

第 2 章 坐标与方程

把几何图形放在一个确定的直角坐标系中,用坐标、方程表示点、线、面,把几何问题转化为代数问题,运用代数运算来研究几何图形的性质,这是解析几何的基本方法。本章主要介绍坐标变换、曲线方程的参数表示和极坐标表示、空间曲面等知识,以及它们在机械制造和数控机床加工中的应用。

2.1 坐标变换及其应用

点的坐标和曲线方程与坐标系的选择有关,同一点在不同坐标系中有不同的坐标,同一条曲线在不同坐标系中的方程也有简有繁。把一个坐标系变换为另一个适当的坐标系,可以简化曲线的方程,便于讨论曲线的性质。下面讨论利用坐标变换来化简曲线方程的方法。

1. 坐标轴平移

如图 2.1.1 所示,直角坐标系 xOy (称它为旧坐标系) 的原点为 $O(0,0)$, 作新坐标系 $x'O'y'$, 使新的坐标轴 $O'x'$ 和 $O'y'$ 分别与旧坐标轴 Ox 及 Oy 同向, 且新坐标系原点 O' 在旧坐标系中的坐标为 (h,k) , 各坐标轴的长度单位不变。这种只改变坐标原点位置, 而不改变坐标轴方向和长度单位的变换叫做坐标轴平移, 简称平移。

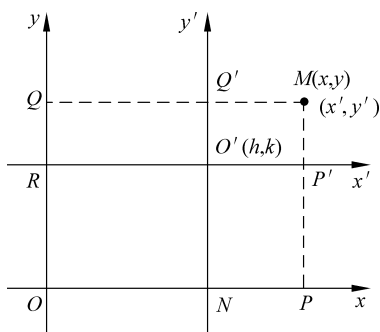


图 2.1.1

设 M 为平面内任意一点, 它在旧坐标系中的坐标为 (x, y) , 在新坐标系中的坐标为 (x', y') 。从图 2.1.1 可以看出, 点 M 的新旧坐标之间有如下关系:

$$x = OP = ON + NP = RO' + O'P' = h + x'$$

$$y = OQ = OR + RQ = NO' + O'Q' = k + y'$$

所以有

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases} \quad (2.1.1)$$

式(2.1.1)叫做坐标平移公式。利用该公式可以进行点的新、旧坐标的转换,可以变换曲线方程的形式。

【例 2.1.1】 如果以 $O'(3, -2)$ 为新的坐标原点,平移坐标轴,试求点 $P(-4, 7)$ 的新坐标。

解: 由已知条件,可知

$$x = -4, \quad y = 7, \quad h = 3, \quad k = -2$$

代入式(2.1.1),得

$$x' = -4 - 3 = -7$$

$$y' = 7 - (-2) = 9$$

所以点 P 的新坐标为 $(-7, 9)$ 。

【例 2.1.2】 通过坐标轴的平移,把原点移到 $O'(2, -1)$,求曲线

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

在新坐标系下的方程,说明曲线类型并作图。

解: 设曲线上任意一点的新坐标为 (x', y') ,由坐标平移公式,得

$$x = x' + 2, \quad y = y' - 1$$

代入原方程,整理得新坐标系下的曲线方程

$$x'^2 + y'^2 = 9$$

所以这条曲线是圆心在新原点 $O'(2, -1)$,半径为 3 的圆,如图 2.1.2 所示。

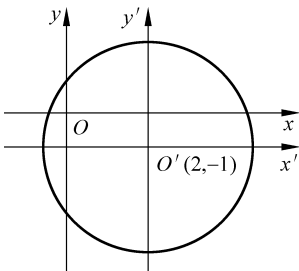


图 2.1.2

【例 2.1.3】 利用坐标平移,化简二元二次方程

$$x^2 + 2y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$$

使新方程不含 x, y 的一次项,并说明曲线的类型。

解: 把方程分别对 x, y 进行配方,得

$$(x^2 + 6x + 9) + 2(y^2 - 4y + 4) - 9 - 8 - 5 = 0$$

即

$$(x + 3)^2 + 2(y - 2)^2 = 22$$

令

$$x + 3 = x', \quad y - 2 = y'$$

代入上式,得

$$x'^2 + 2y'^2 = 22$$

即

$$\frac{x'^2}{22} + \frac{y'^2}{11} = 1$$

所以原二元二次方程是一个椭圆,它的中心是新坐标系的原点 $O'(-3, 2)$, 焦点在 x' 轴上, 如图 2.1.3 所示。

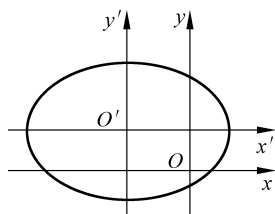


图 2.1.3

通过上面例子可以看出,利用坐标平移化简曲线方程,实质上是把原来的坐标原点移到曲线的对称中心,把坐标轴平移到对称轴,使曲线在新坐标系中的方程化为标准方程,从而清楚地看到曲线的特征。

