第 2 章　随机信号概论

在本章我们先来熟悉、理解随机信号(或在数学上称为随机过程,本书中这两个术语是等价的)的基本概念。首先我们可能会想,什么是随机信号?随机信号有什么用?随机信号如何携带信息?等等。术语“随机”是指“不可预知”或“不确定”的意思。随机过程是与确定性过程相对立的一个概念。从信息论的观点,对接收者来讲只有信号表现出某种不可预测性才可能蕴涵信息。因为如果在信号收到之前接收者已准确地预测它的一切,则这种信号是毫无用处的。类似地,若接收者能从信号的过去准确地预测它的将来,将来的部分信号即成为多余。再如我们去测量某个物理量,总是希望得到一些“新”的结果,即这个结果是我们利用以往的知识或以往的测量不能准确预知的。上述论述并不是说随机信号都是完全不可预测的。由于产生该信号的系统或传输媒质的限制,一般随机信号往往表现出部分可预测性,比如在事件发生以前我们可以知道它的取值范围$(-a,a)$,或者某一具体时刻取某个值的可能性(概率)及起伏速率的上限等等。

除了有用信号表现出不确定性外,另一因素就是我们在测量或接收一个信号时往往受到噪声(这里指一切干扰信号和扰动的总称)的污染。这里需要注意的是,信号的不可预测性是指它们运载信息的能力,而噪声的不可预知性则有损于上述能力。然而,虽然信号与噪声都是不可预知的,或说都是随机过程,但是它们在其特征上(主要指统计特性)仍然存在差别,因而我们可以在某种程度上将它们分离,并从中尽可能地恢复出感兴趣的信息。这也正是我们要研究随机信号的统计特性及其与系统相互作用的目的之一。

2.1　随机过程的概念及分类

2.1.1　随机过程的概念

统计数学研究的对象是随机变量。随机变量的特点是:在每次试验的结果中,以一定的概率取某个事先未知,但为确定的数值。在通信和电子信息技术中,常常涉及在试验过程中随着时间而改变的随机变量。例如,接收机的噪声电压就是随时间而随机变化的。我们把这种随时间而变化的随机变量,称为随机过程或随机信号。一般来说,试验过程中随机变量也有可能随其他某个参量变化,例如,研究大气层中的空气温度时,可把它看做随高度而变化的随机变量,这时的参变量是高度;一幅图像信号亮度是随x,y变化的随机变量等等。通常把这种随某个参量而变化的随机变量称为随机函数,而把以时间t作为参变量的随机函数称做随机过程或随机信号。实际研究的随机过程中,随机变量有可能是一维的,也有可能是多维的,本书主要讨论一维随机变量随时间变化所构成的随机过程。

下面换一个角度来介绍随机过程的概念。假如对接收的输出噪声电压(电流)进行“单次”观察,可得到如图 2.1 中所示的某一条起伏波形$x_1(t)$,实际上,在实验结果中出现的噪声电压具体波形也可能是$x_2(t)$或$x_3(t)$,…,等等,具体波形的形状事先不能确知,但必为所有可能的波形中的某一个,而所有这些可能的波形$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),\cdots$的集合(或总体)

构成了随机过程的样本函数或称为实现。在一次实验结果中,随机过程必出现某一个样本函数,但究竟出现哪一个则带有随机性。这就是说,在试验前不能确知出现哪一个样本函数,但经过大量的实验和观察会发现它具有某种统计规律性。因此,随机过程既是时间 t 的函数,又是随机试验可能结果 ξ 的函数,可记为 $X(t,\ \xi)$。

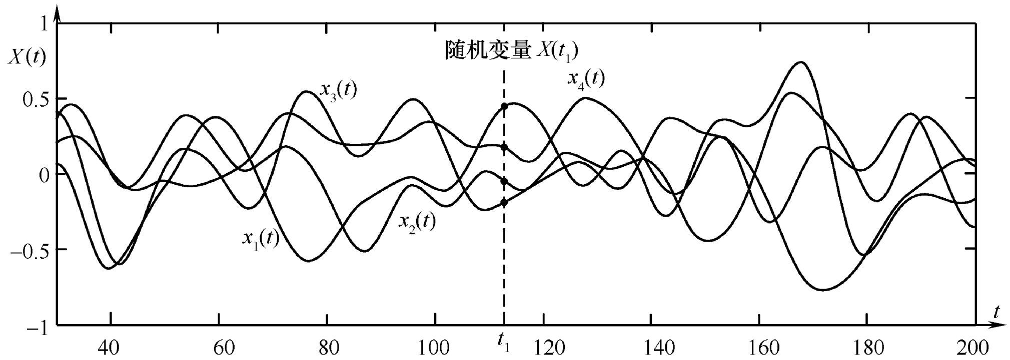


图 2.1　噪声电压的起伏波形

类似于随机变量的定义,可给出随机过程的定义:设 E 是随机试验,它的样本空间是 $S = \{\xi\}$, 若对每个 $\xi \in \{S\}$,总有一个确定的时间函数 $X(t,\xi)$,$t \in T$ 与它相对应。这样对于所有的 $\xi \in \{S\}$,就可得到一族时间 t 的函数,称为随机个过程。族中的每一个函数称为这个随机过程的样本函数。

