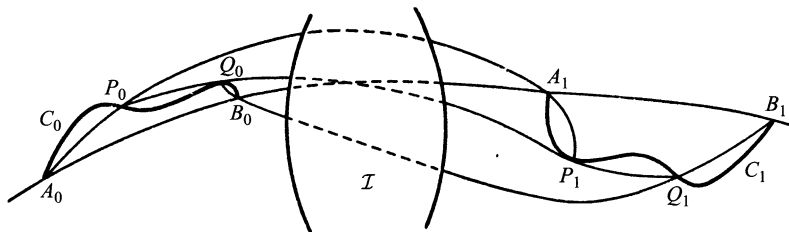


图 4.6 一个绝对光学仪器

一条曲线(假定它各点的切线方向是连续改变的),如果它的每一线元分别与完全在  $\mathcal{I}$  视场之中某条光线的一个线元重合,这条曲线就称为切向地处在  $\mathcal{I}$  的视场之中。如果有一个边数足够多的“多边形”内接于这样一条曲线,则多边形的每一边将同完全在仪器视场之中的某条光线的一个线元重合。

根据等光程原理(见 3.3.3 节),连接  $A_0$  及其像  $A_1$  的所有光线都具有相同的光学长度。我们将用  $V(A_0)$  来表示这个光程长度,并且要证明它实际上与  $A_0$  无关。

设  $B_0$  和  $B_1$  是另外一对共轭点。则有(见图 4.6)

$$[A_1B_1] = [A_0B_0] + V(B_0) - V(A_0) \quad (1)$$

设  $C_0$  是一条连接  $A_0$  和  $B_0$  的曲线,它切向地处在仪器的视场之中,又设  $C_1$  是它的像。在  $C_0$  中内接一个多边形  $A_0P_0Q_0B_0$ ,并且用  $P_1$  和  $Q_1$  来表示  $P_0$  和  $Q_0$  的像点。这时,把(1)式应用于边  $A_1P_1$ ,则有

$$[A_1P_1] = [A_0P_0] + V(P_0) - V(A_0)$$

对其他各边,也类似地有

$$[P_1Q_1] = [P_0Q_0] + V(Q_0) - V(P_0)$$

① H. Bruns, “Das Eikonal”, *Abh. Kgl. sächs. Ges. Wiss., math.-phys. Kl.*, **21** (1895), 370; F. Klein, *Z. Math. Phys.*, **46** (1901), 376; *Ges. Math. Abh.*, **2** (1922), 607。又见于 E. T. Whittaker, *The Theory of Optical Instruments* (Cambridge, Cambridge University Press, 1907), p. 47; H. Liebmann, *Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-naturw. Abt.* (1916), 183。这些研究的报道也可在 H. Boegehold 的论文中找到,见 S. Czapski 和 O. Eppenstein, *Grundzüge der Optischen Instrumente nach Abbe* (Leipzig, Barth, 3rd edition, (1924), p. 213)。

② C. Carathéodory, *Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss. Math.-naturw. Abt.*, **56** (1926), 1。

③ 在微波光学中,采用非均匀物质是很平常的[例如,见 J. Brown, *Microwave Lenses* (London, Methuen, 1953)]。在光波光学中,近来对非均匀物质也日益注意[见 E. W. Marchand, *Progress in Optics*, Vol. 11, ed; E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, American Elsevier Publishing Company, 1973), p. 305 and E. W. Marchand, *Gradient Index Optics* (New York, Academic Press, 1978)]。

和

$$[Q_1 B_1] = [Q_0 B_0] + V(B_0) - V(Q_0)$$

因此

$$[A_1 P_1] + [P_1 Q_1] + [Q_1 B_1] = [A_0 P_0] + [P_0 Q_0] + [Q_0 B_0] + V(B_0) - V(A_0)$$

显然,这个结果可以推广到具有任意边数  $N$  的多边形。到极限情况,当最长的边趋于零而  $N \rightarrow \infty$  时,我们得到关系式

$$L_1 = L_0 + V(B_0) - V(A_0) \quad (2)$$

式中

$$L_0 = \int_{C_0} n_0 ds_0, \quad L_1 = \int_{C_1} n_1 ds_1 \quad (3)$$

是曲线  $C_0$  和  $C_1$  的光学长度。下一步,将要证明  $V(B_0) = V(A_0)$ 。

这两条曲线的各点是一一对应的,它们可用如下的关系式来表示:

$$x_1 = f(x_0, y_0, z_0), \quad y_1 = g(x_0, y_0, z_0), \quad z_1 = h(x_0, y_0, z_0) \quad (4)$$