2. 坐标轴旋转

如图 2.1.4 和图 2.1.5 所示,直角坐标系 xOy (称它为旧坐标系) 的原点为 $O(0, 0)$, 把旧坐标系的两坐标轴绕着原点按同一方向旋转同一角度 θ , 得到新坐标系 $x'Oy'$, 且各坐标轴的长度单位不变。这种坐标系的变换叫做坐标轴旋转。

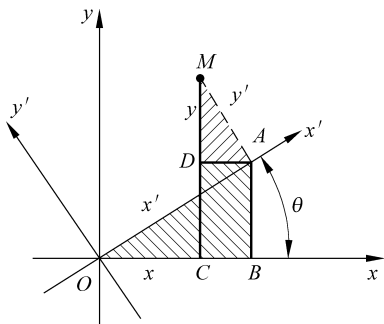


图 2.1.4

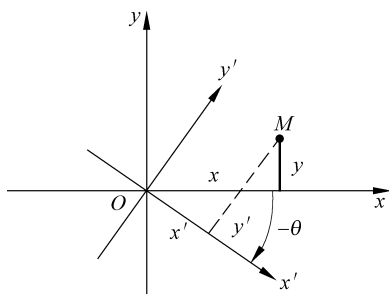


图 2.1.5

设 M 为平面上任意一点,它在旧坐标系中的坐标为 (x, y) ,在新坐标系中的坐标为 (x', y') 。从图 2.1.4 可以看出,坐标系 xOy 逆时针方向旋转(简称逆转)角度 θ ,得到新坐标系 $x'Oy'$,点 M 的新旧坐标之间有如下关系:

$$\begin{aligned}
 x &= OC \\
 &= OB - CB \\
 &= OB - DA \\
 &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\
 y &= CM \\
 &= CD + DM \\
 &= BA + DM \\
 &= x' \sin \theta + y' \cos \theta
 \end{aligned}$$

即由 x', y' 求 x, y 的公式是

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad (2.1.2)$$

反过来,由 x, y 求 x', y' ,只要解上面两式所组成的方程组,就可得

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = y \cos \theta - x \sin \theta \end{cases} \quad (2.1.3)$$

式(2.1.2)、式(2.1.3)是坐标系逆转时的计算公式。

若坐标系 xOy 顺时针方向旋转(简称顺转)角度 θ ,得到新坐标系 $x'Oy'$,如图 2.1.5 所示。将 $-\theta$ 代入基本关系式(2.1.2)、式(2.1.3),点 M 的新旧坐标之间有如下关系:

$$\begin{aligned}
 x &= x' \cos(-\theta) - y' \sin(-\theta) \\
 y &= x' \sin(-\theta) + y' \cos(-\theta)
 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
 x' &= x \cos(-\theta) + y \sin(-\theta) \\
 y' &= y \cos(-\theta) - x \sin(-\theta)
 \end{aligned}$$

即坐标轴顺转时,由 x', y' 求 x, y 的公式为

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta + y' \sin \theta \\ y = -x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad (2.1.4)$$

由 x, y 求 x', y' 的公式为

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = y \cos \theta + x \sin \theta \end{cases} \quad (2.1.5)$$

在坐标轴顺转或逆转公式中, θ 角可以是 $0^\circ \sim 180^\circ$ 之间的任意角。

【例 2.1.4】 将坐标轴逆转 $\frac{\pi}{4}$, 求点 $M(-2, 3)$ 在新坐标系中的坐标。

解: 因为 $x = -2, y = 3$, 根据式(2.1.3)得

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ &= -2 \times \cos \frac{\pi}{4} + 3 \times \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' &= y \cos \theta - x \sin \theta \\ &= 3 \times \cos \frac{\pi}{4} - (-2) \times \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

所以点 M 在新坐标系中的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ 。

【例 2.1.5】 将坐标轴逆转 $\frac{\pi}{3}$, 求曲线 $2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 = 10$ 在新坐标系中的方程, 并判断这条曲线的类型。

解: 把 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 代入式(2.1.2)得

$$\begin{cases} x = x' \cos \frac{\pi}{3} - y' \sin \frac{\pi}{3} \\ y = x' \sin \frac{\pi}{3} + y' \cos \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \end{cases}$$

代入原方程得, 新坐标系下的方程为

$$2\left(\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 - \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right)^2 = 10$$

化简得标准方程是

$$\frac{(x')^2}{20} + \frac{(y')^2}{4} = 1$$

所以这条曲线是一个椭圆。

3. 坐标变换的应用

在机械加工中,零件图样所标注的尺寸、公差等都有相应的基准,即设计基准。图样上的基准从数学角度看就是坐标系。数控加工数值计算的主要任务是计算出形成零件轮廓或刀具运动轨迹的尺寸,即计算零件加工轮廓的基点和节点的坐标,或刀具中心的基点和节点的坐标,为编制加工程序做准备。

