

## 第2章 控制系统的数学模型

### 2.1 引言

第1章介绍了有关控制系统的基本概念和结构。如何分析一个控制系统，怎样按照控制要求设计一个最适合的控制系统，是自动控制理论研究的基本内容和核心内容。要将系统设计得好，达到预期的设计目的，就要深刻地了解被控对象以及与系统有关的所有元件和装置的特性，就好像你越了解一个人，你就越会掌握在不同环境条件下他的反应一样，可以从容应对。对系统的了解是通过数学模型完成的。

#### 2.1.1 系统数学模型的定义及特点

自动控制理论主要研究自动控制系统稳、准、快三方面的性能。当控制系统的输入发生变化时，其输出通常需要经过一个瞬态过程才能跟上输入的变化。对系统性能的分析就是通过对瞬态过程的分析实现的。因此，必须将系统的瞬态过程用一个能反映其运动状态的数学表达式表示出来，这种描述系统中各元件的特性以及系统瞬态过程中内部物理量之间相互关系的数学表达式，称为系统的数学模型。在静态条件下（即变量各阶导数为零），描述变量之间关系的代数方程称为静态数学模型，静态数学模型描述各变量之间的关系不随时间变化；而描述变量各阶导数之间关系的微分方程称为动态数学模型。对系统的分析，通常以动态数学模型为主，详细研究各变量的运动特性。

#### 2.1.2 系统数学模型的类型和建模方法

在自动控制理论中，系统的数学模型有多种形式，采用的数学工具不同，适用的场合也各不相同，但各种形式的数学模型之间有紧密的联系并可以相互转换，如图2-1所示。时域中常用的数学模型有微分方程、差分方程和状态方程；复域中的数学模型有传递函数、方块图和信号流图等；频域中的数学模型有频率特性等。

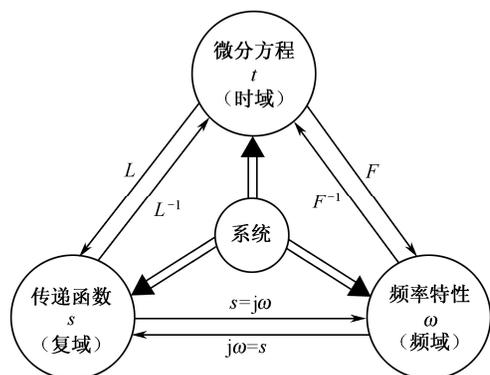


图 2-1 系统的数学模型及相互关系

如果系统数学模型着重描述系统输入量和输出量之间的关系，则称之为系统的输入/输出模型；如果系统数学模型描述的是系统输入量与内部状态之间以及内部状态和输出量之间的关系，则称为状态方程。

建立控制系统数学模型的方法有分析法和实验法。分析法是指当控制系统结构和参数已知时，对系统的各部分运动机理进行分析，根据它们所依据的物理规律、化学规律以及其他自然规律来建立相应的运动方程的方法。例如，在电学系统中利用分析法建立系统的数学模型，是根据基尔

霍夫定律进行的；在力学系统中，根据牛顿定律用分析法建立系统的数学模型；而在热力学系统中，则是根据热力学定律建立系统的数学模型。实验法是人为地给系统施加某种测试信号，记录其输出响应数据，并用适当的数学模型去逼近的建模方法，也称为系统辨识。近年来，系统辨识已发展成为一门独立的学科分支，在本章不做介绍。本章主要内容是利用微分方程、传递函数和方块图建立系统的数学模型及其应用。

无论采用哪种建模方法，都需要遵循以下原则。

1. 全面了解系统的结构和运动机理，明确研究目的和要求，选择合适的分析方法。
2. 根据分析方法，确定数学模型的形式。
3. 在满足系统的特性要求和误差允许的条件下，建立尽量简化及合理的数学模型。

## 2.2 建立系统的时域数学模型

微分方程是描述控制系统最基本的数学工具。由于它是对物理系统输入/输出的描述，有时也称为外部描述，它是其他各种数学模型的基础。系统的输入量和输出量都是时间  $t$  的函数，如果微分方程是线性的，且其各项系数都为常数，则称为线性定常系统的数学模型。

下面分类举例说明如何建立系统的微分方程。

### 2.2.1 电路系统举例

**【例 2-1】** RLC 电路如图 2-2 所示，列写电路中输入电压  $u_i(t)$  与输出电压  $u_o(t)$  关系的微分方程。

**解** (1) 该系统是电学系统，应遵循电路相关定律。

(2) 确定系统的输入量、输出量和中间变量分别为：输入电压  $u_i(t)$ ，输出电压  $u_o(t)$ ，中间变量是电流  $i(t)$ 。

(3) 根据基尔霍夫定律，列出系统的原始微分方程

$$u_i(t) = u_L(t) + u_R(t) + u_o(t) \quad (2-1)$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2-2)$$

$$u_R(t) = Ri(t) \quad (2-3)$$

$$i(t) = C \frac{du_o(t)}{dt} \quad (2-4)$$

由式 (2-4) 得 
$$u_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2-5)$$

将式 (2-2)、式 (2-3) 和式 (2-5) 代入式 (2-1)，消去中间变量  $i(t)$  并将方程整理为标准形式，得

$$LC \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t) \quad (2-6)$$

$$T_1 T_2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + T_2 \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t) \quad (2-7)$$

式中： $T_1 = L/R$ ， $T_2 = RC$ ，分析  $T_1$  和  $T_2$  的量纲，有

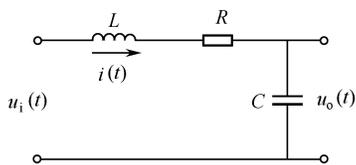


图 2-2 RLC 无源网络

$$[T_1] = \left[ \frac{L}{R} \right] = \frac{\text{伏} / (\text{安} / \text{秒})}{\text{伏} / \text{安}} = \text{秒}$$

$$[T_2] = [RC] = \frac{\text{伏} \cdot \text{安} \cdot \text{秒}}{\text{安} \cdot \text{伏}} = \text{秒}$$

可见,  $T_1$  和  $T_2$  是电路的时间常数。由式 (2-7) 可知, 电路系统的静态放大系数是 1, 说明稳态时, 输出电压等于输入电压, 与电容的充电特性完全吻合。电路中存在两个储能元件电感  $L$  和电容  $C$ , 故方程式左侧的最高阶次是 2, RLC 电路是一个二阶常系数线性微分方程。