$C_1$  的线元  $ds_1$  是对应的线元  $ds_0$  的函数,

$$ds_1 = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds_0}\right)^2} ds_0 \quad (5)$$

因此

$$L_1 = \int_{C_1} F\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dx_1}{ds_0}, \frac{dy_1}{ds_0}, \frac{dz_1}{ds_0}\right) ds_0 \quad (6)$$

式中

$$F\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dx_1}{ds_0}, \frac{dy_1}{ds_0}, \frac{dz_1}{ds_0}\right) = n_1(x_1, y_1, z_1) \sqrt{\left(\frac{dx_1}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds_0}\right)^2}$$

是导数  $dx_1/ds_0, dy_1/ds_0$  和  $dz_1/ds_0$  的一次齐次函数;而且,当用  $-dx_1/ds_0$  等代替  $dx_1/ds_0$  等时,  $F$  保持不变。现在由(4)式得出,

$$\frac{dx_1}{ds_0} = \frac{\partial f}{\partial x_0} \frac{dx_0}{ds_0} + \frac{\partial f}{\partial y_0} \frac{dy_0}{ds_0} + \frac{\partial f}{\partial z_0} \frac{dz_0}{ds_0} \quad (7)$$

对  $dy_1/ds_0$  和  $dz_1/ds_0$ , 也有类似的表达式。因此利用(7)和(4)两式,  $F$  可以表成如下形式:

$$F\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dx_1}{ds_0}, \frac{dy_1}{ds_0}, \frac{dz_1}{ds_0}\right) = \Phi\left(x_0, y_0, z_0, \frac{dx_0}{ds_0}, \frac{dy_0}{ds_0}, \frac{dz_0}{ds_0}\right) \quad (8)$$

$\Phi$  也是  $dx_0/ds_0$  等的一次齐次函数;而且,当用  $-dx_0/ds_0$  等代替  $dx_0/ds_0$  等时,  $\Phi$  保持不变,

$$\Phi\left(x_0, y_0, z_0, -\frac{dx_0}{ds_0}, -\frac{dy_0}{ds_0}, -\frac{dz_0}{ds_0}\right) = \Phi\left(x_0, y_0, z_0, \frac{dx_0}{ds_0}, \frac{dy_0}{ds_0}, \frac{dz_0}{ds_0}\right) \quad (9)$$

由(2)、(6)和(8)三式得到

$$\int_{C_0} (n_0 - \Phi) ds_0 = V(A_0) - V(B_0) \quad (10)$$

上式表明,式中曲线积分的值只取决于端点  $A_0$  和  $B_0$ ,而与  $C_0$  的选择无关。但曲线  $C_0$  也不是完全任意的,因为它必须切向地处在仪器的视场中。尽管如此,还是可以得出结论:  $(n_0 - \Phi)ds_0$  必定是某一函数  $\Psi$  的全微分,

$$n_0 - \Phi = \frac{\partial \Psi}{\partial x_0} \frac{dx_0}{ds_0} + \frac{\partial \Psi}{\partial y_0} \frac{dy_0}{ds_0} + \frac{\partial \Psi}{\partial z_0} \frac{dz_0}{ds_0}$$

