

第3章 电路的暂态分析

引言

在自然界中,各种事物的运动过程通常存在着不同稳态之间的暂态,如图 3-1(a)所示,高铁列车从静止加速到匀速运动的过程,图 3-1(b)某型飞机从地面上升到某一高度匀速飞行的过程,相对于稳态来讲都属于暂态过程。



(a)高铁列车进站

(b)某型飞机起飞

图 3-1 暂态过程

在电路中,同样存在着暂态过程,又称为暂态。前面各章讨论的线性电路中,当电源(激励)电压为恒定值时,电路中各部分电压或电流(响应)也是恒定的,电路的这种工作状态称为稳定状态,简称稳态。当电路中含有储能元件时,电路从一个稳态过渡到另一个稳态会出现暂态过程,简称暂态。暂态电路被广泛应用在航空军事、生产生活等各个领域。如飞机电路中,可以用来实现延时控制,以及通信信号特殊波形产生等,但在电力系统中,暂态过程的出现可能产生比稳定状态大得多的过电压或过电流,若不采取一定的保护措施,就会损坏电气设备,引起不良后果。因此研究电路的暂态过程,目的在于掌握规律以便在实际应用中用其“利”,克其“弊”。

学习目标:

1. 掌握换路定则及暂态过程初始值的确定方法;
2. 了解一阶电路的零输入响应、零状态响应和全响应的分析方法;
3. 明确一阶电路的暂态响应与时间常数的关系;
4. 熟悉微分电路和积分电路的工作原理;
5. 熟练掌握三要素法求解一阶电路的方法。

3.1 储能元件

根据元件储存能量(电场能和磁场能)形式的不同,储能元件分为电容元件和电感元件。

3.1.1 电容元件

电容元件是储存电场能量的元件。它的基本结构由两个平行的金属极板中间加有绝缘介质组成。电容器种类繁多,结构、材质、用途各异,广泛地应用在电子、通信、计算机和电力系统、飞机仪表设备等许多领域,图 3-2 所示为常见的电容器。

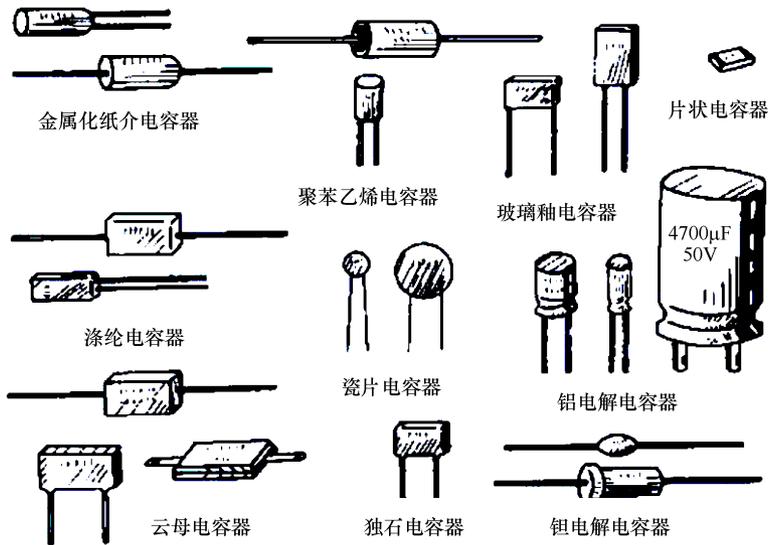


图 3-2 常用电容器

电容元件电路符号如图 3-3 所示。在电容元件的两端加电压 u ，两个极板上聚集的电荷量 q 与电容两端电压 u 之比为电容，用 C 表示，即

$$C = \frac{q}{u} \quad (3-1)$$

上式中电容 C 为常数，即 q 与电压 u 呈线性关系，满足此条件的电容为线性元件。本书只讨论线性电容元件。

在国际单位制中，电容量的单位为法拉(F)，常用微法(μF)或皮法(pF)作单位。它们的换算关系为

$$1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}, \quad 1\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$$

