

第 5 章

有噪信道编码



◆ 内容提要

本章介绍了信道编码和译码的基本概念，介绍了两种常用的译码准则：最大后验概率译码准则和极大似然译码准则，还介绍了在这两种译码准则下错误概率的计算方法。

本章以较大的篇幅介绍了信道编码定理及信道编码逆定理。Shannon 1948 年提出并证明了信道编码的正、反定理，揭示了信道的输入在信道传输率小于信道容量 ($R < C$) 的条件下，可以以任意小的错误概率抵达信宿。同时又指出在 $R > C$ 的条件下，则无论如何也不可能实现无差错传输。后来许多研究者给出了许多更严格的证明，并给出了各种信道及编码条件下的错误概率的上、下限，这些都为设计合理的通信系统提供了理论依据。

在证明信道编码逆定理的过程中，用到了费诺 (Fano) 不等式，Fano 不等式本身就是信息论中的一个重要不等式。

◆ 知识要点

译码规则，错误概率，信道编码定理，信道编码逆定理，费诺不等式。

◆ 教学建议

对本章介绍的两种译码准则：最大后验概率译码准则和极大似然译码准则，讲述在什么前提及在什么场合应用才是最佳译码准则。鉴于信道编码定理及其逆定理的重要性，文中给予了证明，若课时不够可略去不讲，但应要求学生弄懂定理的物理意义。建议学时数为 5 学时。

5.1 信道编码的基本概念

在有噪信道中传输信息,我们总是希望信息传输快捷可靠,但由于信道的信息传输率受到信道容量的限制,不可能无穷大。另外,由于信息在信道中传输时不可避免地会拾取各种噪声干扰,所以传输误差不可能为零。我们要做的是通过各种编码方法尽可能地提高信息传输率,并将传输误差控制在可接受的范围内。

在第 3 章中讨论了对信源的编码,信源编码以提高传输效率为主要考虑因素,编码时应尽量压缩信源冗余度。信道编码以提高传输可靠性为主要考虑因素,本章讨论信道编码的一些基本概念及信道编码定理。

信道有多种形式,如电视、广播、微波、电话、计算机局域网和宽带网等,不失一般性,可将信道用图 5-1 所示的模型表示。

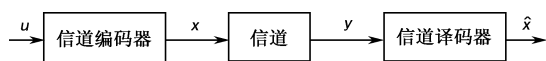


图 5-1 信道模型

衡量信道传输快慢的指标是信息传输率,而衡量信息传输可靠性的指标是平均误码率,误码率与信道的统计特性(用信道转移概率表示)有关,改变信道的统计特性成本太高,所以可事先对信源编码器输出的符号序列按照某种规则进行编码,一般的方法是给信源序列加上一定的冗余度,这种编码谓之信道编码,编好的代码称为码字,将码字送入信道传输。而在信道输出端,信道译码器根据编码规则对信道输出符号进行估值,尽量使这种估值接近输入码字。

从上面的叙述可看出,选择合适的编码规则是信道编码的关键,这部分内容将在 5.2 节中讨论。

上面的过程可根据图 5-1 表述如下。

信源输出序列 u , 经信道编码器编成码字 $x = f(u)$ 并输入信道, 由于干扰, 信道输出 y , 信道译码器对 y 估值得 $\hat{x} = F(y)$, 译码规则 F 是对编码规则 f 的一种逆变换。

作为一般性介绍, 下面举例介绍几种简便的编码方法。

【例 5.1】 给定二进制对称信道, 如图 1-5 所示, 信道固有误码率为 $p(p < 0.5)$ 。

编码规则: 为提高可靠性, 每个信道符号重复三次发送。

译码规则: 择多译码, 即信宿方收到的三个符号中有两个或三个为 1, 就将此次接收符号判决为 1; 若三个符号中有两个或三个为 0, 就将此次接收符号判决为 0。

图 5-2 所示为重复编码传输示意图, 计算错误概率 p_e 。

原序列	1	0	1	1
发送	111	000	111	111
接收	111	001	001	000
判决输出	1	0	0	0

图 5-2 重复编码传输示意图

信源输出序列为 $\mathbf{u} = \{1, 0, 1, 1\}$ ，将信源符号重复三次发送，即向信道输入序列 $\mathbf{x} = \{111, 000, 111, 111\}$ ，这一过程称为信道编码。在信道传输过程中，由于 p 的存在，传输出错，信道输出为 $\mathbf{y} = \{111, 001, 001, 000\}$ 。

第一种情况：111→111 无错

第二种情况：000→001 错 1 位

第三种情况：111→001 错 2 位

第四种情况：111→000 错 3 位

根据译码规则，估值输出 $\hat{\mathbf{y}} = \{1, 0, 0, 0\}$ ，这一过程称为信道译码。与原发送序列相比较，可见，如三位里面错两位或三位里面错三位，则属于不可纠错误。

下面计算错误概率：假设信道离散无记忆，即 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^3 p(y_i|x_i)$ ，错误概率 p_e 为

$$\binom{2}{3} p^2 (1-p) + \binom{3}{3} p^3 = 3p^2 - 2p^3 < p \quad (5-1)$$

式中， $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ 表示组合，即 m 个符号中每次取 n 个。

可见，重复编码的结果使错误概率下降。

如果提高重复次数，能否进一步使错误概率下降呢，见下面的例子。

【例 5.2】 离散无记忆二进制对称信道，信道固有误码率为 $p(p < 0.5)$ ，为提高可靠性，每个信道符号重复 $2n+1$ 次发送，择多译码，即在 $2n+1$ 个接收码符号中，若有 $n+1$ 个以上 1 就将此次接收估值为 1，若有 $n+1$ 个以上 0 就将此次接收估值为 0，计算错误概率 p_e 。

显然，在 $2n+1$ 个接收码符号中，错 $n+1$ 个及其以上属于不可纠错误。

错误概率为

$$\begin{aligned} p_e &= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} p^k (1-p)^{2n+1-k} \\ &< n \binom{n+1}{2n+1} p^{n+1} (1-p)^{2n+1-(n+1)} \\ &= n \binom{n+1}{2n+1} p^{n+1} (1-p)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