现在如果用  $-dx_0/ds_0$  等代替导数  $dx_0/ds_0$  等,则上式右边将改变符号,而左边由于(9)式将保持不变。这只有两边均为零( $\Psi = \text{常数}$ )才有可能;因此

$$\Phi = n_0 \quad (11)$$

(10)式表明,  $V(A_0) = V(B_0)$ , 结果(2)式简化为关系式  $L_1 = L_0$ 。因此对于任何一条曲线,不管它是否切向地处在视场中,只要它有一个像,则

$$\int_{C_0} n_0 ds_0 = \int_{C_1} n_1 ds_1 \quad (12)$$

这就是绝对仪器的麦克斯韦定理<sup>①</sup>。

根据麦克斯韦定理,可以立即得出一些有意义的结论。考虑一个小三角形,其边长为  $ds_0^{(1)}, ds_0^{(2)}, ds_0^{(3)}$ , 令  $ds_1^{(1)}, ds_1^{(2)}, ds_1^{(3)}$  是它由一个绝对仪器所形成的像的三个边。此外令  $n_0$  和  $n_1$  分别为这两个三角形所在区域的折射率。根据麦克斯韦定理,

① 楞次(W. Lenz)对麦克斯韦定理给出了一个不够普遍但很巧妙的证明[见 *Probleme der Modernen Physik*, ed. P. Debye (Leipzig, Hirzel, 1928), p. 198], 证明如下:

假定从每一个物点发出的所有光线都到达它的像点,令  $(A_0, A_1)$  和  $(B_0, B_1)$  是两对共轭点。根据假设,光线  $A_0B_0$  必定通过  $A_1$  和  $B_1$ 。同样,  $B_0A_0$  也必定通过这两点。因此,每一条光线都必定是一条封闭曲线,并且由等光程原理得到(见图 4.7):

$$[A_0A_1]_{\text{顺时针方向}} = [A_0A_1]_{\text{逆时针方向}}$$

和

$$[B_0B_1]_{\text{顺时针方向}} = [B_0B_1]_{\text{逆时针方向}}$$

令

$$[A_0B_0] = L_0, [A_1B_1] = L_1, [B_0A_1] = d, [B_1A_0] = d'$$

则上面两个式子变为

$$L_0 + d = d' + L_1, \quad d + L_1 = L_0 + d'$$

两式相减,得到

$$L_0 = L_1$$

这就证明了在曲线为一段光线这种特殊情况下的麦克斯韦定理。把曲线看作是由大量光线线段所构成的多边形的一种极限形式,就可以推广到任意一条曲线,像在下文中所证明的那样。

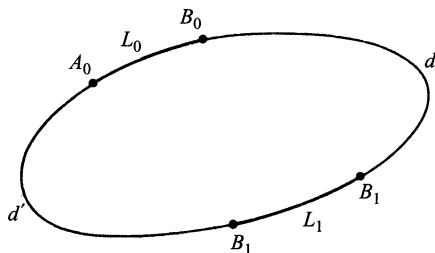


图 4.7 楞次对绝对仪器的麦克斯韦定理的证明图示

$$n_0 ds_0^{(1)} = n_1 ds_1^{(1)}, \quad n_0 ds_0^{(2)} = n_1 ds_1^{(2)}, \quad n_0 ds_0^{(3)} = n_1 ds_1^{(3)} \quad (13)$$

因此,这两个三角形彼此相似,其对应边与折射率成反比。所以,任何两条曲线之间的角度在成像时将保持不变,这就是说,成像必定是一个共形变换(conformal transformation,曾译为保角变换——译者注)。这里有一个由刘维(J. Liouville)提出的一般定理<sup>①</sup>,根据这个定理,三维区域到三维区域的共形变换只能是一个射影变换(projective transformation; 又称直射变换, collineation), 或一个反演变换<sup>②</sup>, 或这两种变换的组合。这样我们就证明了下列卡拉西奥多里定理: 一个绝对仪器的成像是一个射影变换, 或者是一个反演, 或者是这两者的组合。

现在简略地考虑下列情况: 物空间和像空间之间的成像不仅是无像散的(消散的), 而且是理想的, 这就是任何一个图形都变换为一个在几何上与它相似的图形。显然, 这种成像必定是一个射影变换, 因为它把线变换为线<sup>③</sup>。此时由(13)式得出, 任何两个共轭线元之间的放大率  $ds_1/ds_0$ , 等于折射率之比  $n_0/n_1$ 。特别是, 如果  $n_0 = n_1 = \text{常数}$ , 则  $ds_1/ds_0 = 1$ , 因此折射率相同的两个均匀空间之间的理想成像总是平常的(trivial), 所谓平常就是指所产生的像与物完全相同。一块平面镜(或一组平面镜)就是产生这种成像的唯一已知仪器。