对于一个特定的试验结果 ξ_i 则 $X(t,\xi_i)$ 是一个确定的时间函数,对于一个特定的时间 t_i,$X(t_i,\xi)$ 取决于 ξ 是一个随机变量。根据这一点,我们也可把随机过程看成是依赖于时间 t 的一族随机变量。

通常为了简便,在书写时省去符号 ξ,而将随机过程简记为 $X(t)$,而将它的每一个实现记为 $x_i(t)$。根据以上讨论,可列出 $X(t)$ 在四种不同情况下的意义:

① 当 t, ξ 都是可变量时,$X(t)$ 是一个时间函数族;

② 当 t 是可变量,ξ 固定时,$X(t)$ 是一个确定的时间函数;

③ 当 t 固定,ξ 是可变量时,$X(t)$ 是一个随机变量;

④ 当 t 固定,ξ 固定时,$X(t)$ 是一个确定值。

2.1.2　随机过程的分类

随机过程类型很多,分类方法也有多种,这里给出以下三种。

(1) 按照时间和状态(一般称随机过程 $X(t_i)$ 在 $t = t_i$ 的可能取值为它的状态)是连续的还是离散的来分类,可分成以下四类:

① 连续型随机过程:$X(t)$ 对于任意时刻的 $t \in T$,$X(t)$ 都是连续型随机变量,也就是时间和状态都是连续的情况。例如我们前面曾提到过的接收机输出噪声电压就属于这类随机过程。自然界许多真实存在的随机过程大多数属于连续随机过程。

② 离散型随机过程:$X(t)$ 对任意时刻的 $t \in T$,$X(t)$ 都是离散型随机变量,也就是时间连续,状态离散的情况。例如由硬限幅电路输出的随机过程,由于它在任一时刻,只可能取正或负的两个固定离散值,所以是离散型的随机过程。

③ 连续随机序列,随机过程 $X(t)$ 在任一离散时刻的状态是连续型随机变量,也就是时间离散,状态连续的情况,它实际上可以通过对连续型随机过程等间隔采样得到,这样的序列也称为

时间序列。例如在时间域 $\{0, t_S, 2t_S, 3t_S, \cdots\}$ 上对接收机输出噪声电压过程 $X(t)$ 进行采样,就可得到一个连续随机序列 $X_0, X_1, X_2, \cdots, X_k$,其中 $X_k = X(kt_s)$,图 2.2 示出它的一族样本函数。

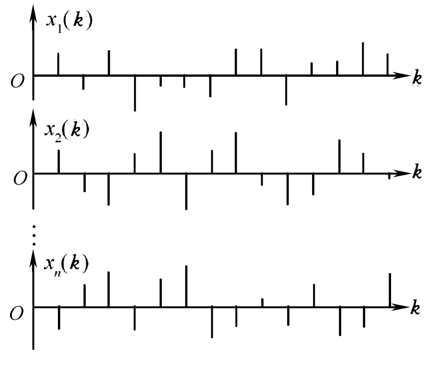


图 2.2　连续随机序列的一族样本函数

④ 离散型随机序列:相应于时间和状态都是离散的情况。为了适应数字信号处理的需要,对连续型随机序列再进行量化(A/D 变换),即得到这种离散随机序列。

(2) 按照样本函数的形式不同,可分为以下两类:

① 不确定随机过程:如果任意样本函数的未来值,不能由过去观测值准确地预测,则这个过程称为不确定随机过程,图 2.1 所示过程即为一例。

② 确定的随机过程:如果任意样本函数的未来值,可以由过去观测值准确预测,则这个过程称为确定的随机过程。常见的例子是由下式定义的随机过程

$$X(t) = A\sin(\omega t + \Phi) \tag{2.1.1}$$

式中,A、ω 或 Φ(或者全部) 是随机变量。对于该过程的任一个样本函数,这些随机变量都是取一个具体值,因此若对以前任意段时间的样本函数值已知,就可以准确预测样本函数的未来值。

(3) 按照随机过程的统计特性,分布函数(或概率密度函数) 的不同进行分类。

这是一种更加本质的分类方法,按这种分类法,比较重要的有平稳随机过程、高斯过程、白噪声、独立增量过程、独立随机过程和马尔可夫(Markov) 过程等。平稳随机过程是本书重点研究的对象,其他几种将在以后的章节中详细介绍。

2.2　随机过程的统计特性

由上节讨论可知,随机过程是一族时间函数,在一次具体试验中函数族中哪一个函数(样本或称实现) 出现是服从某种概率分布的。因而对随机信号我们不能采用通常的对确定性信号的表述方法,而必须用概率统计,即统计特性的描述方法。统计特性的描述方法分为两大类,一是多维概率密度函数或分布函数的描述方法,这是一种全面、完整的描述方法;另一种就是只关心其平均特性,即仅用几个数字特征的宏观、概括的描述方法。这正是研究随机信号和确定性信号方法最大的区别。