**【例 2-2】** 试求如图 2-3 所示有源电路的输入电压  $u_i(t)$  与输出电压  $u_o(t)$  之间的关系。

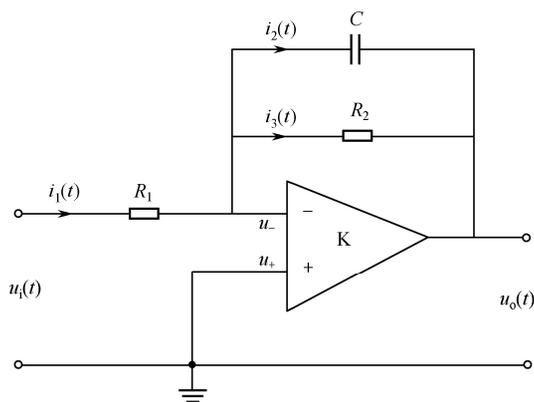


图 2-3 采用运算放大器的电路

**解** (1) 这是一个带运算放大器的有源电路。首先假设此运算放大器是理想放大器, 则流入放大器的电流可以忽略不计并且放大器的正负输入电压相等, 即  $u_- \approx u_+$ 。

(2) 确定系统的输入量是输入电压  $u_i(t)$ , 系统的输出量是输出电压  $u_o(t)$ , 系统的中间变量是电流  $i_1$ 、 $i_2$  和  $i_3$ 。

(3) 根据理想放大器的特性, 列出系统的微分方程

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) \quad (2-8)$$

$$u_- = u_+ = 0 \quad (2-9)$$

$$i_1(t) = \frac{u_i(t) - u_-}{R_1} \quad (2-10)$$

$$i_2(t) = C \frac{d(u_- - u_o(t))}{dt} \quad (2-11)$$

$$i_3(t) = \frac{u_- - u_o(t)}{R_2} \quad (2-12)$$

(4) 将式 (2-9) ~ 式 (2-12) 代入式 (2-8), 并整理微分方程为标准形式, 有

$$-C \frac{du_o(t)}{dt} - \frac{u_o(t)}{R_2} = \frac{u_i(t)}{R_1} \quad (2-13)$$

由式 (2-13) 可见, 此系统是一阶常系数线性微分方程, 方程左侧的负号表明运算放大器具有反相作用。

## 2.2.2 机械力学系统举例

**【例 2-3】** 弹簧—质量—阻尼器串联系统如图 2-4 所示。试列出以外力  $F(t)$  为输入量, 以质量的位移  $y(t)$  为输出量的微分方程。

**分析** 本系统由 3 个基本无源元件组成: 质量  $m$ 、弹簧  $k$  和阻尼器  $f$ 。首先要掌握 3 种元件的力学性质和作用, 并列出三种元件在系统中存在的阻碍运动的力。

(1) 惯性力。惯性力是一种与质量有关的力, 具有阻止启动和阻止停止运动的性质。按照牛顿第二定律可知, 惯性力的大小等于质量乘以加速度, 即

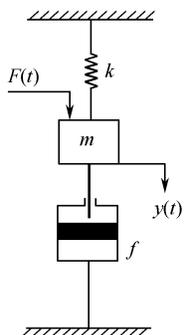


图 2-4 质量—弹簧—阻尼串联系统

$$F_m = ma = m \frac{du(t)}{dt} = m \frac{dy^2(t)}{dt^2}$$

式中： $a$ 代表加速度， $y$ 表示位移。

(2) 弹性力。弹性力是一种弹簧的弹性恢复力，大小与其形变成正比，即

$$F_k = ky(t) = k \int v(t) dt$$

式中： $k$ 是弹簧刚度，其物理意义表示单位形变的恢复力。

(3) 阻尼力。阻尼力是阻尼器中产生的黏性摩擦力，其大小与阻尼器中活塞与刚体的相对运动速度成正比，即

$$F_f = f v(t) = f \frac{dy(t)}{dt}$$

式中： $v$ 表示速度； $f$ 是阻尼系数，其物理含义是单位速度的阻尼。

分析与掌握了以上几种力的作用和表示形式后，就可以轻松求解本题。

解(1) 确定系统的输入量是 $F(t)$ ，系统的输出量是 $y(t)$ ，作用于质量 $m$ 的力有弹簧产生的弹性力 $F_k$ 、阻尼器产生的阻尼力 $F_f$ ，均为中间变量。质量 $m$ 的受力情况如图2-5所示。

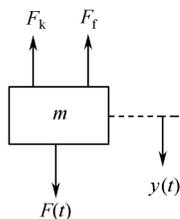


图2-5 质量的受力情况

(2) 系统处于平衡状态，按牛顿第二定律列写原始微分方程

$$\sum F = ma \quad (2-14)$$

$$\sum F = F(t) + F_k(t) + F_f(t) \quad (2-15)$$

$$F_k(t) = -ky(t) \quad (2-16)$$

$$F_f(t) = -f \frac{dy(t)}{dt} \quad (2-17)$$

$$ma = m \frac{d^2y(t)}{dt^2} \quad (2-18)$$

(3) 将式(2-15)~式(2-18)代入式(2-14)，得

$$F(t) - ky(t) - f \frac{dy(t)}{dt} = m \frac{d^2y(t)}{dt^2} \quad (2-19)$$

(4) 整理式(2-19)得微分方程标准形式

$$m \frac{d^2y(t)}{dt^2} + f \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t)$$

$$T_M^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_f \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{1}{k} F(t)$$

式中： $T_M^2 = m/k$ ； $T_f = f/k$ 为时间常数； $1/k$ 为该系统的传递系数； $T_M$ 和 $T_f$ 的单位均为秒。因此，该系统是二阶常系数线性微分方程。

### 2.2.3 机电系统举例

直流电动机是将电能转化为机械能的典型的机电转换装置。电动机作为控制系统的执行机构，是一个重要元件。

参考图2-6，这里简要介绍电枢控制的直流电机工作原理： $U_a$ 为输入的电枢电压，在电

枢回路中会产生电枢电流  $i_a$ ，电枢电流  $i_a$  与激磁磁通相互作用产生电磁转矩  $M_D$ ，使电枢转动，拖动负载运动。这样电能就转换为机械能。在此过程中，电枢的绕组在磁场中切割磁力线产生感应反电势  $E_a$ ，其大小与激磁磁通及转速成正比，方向与外加电枢电压  $U_a$  相反。