从上述表达式可以看出，随着 $n \rightarrow \infty$ ，将有 $p_e \rightarrow 0$ 。

可以根据 $p_e = n \binom{n+1}{2n+1} p^{n+1} (1-p)^n$ ，由给定的错误概率 p_e ，选择重复发送次数 n 。

【例 5.3】 逆重复码

离散无记忆二进制对称信道，固有误码率为 $p(p < 0.5)$ ，信源输出序列为三位二进制数字。为提高传输效率，将信源输出的三位二进制序列经编码后，仅向信道发送一位。

编码规则：预先将信源输出序列进行择多编码，即若信源输出的三位符号中有两位或三位是 1，就将此信源序列编码为 1，若三位符号中有两位或三位是 0，就将此信源序列编码为 0。

译码规则：将接收到的一位符号重复三次译出，即若接收到 1 就译码为 111，若接收到 0 就译码为 000。

图 5-3 所示为逆重复编码传输示意图，计算错误概率 p_e 。分两步进行：

原序列	110	001	111	101
发送	1	0	1	1
接收	1	0	0	0
判决输出	111	000	000	000

图 5-3 逆重复编码传输示意图

(1) 先设 $p = 0$, 计算这种编码方法带来的固有误比特率 p_1 。

信道输入符号集 $X = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$;

判决输出符号集 $Y = \{000, 111\}$ 。

译码规则 $\begin{cases} F(000, 001, 010, 100) = 000 \\ F(011, 101, 110, 111) = 111 \end{cases}$

因为后验概率 $\begin{cases} \phi(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \phi(000|000) = \frac{1}{4} \\ \phi(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \phi(111|111) = \frac{1}{4} \end{cases}$

则错误概率 $\begin{cases} p(e|\mathbf{y}) = p(e|000) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ p(e|\mathbf{y}) = p(e|111) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{cases}$

假设 8 组输入序列是等概发送的, 由于信道的对称性, 两个估值序列也是等概分布的, 则每个序列的平均错误概率为 $0.5p(e|000) + 0.5p(e|111) = \frac{3}{4}$, 误比特率 $p_1 = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ 。

(2) 再设 $p \neq 0$, 计算由于信道噪声引起的误比特率 p_2 。

因为每个序列有三位二进制数字, 但只发送一位, 这一位的出错概率为 p , 故序列差错概率为 p , 误比特率 $p_2 = \frac{1}{3}p$ 。

(3) 总误比特率

$$p_e = p_1 + p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}p$$

【例 5.4】 奇偶校验码

在信息序列后面加上一位校验位, 使之模 2 和等于 1, 这样的编码称为奇校验码; 若使模 2 和等于 0, 这样的编码就称为偶校验码, 即每个码矢中 1 的个数固定为奇数或偶数。

这两种码都能检验出奇数位错误, 但无法判断错的是码字中的哪一位, 故没有纠错能力。这种编码方式可应用在有反馈信道的场合, 一旦发现错, 便利用反馈信道要求重发。

在上面这 4 个例子中, 例 5.3 是为了提高传输效率, 例 5.1、例 5.2 和例 5.4 都是为了提高传输质量。可见, 编码问题主要要考虑的是如何提高传输效率和传输质量, 信道纠错编码以提高传输质量为主。

5.2 译码规则及错误概率

信道总不可避免地会掺杂噪声,所以信息在信道传输过程中,差错是不可避免的。错误概率与信道统计特性有关,选择合适的译码规则可以弥补信道的不足。

在例 2.17 中提到过,给定信道 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}$, 当 $\varepsilon = 1$ 时,信道转移概率矩阵为

$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 对应的信道如图 5-4 所示,这是强噪信道,如果按常规,收到 0 判决为 0,收到 1

判决为 1,显然完全错了。如果译码规则定为收到 0 判决为 1,收到 1 判决为 0,则反而正确。可见译码规则对传输系统错误概率的影响是很大的。

下面介绍两种典型的译码规则。

1. 最大后验概率译码准则

设信源共有 M 个消息,假设信源编码器已用 M 个码矢 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \dots, \mathbf{x}_M$ 对它进行了最佳编码。

编码后发送码矢 $\mathbf{x}_k$, 其发送概率为 $q(\mathbf{x}_k)$, 通过信道转移概率为 $p(\mathbf{y} | \mathbf{x}_k)$ 的信道传输,接收到矢量 $\mathbf{y}$, 信道译码器输出 $\hat{\mathbf{x}}_k$, $\hat{\mathbf{x}}_k$ 是信道译码器根据事先定出的译码规则,对接收矢量 $\mathbf{y}$ 的一个估值,通信过程可用图 5-5 所示框图表示。

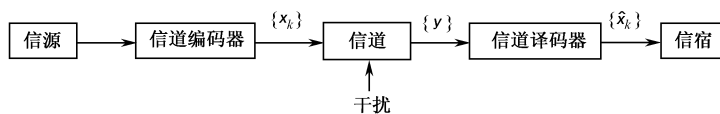


图 5-5 通信过程框图

显然,当估值 $\hat{\mathbf{x}}_k \neq \mathbf{x}_k$ 时,就产生了误码,用 $\phi(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ 表示后验概率,则收到 $\mathbf{y}$ 估错的概率为

$$p_e(\mathbf{y}) = \phi(\hat{\mathbf{x}}_k \neq \mathbf{x}_k | \mathbf{y}) = \sum_{i \neq k} \phi(\mathbf{x}_i | \mathbf{y}) = 1 - \phi(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}) \quad (5-2)$$

通信总希望错误概率最小,由式(5-2)可看出错误概率 $p_e(\mathbf{x}_k)$ 最小等同于后验概率 $\phi(\mathbf{x}_k | \mathbf{y})$ 最大,这就是**最大后验概率译码准则**。

根据概率关系式

$$\phi(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{x}\mathbf{y})}{\omega(\mathbf{y})} \quad (5-3)$$

由于最大后验概率译码准则的意思是收到矢量 $\mathbf{y}$ 后,在所有的 $\mathbf{x}_m (m=1, 2, \dots, M)$ 中,选一个后验概率 $\phi(\mathbf{x}_m | \mathbf{y})$ 最大的 $\mathbf{x}_m$ 值,作为对 $\mathbf{y}$ 的估值 $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k$,那么对这 M 个 $\mathbf{x}_m$ 值来说,概率 $\omega(\mathbf{y})$ 是同一个值,所以根据式(5-3),后验概率 $\phi(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ 最大就意味着全概率 $p(\mathbf{x}\mathbf{y})$ 最大,因此最大后验概率译码准则也称为**最大联合概率译码准则**。