1. 电容元件电压与电流的关系

在电压、电流为关联参考方向时，有

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (3-2)$$

将式(3-1)代入可得

$$i = C \frac{du}{dt} \quad (3-3)$$

从电压与电流的关系可以看出：

① 任何时刻线性电容的电流与该时刻电压的变化率成正比。电压变化越快，变化率越大，电流就越大，如果电压不变，即加上直流电压，则电流 $i = 0$ ，电容相当于开路。所以，电容元件具有“隔直流、通交流”的作用。

② 在实际电路中，通过电容的电流 i 总为有限值，这意味着电压的变化率为有限值，那么，电容两端的电压 u 必定是时间 t 的连续函数，所以电容两端电压是不能跃变的。

当电容元件的电压和电流为非关联参考方向时，电容元件的电压与电流的关系为

$$i = -C \frac{du}{dt} \quad (3-4)$$

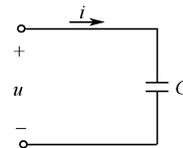


图 3-3 电容元件电路符号

2. 电容元件的储能特性

某型飞机高能点火电路如图 3-4 所示， U 为电源电压，BH 为电压变换器，D 为二极管，BDZ 为电咀，点火电路中关键的元件就是电容器，电容器将内部所储存的电能通过电咀放电产生火花，从而使发动机点火。

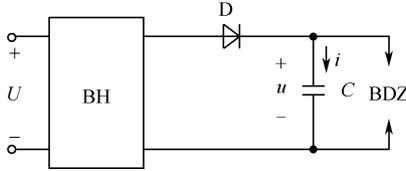


图 3-4 某型飞机高能点火电路原理图

电容元件储存的能量为

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{-\infty}^t p d\xi = \int_{-\infty}^t u i d\xi = \int_{-\infty}^t C u \frac{du}{d\xi} d\xi = C \int_{u(-\infty)}^{u(t)} u du \\
 &= \frac{1}{2} C u^2(t) - \frac{1}{2} C u^2(-\infty)
 \end{aligned} \tag{3-5}$$

其中， u 和 i 为电容的端电压和流过的电流。图 3-4 中所示电流 i 方向为电容充电时的方向，放电时则正好相反。一般认为 $u(-\infty) = 0$ ，得电容的能量为

$$W = \frac{1}{2} C u^2(t) \tag{3-6}$$

电容电压反映了电容的储能状态，不管电容上的电压为正值还是负值，电容所储存的能量一定大于或等于零。式(3-5)表明，当电容元件的电压升高时，说明电容储存的电场能量增加，称为“电容充电”；当电容元件的电压降低时，电场能量减小，释放充电时存储的能量，称为“电容放电”。由于电容只储存电场能量而不消耗能量，因此称电容元件为储能元件。

3.1.2 电感元件

电感元件是储存磁场能量的元件。在发电机、变压器和电动机中，电感线圈扮演着极其重要的角色；同时，在通信(如收音机、电视机等)、控制(如继电器、飞机点火电路等)许多领域都有着重要的用途。常用电感器如图 3-5 所示。

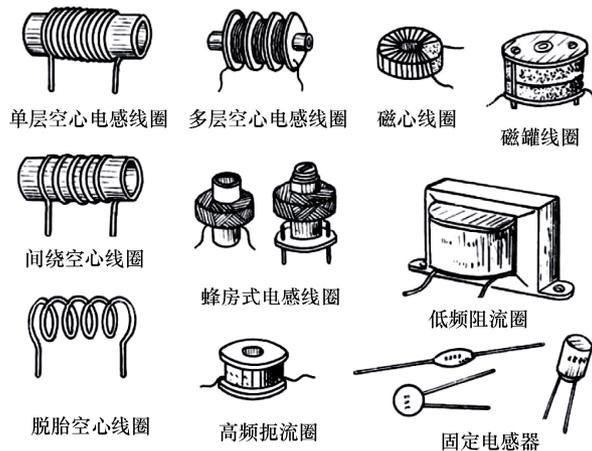


图 3-5 常用电感器

如图 3-6(a)所示为电感元件(线圈),由电磁感应定律可知,当线圈中有电流 i 流过时,产生磁通 Φ ,若线圈的匝数为 N ,则穿过线圈各匝的总磁通量为 $\psi = N\Phi$, ψ 称为线圈的磁通链。磁通的参考方向与电流的参考方向应满足右手螺旋定则,在此规定下,磁通链与电流的比值为