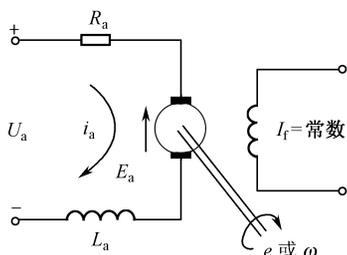


图 2-6 电枢控制的直流电动机系统

**【例 2-4】** 试列写如图 2-6 所示的电枢控制的直流电动机的微分方程。

**解** (1) 确定输入量是电枢电压  $U_a$ ，输出量是电动机角速度  $\omega$ ，负载转矩  $M_L$  是扰动输入。

(2) 忽略电枢反应、磁滞等影响，激磁电流  $I_f$  为常数，则激磁磁通视为不变，变量关系为线性关系。

(3) 根据基尔霍夫定律写出电枢回路方程式为

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + E_a = U_a \quad (2-20)$$

式中： $L_a$  为电枢回路总电感； $R_a$  为电枢回路总电阻。

(4) 列写中间变量辅助方程

由于激磁磁通不变，电枢反电势  $E_a$  与转速成正比，即

$$E_a = k_e \omega \quad (2-21)$$

式中： $k_e$  为电势系数（伏/弧度/秒），由电动机结构参数确定。

电机轴上机械运动方程为

$$M_D - M_L = J \frac{d\omega}{dt} \quad (2-22)$$

式中： $J = \frac{GD^2}{4g}$  为转动惯量（计算到电动机轴上，单位为千克·米·秒<sup>2</sup>）， $GD^2$  为飞轮转矩（千克·米<sup>2</sup>）， $M_L$  为负载转矩（千克·米）， $M_D$  为电动机转矩（千克·米）。

电磁转矩方程可写为

$$M_D = k_m i_a \quad (2-23)$$

式中： $k_m$  是转矩系数，由电动机结构参数确定。

(5) 将式 (2-20) ~ 式 (2-23) 联立求解，得

$$\frac{L_a J}{k_m k_e} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{R_a J}{k_e k_m} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{k_e} U_a - \frac{R_a}{k_e k_m} M_L - \frac{L_a}{k_e k_m} \frac{dM_L}{dt} \quad (2-24)$$

若不考虑电动机的负载转矩，即设  $M_L = 0$ ，则式 (2-24) 可简化为

$$\frac{L_a J}{k_e k_m} \cdot \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{R_a J}{k_e k_m} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{k_e} U_a \quad (2-25)$$

令  $T_a = \frac{L_a}{R_a}$ （单位为秒）为电磁时间常数， $T_m = \frac{J R_a}{k_e k_m}$ （单位为秒）为电动机的机电时间

常数，则式 (2-25) 可写为

$$T_a T_m \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{k_e} U_a$$

(6) 若系统的输入量不变，输出量是电动机转速  $n$ （单位为转/分），则系统的微分方程为

$$T_a T_m \frac{d^2 n}{dt^2} + T_m \frac{dn}{dt} + n = \frac{1}{k'_e} U_a - \frac{T_m}{GD^2 / 375} M_L - \frac{T_a T_m}{GD^2 / 375} \frac{dM_L}{dt}$$

当电动机负载转矩  $M_L = 0$  时, 有

$$T_a T_m \frac{d^2 n}{dt^2} + T_m \frac{dn}{dt} + n = \frac{1}{k'_e} U_a$$

式中:  $k'_e$  为电势系数 (单位为伏/转/分),

$$T_m = \frac{R_a J}{k_e k_m} = \frac{R_a G D^2}{375 k'_e k_m}$$

### 2.2.4 流体系的建模

**【例 2-5】** 如第 1 章图 1-1 所示水位自动控制系统, 若蓄水槽的体积为  $V$ , 流入气动阀门和流出气动阀门的流量分别用  $Q_1(t)$  和  $Q_2(t)$  表示, 改变气动阀门的开度可以改变相应流量值。如果以气动阀门的流量  $Q_1(t)$  为输入, 以蓄水槽的液面高度  $h(t)$  为输出, 试建立该对象的数学模型。

**解** 数学模型是  $Q_1(t)$  与  $h(t)$  之间的数学表达式。根据动态能量平衡关系, 如果液位  $h$  处于平衡状态, 则输入流量与输出流量相等, 即  $Q_{10} = Q_{20}$ , 如果偏离了某个平衡状态, 则

$$Q_1(t) - Q_2(t) = A \frac{dh(t)}{dt}$$

式中:  $A$  为蓄水槽的截面积, 是一个常量。

设  $Q_2$  与  $h$  近似呈线性关系, 则

$$Q_2(t) = \frac{h(t)}{R}$$

式中:  $R$  是流出阀门的阻力系数, 称为液阻, 则

$$Q_1(t) - \frac{h(t)}{R} = A \frac{dh(t)}{dt}$$

整理得此系统的微分方程为

$$A \frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{R} h(t) = Q_1(t)$$

### 2.2.5 复杂系统举例

**【例 2-6】** 随动系统如图 2-7 所示。图中  $\psi$  为输入量,  $\phi$  为输出量,  $M_L$  为扰动输入量, 试建立系统的数学模型。

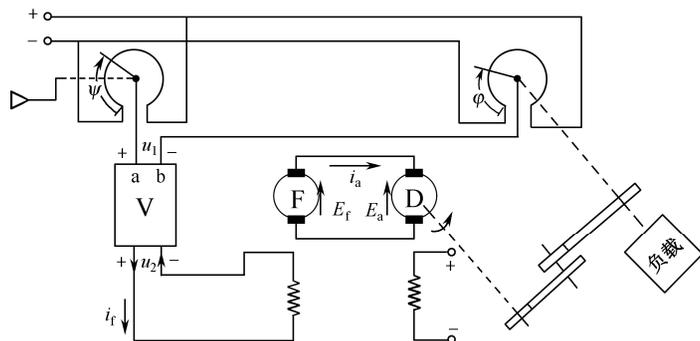


图 2-7 随动系统原理图

解 (1) 电位器组

$\psi$  和  $\varphi$  是输入量,  $u_1$  是输出量。我们规定  $u_1$  的极性是: 当 a 端电位高于 b 端电位时, 认为  $u_1$  是正的,