比如,在数控编程时,根据机床零点所确定的坐标称为绝对坐标;在加工过程中与机床零点无关、只相对于它的起点来计量的坐标称为相对坐标。

【例 2.1.6】 试在直角坐标系中,用绝对坐标和相对坐标表示如图 2.1.6 所示的 $P_1 \sim P_7$ 的交点坐标。

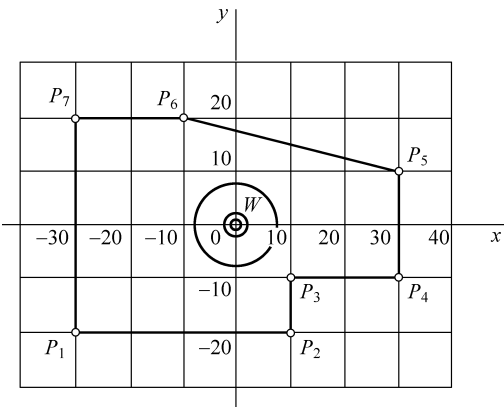


图 2.1.6

解: 绝对坐标有固定不变的坐标系和坐标原点;相对坐标则有一个相对的坐标原点和坐标系(这个坐标系的方向与原来的相同,只是坐标原点发生了变化)。具体地说,就是在计算下一个节点的坐标时要把当前的节点作为坐标原点,根据这个坐标原点来确定下一个节点的坐标。于是,各交点的坐标列表如下:

交 点	绝对坐标 (x, y)	相对坐标 (x, y)
P_1	$(-30, -20)$	$(-30, -20)$
P_2	$(10, -20)$	$(40, 0)$
P_3	$(10, -10)$	$(0, 10)$
P_4	$(30, -10)$	$(20, 0)$
P_5	$(30, 10)$	$(0, 20)$
P_6	$(-10, 20)$	$(-40, 10)$
P_7	$(-30, 20)$	$(-20, 0)$

在直线轮廓零件的程序编制中,除了确定零件上每个基点的坐标外,还要考虑刀具相对于工件运动的轨迹(即加工路线),需要计算出加工路线中刀具中心在拐角处的坐标。

【例 2.1.7】 铣削直线轮廓的板状零件如图 2.1.7 所示。铣刀直径 32mm,试求铣刀加工路线中 $H_1 \sim H_5$ 各点的坐标值。 R_F (称为等高线)为铣刀直径的一半。

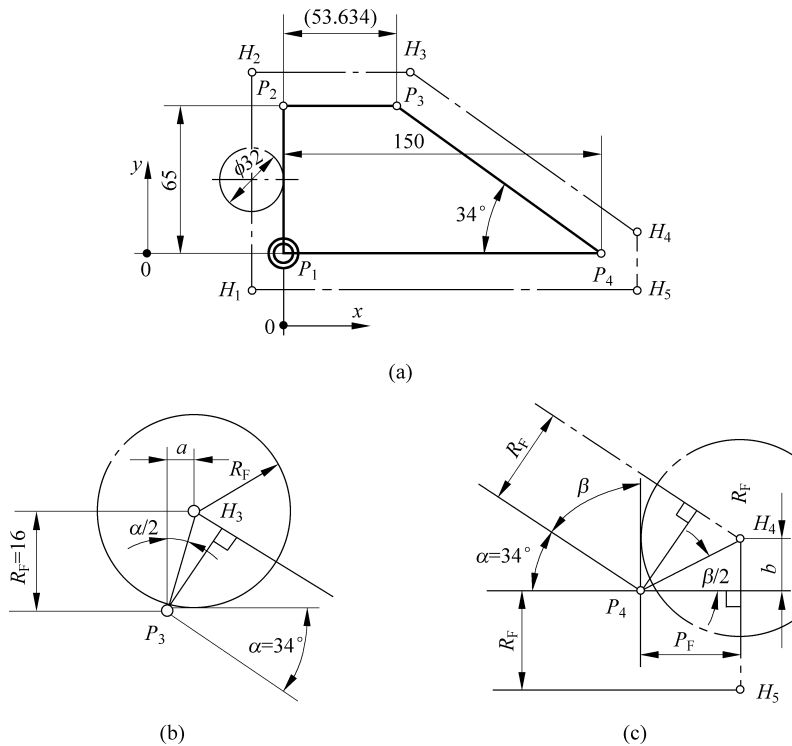


图 2.1.7

解: 如图 2.1.7(a)所示, H_1 的坐标 $x = -16, y = -16$

H_2 的坐标 $x = -16, y = 81$

如图 2.1.7(b)所示, 计算 H_3 的坐标。根据加工方法, 运用角度互余的等量关系, 容易得到

$$\frac{\alpha}{2} = 17^\circ \quad \text{而} \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{R_F}$$

$$a = R_F \tan \frac{\alpha}{2} = 16 \times \tan 17^\circ = 4.892 \text{ mm}$$

$$x = 53.634 + 4.892 = 58.526 \text{ mm}$$

$$y = 65 + 16 = 81 \text{ mm}$$

如图 2.1.7(c)所示, H_4 的坐标为

$$x = 150 + 16 = 166\text{mm}$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$$

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{b}{R_F}$$

$$y = b = R_F \tan \frac{\beta}{2} = 16 \times \tan 28^\circ = 8.507\text{mm}$$

H_5 的坐标: $x = 166\text{mm}, y = -16\text{mm}$

对于带圆弧轮廓的零件,在程序编制中找出零件上圆弧的起始点和终止点,并要确定圆弧的中心坐标。它的坐标对应直角坐标轴的 x, y 方向分别用符号 I, J 的值表示(如图 2.1.8 所示)。通常,圆心位置在圆弧起点的相应坐标轴的正方向时, I, J 取正值;反之取负值。比如,圆心 M 点坐标为 $(-I, J)$ 。