$$L = \frac{\psi}{i} \quad (3-7)$$

L 为一正数,称为线圈的电感,或称为自感,电感的大小反映了线圈通电以后产生磁通链能力的强弱。电感元件用 L 表示,其电路如图 3-6(b)所示。在国际单位制中,磁通 Φ 和磁通链 ψ 的单位是韦伯(Wb),电感 L 的单位是亨利(H),此外,还有毫亨(mH)、微亨(μH),它们之间的关系是

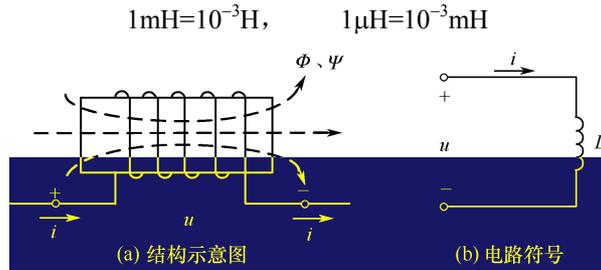


图 3-6 电感元件

1. 电感元件的电压与电流关系

在图 3-6(a)中,当电感元件中通有随时间变化的电流 i 时,穿过线圈的磁通也要随时间变化,这时要在这个线圈中产生感应电压,由电磁感应定律可知其大小为

$$|u| = \left| \frac{d\psi}{dt} \right|$$

为了将电感中产生的感应电压的大小和方向用一个公式来统一表达,规定感应电压的参考方向与产生磁通的电流的参考方向为关联参考方向(见图 3-6),感应电压可表示为

$$u = \frac{d\psi}{dt} \quad (3-8)$$

将式(3-7)磁通链与电流之间的关系代入,则得

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (3-9)$$

从电压与电流的关系可看出:

① 任何时刻,电感元件两端的电压与该时刻的电流变化率成正比,电流变化率越大,感应电压就越大。若电流不变化,即在直流电路中,电压 $u=0$,电感相当于短路。因此,电感具有“通低频、阻高频”的作用。

② 由于电感两端的电压为有限值,故电感中的电流不能跃变。

2. 电感元件的储能特性

飞机电感式点火系统就是利用电感储存磁场能量的特性使电咀产生火花的,其原理电路如图 3-7 所示,系统输入的是直流低压,经电感线圈将其变换为高压脉冲,使电咀上产生火花放电,而火花能量就是由电感线圈中储存的磁场能转换来的。电感线圈主要由初级线圈、铁心及电磁断续器组成。电磁断续器包括触点、衔铁和弹簧片。电容 C 的作用是削弱触点间的电弧。

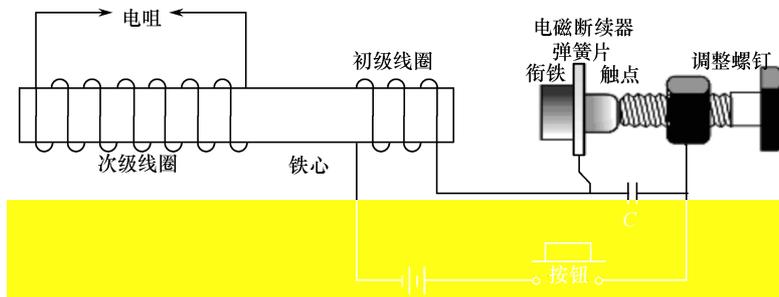


图 3-7 飞机电感式点火系统

电感元件从 $-\infty$ 到 t 时间内吸收的能量为

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{-\infty}^t p d\xi = u i d\xi = \int_{-\infty}^t L i \frac{di}{d\xi} d\xi = L \int_{i(-\infty)}^{i(t)} i di \\
 &= \frac{1}{2} L i^2(t) - \frac{1}{2} L i^2(-\infty)
 \end{aligned} \tag{3-10}$$