$$u_1 = k_1(\psi - \varphi) \quad (2-26)$$

式中:  $k_1$  为电位器角度上的电压系数 (单位为伏/弧度)。

(2) 放大器

$$u_2 = k_2 u_1 \quad (2-27)$$

式中:  $k_2$  为电压放大系数 (运算放大倍数)。

(3) 发电机

输入量是  $u_2$ , 输出量是电动势  $E_f$ , 它的磁通量与励磁电流成正比。设  $L_f$  是发电机励磁绕组的电感量,  $R_f$  是发电机励磁绕组的电阻, 则励磁绕组电路的方程为

$$T_f \frac{di_f}{dt} + i_f = \frac{1}{R_f} u_2 \quad (2-28)$$

式中:  $T_f = \frac{L_f}{R_f}$  为励磁电路的电磁时间常数。

发电机的电动势  $E_f$  正比于  $i_f$ , 则

$$E_f = k_f i_f \quad (2-29)$$

将式 (2-29) 代入式 (2-28) 得

$$T_f \frac{dE_f}{dt} + E_f = k_3 u_2 \quad (2-30)$$

式中:  $k_3 = k_f / R_f$ , 没有量纲。

(4) 电动机

它的输入量有两个, 即发电机的电势  $E_f$  与电动机轴上的负载力矩  $M_L$ , 输出量则是它的转速  $\omega$ 。微分方程为

$$E_f = E_a + L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a \quad (2-31)$$

式中:  $L_a$  为电枢回路总电感 (主要是发电机电枢电感和电动机电枢电感);  $R_a$  为电枢回路总电阻 (主要是发电机电枢电阻和电动机电枢电阻)。

动力学方程为

$$M_D = M_L + J \frac{d\omega}{dt} \quad (2-32)$$

式中:  $J$  为电动势轴上的总转动惯量 (包括电动机转子本身的转动惯量以及负载和传动机构折算到电动机轴上的转动惯量)。电动机的反电势与转速  $\omega$  的关系及转矩与电枢电流的关系为

$$E_a = k_e \omega \quad (2-33)$$

式中:  $k_e$  为电势系数 (单位为伏/弧度/秒)。

$$M_D = k_m i_a \quad (2-34)$$

$k_m$  为电动机转矩系数 (单位为千克·米/安)。

将式 (2-32) ~ 式 (2-34) 代入式 (2-31) 中, 消去  $E_a$ 、 $i_a$  和  $M_D$  这 3 个变量, 经过整理得

$$T_a T_m \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{k_e} E_f - \frac{R_a}{k_e k_m} \left( T_a \frac{dM_L}{dt} + M_L \right) \quad (2-35)$$

### (5) 传动机构

$\omega$  为输入量,  $\varphi$  为输出量, 则它们之间的关系显然可以写为

$$\frac{d\varphi}{dt} = k_4 \omega \quad (2-36)$$

以上我们一共得到 5 个方程, 即式 (2-26)、式 (2-27)、式 (2-30)、式 (2-35) 和式 (2-36)。从这 5 个方程中, 消去 4 个系统内部变量  $u_1$ 、 $u_2$ 、 $E_f$  和  $\omega$  就可得到以  $\psi$  为输入量、以  $M_L$  为扰动输入量、以  $\varphi$  为输出量的微分方程式

$$\begin{aligned} & T_a T_m T_f \frac{d^4 \varphi}{dt^4} + (T_a T_m + T_f T_m) \frac{d^3 \varphi}{dt^3} + (T_m + T_f) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{k_c} \varphi \\ &= \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{k_c} \psi - \frac{R_a k_4}{k_c k_m} \left[ T_a T_f \frac{d^2 M_L}{dt^2} + (T_a + T_f) \frac{dM_L}{dt} + M_L \right] \end{aligned}$$

由以上例子可以得出数学模型一个非常重要的特性: 相似性。虽然实际物理系统不同, 可能有机件的、电路的、复杂的生物学和经济学系统等, 但它们的数学模型可能是相同的。例 2-1、例 2-3 与例 2-4 均为二阶系统, 例 2-2 与例 2-5 均为一阶系统, 如果选择合适的系数, 以上 5 个例子就可以归纳为一阶和二阶两个数学模型。由此得到一个结论, 即相似系统可以相互替代, 用数学模型进行模拟研究。虽然物理意义不同, 它们却具有相同的运动规律。对这种抽象的数学模型进行分析研究, 其结论具有一般性, 普遍适用于各类相似的物理系统。

### 2.2.6 微分方程建立步骤

总结以上范例中系统微分方程的建立过程, 可以得出控制系统是由一系列环节连接组成的, 建立系统的微分方程需要全面了解系统的工作原理、结构和运动规律, 一般步骤如下。

1. 根据系统运动的因果关系, 确定系统的输入量、输出量及内部中间变量, 理顺各变量之间的关系。
2. 从系统的输入端开始, 根据信号的传递顺序和各元件或环节所遵循的物理规律, 依次列写它们的微分方程。
3. 将所得的各元件或环节的微分方程联立起来, 消除中间变量, 求取一个仅含有系统的输入量和输出量的微分方程, 这就是系统的微分方程。
4. 将微分方程整理成标准形式, 即将与输入量有关的各项放在方程的右边, 与输出量有关的各项放在方程的左边, 各导数项按降幂排列, 各项系数化成有物理意义的形式。

## 2.3 非线性系统的线性化

2.2 节讨论了系统微分方程的建立, 所得的微分方程都是线性的。可是从工程的角度来说, 所有系统都有不同程度的非线性。例如, 阻尼器产生的摩擦阻尼力  $F_f$  与速度  $v$  成正比, 假设阻尼系数  $f$  是常数, 才会得到如图 2-8 所示中的  $OB$  线; 但实际上, 阻尼系数  $f$  是一个变量, 因此阻尼力  $F_f$  与速度  $v$  的关系是非线性的, 如图 2-8 中的  $AC$  所示。还有许多实际例子, 例如当弹簧的弹性疲乏时, 弹簧力也不是线性的。由此看来, 2.2