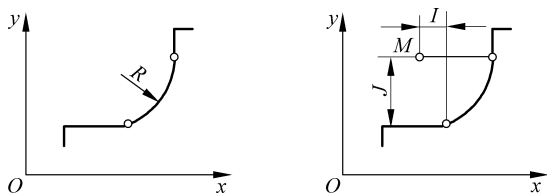


图 2.1.8

【例 2.1.8】 如图 2.1.9 所示是一个带圆弧轮廓零件的加工路线图。试列出 P_2P_3 、 P_5P_6 和 $P_{11}P_{12}$ 三段圆弧起始点和终点坐标及各圆弧中心。

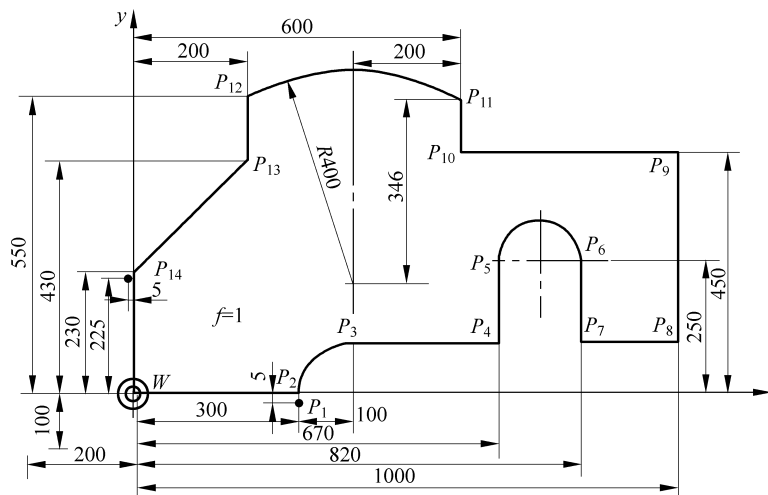


图 2.1.9

解: 根据图 2.1.9 所示的数据,容易计算, P_2P_3 圆弧的半径为 100、 P_5P_6 圆弧的半径为 $\frac{1}{2}(820 - 670) = 75$, 所以 P_2, P_3, P_5, P_6 和 P_{11}, P_{12} 各点的坐标列表如下:

基 点	x	y	I	J
P_2	300	0		
P_3	400	100	100	0
P_5	670	250		
P_6	820	250	75	0
P_{11}	600	550		
P_{12}	200	550	-200	-346

在工艺分析计算中,点的坐标旋转公式应用很广泛。在平面上,凡尺寸关系可以看做是两点间的坐标旋转关系的,不论主视图、俯视图,还是左视图,都可以应用点的坐标旋转公式。

【例 2.1.9】 如图 2.1.10 所示,要磨削零件上的斜面 MN ,在正弦规未被倾斜前,先测量出工件表面 M 点至正弦规定位心轴轴线 O 的距离 $y=116.52\text{mm}$,并先定好工件 M 点到正弦规定位心轴轴线 O 水平方向的距离 $x=46\text{mm}$;加工时将正弦规逆时针旋转 40° ,试计算此时的坐尺寸 y_1 为多大,才能保证工件 M 点原有的坐标尺寸 $x、y$ 。

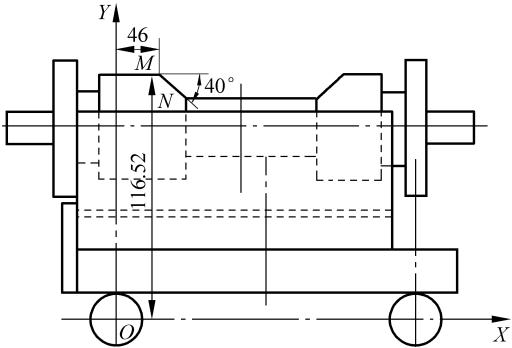


图 2.1.10

解:如图 2.1.11 所示,由于正弦规是按逆时针方向旋转的,所以新坐标系 X_1OY_1 就可看成是原坐标系 XOY 按顺时针方向旋转所得。

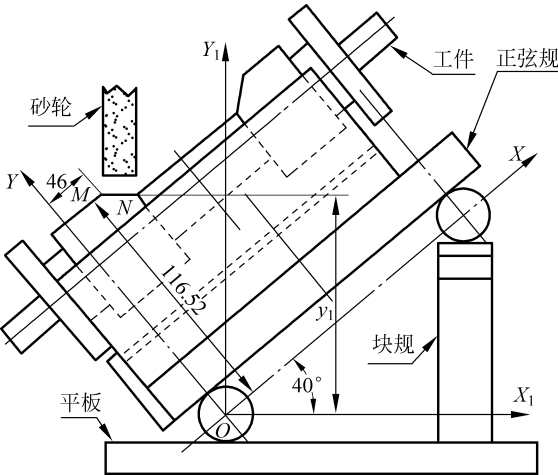


图 2.1.11

已知 $x=46, y=116.52, \theta=40^\circ$, 由顺时针旋转的坐标变换公式, 得

$$\begin{aligned} y_1 &= y \cos \theta + x \sin \theta \\ &= 116.52 \times \cos 40^\circ + 46 \times \sin 40^\circ \\ &\approx 118.83 \end{aligned}$$