当用某种仪器来记录 $X(t)$ 的变化过程时,一般不可能也没有必要连续记下全过程,而只需记下 $X(t)$ 在确定时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 上的量。前面已指出,在确定时刻 t 值上,随机过程变成通常的随机变量,于是仪器的记录结果是 n 维随机变量 $X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)$。显然, 仪器的记录速度相当高时,也就是记录时间间隔 $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ 相当小(亦即 n 足够大) 时,多维随机变量 $X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)$ 就可以足够完整地表示出随机过程 $X(t)$。这样,在一定的近似程度上,可以通过研究多维随机变量来代替对随机过程的研究。而且 n 的值取得愈大,这种代替就愈精确。当 $n \to \infty$ 时,随机过程的概念可作为多维随机变量的概念在维数无穷多(不可列) 情况下的自然推广。图 2.3 绘

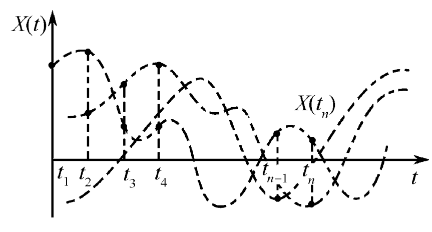


图 2.3　随机信号 $X(t)$ 的数据采集

出了随机过程数据采集的示意图。

根据对随机过程的上述理解,以及第 1 章对随机变量所做的研究,可以给出描述随机过程统计特性的概率分布函数和概率密度。

随机过程 $X(t)$,对于每一个固定的 $t_1 \in T$,$X(t_1)$ 是一个随机变量,它的分布函数记为

$$F_X(x_1,t_1) = P\{X(t_1) \leqslant x_1\} \tag{2.2.1}$$

它是 x_1 和 t_1 的二元函数,$F_X(x_1,t_1)$ 为随机过程 $X(t)$ 的一维分布函数。

同随机变量一样,假设 $F_X(x_1,t_1)$ 对 x 的偏导数存在(实际上,引入狄拉克 δ 函数的概念,可以不受此限制,离散随机过程也可以定义概率密度),则有

$$p_X(x_1,t_1) = \frac{\partial F_X(x_1,t_1)}{\partial x_1} \tag{2.2.2}$$

式中,$p_X(x_1,t_1)$ 称做随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度。显然 $p_X(x_1,t_1)$ 也是时间 t_1 和状态 x_1 的函数,有时也把它表示为 $p_X(x,t)$。一般而言,对应不同时刻 t 的 $p_X(x,t)$ 是不相同的。

很明显,随机过程的一维分布函数和一维概率密度具有普通随机变量的分布函数和概率密度的各种性质,其差别在于前者不仅是 x 的函数而且还是 t 的函数。

一维分布函数和一维概率密度仅给出了随机过程最简单的概率分布特性,它们只能描述随机过程在各个孤立时刻的统计特性,而不能反映随机过程在不同时刻的状态之间的联系。

为了描述随机过程 $X(t)$ 在任意两个时刻 t_1 和 t_2 的状态之间的统计关系,可以引入二维随机变量 $\{X(t_1),X(t_2)\}$ 的分布函数,并记为

$$F_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = P\{X(t_1) \leqslant x_1, X(t_2) \leqslant x_2\} \tag{2.2.3}$$

称式(2.2.3)为随机过程 $X(t)$ 的二维分布函数。若 $F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$ 对 x_1,x_2 的二阶偏导数存在,则有

$$p_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{2.2.4}$$

称式(2.2.4)为随机过程 $X(t)$ 的二维概率密度。

随机过程的二维分布律比一维分布律包含了更多的信息,但它仍不能完整地反映出随机过程的全部统计特性。用同样的方法,可以引入随机过程 $X(t)$ 的 n 维分布函数和 n 维概率密度

$$\begin{aligned} &F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n) \\ &= P\{X(t_1) \leqslant x_1, X(t_2) \leqslant x_2,\cdots,X(t_n) \leqslant x_n\} \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

$$p_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \tag{2.2.6}$$

显然,n 取得越大,随机过程的 n 维分布律描述随机过程的特性也越趋完善。从理论上说,可以无限地增加 n(或者说减小时间间隔),使得 n 维分布律更加全面地反映出 $X(t)$ 的统计特性。但在实际上,n 愈大分析处理会变得愈复杂。

还需指出,实际中还常会遇到需要同时研究两个或两个以上随机过程的情况。下面仍用上述方法,引入两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的联合分布函数与联合概率密度函数

$$\begin{aligned} &F_{X,Y}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n,t_1',\cdots,t_m') \\ &= P\{X(t_1) \leqslant x_1,\cdots,X(t_n) \leqslant x_n, Y(t_1') \leqslant y_1,\cdots,Y(t_m') \leqslant y_m\} \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

$$\begin{aligned} &p_{X,Y}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n,t_1',\cdots,t_m') \\ &= \frac{\partial^{n+m} F_{X,Y}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n,t_1',\cdots,t_m')}{\partial x_1 \cdots \partial x_n \partial y_1 \cdots \partial y_m} \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

若两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 相互独立,则对任意的 n 和 m 有

$$\begin{aligned} & p_{X,Y}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n,t_1',\cdots,t_m') \\ = & p_X(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)p_Y(y_1,\cdots,y_m;t_1',\cdots,t_m') \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