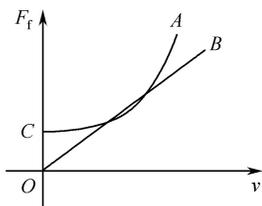


图 2-8 阻尼器的摩擦阻尼力  $F_f$  与速度  $v$  的关系

节建立的系统微分方程忽略了一些次要的非线性因素，做了简化考虑而得到了线性微分方程。

由于系统中非线性因素的存在，我们可以得到数学模型的另一个重要特性：精确性和简化性，即同一个系统的数学模型也可能不唯一。具体的物理系统，其各个变量之间的关系是非常复杂的，一般都存在非线性，因此要建立精确的数学模型应该非线性偏微分方程，但是其求解过程相当困难或者根本不可能，不利于我们对系统的分析。所以在实际应用中，常在误差允许的条件下，忽略一些对系统影响较小的因素，用简化的数学模型表示实际系统。这就出现了一个系统可以有两种表示方法。精确性和简化性是相对的，既不能只求精确而使模型复杂难解，也不能只图简化而丢失了系统的特性，要具体系统具体分析，掌握好“度”。

如果有些系统需要建立精确的数学模型，或者系统的某些非线性因素必须考虑时，那么得到的系统数学模型就是非线性的。非线性方程的求解很困难，会给理论研究工作带来很大障碍，那么如何处理这类问题呢？本节将给出一个普遍的近似处理方法：应用小偏差线性化概念处理非线性方程。

### 2.3.1 小偏差线性化概念

自动控制系统一般工作在正常的工作状态，这个工作状态称为工作点。由于控制过程连续进行，通常系统变量的变化范围不是很大，即偏离工作点的差值很小。在这种情况下，如果我们研究的是系统在某一个工作点附近的性能，就可以将此工作点附近的区域特性用该点处的切线来代替。那么在这个区域上的系统特性就可以表示为线性的了。这就是常说的“小偏差”理论。

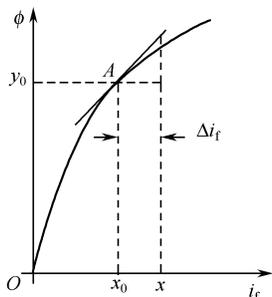


图 2-9 电动机激磁回路工作特性

如图 2-9 所示是电动机激磁回路的工作特性。系统的工作点是  $A$  点，在控制过程中， $i_f$  在  $A$  点附近的  $\Delta i_f$  内小范围变化，此时就可以把  $A$  点邻域内的特性用该点处的切线来代替。这样，在  $A$  点的  $\Delta i_f$  范围内，系统的特性就可以表示为线性的了。

所谓线性化，是指应用线性化数学模型来代替原来的非线性模型的过程。需要注意的是，非线性系统可以进行线性化处理必须满足以下 3 个条件：

- (1) 系统工作在一个正常的工作状态，有稳定的工作点；
- (2) 运行过程中产生的偏差量必须是小偏差；
- (3) 非线性函数在工作点处各阶导数或偏导数存在。

### 2.3.2 线性化方法

设非线性系统

$$y = f(x) \quad (2-37)$$

为了获得非线性系统的线性数学模型，我们假定变量对于某一工作状态的偏离很小。如图 2-9 所示，系统的额定工作状态相应于  $(x_0, y_0)$ ，如果  $\Delta i_f$  很小，那么式 (2-37) 可以在该点附近展开成泰勒级数

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2 + \dots \quad (2-38)$$

因为在  $x_0$  附近变化，所以  $x - x_0$  很小，我们忽略  $x - x_0$  的高阶项，式 (2-38) 可写成

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0)$$

即

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

等同于  $\Delta f(x) = f'(x_0)\Delta x$  或  $\Delta y = f'(x_0)\Delta x$ 。习惯写成

$$y = f'(x_0)x \quad (2-39)$$

式(2-39)中因为  $f'(x_0)$  是个常数, 所以  $y$  和  $x$  之间是线性关系。

**【例 2-7】** 磁场控制直流电动机如图 2-10 所示。考虑磁场的非线性特性, 列写小偏差激磁回路的微分方程。激磁回路中磁链  $\psi$  与电流  $i_f$  的非线性关系如图 2-11 所示。

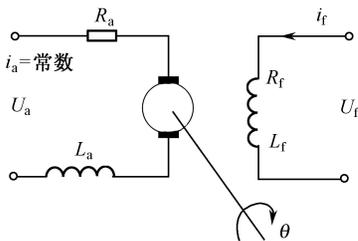


图 2-10 直流电动机原理图

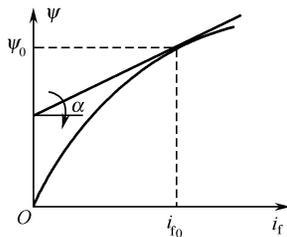


图 2-11 磁链  $\psi$  与电流  $i_f$  的非线性关系

**解** 在不考虑非线性的情况下, 激磁回路微分方程为

$$R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} = u_f$$

式中:  $L_f$  设为常数。

若考虑激磁回路中磁链  $\psi$  与电流  $i_f$  的非线性关系, 则原始方程为

$$R_f i_f + \frac{d\psi}{dt} = u_f \quad (2-40)$$

式中:  $\psi$  和  $i_f$  是非线性关系。除非在磁路不饱和的情况下, 才接近线性。用泰勒级数展开为

$$\psi = \psi_0 + \left. \left( \frac{d\psi}{di_f} \right) \right|_{i_{f0}} \Delta i_f + \frac{1}{2!} \left. \left( \frac{d^2\psi}{di_f^2} \right) \right|_{i_{f0}} (\Delta i_f)^2 + \dots$$

由于研究电动机平衡工作点附近的小偏差过程,  $\Delta u_f$  很小, 所以  $\Delta i_f$  也很小。略去高次项得

$$\psi = \psi_0 + \left. \frac{d\psi}{di_f} \right|_{i_{f0}} \Delta i_f \quad (2-41)$$

式中:  $\left. \frac{d\psi}{di_f} \right|_{i_{f0}} = \tan \alpha = L'_f$  ( $L'_f$  为平衡点动态电感, 该点它为常值, 但在不同工作点它有不同  
的值)。

从式(2-41)得

$$\Delta \psi = \psi - \psi_0 = L'_f \Delta i_f \quad (2-42)$$

令

$$u_f = u_{f0} + \Delta u_f \quad (2-43)$$

$$\Delta i_f = i_f - i_{f0} \quad (2-44)$$

将式(2-42)~式(2-44)代入式(2-40)得

$$R_f(i_{f_0} + \Delta i_f) + \frac{d}{dt}(\psi_0 + L'_f \Delta i_f) = u_{f_0} + \Delta u_f$$