一般认为 $i(-\infty) = 0$ ，得电感元件的储能为

$$W = \frac{1}{2} L i^2(t) \tag{3-11}$$

式(3-11)表明，无论 i 为正值或负值，电感所储存的能量一定大于或等于零。当 i 增大时，元件吸收能量，磁场能上升；当 i 减小时，释放磁场能，储能下降；当 $i = 0$ ，储能为零。可见，线性电感元件不产生能量，也不消耗能量，而是以磁场能的形式储存在电感线圈形成的磁场中，因此，称电感元件为储能元件。

3.2 暂态过程与换路定则

3.2.1 暂态过程

在日常生活中，经常会遇到应用暂态过程工作的电路。比如家用电冰箱在断电后 5min 内又恢复通电的情况，这时电冰箱压缩机可能会因系统内压力过大而出现启动困难，严重时甚至会烧毁压缩机，影响电冰箱的使用寿命，电冰箱延时保护电路能在恢复供电时，自动延时 5~8min 再接通电源以达到保护压缩机的目的。

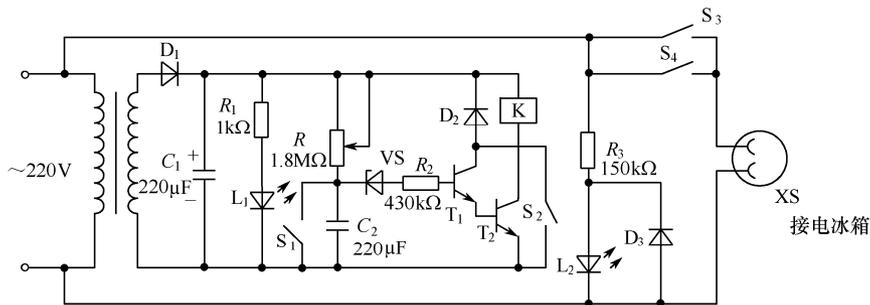
图 3-8(a)为电冰箱延时保护电路原理图，图 3-8(b)为电冰箱延时保护等效电路，RC 串联电路组成延时启动电路。

RC 电路的输入端接 12V 直流电源，输出端接电路系统。当通电时，从 RC 电路的输入电压 u_i 和输出电压 u_c 的波形中看到， u_i 是从 0V 瞬间上升到 12V，而 u_c 则从 0V 缓慢上升到 12V，输出电压 u_c 在时间上相对于输入电压 u_i 出现了延时，实现了电路系统的延时启动。改变 R 的数值，可改变延时通电的时间。

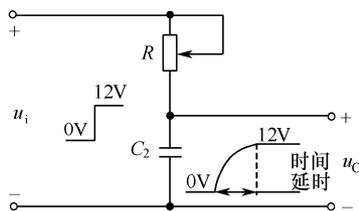
一般来说，电路由一个稳态向另一个稳态的变化过程称为暂态过程。由于电路的暂态过程暂时存在，简称暂态。

电路产生暂态过程的因素为：

① 外因——电路的接通或断开、电路参数或电源的变化、电路的改接等，这些能引起电路暂态过程的所有外因统称为换路。



(a) 电冰箱延时保护电路原理图



(b) 工作原理等效图

图 3-8 冰箱保护器延时电路

② 内因——电路中含有储能元件电感或电容。

因为能量的储存和释放不是一瞬间能完成的，所以储能元件的能量在换路时是不能跃变的，这是电路产生暂态过程的根本原因。

3.2.2 换路定则

要对暂态过程进行分析，首先需要确定的就是暂态过程的初值，确定初值的重要依据就是换路定则。

由于电容内部的能量与其电压有关，电感的能量与其电流有关，而能量是不能跃变的，也就是说，电容上的电压 u_c 不能跃变，电感中的电流 i_L 也不能跃变。

为便于分析，通常能够认为换路是在瞬间完成的。设 $t=0$ 为换路瞬间，用 $t=0_-$ 表示换路前的终了瞬间， $t=0_+$ 表示换路后的初始瞬间。 0_- 和 0_+ 在数值上都等于 0，但两者含义不同。从 $t=0_-$ 到 $t=0_+$ ，电容上的电压和电感上的电流不能跃变，这称为换路定则，可表示为

$$u_c(0_+) = u_c(0_-), \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (3-12)$$