显然,若两个随机过程的 $n+m$ 维概率分布给定,则两个随机过程的全部统计特性也就确定了。

2.2.1 随机过程的数字特征

虽然随机过程的多维分布律能够比较全面地描述整个过程的统计特征,但是一般分析处理非常复杂。此外,在许多实际应用中,往往研究几个常用的统计平均量、即数字特征就能满足要求。这样,在实际应用中对随机过程统计特性的研究,常常仅限于讨论几个重要的数字特征。

随机变量常用到的数字特征是数学期望值、方差、相关系数等。相应地,随机过程常用到的数字特征是数学期望值、方差、相关函数等。它们是由随机变量的数字特征推广而来的,但是一般不再是确定的数值,而是确定的时间函数。因此也常把它们称之为随机过程的数字特征,或称为矩函数、示性函数等。

1. 数学期望值

对应于固定时刻 t 随机过程为一个随机变量,因此可以按通常定义随机变量一样的方法定义随机过程的数学期望值,只不过,这个数学期望值在一般情况下依赖于 t,且是 t 的确定函数,称此函数为随机过程的数学期望值,用 $m_X(t)$ 或 $E[X(t)]$ 表示,即

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x;t)\mathrm{d}x \tag{2.2.10}$$

式中,$p_X(x;t)$ 是 $X(t)$ 的一维概率密度。显然,$m_X(t)$ 是一个随机过程各个实现的平均函数,随机过程就在它的附近起伏变化,如图 2.4 所示。图中细线表示随机过程的各个样本函数,粗线表示它的数学期望值。如果讨论的随机过程是接收机输出端的噪声电压,这时数学期望值 $m_X(t)$ 就是此噪声电压的瞬时统计平均值。

顺便指出,这里 $m_X(t)$ 是随机过程 $X(t)$ 的所有样本函数在时刻 t 的函数值的均值,讲的是统计平均(又称集合平均),注意应与下面将要引入的时间平均概念相区别。

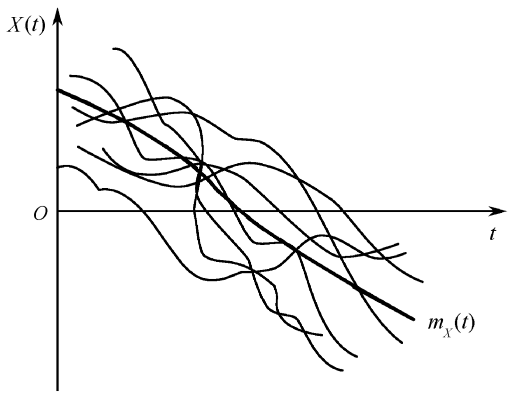


图 2.4 随机过程的数学期望

2. 均方值与方差

我们把随机变量 $X(t)$(这是随机过程对应于某个固定 t 值的情况)的二阶原点矩记为 $\Psi_X^2(t)$。

$$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x;t)\mathrm{d}x \tag{2.1.11}$$

称式(2.1.11)为随机过程 $X(t)$ 的均方值,而二阶中心矩记 $\sigma_X^2(t)$ 或 $D[X(t)]$,有

$$\sigma_X^2(t) = D[X(t)] = E[\{X(t) - m(t)\}^2] = E[X^2(t) - m^2(t)] \qquad (2.1.12)$$

称式(2.1.12)为随机过程 $X(t)$ 的方差。$\sigma_X^2(t)$ 也是 t 的确定函数，它描述了随机过程诸样本函数围绕数学期望 $m_X(t)$ 的分散程度。若 $X(t)$ 表示噪声电压,那么均方值就表示消耗在单位电阻上的瞬时功率的统计平均值,而方差 $\sigma_X^2(t)$ 则表示瞬时交流功率的统计平均值。

由于 $\sigma_X^2(t)$ 是非负函数,它的平方根称为随机过程的标准离差或标准差,即

$$\sigma_X(t) = \sqrt{\sigma_X^2(t)} = \sqrt{D[X(t)]} \qquad (2.2.13)$$

在实际应用中,往往用它作为描术随机过程散布程度的指标。

3. 自相关函数

数学期望值和方差是描述随机过程在各个孤立时刻的重要数字特征。它们反映不出整个随机过程不同时刻之间的内在联系,这一点可以通过图2.5所示的两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 来说明。从直观上看,它们具有大致相同的数学期望值和方差,但两者的细微结构却有着非常明显的差别。其中 $X(t)$ 随时间变化缓慢,这个过程在两个不同时刻的状态之间有着较强的相关性。而 $Y(t)$ 的变化要急剧得多,其不同时刻的状态之间的相关性显然要弱得多。