这些一般性的考虑意味着, 为了在折射率相同的两个均匀空间之间获得不平常的成像, 就必须取消对物和像之间精确无像散或严格相似的要求。

#### 4.2.2 麦克斯韦“鱼眼”

现在给出绝对仪器的一个简单而有趣的例子, 其中用以表征媒质的折射率函数为

$$n(r) = \frac{1}{1 + (r/a)^2} n_0 \quad (14)$$

式中  $r$  代表从固定点  $O$  算起的距离,  $n_0$  和  $a$  都是常数。它通常称为“鱼眼”, 麦克斯韦首先对此进行了研究<sup>④</sup>。

3.2 节中已经证明, 在球面对称媒质中, 光线是平面曲线, 位于通过原点的平面上, 并且光线方程可写成下列形式[见 § 3.2(11)]:

① 例如, 见 W. Blaschke, *Vorlesungen über Differential-Geometrie I* (Berlin, Springer, 2nd edition 1924), p. 68; (4th edition 1945), p. 101。

② 一个反演, 就是把每一点  $P_0$  变换为另一点  $P_1$ ,  $P_1$  位于  $P_0$  同原点  $O$  (保持固定) 的连线上, 并且乘积  $OP_0 \cdot OP_1$  为常数。

③ 参看 F. Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Vol. II (译自德文第三版, London, Macmillan, 1939, p. 89; 由 Dover Publications, New York 翻印)。

④ J. C. Maxwell, *Cambridge and Dublin Math. J.*, **8** (1854), 188; 也见于 *Scientific Papers*, Vol. I (Cambridge, Cambridge University Press), p. 76。

麦克斯韦“鱼眼”的一些有意义的推广, 由下列作者获得, 见 W. Lenz, *Probleme der Modernen Physik*, ed. P. Debye (Leipzig, Hirzel, 1928), p. 198 和 R. Stettler, *Optik*, **12** (1955), 529。后一篇文章还推广了一种所谓 Luneburg 透镜, 这种透镜由于能够作为广角扫描而在微波天线设计中获得重要应用。R. K. Luneburg 首先研究了这种透镜, 见于他写的 *Mathematical Theory of Optics* (University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1964) § 29。它是一个不均匀球体, 其折射率函数  $n(r) = \sqrt{2 - r^2}$  ( $0 \leq r \leq 1$ ), 可使每一束入射平行光线都锐聚焦。也见于 R. F. Rinehart, *J. Appl. Phys.*, **19** (1948), 860; A. Fletcher, T. Murphy and A. Young, *Proc. Roy. Soc., A* **223** (1954), 216; 和 G. Toraldo di Francia, *Optica Acta*, **1** (1954—1955), 157。

$$\theta = c \int^r \frac{dr}{r \sqrt{n^2(r)r^2 - c^2}}$$

$c$  是一个常数。把(14)式代入上式,并且令

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad K = \frac{c}{an_0} \quad (15)$$

得到

$$\theta = \int^\rho \frac{K(1 + \rho^2) d\rho}{\rho \sqrt{\rho^2 - K^2(1 + \rho^2)^2}} \quad (16)$$

可以证明

$$\frac{K(1 + \rho^2)}{\rho \sqrt{\rho^2 - K^2(1 + \rho^2)^2}} = \frac{d}{d\rho} \left[ \arcsin \left( \frac{K}{\sqrt{1 - 4K^2}} \frac{\rho^2 - 1}{\rho} \right) \right]$$

因此(16)式变为

$$\sin(\theta - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 n_0^2 - 4c^2}} \frac{r^2 - a^2}{ar} \quad (17)$$