换路定则说明：在换路前后，电容电压 u_c 和电感电流 i_L 在 0_+ 时刻值等于 0_- 时刻值，其值具有连续性。需要注意的是，换路定则只揭示了换路前后电容电压 u_c 和电感电流 i_L 不能发生突变的规律，对于电路中其他的电压、电流，包括电容电流 i_C 和电感电压 u_L ，在换路瞬间都是可以突变的。

3.2.3 暂态过程初始值的计算

根据换路定律对时间 t 的表示规定，将 $t=0_+$ 时刻的电压、电流值称为暂态过程的初始值，用 $f(0_+)$ 表示。初始值可按以下步骤确定：

① 先求 $t=0_-$ 时刻的 $u_c(0_-)$ 或 $i_L(0_-)$ (这一步要用 $t=0_-$ 时刻的等效电路进行求解，此时电路尚处于稳态，若电路为直流电源激励，则电容开路，电感短路)。

② 根据换路定律确定 $u_c(0_+)$ 或 $i_L(0_+)$ 。

③ 以 $u_c(0_+)$ 或 $i_L(0_+)$ 为依据，应用欧姆定律、基尔霍夫定律和直流电路的分析方法确定电路

中其他电压、电流的初始值(这一步要用 $t = 0_+$ 时刻的等效电路进行求解, 此时, 电容等效为电压值为 $u_C(0_+)$ 的电压源, 电感等效为电流值为 $i_L(0_+)$ 的电流源)。

【例 3-1】 在图 3-9 中, 已知 $E = 20\text{V}$, $R_0 = 30\Omega$, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 40\Omega$ 。开关 S 闭合前电路已处于稳态, 求 S 闭合后各电压和电流的初始值。

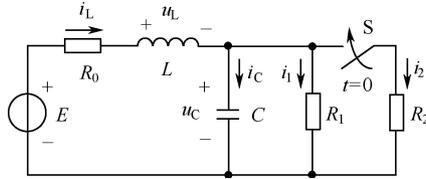


图 3-9 例 3-1 的图

解 $t = 0_-$ 时为直流电路, 电感相当于短路, 电容相当于开路。于是得等效电路如图 3-10(a)所示。由图可得

$$i_L(0_-) = \frac{E}{R_0 + R_1} = \frac{20}{30 + 20} = 0.4\text{A}$$

$$u_C(0_-) = R_1 i_L(0_-) = 20 \times 0.4 = 8\text{V}$$

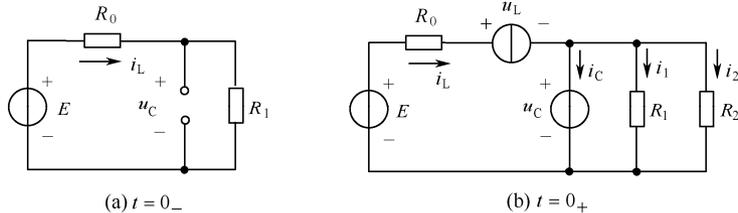


图 3-10 例 3-1 的等效电路图

根据换路定则

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0.4\text{A}$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 8\text{V}$$