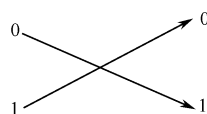


图 5-4 强噪信道

【例 5.5】 信源分布 $\begin{bmatrix} X \\ q(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$, 信道转移概率矩阵 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$,

信道输出符号 $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, 按最大后验概率准则译码。

(1) 根据 $p(xy) = p(y|x)q(x)$ 算出全概率, 用矩阵表示 $[p(xy)] = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.15 & 0.10 \\ 0.01 & 0.07 & 0.02 \\ 0.12 & 0.12 & 0.16 \end{bmatrix}$;

(2) 根据 $\omega(y_j) = \sum_i p(x_i y_j)$, 算出 $[\omega(y)] = [0.38 \quad 0.34 \quad 0.28]$;

(3) 再由 $\phi(x|y) = \frac{p(xy)}{\omega(y)}$ 算出后验概率, 用矩阵表示

$$[\phi(x|y)] = \begin{bmatrix} 0.25/0.38 & 0.15/0.34 & 0.10/0.28 \\ 0.01/0.38 & 0.07/0.34 & 0.02/0.28 \\ 0.12/0.38 & 0.12/0.34 & 0.16/0.28 \end{bmatrix}$$

(4) 按最大后验概率准则译码, 在后验概率矩阵中, 每列选一最大值 (矩阵中带下划线的值), 译为 $\begin{cases} y_1 \rightarrow x_1 \\ y_2 \rightarrow x_1 \\ y_3 \rightarrow x_3 \end{cases}$;

(5) 若按最大联合概率译码准则译码, 则在全概率矩阵 $[p(xy)]$ 中每列选一最大值 (矩阵中带下划线的值), 也可译出 $\begin{cases} y_1 \rightarrow x_1 \\ y_2 \rightarrow x_1 \\ y_3 \rightarrow x_3 \end{cases}$ 。

可见这两种方法得到同一结果, 因为要得到后验概率, 计算步骤更多, 所以可直接应用最大联合概率译码准则译码。

2. 极大似然译码准则

前面介绍的最大后验概率译码准则等同于最小传输错误概率准则, 所以从错误概率最小这一角度来说, 这一译码准则是最好的。但在实际应用中, 经常要用同一信道来传输各种信源的消息, 一般总是知道信道的统计特性 $p(y|x)$, 而不知道信源分布 $q(x)$, 因而全概率 $p(x,y) = p(y|x)q(x)$ 无从求得。在这种情况下, 我们可按最大信道转移概率来确定估值 $\hat{x}$, 即在收到矢量 y 后, 在所有的 $x_m (m=1, 2, \dots, M)$ 中, 选一个转移概率 $p(y|x_m)$ 最大的 x_m 值, 作为对 y 的估值 $\hat{x}_k = x_k$, 这一译码规则称为极大似然译码规则。

可以证明, 在信道输入等概条件下, 极大似然译码规则也是最佳的, 因为若下式成立

$$p(y|x_k) > p(y|x_m) \quad m=1, 2, \dots, M$$

则信道输入等概时, 有 $q(x_k) = q(x_m)$, 代入上式得

$$p(y|x_k) q(x_k) > p(y|x_m) q(x_m)$$

有

$$p(x_k, y) > p(x_m, y)$$

说明全概率最大, 对应最大联合概率译码准则, 因此也是最佳的。

3. 平均错误概率

式(5-2)是信道输出 $\mathbf{y}$ 而信道译码器估错的概率, 对式(5-2)两边关于 $\mathbf{y}$ 求统计平均值, 得

$$\begin{aligned}
 p_e &= \sum_{j=1}^M \omega(\mathbf{y}_j) p_e(\mathbf{y}_j) \\
 &= \sum_{j=1}^M \omega(\mathbf{y}_j) [1 - \phi(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_j)] \\
 &= 1 - \sum_{j=1}^M \omega(\mathbf{y}_j) \phi(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_j) \\
 &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M p(\mathbf{x}_i \mathbf{y}_j) - \sum_{j=1}^M p(\mathbf{x}_k \mathbf{y}_j) \\
 &= \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{y}} p(\mathbf{x} \mathbf{y}) - \sum_{\mathbf{y}} p(\mathbf{x}_k \mathbf{y}) \\
 &= \sum_{\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_k} \sum_{\mathbf{y}} p(\mathbf{x} \mathbf{y}) \\
 p_e &= \sum_{\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_k} \sum_{\mathbf{y}} p(\mathbf{x} \mathbf{y}) \tag{5-4}
 \end{aligned}$$

式(5-4)表示平均误码率等于对全概率 $p(\mathbf{x} \mathbf{y})$ 求和, $\mathbf{y}$ 对所有取值求和, $\mathbf{x}$ 对 $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \dots, \mathbf{x}_M\}$ 中除 $\mathbf{x}_k$ 以外的所有项求和, 而 $\mathbf{x}_k$ 正是根据最大后验概率译码准则被选为 $\mathbf{y}$ 的估值 $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k$ 的那一项。

【例 5.6】 计算例 5.5 的平均错误概率, 若信源等概分布, 则对其译码, 并求平均错误概率。

(1) 求平均错误概率 p_e

根据式(5-4)得

$$p_e = \sum_{\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_k} \sum_{\mathbf{y}} p(\mathbf{x} \mathbf{y}) = 0.01 + 0.12 + 0.07 + 0.12 + 0.1 + 0.02 = 0.44$$

(2) 当信源等概分布, 按极大似然函数译码准则译码, 例 5.5 已给出信道转移概率矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underline{0.5} & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & \underline{0.7} & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & \underline{0.4} \end{bmatrix}, \text{ 在矩阵的每列中选一最大值 (矩阵中带下划线的值), 译码为 } \begin{cases} y_1 \rightarrow x_1 \\ y_2 \rightarrow x_2 \\ y_3 \rightarrow x_3 \end{cases}$$