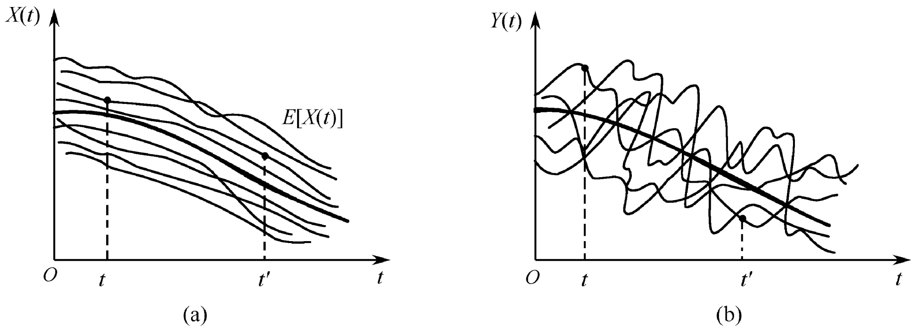


图2.5　具有相同的数学期望值和方差的两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$

相关的直观概念是建立在对这个名词的通俗使用上,例如,“一个人所饮的酒精量和他每年发生的汽车事故之间存在有正的相关”;“丈夫和妻子的身高是相关的”等等。这些说法并不意味着每一个驾驶员喝酒喝多了就必然发生事故;每个高的男人一定有高的妻子。“相关”是指对这些实验事件的大量随机选择进行平均后所存在的关系。

与此类似,两个随机过程之间的相关性概念定义是基于统计平均(通过求期望值运算)的依存性。自相关函数(简称相关函数)就是用来描述随机过程任意两个不同时刻状态之间相关性的重要数字特征。它的定义是

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2p_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \qquad (2.2.14)$$

实际上它就是随机过程 $X(t)$ 在两个不同时刻 t_1,t_2 的状态 $X(t_1)$,$X(t_2)$ 之间的混合原点矩,它反映了 $X(t)$ 在两个不同时刻的状态之间的统计关联程度。若取 $t_1 = t_2 = t$,则有

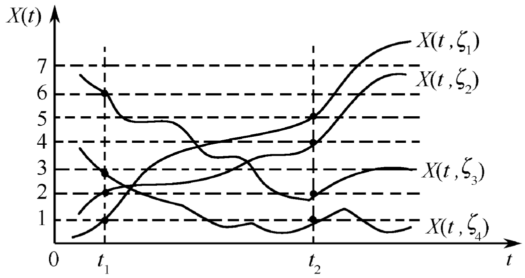
$$R_X(t_1,t_2) = R_X(t,t) = E[X(t)X(t)] = E[X^2(t)\}$$

此时自相关函数即退化为均方值。

例2.1　一个随机过程由图2.6所示的四条样本函数组成,而且每条样本函数出现的概率相等。求 $R_X(t_1,t_2)$ 。

解：由题意可知随机过程 $X(t)$ 在 t_1 和 t_2 两个时刻为两个等概取值的离散随机变量，并可由已知条件得到

$$R_X(t_1,t_2) = \sum\sum x_1x_2P(x_1,x_2)$$
$$= (1\times5+2\times4+6\times2+3\times1)\frac{1}{4} = 7$$



	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4
$X(t_1)$	1	2	6	3
$X(t_2)$	5	4	2	1

图 2.6　例 2.1 附图

例 2.2　若随机过程 $X(t)$ 为

$$X(t) = At,\qquad -\infty < t < +\infty$$

式中，A 为在区间(0,1) 上均匀分布的随机变量，求 $E[X(t)]$ 及 $R_X(t_1,t_2)$。

解：由于 X 与 A 间有确定的函数关系 $x = at$，使用求随机变量函数的期望值运算的规则，有

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p_X(x)\mathrm{d}x$$

则
$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} atp_A(a)\mathrm{d}a = \int_0^1 at\mathrm{d}a = \frac{t}{2}$$

同理，对相关函数有

$$R(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} at_1at_2p_A(a)\mathrm{d}a = \int_0^1 a^2t_1t_2\mathrm{d}a = \frac{1}{3}t_1t_2$$

有时也可用任意两个不同时刻、两个随机变量的中心矩来定义相关函数，记为 $C_X(t_1,t_2)$，即

$$C_X(t_1,t_2) = E[\{X(t_1) - m_X(t_1)\}\{X(t_2) - m_X(t_2)\}]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x_1 - m_X(t_1)][x_2 - m_X(t_2)]p_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{2.2.15}$$

为了与 $R_X(t_1,t_2)$ 相区别，我们把 $C_X(t_1,t_2)$ 称为协方差函数或中心化自相关函数。两者有下列关系

$$C_X(t_1,t_2) = E[\{X(t_1) - m_X(t_1)\}\{X(t_2) - m_X(t_2)\}]$$
$$= R_X(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) \tag{2.2.16}$$

实际上，$C_X(t_1,t_2)$ 与 $R_X(t_1,t_2)$ 对 $X(t)$ 所描述的统计特征是一致的。若取 $t_1 = t_2 = t$，则 $C_X(t_1,t_2)$ 退化为方差。

$$C_X(t_1,t_2) = E[\{X(t) - m_X(t)\}^2] = D[X(t)] = \sigma_X^2 \tag{2.2.17}$$

即此时的协方差函数就是方差。

综上所述，作为随机过程的最基本特征，实际只是数学期望和相关函数。统计数学中把仅研究这两个数字特征的理论称为相关理论。

4. 互相关函数

自相关函数是描述一个随机过程本身内在联系的数字特征。而互相关函数则是描述两个

随机过程之间统计关联特性的数字特征。它采用了研究多个随机过程问题中经常使用的矩函数。两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数定义为

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\infty}^{+\infty} xyp_{X,Y}(x,y;t_1,t_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.2.18}$$