即磨削斜面 MN 时, 只要测量 MN 平面至正弦规定位心轴轴线的距离为 118.83mm 就能保证工件 M 点原有的坐标尺寸 (未考虑制造公差)。

【例 2.1.10】 现要铣削如图 2.1.12 所示工件的斜面, 斜面 M 与定位基准面夹角为 θ , 工件定位简图如图 2.1.13 所示。由于工件上的加工表面的定位尺寸 L 标注在交点上, 因此夹具的对刀尺寸不能直接标注这个尺寸, 需要通过一个辅助测量基准——工艺孔才能标注其位置尺寸。假设此工艺孔是设计在距两定位基面尺寸为 $m \pm 0.02$ 和 $n \pm 0.02$ 的位置上, 并选定对刀塞尺的厚度为 0.5mm, 试计算图示尺寸 y_3 以确定对刀块高度的尺寸。

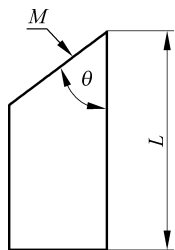


图 2.1.12

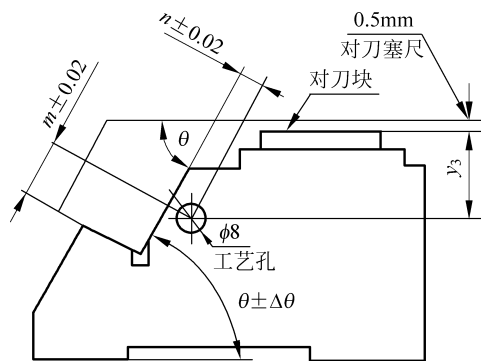


图 2.1.13

解: 设夹具上的相互垂直的两个定位工作面为原坐标系 XOY , 如图 2.1.14 所示。当原坐标系顺时针转动角 θ 以后, 便形成了新坐标系 X_1OY_1 。这时需要进行 A, B 两点坐标转换的计算。

对于工件斜面的交点 A , 已知 $x_A=L, y_A=0$, 由顺时针转动角 θ 的变换公式, 得

$$\begin{aligned} x_1 &= x_A \cos \theta - y_A \sin \theta \\ &= L \cos \theta \\ y_1 &= y_A \cos \theta + x_A \sin \theta \\ &= L \sin \theta \end{aligned}$$

对于工艺孔的孔心 B , 已知 $x_B=m, y_B=-n$, 同理可得

$$x_2 = x_B \cos \theta - y_B \sin \theta$$

$$= m\cos\theta + n\sin\theta$$

$$y_2 = y_B\cos\theta + x_B\sin\theta$$

$$= -n\cos\theta + m\sin\theta$$

因为工件加工的是一平面,所以沿走刀方向的尺寸 x_1 不必标出,而只需标出尺寸 y_1 即可。由于对刀块工作表面的尺寸是以工艺孔为基准标注的,故需求出尺寸 y_3 ,如图2.1.14所示:

$$y_3 = y_1 - y_2 - 0.5$$

$$= L\sin\theta - (m\sin\theta - n\cos\theta) - 0.5$$

将具体数值代入上式即可算出 y_3 之值。

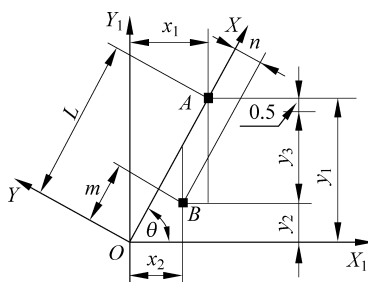


图 2.1.14

通过上例分析,我们看到,运用坐标旋转的方法来计算点的坐标,其一般步骤如下:

(1) 分析图样,确定设计或工艺上需要计算的尺寸,明确已知条件和所要解决的问题;

(2) 选择坐标原点,并确定要计算的坐标点,这是确定坐标系位置的关键,为使计算方便,坐标原点应取在已知与待求尺寸有关联和便于测量的点上;

(3) 根据两组尺寸线的方向,过坐标原点构成两个直角坐标系 xOy 、 $x'Oy'$,新、旧坐标系的名称可以任意选定,通常选工件在旋转后的状态来进行分析和计算;

(4) 根据两坐标系选定后的名称(新、旧坐标系)确定转角方向(即逆转或顺转),并按图样给定的角度来确定转角的大小;

(5) 按已知条件与待求参数和旋转方向,选择相应公式进行计算。

习题 2.1

1. 通过坐标轴平移将下列方程化简,并画出示意图。

(1) $9x^2 + 16y^2 + 36x - 96y + 36 = 0$

(2) $y^2 - 4x - 4y + 4(1 - \sqrt{2}) = 0$

2. 通过平移坐标轴化简方程

$$9x^2 - 25y^2 - 18x - 150y - 441 = 0$$

并画出新坐标系和方程的曲线。

3. 将坐标轴顺转 $\frac{\pi}{2}$, 求椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 在新坐标系中的方程。