平均错误概率为
$$p_e = \frac{1}{3}(0.1 + 0.3 + 0.3 + 0.3 + 0.2 + 0.2) = 0.467$$

【例 5.7】 仍考虑例 5.1 给出的重复码, 信源等概分布, 采用极大似然译码规则进行译码, 并计算平均错误概率 p_e 。

根据编码规则 $\mathbf{x} = f(\mathbf{u})$, 重复 3 次编码, 即 $\begin{cases} \mathbf{x}_1 = f(0) = 000 \\ \mathbf{x}_2 = f(1) = 111 \end{cases}$ 。

原信道是固有误码率为 $p(p < 0.5)$ 的二进制对称信道, 其信道转移概率矩阵为 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$, 经编码后得到的码字是码长为 3 的码矢 $\mathbf{x} = \{000, 111\}$, 送入 3 次扩展信道

传输, 因信道离散无记忆, 故扩展信道的信道转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}^{(3)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 000 \\ 111 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccc} \underline{(1-p)^3} & \underline{(1-p)^2 p} & \underline{(1-p)^2 p} & (1-p)p^2 & \underline{(1-p)^2 p} & (1-p)p^2 & (1-p)p^2 & p^3 \\ p^3 & (1-p)p^2 & (1-p)p^2 & \underline{(1-p)^2 p} & (1-p)p^2 & \underline{(1-p)^2 p} & \underline{(1-p)^2 p} & \underline{(1-p)^3} \end{array} \right] \end{matrix}$$

按极大似然译码准则译码, 注意到 $p < 0.5$, 在矩阵的每一列中选一最大值 (矩阵中带下划线的值), 译码为

$$\begin{aligned} F(000) &= 000, & F(001) &= 000, & F(010) &= 000, & F(100) &= 000 \\ F(011) &= 111, & F(101) &= 111, & F(110) &= 111, & F(111) &= 111 \end{aligned}$$

计算平均错误概率 p_e , 由于信源等概分布, 有 $q(x_1) = q(x_2) = \frac{1}{2}$ 。

$$\begin{aligned} \text{根据式 (5-4) 得} \quad p_e &= \sum_{x=x_k} \sum_y p(\mathbf{xy}) = \sum_{x=x_k} \sum_y p(y|x) q(x) \\ &= \frac{1}{2} \times 2p^3 + \frac{1}{2} \times 6(1-p)p^2 = 3p^2 - 2p^3 \end{aligned}$$

与式 (5-1) 的计算结果一致。

5.3 信道编码定理

信号在传输过程中不可避免地会拾取干扰, 以致产生传输错误, 选择合适的编译码规则可以使错误概率尽可能小, 信道编码定理 (香农第二定理) 指出: 信道容量 C 是满足错误概率 $p_e \rightarrow 0$ 时, 信道所能容纳的信息传输率的极限值。

定理 5.1 对于任何离散无记忆信道 DMC, 存在信息传输率为 R , 长为 n 的码, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 平均差错概率 $p_e < \exp\{-nE(R)\} \rightarrow 0$, 式中 $E(R)$ 为可靠性函数, $E(R)$ 在 $0 < R < C$ 的范围内为正。

定理 5.1 说明: 信道容量 C 是保证无差错传输时, 信息传输率 R 的极限值, 对于固定信道, C 值是一定的, 它是衡量信道质量的一个重要物理量。

上述定理也称**有噪信道编码定理**, 即 Shannon 第二定理。

下面进行证明。

1. 随机编码方法

随机编码方法是 Shannon 引入的一个数学方法, 它是信息论的基本技巧, 通过这一方法证得了有噪信道编码定理——Shannon 第二定理。

信道输入字符集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, 共 k 个字符。

选用长为 n 的定长码, 共可构成 k^n 个矢量, 设有 M 个消息待传输 ($M < k^n$), 每次随机地从 k^n 个矢量中抽出 M 个矢量构成一个码集 C (允许重复取), 有

$$C = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \dots, \mathbf{x}_M\}$$

共可构成 k^{nM} 个这样的码集。

由随机编码的构造方法知道, 得到任何一个码字的概率相同, 且相互独立。

在 5.2 节中, 导出了按最大后验概率译码准则译码时的平均错误概率 p_e 的计算式 (5-4), 但当信道中传输的码字的码长 n 很大时, p_e 的计算变得很困难, 当 $n > 100$ 时, 用计算机精确地计算出 p_e 也很困难, 所以转为寻找 p_e 的下界和上界, 用它们来对 p_e 进行估值。

但下界的估算更为复杂, 这里只讨论上界, 给出常用的 Gallager 上界。

2. Gallager 上界

因为上述按随机编码方法构成的码集是等概分布的, 按照极大释然译码准则译码, 在发送码矢 $\mathbf{x}_k$ 时, 要得到正确译码须满足

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_k) > p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) \quad \forall m \neq k, \quad \text{即} \quad \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_k)}{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)} > 1$$

$$\text{则} \quad \left[\frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_k)}{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)} \right]^\lambda > 1 \quad \lambda > 0 \quad (5-5)$$

定义示性函数

$$I_k(\mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_k) > p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) \\ 1 & p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_k) \leq p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) \end{cases} \quad m = 1, 2, \dots, M$$

则发送码矢 $\mathbf{x}_k$ 判错的概率为

$$p_e(\mathbf{x}_k) = \sum_{\mathbf{y}} I_k(\mathbf{y}) p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_k) \quad (5-6)$$

根据式 (5-5), 当 $0 \leq \lambda, \rho \leq 1$ 时, 式 (5-7) 成立

$$\left\{ \sum_{m \neq k} \left[\frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)}{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_k)} \right]^\lambda \right\}^\rho \geq \begin{cases} 0 & \text{当 } p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_k) > p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) \\ 1 & \text{当 } p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_k) \leq p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) \end{cases} \quad (5-7)$$

用示性函数 $I_k(\mathbf{y})$ 表示式 (5-7), 即

$$I_k(\mathbf{y}) \leq \left\{ \sum_{m \neq k} \left[\frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)}{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_k)} \right]^\lambda \right\}^\rho \quad (5-8)$$

将式 (5-8) 代入式 (5-6), 得

$$p_e(\mathbf{x}_k) \leq \sum_{\mathbf{y}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_k) \left\{ \sum_{m \neq k} \left[\frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)}{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_k)} \right]^\lambda \right\}^\rho$$