式中  $\alpha$  是一个积分常数。

(17)式是光线的极坐标方程。所以,通过一固定点  $P_0(r_0, \theta_0)$  的单参量光线族由下式给出:

$$\frac{r^2 - a^2}{r \sin(\theta - \alpha)} = \frac{r_0^2 - a^2}{r_0 \sin(\theta_0 - \alpha)} \quad (18)$$

可以看出,无论  $\alpha$  值等于多少,这个方程均被  $r = r_1, \theta = \theta_1$  所满足,其中

$$r_1 = \frac{a^2}{r_0}, \quad \theta_1 = \pi + \theta_0 \quad (19)$$

(19)式表明,来自一个任意点  $P_0$  的所有光线,均相交于  $P_0$  到  $O$  连线上的一点  $P_1$ ;  $P_0$  和  $P_1$  分别在  $O$  的两边,并且  $OP_0 \cdot OP_1 = a^2$ 。因此,“鱼眼”是一种绝对仪器,其中的成像是个反演。

我们注意到,  $r = a, \theta = \alpha$  和  $r = a, \theta = \pi + \alpha$  是满足(17)式的;因此每一条光线与固定圆  $r = a$  相交于一直径的两端(见图4.8)。

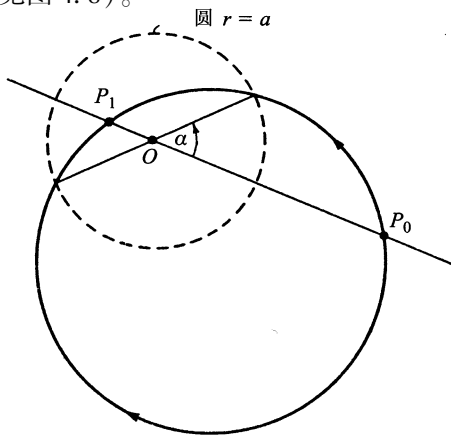


图 4.8 麦克斯韦“鱼眼”中的光线

为了得出光线的笛卡儿坐标方程,在(17)式中令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ,则有

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = \frac{c}{a\sqrt{a^2 n_0^2 - 4c^2}}(x^2 + y^2 - a^2)$$

或

$$(x + b \sin \alpha)^2 + (y - b \cos \alpha)^2 = a^2 + b^2 \quad (20)$$

式中

$$b = \frac{a}{2c} \sqrt{a^2 n_0^2 - 4c^2}$$

(20)式表明每一条光线都是一个圆。

### 4.2.3 面的无像散成像

以上只谈了三维区域的理想成像或锐成像。我们看到,当物空间和像空间都是均匀的并且具有相同折射率时,理想成像只能属于平常的类型,产生物体的镜像而已。自然要问,当要求仪器只对某些面理想成像(或至少是锐成像)时,能不能得到不平常的成像呢?这个问题已经由一些作者研究过了<sup>①</sup>,他们发现,当物空间和像空间都均匀时,一般<sup>②</sup>至少有两个面能被一个旋转对称系统锐成像。关于这个定理的证明,可查阅伯格霍耳德(H. Boegehold)和赫兹伯格(M. Herzberger)的文章以及史密斯(T. Smith)的文章。这里只详细研究一个球面的锐成像这一简单情况,它在实用上是特别有意义的。

现在考虑一个实心均匀球  $S$  上的折射,球整个浸没于一均匀媒质中。设  $O$  是球心,  $r$  是球的半径,  $n$  和  $n'$  分别是球和周围媒质的折射率。此外,设  $AQ$  是入射到球上的一条光线。折射光线  $QB$  用如下的作图法可以容易地求得。