定义中心化互相关函数为

$$C_{XY}(t_1,t_2) = E[\{X(t_1) - m_X(t_1)\}\{Y(t_2) - m_Y(t_2)\}] \tag{2.2.19}$$

又可称做互协方差函数,式中 $m_X(t)$ 和 $m_Y(t)$ 分别为 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的数学期望值。它亦可写成

$$C_{XY}(t_1,t_2) = R_{XY}(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2) \tag{2.2.20}$$

5. 统计独立、不相关和正交

为了进一步明确两个随机过程之间的相互关系,下面讨论关于两个随机过程之间的相互统计独立,不相关和正交的概念。

(1) 随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 互相统计独立

如果对任意的 $t_1,t_2,\cdots,t_n;t_1',t_2',\cdots,t_m'$ 有

$$\begin{aligned}&p_{XY}(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m;t_1,t_2,\cdots,t_n,t_1',t_2',\cdots,t_m')\\ &= p_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)p_Y(y_1,y_2,\cdots,y_m;t_1',t_2',\cdots,t_m')\end{aligned}$$

则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 之间是互相统计独立的。

对二维概率密度则有

$$p_{XY}(x,y;t_1,t_2) = p_X(x;t_1)p_Y(y;t_2)$$

于是互相关函数

$$\begin{aligned}R_{XY}(t_1,t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x;t)\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} yp_Y(y;t)\mathrm{d}y\\ &= E[X(t_1)]E[Y(t_2)] = m_X(t_1)m_Y(t_2)\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

互协方差函数(中心化互相关函数)

$$\begin{aligned}C_{XY}(t_1,t_2) &= E[\{X(t_1) - m_X(t_1)\}\{Y(t_2) - m_Y(t_2)\}]\\ &= E[\{X(t_1) - m_X(t_1)\}]E[\{Y(t_2) - m_Y(t_2)\}] = 0\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

(2) 如果两个过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互协方差函数为零,即

$$C_{XY}(t_1,t_2) = 0$$

或 $$R_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = E[X(t_1)]E[Y(t_2)] = m_X(t_1)m_Y(t_2) \tag{2.2.23}$$

则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 之间互不相关。由式(2.2.22)与式(2.2.23)知,如果两个过程互相独立,则必不相关,反之则不一定。

(3) 若两个过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 之间的互相关函数等于零,即对任意 t_1,t_2 有

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = 0 \tag{2.2.24}$$

则称该两过程之间正交,而且正交也不一定不相关,除非它们是零均值的。

2.2.2 随机过程的特征函数

类似于在第1章介绍的随机变量的特征函数。将随机过程看成带参变量 t 的随机变量,则不难得到随机过程的特征函数。由于特征函数和密度函数是一对傅里叶变换对,两者有一一对应的关系,因而随机过程的多维特征函数和多维概率分布一样,也能比较全面地描述随机过程的统计特性。

对某一固定时刻 t,随机变量 $X(t)$ 的特征函数为

$$\Phi_X(u,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x;t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}ux}\mathrm{d}x = E[\exp(\mathrm{j}uX(t)]\tag{2.2.25}$$

称式(2.2.25)为随机过程 $X(t)$ 的一维特征函数,它是 u 和 t 的函数。同理可得二维、三维以至 n 维特征函数

$$\begin{aligned}\Phi_X(u_1,\cdots,u_n;t_1,\cdots,t_n) &= E[\exp\{\mathrm{j}u_1X(t_1)+\cdots+\mathrm{j}u_nX(t_n)\}] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{\mathrm{j}(u_1x_1+\cdots+u_nx_n)\}\cdot \\ &\qquad p_X(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\end{aligned}\tag{2.2.26}$$

根据反变换公式,由随机过程 $X(t)$ 的 n 维特征函数可以得到它的 n 维概率密度函数

$$\begin{aligned}p_X(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_X(u_1,\cdots,u_n;t_1,\cdots,t_n)\cdot \\ &\qquad \exp\{-\mathrm{j}(u_1x_1+\cdots+u_nx_n)\}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\end{aligned}\tag{2.2.27}$$

根据特征函数与随机变量各阶矩的关系式,由随机过程的二维特征函数可求出随机过程的自相关函数

$$R_X(t_1,t_2) = (-\mathrm{j})^2\left.\frac{\partial^2\Phi_X(u_1,u_2;t_1,t_2)}{\partial u_1\partial u_2}\right|_{u_1=0,u_2=0}\tag{2.2.28}$$

2.3 随机序列及其统计特性

将连续随机过程 $X(t)$ 以 t_s 为间隔进行等间隔抽样(记录),即得随机序列,表示为

$$X_j = X(t)\delta(t-jt_s),\quad j=-\infty,\cdots,-1,0,1,\cdots,\infty\tag{2.3.1}$$

对于固定的 j,X_j 为一随机变量。一个 N 点的随机序列可以看成是一个 N 维的随机向量,即

$$\boldsymbol{X} = [X_0\quad X_1\quad\cdots\quad X_{N-1}]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}X_0\\X_1\\\vdots\\X_{N-1}\end{bmatrix}\tag{2.3.2}$$