式中, $0 \leq \lambda, \rho \leq 1$, 因为 λ, ρ 都是任意数, 可取 $\lambda = \frac{1}{1+\rho}$, 则有

$$p_e(\mathbf{x}_k) \leq \sum_{\mathbf{y}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_k)^{\frac{1}{1+\rho}} \left\{ \sum_{m \neq k} [p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)]^{\frac{1}{1+\rho}} \right\}^\rho \quad (5-9)$$

式 (5-9) 称为 Gallager 上界。

3. 随机编码错误概率上界

Gallager 限仅给出发送码矢 $\mathbf{x}_k$ 时的错误概率上界, 还要对全部码失求平均, 下面对上述的随机编码集合求平均。

对于随机编码, 各码字等概且独立, 有 $q(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \dots, \mathbf{x}_M) = \prod_{m=1}^M q(\mathbf{x}_m)$, 对式 (5-9) 求统计平均值, 得平均错误概率上界

$$\begin{aligned} p_e &= \sum_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M} q(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \dots, \mathbf{x}_M) p_e(\mathbf{x}_k) \\ &\leq \sum_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M} q(\mathbf{x}_1) q(\mathbf{x}_2) \cdots q(\mathbf{x}_M) \sum_y p(y|\mathbf{x}_k)^{\frac{1}{1+\rho}} \left\{ \sum_{m \neq k} [p(y|\mathbf{x}_m)]^{\frac{1}{1+\rho}} \right\}^\rho \\ &= \sum_y \sum_{\mathbf{x}_k} q(\mathbf{x}_k) p(y|\mathbf{x}_k)^{\frac{1}{1+\rho}} \sum_{\mathbf{x}_m} q(\mathbf{x}_m) \left[\sum_{m \neq k} p(y|\mathbf{x}_m)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^\rho \end{aligned} \quad (5-10)$$

先看后面一项 $\sum_{\mathbf{x}_m} q(\mathbf{x}_m) \left[\sum_{m \neq k} p(y|\mathbf{x}_m)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^\rho$, 因为 $0 \leq \rho \leq 1$, 而 x^ρ 是 x 的 $\cap$ 型凸函数, 由 $\cap$ 型凸函数的定义知, 函数均值小于等于均值函数, 即有

$$\sum_{\mathbf{x}_m} q(\mathbf{x}_m) \left[\sum_{m \neq k} p(y|\mathbf{x}_m)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^\rho \leq \left[\sum_{\mathbf{x}_m} q(\mathbf{x}_m) \sum_{m \neq k} p(y|\mathbf{x}_m)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^\rho \quad (5-11)$$

因为 $\forall \mathbf{x}_m (m = 1, 2, \dots, M)$ 都通过同一信道传输, 故 $p(y|\mathbf{x}_m)$ 值相同, 记为 $p(y|\mathbf{x})$, 代入式 (5-11) 得

$$\sum_{\mathbf{x}_m} q(\mathbf{x}_m) \left[\sum_{m \neq k} p(y|\mathbf{x}_m)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^\rho \leq \left[(M-1) \sum_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}) p(y|\mathbf{x})^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^\rho \quad (5-12)$$

将式 (5-12) 代回式 (5-10), 得

$$\begin{aligned} p_e &\leq \sum_y \sum_{\mathbf{x}_k} q(\mathbf{x}_k) p(y|\mathbf{x}_k)^{\frac{1}{1+\rho}} \left[(M-1) \sum_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}) p(y|\mathbf{x})^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^\rho \\ &= (M-1)^\rho \sum_y \left[\sum_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}) p(y|\mathbf{x})^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{\rho+1} \end{aligned}$$

这是平均错误概率的一个上界, 在这个上界的推导过程中, 并没有强调离散无记忆信道, 因此它对有记忆的离散输入、输出及连续输出信道都适用, 只不过在连续情况下, $p(y|\mathbf{x})$ 表示概率密度。

4. 离散无记忆信道 DMC 的错误概率上界

对于 n 维离散无记忆信道 DMC, 有 $p(y|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n p(y_i|x_i)$, 对于随机编码 $q(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n q(x_i)$ (信源也离散无记忆), 将这两个关系式代入式 (5-12), 并记 DMC 的平均错误概率为 $\overline{p_e}$, 有

$$\begin{aligned} \overline{p_e} &\leq (M-1)^\rho \sum_{y_1} \cdots \sum_{y_N} \left[\sum_{x_1} \cdots \sum_{x_N} q(x_1) p(y_1|x_1)^{\frac{1}{1+\rho}} \cdots q(x_N) p(y_N|x_N)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \\ &= (M-1)^\rho \prod_{i=1}^n \sum_{y_i} \left[\sum_{x_i} q(x_i) p(y_i|x_i)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \end{aligned} \quad (5-13)$$

因为序列 $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_b, \dots, x_n$ 中的 $\forall x_i$, 都取自同一符号集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, 故分布 $q(x_i)$ 相同, $\forall x_i$, 又都通过同一信道传输, 故 $p(y_i|x_i)$ 也相同, 记

$$\sum_{y_i} \left[\sum_{x_i} q(x_i) p(y_i|x_i)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} = \sum_y \left[\sum_x q(x) p(y|x)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \quad (5-14)$$

将式 (5-14) 代入式 (5-13), 得

$$\begin{aligned} \overline{p_e} &\leq (M-1)^\rho \left\{ \sum_y \left[\sum_x q(x) p(y|x)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \right\}^n \\ &< M^\rho \left\{ \sum_y \left[\sum_x q(x) p(y|x)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \right\}^n \end{aligned} \quad (5-15)$$

5. 可靠性函数 $E(R)$

信息传输率 $R = \frac{\ln M}{n} \Rightarrow M = e^{Rn}$, 则式 (5-15) 可写为

$$\overline{p_e} < e^{Rn\rho} e^{\ln \left\{ \sum_y \left[\sum_x q(x) p(y|x)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} \right\}^n} \quad (5-16)$$

记

$$-\ln \sum_y \left[\sum_x q(x) p(y|x)^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho} = E_0(\rho, q), \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

则式 (5-16) 可写成 $\overline{p_e} < \exp \{ -n [-\rho R + E_0(\rho, q)] \}$ (5-17)