设  $S_0$  和  $S_1$  是两个球,球心均在  $O$  点,球的半径分别为

$$r_0 = \frac{n}{n'} r, \quad r_1 = \frac{n'}{n} r \quad (21)$$

如果  $P_0$  是  $AQ$  与  $S_0$  的交点,  $P_1$  是  $OP_0$  与  $S_1$  的交点,则  $QP_1$  就是折射光线。因为通过作图得出(见图 4.9)

$$\frac{OQ}{OP_0} = \frac{OP_1}{OQ} = \frac{n'}{n} \quad (22)$$

而且

$$\widehat{QOP_0} = \widehat{QOP_1} \quad (23)$$

所以三角形  $OQP_0$  和  $OP_1Q$  相似,由此得出

$$\frac{\sin \phi_0}{\sin \phi_1} = \frac{OP_0}{OQ} = \frac{n}{n'} \quad (24)$$

式中  $\phi_0 = \angle OQP_0$  和  $\phi_1 = \angle OQP_1$  分别是入射角和折射角。 $\phi_0$  和  $\phi_1$  满足折射定律,因此  $QP_1$  就是折射光线。

① H. Boegehold and M. Herzberger, *Compositio Mathematica*, **1** (1935), 448; M. Herzberger, *Ann. New York Acad. Sci.*, **48** (1946), Atr. 1, 1; T. Smith, *Proc. Phys. Soc.*, **60** (1948), 293。又见 C. G. Wynne, *Proc. Phys. Soc.*, **65B** (1952), 436。

② “一般”,在这里的意思是要排除全部物空间锐成像(例如用一平面镜反射)一类退化情况。



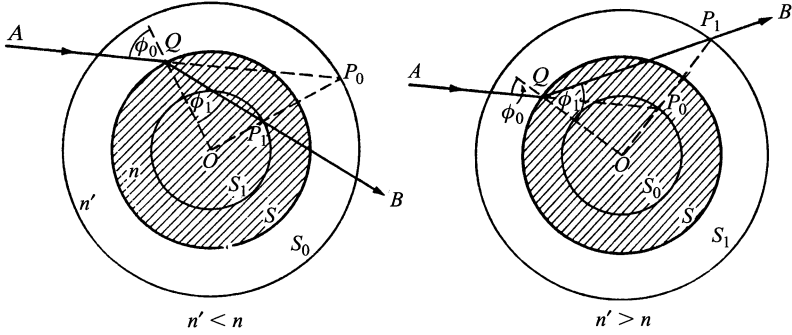


图 4.9 一个球面上的折射。不晕点

这一作图意味着,从  $S_0$  上的一点  $P_0$  发散的所有光线,将在半径  $OP_0$  与  $S_1$  的交点  $P_1$  处形成一个(虚的)消散像。因此,球  $S_1$  就是  $S_0$  的一个消散像,反之亦然。

为了后面之用,现将(24)式表成稍微不同的形式。如果用  $\theta_0$  和  $\theta_1$  来表示两条共轭光线与直线  $P_0P_1$  的夹角,即  $\theta_0 = \angle OP_0Q$ ,  $\theta_1 = \angle OP_1Q$ , 则由于两个三角形相似,因此  $\theta_0 = \phi_1$ ,  $\theta_1 = \phi_0$ ; 所以

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_0} = \frac{n}{n'} = \text{常数} \quad (25)$$

(25)式是所谓正弦条件的特殊情况,它的意义将在 4.5 节中加以说明。按照 4.5 节的术语,  $P_0$  和  $P_1$  称为球面  $S$  的不晕点。

球面折射存在的这种不晕点,已为某些显微镜物镜的构造所利用,后面 6.6 节将谈及此点。

### 4.3 具有轴对称的射影变换(直射变换)

前一节中已经证明,三维区域之间的理想成像必定是一个射影变换,因为它把线变换为线。但即使在不严格满足理想成像的要求时,射影变换的一些性质仍然至关重要。因为稍后将看到,任何一个光学系统中的物像关系,至少在一级近似上都是这样一种变换。所以在导出实际仪器成像定律之前,先研究一下射影变换的一般性质将为适宜。虽然这一初步讨论基本上属于几何性质,但在可能之处保留光学用语将亦合宜。

#### 4.3.1 一般公式

设  $(x, y, z)$  是物空间一点  $P$  的坐标,  $(x', y', z')$  是像空间一点  $P'$  的坐标,两者此时均以同一套任意选定的笛卡儿直角坐标轴为参考系。物空间和像空间之间的射影关系,数学上用下列关系式来表示:

$$x' = \frac{F_1}{F_0}, \quad y' = \frac{F_2}{F_0}, \quad z' = \frac{F_3}{F_0} \quad (1)$$