4. 如图 2.1.15 所示零件,其轮廓均为直线组成。试求图中 $P_1 \sim P_{11}$ 的绝对坐标和相对坐标。

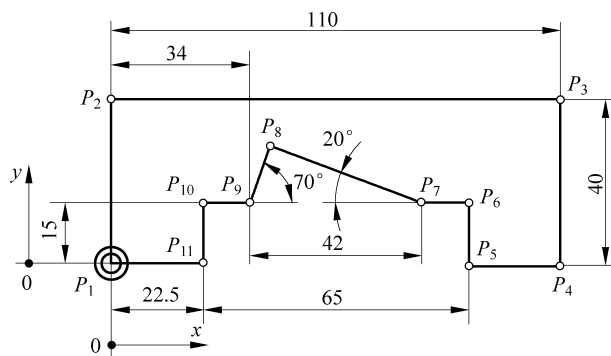


图 2.1.15

5. 如图 2.1.16 所示的零件,要磨削零件上的斜面 MN ,在正弦规没有被抬起之前,先测得工件表面 M 点至正弦规定位轴心的垂直距离 $y=116.52\text{mm}$,并先预定好工件上 M 点至轴心 O 的水平方向的距离 $x=46\text{mm}$,加工时将正弦规逆转 40° ,试计算此时的坐标尺寸 b 为多大,才能保证工件 M 点原有坐标尺寸 x 、 y 。

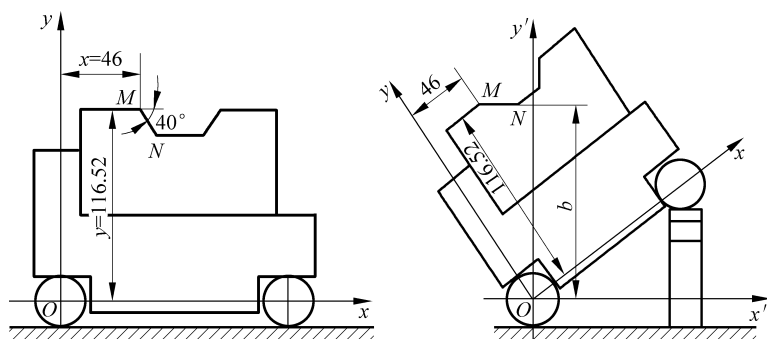


图 2.1.16

6. 如图 2.1.17 所示, 钻头和工件 $BCDEF$ 的边 EF 以及座盘上 A 点原在同一条直线上, 要在工件上钻一垂直于 BC 的孔, 使孔的中心线和 EF 成 60° 角, 并且使中心线恰好通过 P 点。加工时要把整个工件连同座盘一起绕 A 点按顺时针方向旋转 60° , 然后钻孔。试问钻头应该向左或右移动多少距离?

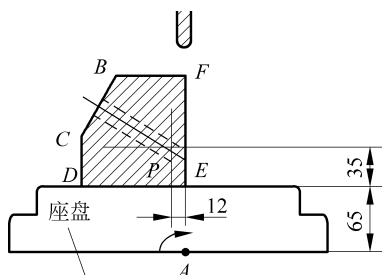


图 2.1.17

2.2 直线与二次曲线

1. 相关知识

在机械制造中,由于被加工零件的轮廓多涉及直线与二次曲线,所以直线、二次曲线的方程、性质和相关公式就显得非常重要。现将它们列表,其中直线的倾斜角和斜率见表 2.2.1,常用的直线方程见表 2.2.2,两条直线的位置关系见表 2.2.3,两个常用公式见表 2.2.4。

表 2.2.1

倾斜角	直线向上的方向和 x 轴正方向所成的最小正角,记作 α
斜率	直线倾斜角的正切值,记做 k ,即 $k=\tan\alpha(\alpha\neq90^\circ)$

表 2.2.2

名 称	已 知 条 件	方 程
点斜式	直线上一点 $P_0(x_0,y_0)$ 和斜率 k	$y-y_0=k(x-x_0)$
斜截式	斜率 k 和纵截距 b	$y=kx+b$
两点式	直线上两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ ($x_2\neq x_1,y_2\neq y_1$)
一般式	其他方程形式	$Ax+By+C=0$ (A,B 不同时为零)

表 2.2.3

关 系	结 论
平行且不重合	$l_1\parallel l_2\Leftrightarrow k_1=k_2(b_1\neq b_2)$
垂直	$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1=-\frac{1}{k_2}(k_1,k_2 \text{ 都存在})$

表 2.2.4

点 $P_0(x_0,y_0)$ 到直线 $l: Ax+By+C=0$ 的距离	$d=\frac{ Ax_0+By_0+C }{\sqrt{A^2+B^2}}$
点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 之间的距离	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