为了使上界更紧致, 对式 (5-17) 右边求极小值, 即对指数 $-\rho R + E_0(\rho, q)$ 求极大值, 记这个极大值为

$$E(R) \triangleq \max_{0 \leq \rho \leq 1} \max_q [E_0(\rho, q) - \rho R]$$

则式 (5-17) 可写为 $\overline{p_e} < \exp \{ -n E(R) \}$

称 $E(R)$ 为可靠性函数, 也称随机编码指数, 它与信道转移概率 $p(y|x)$ 有关。

可以证明, 在 $0 \leq R \leq C$ 的范围内, $E(R)$ 是下降的、下凹的正值函数, 说明 $E(R)$ 有界, 这样, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} nE(R) \rightarrow \infty$ 时, 有 $\exp \{ -n E(R) \} \rightarrow 0$, 从而 $\overline{p_e} < \exp \{ -n E(R) \} \rightarrow 0$ 。

这就证明了信道编码定理。

证毕

可靠性函数 $E(R)$ 在信道编码中有重要意义, 它表示了在码长 n 一定的条件下, 最佳编码平均错误概率的一个上界, 同时也说明了 $\overline{p_e}$ 随 $n \rightarrow \infty$ 而趋于 0 的速率, 在规定了 $\overline{p_e}$ 值后, $E(R)$ 可帮助选择合适的码长 n 和信息传输率 R 。

5.4 费诺引理及信道编码逆定理

信道编码定理指出, 当信息传输率 $R < C$ 时, 一定存在着错误概率 $\overline{p_e} \rightarrow 0$ 的好码。本节介绍信道编码逆定理则指出, 若 $R > C$, 则无论采用什么方法, 都不能使 $\overline{p_e} \rightarrow 0$ 。

信道编码逆定理的证明要用到费诺 (Fano) 不等式, 它是信息论中一个著名的不等式, 下面予以介绍。

5.4.1 费诺不等式

设信道输入符号 X 和输出符号 Y 取自同一符号集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, 则传输过程中的错误概率 p_e 和信道疑义度 $H(X|Y)$ 之间满足下列关系式:

$$H(X|Y) \leq H_2(p_e) + p_e \log(k-1) \quad (5-18)$$

式 (5-18) 就是著名的 **Fano 不等式**。

证明: 设信道输入符号为 x_i , 输出符号为 y_j , 根据最大后验概率准则进行判决, 则发 x_i 收到 y_j 判对的概率为 $\phi(x_i|y_j)$, 判错的概率为

$$p(e|y_j) = 1 - \phi(x_j|y_j) = \sum_{i \neq j} \phi(x_i|y_j) \quad (5-19)$$

另外, 可算出条件熵

$$\begin{aligned} H(X|y_j) &= -\sum_i \phi(x_i|y_j) \log \phi(x_i|y_j) \\ &= -\phi(x_j|y_j) \log \phi(x_j|y_j) - \sum_{i \neq j} \phi(x_i|y_j) \log \phi(x_i|y_j) \end{aligned} \quad (5-20)$$

将式 (5-20) 分两项考虑。

第一项, 根据式 (5-19) 可得

$$-\phi(x_j|y_j) \log \phi(x_j|y_j) = -[1-p(e|y_j)] \log [1-p(e|y_j)] \quad (5-21)$$

第二项,

$$\begin{aligned} & -\sum_{i \neq j} \phi(x_i|y_j) \log \phi(x_i|y_j) \\ &= -\log p(e|y_j) \sum_{i \neq j} \phi(x_i|y_j) - p(e|y_j) \sum_{i \neq j} \left[\frac{\phi(x_i|y_j)}{p(e|y_j)} \log \frac{\phi(x_i|y_j)}{p(e|y_j)} \right] \\ & \leq p(e|y_j) \log p(e|y_j) + p(e|y_j) \log(k-1) \end{aligned} \quad (5-22)$$

式中, $\left[-\frac{\phi(x_i|y_j)}{p(e|y_j)} \log \frac{\phi(x_i|y_j)}{p(e|y_j)} \right]$ 是 $(k-1)$ 个事件的熵, 根据极大熵定理, 它不大于这 $(k-1)$ 个

事件等概率分布时的熵 $\log(k-1)$ 。

将式 (5-21) 和式 (5-22) 代回到式 (5-20), 得

$$\begin{aligned} H(X|y_j) &\leq -[1-p(e|y_j)] \log [1-p(e|y_j)] - p(e|y_j) \log p(e|y_j) + p(e|y_j) \log(k-1) \\ &= H_2[p(e|y_j)] + p(e|y_j) \log(k-1) \end{aligned} \quad (5-23)$$

设 Y 空间分布为 $\{\omega(y_j), j=1, 2, \dots, k\}$, 对式 (5-23) 两边关于 Y 空间求和, 得

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= \sum_j \omega(y_j) H(X|y_j) \\ &\leq \sum_j \omega(y_j) H_2[p(e|y_j)] + \sum_j \omega(y_j) p(e|y_j) \log(k-1) \\ &= H_2(p_e) + p_e \log(k-1) \end{aligned}$$

这就得到了 Fano 不等式 (5-18): $H(X|Y) \leq H_2(p_e) + p_e \log(k-1)$

(1) Fano 不等式的物理意义:

进行一次判决后, 关于 X 的疑义度可分成两项:

① 是否判对, 疑义度为 $H_2(p_e)$;

② 如果判决出错 (概率为 p_e), 错在 $k-1$ 个符号中的哪一个? 疑义度不会超过 $\log(k-1)$ 。

(2) 将 Fano 不等式推广到 L 维矢量的情况

设 $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_L, \mathbf{y} = y_1, \dots, y_L$, 皆为 L 维矢量, $\forall x_l, y_l \in A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, 记 p_e 为错误概率, 则

$$H(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) \leq L [H_2(p_e) + p_e \log(k-1)] \quad (5-24)$$

证明: 根据熵的链规则式 (2-44), 有

$$\begin{aligned} H(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) &= H(X_1|\mathbf{Y}) + H(X_2|\mathbf{Y}X_1) + \dots + H(X_L|\mathbf{Y}X_1^{L-1}) \\ &\leq H(X_1|Y_1) + H(X_2|Y_2) + \dots + H(X_L|Y_L) \quad (\text{条件熵} \leq \text{无条件熵}) \\ &= \sum_{l=1}^L H(X_l|Y_l) \leq \sum_{l=1}^L [H_2(p_e) + p_e \log(k-1)] \quad (\text{Fano 不等式}) \\ &= L [H_2(p_e) + p_e \log(k-1)] \quad (\forall x_l, y_l \text{ 都取自同一符号集}) \end{aligned}$$