在平衡点处

$$R_f i_{f_0} + \frac{d\psi_0}{dt} = u_{f_0}$$

从而得激磁回路偏差量微分方程为

$$L'_f \frac{d\Delta i_f}{dt} + R_f \Delta i_f = \Delta u_f$$

从以上小偏差线性化的讨论可以得出如下结论。

1. 应用小偏差线性化时，必须明确预定工作点的参数值。对于不同的工作点，得出的线性化微分方程的系数也各不相同。
2. 如果系统或元件的原有特性很接近线性时，则经线性化得到运动方程，即使对于偏差信号的变化范围较大时，仍能适用。反之，只能适用于微分信号。
3. 有一些元件的特性，处处不满足展开成泰勒级数的条件，对于此类非线性不能应用小偏移线性化的概念进行线性化。这类非线性特性称为本质非线性。

## 2.4 微分方程求解

建立微分方程的目的是为了从理论上了解和分析系统，如果要掌握系统的瞬态响应过程，还必须求解微分方程。求解线性常系数微分方程的方法通常有两种：一是经典法，另一种是拉普拉斯变换法。

经典法就是直接对系统的微分方程求解，可以得到系统的时域解，物理意义明显；它的缺点就是求解过程复杂，尤其是当方程阶次较高时，解联立方程组更是困难。

利用拉普拉斯变换求解线性常系数微分方程的方法在工程上广泛应用，它可以把复杂的微积分运算转化成简单的代数方程求解。如果所有的初始条件均为零，那么微分方程与拉普拉斯变换的对应关系为

$$s \leftrightarrow \frac{d}{dt}, \quad s^2 \leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2}, \quad \dots, \quad s^n \leftrightarrow \frac{d^n}{dt^n}$$

【例 2-8】 设系统的微分方程为

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 2 \frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = r(t)$$

已知  $r(t) = \delta(t)$ ,  $c(0) = c'(0) = 0$ , 求系统的输出响应。

解

(1) 系统输入  $r(t) = \delta(t)$ , 其拉普拉斯变换为

$$R(s) = L[r(t)] = L[\delta(t)] = 1$$

(2) 系统的初始条件为零，按照微分方程与拉普拉斯变换的对应关系，将微分方程左右两边求拉普拉斯变换，得

$$s^2 C(s) + 2sC(s) + 2C(s) = 1$$

整理后得

$$C(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

(3) 求上式拉普拉斯反变换

$$c(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 2s + 2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2 + 1}\right]$$

查拉普拉斯变换表, 可得

$$c(t) = e^{-t} \sin t$$

## 2.5 建立系统的复域数学模型

利用拉普拉斯变换不但可以简化微分方程的求解, 还可以将用线性定常微分方程描述的数学模型转换为复数  $s$  域内的数学模型——传递函数。

### 2.5.1 传递函数的定义

传递函数的定义为: 在零初始条件下, 线性定常系统输出量的拉普拉斯 (Laplace) 变换与系统输入量的拉普拉斯变换之比。系统的传递函数通常用  $G(s)$  表示。

系统一般方程式为

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \quad (2-45)$$

等式两端逐项取拉普拉斯变换, 并设初始条件为零, 有

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) C(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) R(s)$$

可得系统输出量为  $C(s)$ 、输入量为  $R(s)$  的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (2-46)$$

式 (2-46) 的分母就是系统的特性多项式。从以上可知, 对线性定常系统, 当系统的微分方程知道后, 只要把方程式中各阶导数用相应的  $s$  变量代替, 就可以直接求得系统的传递函数。

**【例 2-9】** 2.2 节中的例 2-1 的 RLC 网络的微分方程为

$$T_1 T_2 \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + T_2 \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

求其传递函数。

**解** 两端取拉普拉斯变换, 并设初始条件为零, 可得

$$(T_1 T_2 s^2 + T_2 s + 1) U_o(s) = U_i(s)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{T_1 T_2 s^2 + T_2 s + 1}$$

**【例 2-10】** 2.2 节的例 2-3 中的弹簧—质量—阻尼器系统的微分方程为

$$T_M^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_f \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{1}{k} F(t)$$

求其传递函数。

解 两端取拉普拉斯变换, 并设初始条件为零, 可得

$$(T_M^2 s^2 + T_f s + 1)Y(s) = \frac{1}{k} F(s)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1/k}{T_M^2 s^2 + T_f s + 1}$$

【例 2-11】 2.2 节的例 2-5 中, 水箱入水流量  $Q_1(t)$  与蓄水槽的液面高度  $h(t)$  之间的微分方程为

$$A \frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{R} h(t) = Q_1(t)$$

试求该系统的传递函数。

解 两端取拉普拉斯变换, 并设初始条件为零, 可得

$$\left(As + \frac{1}{R}\right)H(s) = Q_1(s)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_1(s)} = \frac{R}{ARs + 1}$$

【例 2-12】 2.2 节中的例 2-4 的电枢控制的直流电动机的微分方程为

$$T_a T_m \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + T_m \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \frac{1}{k_e} U_a(t)$$

求其传递函数。

解 两端取拉普拉斯变换, 并设初始条件为零, 可得

$$(T_a T_m s^2 + T_m s + 1)\omega(s) = \frac{1}{k_e} U_a(s)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{U_a(s)} = \frac{1/k_e}{T_a T_m s^2 + T_m s + 1}$$

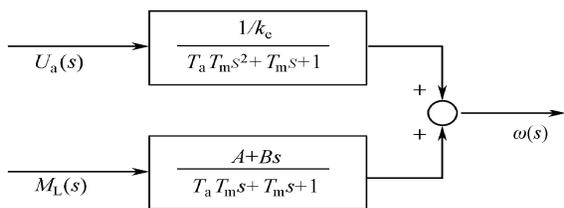
如果输入不是一项, 并含有导数项, 则可用线性叠加原理。如例 2-4 中  $M_L \neq 0$ , 则微分方程中多了两项, 即

$$T_a T_m \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + T_m \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \frac{1}{k_e} U_a(t) + AM_L(t) + B \frac{dM_L(t)}{dt}$$