式中,T 表示求转置,即 $\boldsymbol{X}$ 为一列向量。虽然一般情况 N 应为无穷大,但从实际分析与处理的角度考虑,取 N 为有限值是方便的。在这种情况下对 X_j 的统计特性描述,除了可以采用类似于式(2.2.5)与(2.2.6)的 N 维分布函数与 N 维密度函数的全面描述方法外,用数字特征的描述方法可以引入均值向量、自相关矩阵与协方差矩阵的概念。定义均值向量为

$$\boldsymbol{M}_X = E[X] = \begin{bmatrix}m_{X_0}\\m_{X_1}\\\vdots\\m_{X_{N-1}}\end{bmatrix} = [m_{X_0}\quad m_{X_1}\quad\cdots\quad m_{X_{N-1}}]^{\mathrm{T}}\tag{2.3.3}$$

自相关矩阵

$$\boldsymbol{R}_X = E[XX^{\mathrm{T}}] = \begin{bmatrix}r_{00} & r_{01} & \cdots & r_{0,N-1}\\ r_{10} & r_{11} & \cdots & r_{1,N-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_{N-1,0} & r_{N-1,1} & \cdots & r_{N-1,N-1}\end{bmatrix}\tag{2.3.4}$$

矩阵元素为
$$r_{ij} = E[X_iX_j] = R(it_s, jt_s) \tag{2.3.5}$$
即 X_i 与 X_j 的相关函数。若将矩阵元素改换成协方差，即
$$c_{ij} = E[(X_i - m_{X_i})(X_j - m_{X_j})] \tag{2.3.6}$$
则得到协方差矩阵
$$\boldsymbol{C}_X = E[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}_X)(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}_X)^{\mathrm{T}}] = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0,N-1} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N-1,0} & c_{N-1,1} & \cdots & c_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \tag{2.3.7}$$

容易证明，协方差阵与自相关阵之间有如下关系，即
$$\boldsymbol{C}_X = \boldsymbol{R}_X - \boldsymbol{M}_X\boldsymbol{M}_X^{\mathrm{T}} \tag{2.3.8}$$
若随机序列的均值为零，则协方差阵与自相关阵是一致的。

对一般随机序列来讲，自相关阵有以下两个性质。

性质 1 对称性，即
$$\boldsymbol{R}_X = \boldsymbol{R}_X^{\mathrm{T}} \tag{2.3.9}$$

证明：由式(2.3.5) 知
$$r_{ij} = E[X_iX_j] = E[X_jX_i] = r_{ji}$$
即证。

性质 2 半正定性，即对任意 N 维(非随机) 向量 $\boldsymbol{F}$，下式成立
$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_X\boldsymbol{F} \geqslant 0 \tag{2.3.10}$$

证明：设
$$\boldsymbol{F} = [f_0 \quad f_1 \quad \cdots \quad f_{N-1}]^{\mathrm{T}}$$
由于下列不等式恒成立，即
$$E\Big[\Big(\sum_{i=0}^{N-1} f_iX_i\Big)^2\Big] \geqslant 0$$
得
$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} f_iE[X_iX_j]f_j \geqslant 0$$
$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} f_ir_{ij}f_j \geqslant 0$$
即证。

作为思考题，请读者证明协方差阵同样具有上述两条性质。以后我们将证明，除了上述两条性质，若 X_j 为平稳随机序列，其自相关阵与协方差阵还是 Toeplitz 矩阵。

自相关阵(协方差阵) 的上述三个性质在随机信号分析与处理中具有十分重要的意义。

例 2.3 求在[0,1) 区间均匀分布的独立随机序列的均值向量，自相关阵与协方差阵，设 $N = 3$。

解：由题意得知，X_j 的一维概率密度函数为
$$p_{X_j}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
则均值
$$m_{X_j} = E[X_j] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{X_j}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

自相关函数 $$r_{ij} = E[X_iX_j] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_i x_j p_X(x_i, x_j)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$$

若 $i = j$,则 $$r_{ij} = E[X_i^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{X_i}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

若 $i \neq j$, 因为 $p_X(x_i, x_j) = p_{X_i}(x_i)p_{X_j}(x_j)$,则

$$r_{ij} = E[X_iX_j] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i p_{X_i}(x_i)\mathrm{d}x_i \int_{-\infty}^{+\infty} x_j p_{X_j}(x_j)\mathrm{d}x_j = \frac{1}{4}$$

于是均值向量与自相关阵分别为

$$\boldsymbol{M}_X = [1/2 \quad 1/2 \quad 1/2] \qquad \boldsymbol{R}_X = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/3 \end{bmatrix}$$

再由式(2.3.7)知,协方差阵为

$$\boldsymbol{C}_X = \begin{bmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 \end{bmatrix}$$

可以证明任何独立随机序列(其实只要不相关即可)的协方差阵均为对角阵。且对角元素为该随机序列的方差。

均匀分布的独立随机序列在随机信号的理论分析与实验研究中具有十分重要的价值。原因是:一方面在计算机上容易产生十分近似于具有上述统计特性的随机序列(称为伪随机序列),比如在 PC 上进入 MATLAB 软件环境,采用函数 rand、randn、normr 和 random 即可生成满足各种需要的近似的独立随机序列。例如,在命令窗键入

```
rand(5,1);
```