证毕

5.4.2 信道编码逆定理

在讲述信道编码逆定理以前, 先介绍一个引理。

引理 5.1 设 $\mathbf{u} = u_1, \dots, u_L$ 为 L 维随机矢量, $\forall u_l$ 取自同一符号集 $\{U\}$, 则

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{H(\mathbf{U})}{L} = H(U) \quad (5-25)$$

式中, $H(\mathbf{U})$ 表示 L 维熵, $H(U)$ 表示一维熵。

$$\begin{aligned} H(\mathbf{U}) &= H(\mathbf{U}_1^{L-1}, U_L) = H(\mathbf{U}_1^{L-1}) + H(U_L|\mathbf{U}_1^{L-1}) \\ \frac{H(\mathbf{U})}{L} &= \frac{H(\mathbf{U}_1^{L-1})}{L} + \frac{H(U_L|\mathbf{U}_1^{L-1})}{L} \end{aligned} \quad (5-26)$$

另外, 根据熵的链规则, 有

$$\begin{aligned} H(\mathbf{U}) &= H(U_1) + H(U_2|U_1) + H(U_3|U_1U_2) + \dots + H(U_L|U_1U_2 \dots U_{L-1}) \\ &\geq H(U_1|U_1U_2 \dots U_{L-1}) + H(U_2|U_1U_2 \dots U_{L-1}) + \dots + H(U_L|U_1U_2 \dots U_{L-1}) \\ &= L H(U_L|\mathbf{U}_1^{L-1}) \quad (\text{因 } \forall u_l \text{ 取自同一符号集}) \end{aligned}$$

式中, $\mathbf{U}_1^{L-1} = U_1U_2 \dots U_{L-1}$ 。故

$$H(U_L|\mathbf{U}_1^{L-1}) \leq \frac{H(\mathbf{U})}{L} \quad (5-27)$$

将式 (5-27) 代入式 (5-26), 得

$$\frac{H(\mathbf{U})}{L} \leq \frac{H(\mathbf{U}_1^{L-1})}{L} + \frac{1}{L} \frac{H(\mathbf{U})}{L}$$

即

$$\frac{H(\mathbf{U})}{L} \leq \frac{H(\mathbf{U}_1^{L-1})}{L-1} \quad (5-28)$$

式 (5-28) 表示 $\left\{ \frac{H(\mathbf{U})}{L} \right\}$ 是 L 的单调降序列。而由熵的非负性, 说明 $\frac{H(\mathbf{U})}{L}$ 有下界, 其下界为 $H(U)$, 即

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{H(\mathbf{U})}{L} = H(U)$$

考虑图 5-6 所示的通信过程, $\mathbf{u}$ 为信源输出的 L 维序列, $\mathbf{x}$ 为经信道编码器编码后输出的 n 长码字, $\mathbf{y}$ 是 $\mathbf{x}$ 经 n 维有扰扩展信道传输后的输出, $\hat{\mathbf{u}}$ 是对 $\mathbf{y}$ 的估值。矢量 $\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{u}}$ 中的所有元素都取自同一符号集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 。

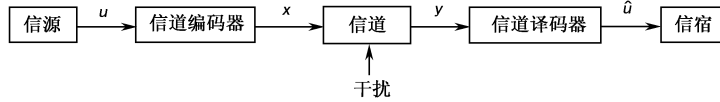


图 5-6 通信过程

根据数据处理定理: 不论经过何种数据处理, 信息量均减少。则由图 5-6 可见 $I(\mathbf{U}; \hat{\mathbf{U}}) \leq I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$, 对于离散无记忆信道, 根据定理 4.1 有 $C_n \leq nC$, 则

$$I(\mathbf{U}; \hat{\mathbf{U}}) \leq I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \leq C_n \leq nC \quad (5-29)$$

另外,

$$I(\mathbf{U}; \hat{\mathbf{U}}) = H(\mathbf{U}) - H(\mathbf{U} | \hat{\mathbf{U}}) \quad (5-30)$$

将 Fano 不等式的矢量式 (5-24) 及式 (5-29) 代入式 (5-30) 得

$$H(\mathbf{U}) - nC \leq L [H_2(p_e) + p_e \log(k-1)] \quad (5-31)$$

考虑到式 (5-25), 在 $L \rightarrow \infty$ 条件下, $H(\mathbf{U}) = L H(U)$, 代入到式 (5-31) 并整理得

$$H_2(p_e) + p_e \log(k-1) \geq H(U) - \frac{nC}{L} = \frac{n}{L} \left[\frac{L}{n} H(U) - C \right] = \frac{n}{L} [R_D - C]$$

即

$$H_2(p_e) + p_e \log(k-1) \geq \frac{n}{L} [R_D - C] \quad (5-32)$$

式中, $R_D = \frac{L}{n} H(U)$ 为信息传输率。

从式 (5-32) 可看出, 当 $R_D > C$ 时, 右边为大于零的数, 说明差错概率有确定下界, 不能以任何方式趋于零, 这就是下面的信道编码逆定理。

定理 5.2 信道编码逆定理 信道容量 C 是可靠通信系统信息传输率的上界, 当 $R > C$ 时, 不可能存在任何方法使差错概率任意小。

本章小结

码矢集合 $\mathbf{C} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M\}$, 码矢 $\mathbf{x}_k \in \mathbf{C}$ 通过信道转移概率为 $p(\mathbf{y} | \mathbf{x}_k)$ 的信道传输, 输出矢量 $\mathbf{y}$, 信道译码器估值为 $\hat{\mathbf{x}}_k = F(\mathbf{y})$, $\hat{\mathbf{x}}_k \in \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M\}$ 。

最大后验概率译码准则 $\phi(\hat{\mathbf{x}}_k | \mathbf{y}) > \phi(\mathbf{x}_m | \mathbf{y}) \begin{cases} k \neq m & m = [1, 2, \dots, M] \\ \mathbf{x}_m \in \{\mathbf{C}\} \end{cases}$