可以得到  $M_L - \omega$  的传递函数为

$$G'(s) = \frac{\omega(s)}{M_L(s)} = \frac{A + Bs}{T_a T_m s^2 + T_m s + 1}$$

系统的方块图如图 2-12 所示。

图 2-12 考虑负载力矩  $M_L$ 

## 2.5.2 传递函数的性质

1. 传递函数表征系统本质的特性，而与输入量无关。但是它不能表明系统的物理结构，如许多物理性质不同的系统，可以有相同的传递函数。
2. 传递函数复变量  $s$  的有理分式，其分子多项式和分母多项式的各项系数均为实数。
3. 传递函数的分母多项式的最高阶次  $n$  高于或等于分子多项式的最高阶次  $m$ ，即  $n \geq m$ 。这是因为实际系统总是具有惯性，以及能源又是有限的缘故。
4. 传递函数具有复数零、极点，则必然共轭。

## 2.5.3 零点、极点和传递系数

系统的传递函数  $G(s)$  是复变量  $s$  的函数，经因子分解后得

$$G(s) = \frac{K_1(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad (2-47)$$

式中： $-z_1, -z_2, \dots, -z_m$  是  $G(s)$  分子多项式等于零时的根，称为系统的零点；而  $-p_1, -p_2, \dots, -p_n$  为分母多项式（即特征多项式）等于零时的根，称为系统的极点（它就是特征根）。如果分子、分母有公因子，尚未抵消，抵消后，留下的零点、极点，则称为传递函数的零点和极点。

在式 (2-47) 中，当  $s=0$  时，有

$$G(0) = \frac{b_0}{a_0} = \frac{K_1(z_1)(z_2)\cdots(z_m)}{(p_1)(p_2)\cdots(p_n)} \quad (2-48)$$

若系统输入为单位阶跃函数， $R(s)=1/s$ ，根据拉普拉斯变换终值定理，系统的输出稳态值为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = C(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0)$$

所以  $G(0)$  决定着系统的稳态性能， $G(0)$  就是系统的传递系数，它由系统传递函数的常数项决定。

现在我们举例说明零、极点及传递系数对系统的影响。

**【例 2-13】** 系统微分方程为

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 3 \frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = \frac{dr(t)}{dt} + 3r(t)$$

求在零初始条件下的系统单位阶跃响应，并说明零、极点和传递系数对系统的影响。

**解** 系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

它有两个极点： $s = -1, -2$ ；一个零点： $s = -3$ 。传递系数  $G(0) = 3/2$ 。初始条件为零， $r(t)$  为单位阶跃函数，即  $R(s) = 1/s$ 。

系统的输出

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = sC(s)|_{s=0} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{2} = G(0)$$

$$B = (s+1)C(s)|_{s=-1} = \frac{s+3}{s(s+2)} \Big|_{s=-1} = -2$$

$$C = (s+2)C(s)|_{s=-2} = \frac{s+3}{s(s+1)} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

得

$$C(s) = \frac{3}{2} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

对上式两端取拉普拉斯反变换，得到系统单位阶跃响应

$$c(t) = L^{-1}(C(s)) = \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \quad (2-49)$$

若零点改为  $s = -10$ ，经计算得  $A = 5$ ， $B = -9$ ， $C = 4$ ，得到系统单位阶跃响应为

$$c(t) = 5 - 9e^{-t} + 4e^{-2t} \quad (2-50)$$

从式 (2-49) 和式 (2-50) 中可知：

(1)  $c(\infty) = \frac{3}{2}$  或  $c(\infty) = 5$ ，传递系数决定着系统的稳态响应；

(2)  $c(t)$  是指数衰减过程，指数的系数就是系统的极点，所以说，系统的极点决定着系统的瞬间响应（极点是复变数的情况，指数的系数是复极点的实部，所以极点仍决定系统的瞬间响应）；

(3) 零点只影响部分分式的分子，所以，系统的零点不影响系统的稳定性，但对瞬间响应的曲线形状有影响。

## 2.6 系统的典型环节及传递函数

自动控制系统是由各种元部件相互连接组成的，虽然从物理结构及作用原理上来看，各个部件是不相同的，但从动态性能或数学模型来看，这些不同的元部件可以分类成为几个基本环节，即称为典型环节。因此分析或设计一个控制系统，就可以将系统的传递函数分解为若干相对应的典型环节，为研究系统带来很大方便。

### 2.6.1 比例环节

比例环节的输入量与输出量的微分方程为

$$c(t) = Kr(t) \quad (2-51)$$

式中： $K$  为放大倍数。其响应曲线如图 2-13 所示。

比例环节的传递函数为

$$G(s) = K \quad (2-52)$$

比例环节的特点：输出不失真、不延滞、成比例地复现输入信号的变化。

比例环节的实例有线性电位器、运算放大器和主从齿轮传动比等，分别如图 2-14(a)、(b)和(c)所示；相应的传递函数如图 2-15(a)、(b)和(c)所示。

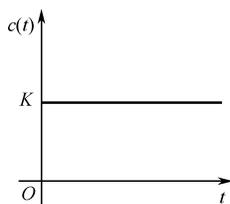


图 2-13 比例环节阶跃响应曲线

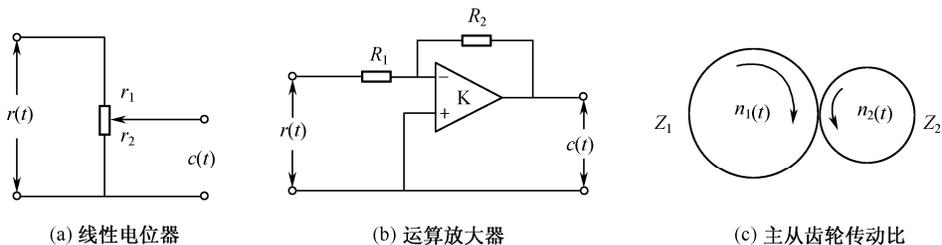


图 2-14 比例环节实例

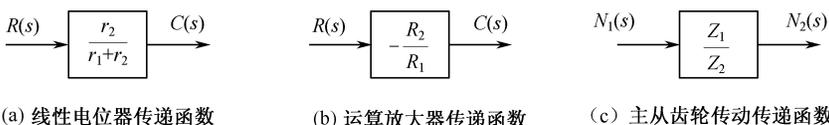


图 2-15 比例环节的传递函数

### 2.6.2 惯性环节

惯性环节的微分方程为

$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = Kr(t) \quad (2-53)$$

式中： $T$  是系统时间常数， $K$  是比例系数。

惯性环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (2-54)$$

它有一个负极点。当输入为单位阶跃函数时，环节的输出将按指数曲线上升，具有惯性。惯性环节有时也称为非周期环节，其阶跃响应曲线如图 2-16 所示。

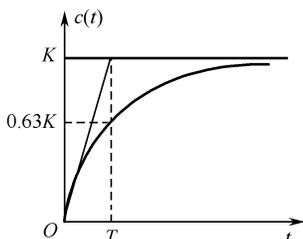


图 2-16 惯性环节阶跃响应曲线

从传递函数中可以看出只包含一个  $s$ ，所以它的物理系统中只包含一个储能元件。如图 2-17(a)中的 RL 电路、图 2-17(b)中的 RC 电路和图 2-17(c)中的机械位移系统等，都属于惯性环节。