机械加工中经常用到圆、椭圆、双曲线和抛物线等二次曲线。下面将它们的定义、标准方程、图形、性质列表,见表 2.2.5。

表 2.2.5

名称	圆	椭圆	双曲线	抛物线
定义	平面内与一定点的距离为定长的动点轨迹	平面内与两定点的距离之和为定长的动点轨迹	平面内与两定点的距离之差的绝对值为定长的动点轨迹	平面内到一定点和到定直线距离相等的动点轨迹
标准方程	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ (焦点在 x 轴)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ (焦点在 x 轴)	$y^2 = 2px (p > 0)$ (焦点在 x 轴正半轴)
图形				
顶点		$A(\pm a, 0) B(0, \pm b)$	$A(\pm a, 0)$	$O(0, 0)$
焦点		$F(\pm c, 0) b^2 = a^2 - c^2$	$F(\pm c, 0) b^2 = c^2 - a^2$	$F(\frac{p}{2}, 0)$
准线		$x = \pm \frac{a^2}{c}$	$x = \pm \frac{a^2}{c}$	$x = -\frac{p}{2}$

在数控机床上加工椭圆，可将椭圆标准方程进行适当的转换，将椭圆方程的计算原点偏移到 (x_0, y_0) 位置，采用直线逼近（也称拟合）法，即在 z 方向上分段，并把 z 作为自变量， x 作为 z 的函数，计算出椭圆轨迹坐标，如图 2.2.1 所示。

椭圆标准方程在第一、二象限内转换为

$$x_1 = a \sqrt{1 - \frac{z_1^2}{b^2}}$$

椭圆标准方程在第三、四象限内转换为

$$x_1 = -a \sqrt{1 - \frac{z_1^2}{b^2}}$$

在数控机床上加工双曲线时，一般可以把工件坐标系原点偏置到双曲线的对称中心上，然后采用直线逼近（也称拟合）法，即在 Z 向分段，并把 z 作为自变量， x 作为 z 的函数，计算出双曲线轨迹坐标，如图 2.2.2 所示。

双曲线标准方程在第一、二象限内转换为

$$x_1 = a \sqrt{1 + \frac{z_1^2}{b^2}}$$

双曲线标准方程在第三、四象限内转换为

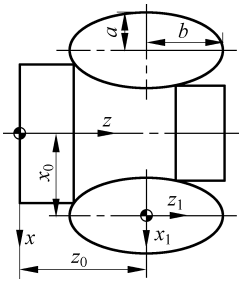


图 2.2.1

$$x_1 = -a \sqrt{1 + \frac{z_1^2}{b^2}}$$

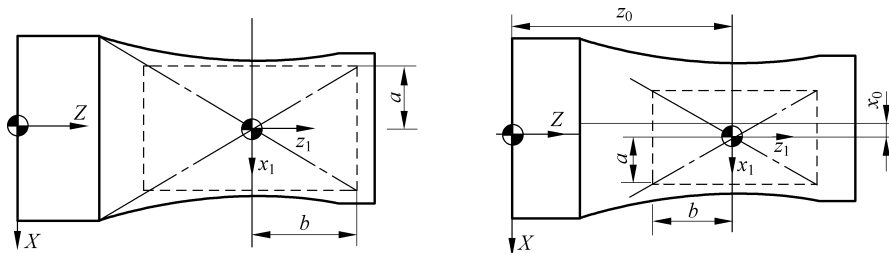


图 2.2.2

2. 应用实例

在此,通过几个实例来介绍平面解析几何知识的应用。

【例 2.2.1】 在数控机床上加工一零件,已知编程用轮廓尺寸如图 2.2.3 所示,试求基点 B 的坐标。

解: 按图 2.2.4 所示建立直角坐标系,所以

$$k_{l_1} = \tan(180^\circ - 20^\circ) = \tan 160^\circ = -0.364$$

因为 l_1 过原点 $O(0,0)$,由直线的点斜式方程得 l_1 方程为

$$y = -0.364x$$

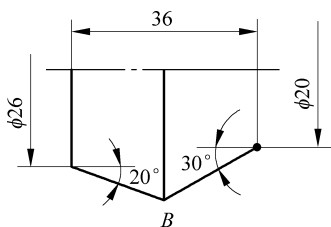


图 2.2.3

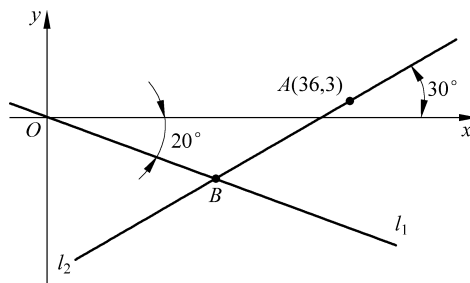


图 2.2.4

同理得, l_2 方程为

$$y - 3 = 0.577(x - 36)$$

解方程组

$$\begin{cases} y = -0.364x \\ y - 3 = 0.577(x - 36) \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x = 18.89 \\ y = -6.88 \end{cases}$$

即基点 B 的坐标为 $(18.89, -6.88)$ 。

【例 2.2.2】某零件如图 2.2.5 所示, $\widehat{AB}$ 、 $\widehat{CD}$ 、 $\widehat{EF}$ 是圆弧, BC 、 DE 是直线。加工时要确定 $R8$ 圆弧的圆心位置, 试求之。