即可得到 5 个点的伪随机向量

```
ans =
      0.1568
      0.4164
      0.0940
      0.4499
      0.8692
```

另一方面以这种随机序列为基础,几乎其他各种具有不同的概率密度函数或自相关函数(功率谱密度)的随机序列均可产生(模拟)出来。例如,我们希望得到一个近似高斯分布的随机变量,则可调用下列 MATLAB 代码段

```
g = 0
j = 1 : 12;
g = g + rand;
```

则 g 为近似高斯分布的随机变量。这段程序的意思是将 12 个独立、均匀分布随机变量加起来,由中心极限定理保证它近似服从高斯分布。且容易计算出随机变量 G 的方差为 1,均值为 6。将这段程稍加改写,即可产生出具有任意均值与方差的独立高斯随机序列,这留做习题供读者练习。当然,也可以直接调用 MATLAB 函数 randn 生成均值为 0,方差为 1 的标准正态(高斯)分布的随机序列。例如,在命令窗键入

```
randn(5,1)
```

即可得

```
ans =
        0.7160
        1.5986
       -2.0647
       -0.4736
        0.1762
```

习　　题

2.1　由下式定义的两电平二进制过程

$$X(t) = A \text{ or } -A,\ (n-1)T < t < nT$$

式中电平 A 或 $-A$ 以等概独立出现,T 为正常数,以及 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$

(1) 画出一个样本函数的草图。

(2) 它属于哪一类随机过程?

(3) 求一、二维概率密度函数。

2.2　设有离散随机过程 $X(t) = C$,式中,C 为随机变量,可能取值为 1,2,3,其出现概率分别为 0.6,0.3 和 0.1。

(1) 它是确定性随机过程吗?

(2) 求任意时刻 $X(t)$ 的一维概率密度。

2.3　已知随机过程 $X(t) = X\cos(\omega_0 t)$,ω_0 是常数,X 是归一化高斯随机变量,求 $X(t)$ 的一维概率密度。

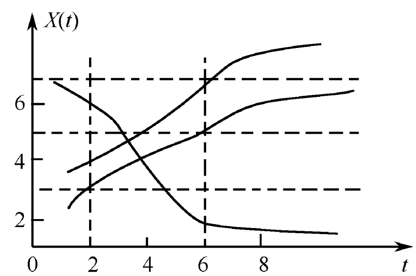
2.4　利用投掷一枚硬币的试验定义随机过程为

$$X(t) = \begin{cases} \cos\pi t, & \text{出现正面} \\ 2t, & \text{出现反面} \end{cases}$$

假设出现“正面”和“反面”的概率各为1/2,试确定 $X(t)$ 的一维分布函数 $F_X(x;1/2)$,$F_X(x;1)$ 以及二维分布函数 $F_X(x_1,x_2;1/2,1)$。

2.5　随机过程 $X(t)$ 由四条样本函数组成, 如图 2.6 所示。出现的概率分别为 $p(\xi_1) = 1/8$, $p(\xi_2) = 1/4$, $p(\xi_3) = 3/8$, $p(\xi_4) = 1/4$,求 $E[X(t_1)]$,$E[X(t_2)]$,$E[X(t_1)X(t_2)]$ 及联合概率密度函数 $p_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$。

2.6　随机过程 $X(t)$ 由如题 2.6 图所示的三条样本函数曲线组成,并以等概率出现,试求 $E[X(2)]$, $E[X(6)]$, $E[X(2)X(6)]$,$F_X(x;2)$, $F_X(x;6)$, $F_X(x_1,x_2;2,6)$。



题 2.6 图

2.7　随机过程 $X(t)$ 由三条样本函数曲线组成：

$$X(t,\xi_1)=1;\quad X(t,\xi_2)=\sin t;\quad X(t,\xi_3)=\cos t$$

并以等概率出现，求 $E[X(t)]$ 和 $R_X(t_1,t_2)$。

2.8　已知随机过程 $X(t)$ 的均值为 $m_X(t)$，协方差函数为 $C_X(t_1,t_2)$，又知 $f(t)$ 是确定的时间函数。试求随机过程 $Y(t)=X(t)+f(t)$ 的均值和协方差。

2.9　随机过程为　$X(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$

式中，ω_0 为常数，A 和 B 是两个相互独立的高斯变量，而且

$$E[A]=E[B]=0,\quad E[A^2]=E[B^2]=\sigma^2$$

试求 $X(t)$ 的均值和自相关函数。

2.10　随机过程为　$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Phi)$

式中，a,ω_0 为常数，Φ 为 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的随机变量。求 $X(t)$ 的均值、方差和自相关函数。

2.11　随机过程为　$X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Phi)$

式中，ω_0 为常数，A 和 Φ 是两个统计独立的均匀分布的随机变量。概率密度分别为

$$p_A(a)=1,\quad 0\leqslant a<1;\qquad p_\Phi(\varphi)=\frac{1}{2\pi},\quad 0\leqslant\varphi<2\pi$$

求 $X(t)$ 的均值及自相关函数。

2.12　若随机过程 $X(t)$ 的导数存在，求证：

$$E\left[X(t)\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}\right]=\frac{\mathrm{d}R_X(t,t)}{\mathrm{d}t}$$