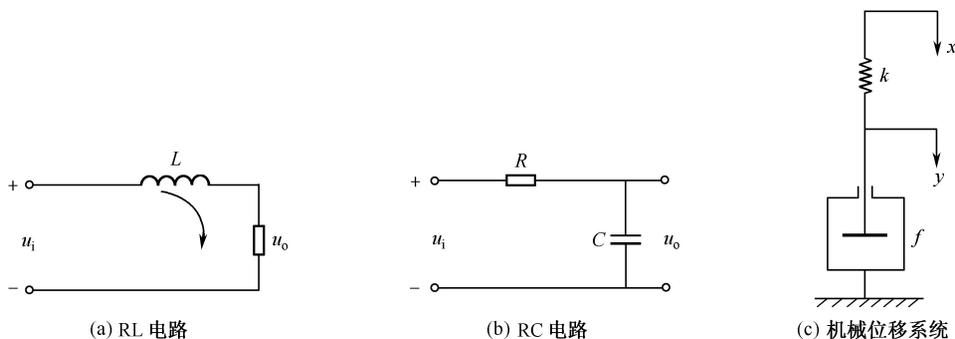


图 2-17 惯性环节

### 2.6.3 积分环节

积分环节的微分方程为

$$c(t) = \frac{1}{T} \int_0^t r(t) dt$$

$$T \frac{dc(t)}{dt} = r(t) \quad (2-55)$$

式中： $T$  是积分时间常数。

积分环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{Ts} \quad (2-56)$$

它有一个极点，即  $s = 0$ ，当积分环节的输入为阶跃函数时，其输出为输入对时间的积分，它随着时间直线增加，如图 2-18 所示，直线的增长速度由  $1/T$  决定，即  $T$  越小，上升越快。当输入突然去除时，积分停止，输出维持不变，故有记忆功能。所以它被用来改善控制系统的稳态性能。

积分环节的实例如图 2-19(a)和(b)所示，其中图(a)为电路系统，图(b)为阻尼系统。

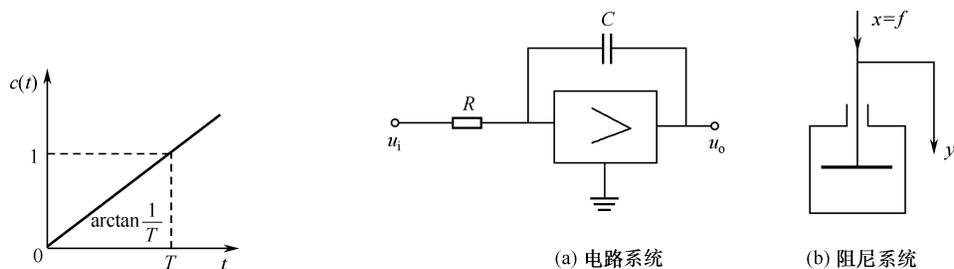


图 2-18 积分环节阶跃响应曲线

图 2-19 具有积分环节特性的实例

如图 2-19(a)所示是由运算放大器构成的积分环节，传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{RCs} = \frac{1}{Ts}$$

式中：设  $T = RC$ 。

如图 2-19(b)所示是由阻尼器构成的积分环节，传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{fs} = \frac{1}{Ts}$$

式中： $f$  是阻尼系数，设  $T = f$ 。

### 2.6.4 微分环节

微分环节的微分方程是

$$c(t) = T \frac{dr(t)}{dt} \quad (2-57)$$

式中： $T$  是微分时间常数。它有一个零点在  $s$  平面的原点，微分环节的输出与输入量的一阶导数成正比。

理想微分环节的传递函数为

$$G(s) = Ts \quad (2-58)$$

由于微分环节能预示输入信号的变化趋势，所以常用来改善系统的动态性能，如图 2-20 所示，是近似理想的微分环节。但是，在实际系统中，用微分环节来改善系统性能时，也有缺点，因为微分环节容易引进高频噪声（对高频干扰有放大作用）。所以，在实际系统中，应用微分环节常常带一个小惯性环节。

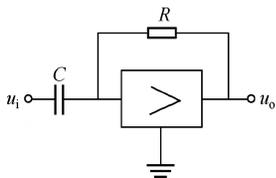


图 2-20 实际的微分环节

### 2.6.5 振荡环节

振荡环节是二阶微分方程

$$T^2 \frac{dc^2(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad (2-59)$$

式中： $T$  是时间常数， $\zeta$  是阻尼比， $0 < \zeta < 1$ 。振荡环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n \zeta s + \omega_n^2} \quad (2-60)$$

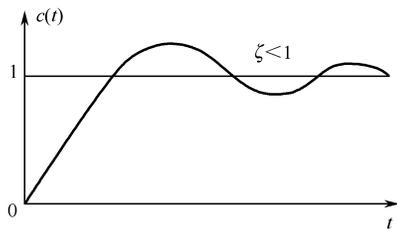


图 2-21 振荡环节的阶跃响应

式中： $\omega_n = 1/T$ ，称为无阻尼自然振荡频率。当输入为单位阶跃函数时，输出则为衰减的振荡过程（见图 2-21）。具体形状由  $\zeta$  和  $\omega_n$  两个参数决定。振荡环节实际是一个二阶系统，后面对它还要进行详细分析。

振荡环节的实例很多，如 2.2.1 节中的电路方程、2.2.2 节中的机械力学方程等。

### 2.6.6 延时环节

延时环节也称为时滞环节，其数学表达式为

$$c(t) = r(t - \tau) \quad (2-61)$$

式中： $\tau$  是延时时间。延时环节的传递函数为

$$G(s) = e^{-\tau s} \quad (2-62)$$