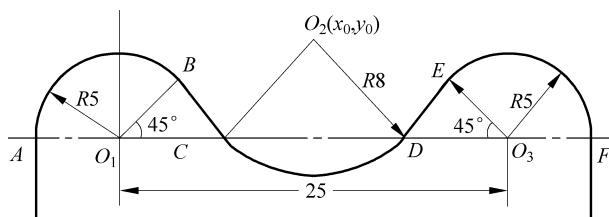


图 2.2.5

解: 以图示尺寸为基准, 选取 $R5$ 圆弧的圆心为坐标系原点, 建立坐标系如图 2.2.6 所示。

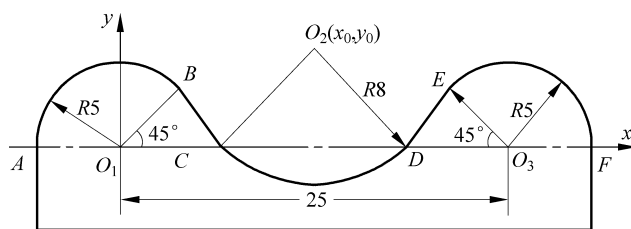


图 2.2.6

因为工件具有对称性, O_2 一定在线段 O_1O_3 的垂直平分线上, 可得 O_2 的横坐标

$$x_0 = \frac{25}{2} = 12.5$$

从图示尺寸可以确定 B 点的坐标

$$x_B = 5\cos 45^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$y_B = 5\sin 45^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

直线 BC 的斜率为

$$k_{BC} = \tan 135^\circ = -1$$

由点斜式得, 直线 BC 的方程为

$$y - \frac{5\sqrt{2}}{2} = -1 \left(x - \frac{5\sqrt{2}}{2} \right)$$

即

$$x + y - 5\sqrt{2} = 0$$

由于点 O_2 到直线 BC 的距离 $O_2C=8$, 所以由点到直线的距离公式得

$$8 = \frac{|12.5 + y_0 - 5\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \quad (y_0 > 0)$$

所以

$$y_0 \approx 5.88$$

即 $R8$ 圆弧所在圆的圆心坐标为 $(12.5, 5.88)$ 。

【例 2.2.3】 在数控机床上加工一零件, 已知编程用轮廓尺寸如图 2.2.7 所示, 试求其基点 B, C 及圆心 D 的坐标。

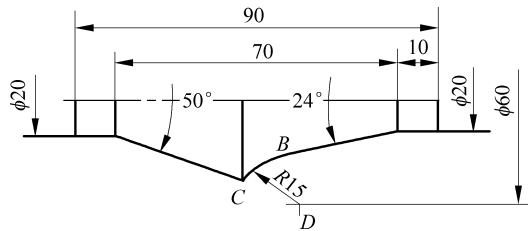


图 2.2.7

解: 建立如图 2.2.8 所示直角坐标系。

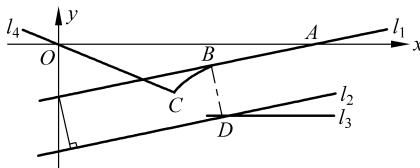


图 2.2.8

(1) 先求圆心 D 的坐标

直线 l_1 的倾角为

$$\alpha_{l_1} = \frac{24^\circ}{2} = 12^\circ$$

则

$$k_{l_1} = \tan 12^\circ = 0.213$$

又由于 $OA=70$, 所以直线 l_1 在 y 轴上的截距为

$$b_{l_1} = -70 \tan 12^\circ = -14.879$$

所以直线 l_1 的斜截式方程为

$$y = 0.213x - 14.879$$

因为直线 l_4 过 $O(0,0)$, 而且

$$\alpha_{l_4} = 180^\circ - \frac{50^\circ}{2} = 155^\circ$$

$$\tan \alpha_{l_4} = \tan 155^\circ = -0.466$$

所以, 直线 l_4 的方程为

$$y = -0.466x$$

直线 l_2 在 y 轴上的截距

$$b_{l_2} = -\left(\frac{15}{\cos 12^\circ} + 14.879\right) = -30.214$$

而 $k_{l_1} = k_{l_2} (l_2 // l_1)$

所以直线 l_2 的斜截式方程为

$$y = 0.213x - 30.214$$

因为直线 l_3 的方程是

$$y = -20$$

所以解方程组

$$\begin{cases} y = 0.213x - 30.214 \\ y = -20 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x = 47.95 \\ y = -20 \end{cases}$$

即圆心 D 的坐标是 $(47.95, -20)$ 。

(2) 再求基点 B, C 的坐标

以 D 为圆心的圆的方程为

$$(x - 47.95)^2 + (y + 20)^2 = 15^2$$

解方程组

$$\begin{cases} y = -0.466x \\ (x - 47.95)^2 + (y + 20)^2 = 15^2 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x = 33.59 \\ y = -15.66 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 60.51 \\ y = -28.20 \end{cases} \quad (\text{舍})$$

即点 C 的坐标为 $(33.59, -15.66)$ 。

又因为直线 BD 的方程为