式中

$$F_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (2)$$

由(1)式联系的一对点,将谓之形成一共轭对。

从(1)式解  $x, y, z$ , 可得到相同形式的关系:

$$x = \frac{F'_1}{F'_0}, \quad y = \frac{F'_2}{F'_0}, \quad z = \frac{F'_3}{F'_0} \quad (3)$$

式中

$$F'_i = a'_i x' + b'_i y' + c'_i z' + d'_i$$

由(1)式得知, 平面  $F_0 = 0$  上任何一点的像均在无穷远处, 与此类似, 由(3)式可知, 其像位于平面  $F'_0 = 0$  上的所有物点均在无穷远处。平面  $F_0 = 0$  称为物空间的焦平面, 平面  $F'_0 = 0$  则称为像空间的焦平面<sup>①</sup>。物空间中的平行光线将被变换为一组光线, 相交于焦平面  $F'_0 = 0$  的一点。与此类似, 从焦平面  $F_0 = 0$  上的一点发出的光线将被变换为一束平行光线。在特殊情况下, 这两个焦平面都可能位于无穷远处。这时, 变换就称为仿射变换或远焦变换。此时有限值  $(x, y, z)$  与有限值  $(x', y', z')$  相对应, 因此在一个远焦变换中总是  $F_0 \neq 0$  和  $F'_0 \neq 0$ 。显然, 这只有在  $a_0 = b_0 = c_0 = 0$  和  $a'_0 = b'_0 = c'_0 = 0$  时才可能成立。

对于光学特别重要的是轴对称情况, 因为大多数光学系统是由一些共轴旋转面组成的 [通常称为共轴系统 (centred system)]。此时由对称性得知, 每一点  $P_0$  的像总是位于包含  $P_0$  和轴的平面上, 即在过  $P_0$  的子午面上。因此, 在研究轴对称射影变换的性质时, 可以只讨论某一子午面上的点。设此子午面是  $yz$  平面, 并且取  $z$  轴沿着对称轴。此时物空间的一点  $(0, y, z)$  将变换为像空间的一点  $(0, y', z')$ , 这里,

$$y' = \frac{b_2 y + c_2 z + d_2}{b_0 y + c_0 z + d_0}, \quad z' = \frac{b_3 y + c_3 z + d_3}{b_0 y + c_0 z + d_0} \quad (4)$$

现在由对称性可知, 当  $y$  变为  $-y$  时,  $z'$  保持不变。这一般只有在  $b_0 = b_3 = 0$  时才有可能。此外由对称性得知, 如果  $y \rightarrow -y$ , 则  $y' \rightarrow -y'$ , 这意味着  $c_2 = d_2 = 0$ 。因此(4)式简化为

$$y' = \frac{b_2 y}{c_0 z + d_0}, \quad z' = \frac{c_3 z + d_3}{c_0 z + d_0} \quad (5)$$

这些方程含有 5 个常数, 但只有它们的比值才有意义。所以一个具有轴对称的投影变换由 4 个参量来表征。

从(5)式解  $y$  和  $z$ , 得到

$$y = \frac{c_0 d_3 - c_3 d_0}{b_2} \frac{y'}{c_0 z' - c_3}, \quad z = \frac{-d_0 z' + d_3}{c_0 z' - c_3} \quad (6)$$

由(5)和(6)两式可以看出, 焦平面由下式给出:

$$F_0 \equiv c_0 z + d_0 = 0, \quad F'_0 \equiv c_0 z' - c_3 = 0$$

所以焦平面与轴成直角相交, 交点的横坐标分别是

$$z = -\frac{d_0}{c_0}, \quad z' = \frac{c_3}{c_0} \quad (7)$$

这些点称为主焦点, 在图 4.10 中用  $F$  和  $F'$  来表示。

① “焦平面”和“焦点”这两个名词在这里的含义与讨论法线汇(见 3.2.3 节)和像散光锥(见 4.6 节)时有所不同。