极大似然译码准则 $p(y|\hat{x}_k) > p(y|x_m) \begin{cases} k \neq m & m=[1,2,\dots,M] \\ x_m \in \{C\} \end{cases}$

平均译码错误概率 $p_e = \sum_{x \in X_k} \sum_y p(xy)$

信道编码定理

对于任何离散无记忆信道 DMC, 存在信息传输率为 R , 长为 n 的码, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 平均差错概率 $p_e < \exp\{-nE(R)\} \rightarrow 0$, 式中, $E(R)$ 为可靠性函数, $E(R)$ 在 $0 < R < C$ 的范围内为正。

信道编码逆定理

信道容量 C 是可靠通信系统信息传输率的上界, 当 $R > C$ 时, 不可能存在任何方法使差错概率任意小。

Fano 不等式

$$H(X|Y) \leq H_2(p_e) + p_e \log(k-1)$$

思考题与习题

5.1 R 为信息传输率, 根据 Shannon 第二定理, 当码长 $n \rightarrow \infty$ 时, 满足什么关系式, 可使错误概率 $p_e \rightarrow 0$?

5.2 写出 Fano 不等式, 其中哪一项表示是否判对的疑义度? $\log(k-1)$ 又表示什么?

5.3 根据 Shannon 定理, 说明哪个物理量是保证无差错传输时信息传输率 R 的上限值, 哪个物理量又是信源可压缩信息的最低极限。

5.4 最大后验概率译码准则就是最小错误译码准则, 对吗?

5.5 极大似然译码准则就是最小错误译码准则, 对吗?

5.6 在信源等概分布时, 极大似然译码准则就是最小错误译码准则, 对吗?

5.7 信道编码以增加冗余度来提高可靠性, 这种说法对吗?

5.8 离散无记忆信源, 熵为 $H(X)$, 对信源的 L 长序列进行等长编码, 码字是长为 n 的 D 进制符号串, 试问满足什么条件时, 可实现无失真编码?

5.9 二进制删除信道的信道转移概率矩阵位 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-\delta & \delta & 0 \\ 0 & \delta & 1-\delta \end{bmatrix}$, 证明对于此信道来说, 极大似然译码准则就等于最小错误译码准则。

5.10 离散无记忆信道 DMC, 转移概率矩阵为 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$

(1) $q(x_1) = \frac{1}{2}, q(x_2) = \frac{1}{4}, q(x_3) = \frac{1}{4}$, 求最佳判决译码及误码率 p_{e1} ;

(2) 若信源等概分布, 求最佳判决译码及误码率 p_{e2} 。

5.11 设有一离散无记忆信道, 其信道转移概率矩阵为 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$, 若信源分布

为 $\begin{bmatrix} X \\ q(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2/7 & 3/7 & 2/7 \end{bmatrix}$, 按最大后验概率译码, 求误码率 p_e 。

5.12 一离散无记忆信道的信道转移概率矩阵为 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$,

(1) 找出一个码长为 2 的重复码 (含 5 个码字), 其信息传输率为 $\frac{1}{2} \log 5$, 按极大似然译码准则设计译码器, 若码字等概输入译码器, 求译码器输出端的平均错误概率 p_e 。

(2) 找出一个码长为 2 的码, 使平均错误概率 $p_e = 0$ 。

5.13 信道输入 $\{x_0, x_1\}$, 输出 $\{y_0, y_1, y_2\}$, 信道转移概率 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, 求

(1) 使 $I(X; Y)$ 达到信道容量的最佳输入分布;

(2) 最佳分布下的 $E_0(\rho, q)$ 函数。

5.14 计算下述信道的 $E_0(1, q)$, $E_0(1) = \max_q E_0(1, q)$ 。

(1) 二进制对称信道, 固有误码率为 p ;

(2) 二元 Z 信道, 转移概率为 p 。

5.15 符号取自 $\{0, 1\}$ 的长度为 3 的序列, 共有 2^3 个。信源含 8 个消息, 对其编码, 码字从 2^3 个长度为 3 的序列中独立、等概选取, 若采用极大似然译码规则, 分别求通过以下 3 种信道传输时的平均错误概率 p_e 。

(1) 二进制对称信道, 信道转移概率矩阵 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$;

(2) 二进制 Z 信道, 信道转移概率矩阵 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{bmatrix}$;

(3) 二进制删除信道, 信道转移概率矩阵 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{bmatrix}$ 。

5.16 信源 $\begin{bmatrix} X \\ q(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$, 信道转移概率矩阵 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}$, 信道输出

符号 $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ 。

(1) 计算信源熵 $H(X)$ 和噪声熵 $H(Y|X)$;

(2) 计算从发送端观察到的平均错误概率 p_{ex} ;

(3) 计算从接收端观察到的平均错误概率 p_{ey} ;

(4) 你能否通过信道转移概率矩阵, 对该信道作一个好坏评价?

5.17 信源符号 $\{x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3\}$ 等概分布, 取码长为 4, 对其进行二进制等长编码, 编码

为 $\begin{cases} x_0 : 1111 \\ x_1 : 0000 \\ x_2 : 1100 \\ x_3 : 0011 \end{cases}$, 信道为二进制对称信道, 固有误码率为 $p (p < 0.5)$, 试选择一种译码规则, 使平均

错误概率 p_e 最小。

5.18 信源符号集 $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, 等概分布, 给定一离散无记忆信道, 信道转移概率矩阵

$$\text{阵为 } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

(1) 计算信道容量 C ;

(2) 设计一码长为 2 的重复码, 按极大似然译码准则译码, 求平均错误概率 p_e 。

5.19 信道输入符号集 $X = \{0, e, 1\}$, 输出符号集 $Y = \{0, 1\}$, 信道转移概率矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 信源有 4 个消息 } \{u_0, u_1, u_2, u_3\}, \text{ 编码为 } \begin{cases} u_0 : 00ee \\ u_1 : 01ee \\ u_2 : 10ee \\ u_3 : 11ee \end{cases}, \text{ 接收矢量 } \mathbf{y} = y_0 y_1 y_2 y_3,$$

译码规则 $F(y_0 y_1 y_2 y_3) = y_0 y_1 e e$ 。

(1) 求信息传输率 R_D ;

(2) 证明在上述译码规则下, 对所有码字错误概率等于零。