求其他初始值时, 可画出 $t = 0_+$ 时的等效电路, 如图 3-10(b)所示, 由图可得

$$u_L(0_+) = E - R_0 i_L(0_+) - u_C(0_+) = 20 - 30 \times 0.4 - 8 = 0\text{V}$$

$$i_1(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{R_1} = \frac{8}{20} = 0.4\text{A}$$

$$i_2(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{R_2} = \frac{8}{40} = 0.2\text{A}$$

$$i_C(0_+) = i_L(0_+) - i_1(0_+) - i_2(0_+) = 0.4 - 0.4 - 0.2 = -0.2\text{A}$$

换路前后, 电容上的电流和电感上的电压以及电阻上的电压、电流是可以跃变的。

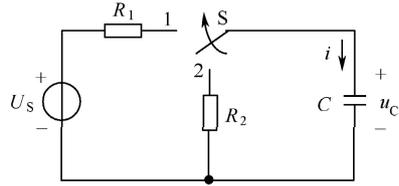
3.3 RC 电路的响应

只含有一个电容元件(储能元件)或可等效为一个电容元件(储能元件)的线性电路, 不论是简单或复杂的, 都可以等效为最简的 RC 电路。RC 电路结构虽然简单, 在生产生活和军事领域却有着广泛的应用。电子闪光灯是利用 RC 电路的暂态响应原理进行工作的。

如图 3-11(b)所示是电子闪光灯等效电路，它由直流电源 U_S 、限流电阻 R_1 和闪光灯等效电阻 R_2 并联的电容 C 组成。



(a) 带闪光灯的照相机



(b) 闪光灯等效电路

图 3-11 闪光灯电路

假设电容上已充有电压 $u_C(0_-) = U_0$ ，当按下相机快门，相当于开关从 1 合向 2，此时电容器通过闪光灯放电，这一过程可看作零输入响应；当闪光灯闪烁过后，电容放电完毕，电源马上开始对电容充电，这相当于开关从 2 合向 1，这一过程可看作零状态响应。下面分别对这两种响应展开定量分析。

3.3.1 RC 电路的零输入响应

RC 电路的零输入响应：无外加激励，输入信号为零，仅由储能元件的初始储能 $u_C(0_+)$ 所产生的响应。其实质就是 RC 电路的放电过程。

如图 3-12 所示为闪光灯放电等效电路图。此处 R 为放电电阻，即图 3-11 中闪光灯等效电阻 R_2 ， $u_C(0_-) = U_0$ 。

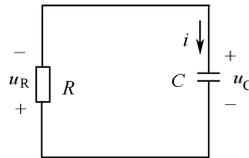


图 3-12 闪光灯放电等效电路图

1. 电容电压 u_C 的变化规律

利用 KVL 列出换路后 $t \geq 0$ 的电路方程为

$$u_R + u_C = 0$$

将 $u_R = iR$ ， $i = C \frac{du_C}{dt}$ 代入上式得

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (3-13)$$

上式是一阶线性常系数齐次微分方程，其通解为

$$u_C = Ae^{pt}$$

代入式(3-13)并消去公因子 Ae^{pt} ，便得出该微分方程的特征方程

$$RCp + 1 = 0$$

其根为

$$p = -\frac{1}{RC}$$

于是式(3-13)的通解为

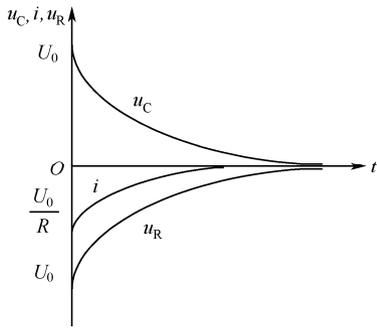


图 3-13 u_C , i 和 u_R 的曲线

放电电流为

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3-16)$$

根据式(3-16), 电阻电压为

$$u_R = Ri = -U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3-17)$$

如图 3-13 所示, 换路后电路中的电压、电流都是按照指数规律变化的。

3. 时间常数

式(3-15)中, $\tau = RC$ 称为 RC 电路的时间常数, 具有时间的量纲(秒), 它反映了电路暂态过程变化的快慢。

τ 越大, 暂态过程进行得越慢; 反之, τ 越小, 暂态过程进行得越快。由表达式 $\tau = RC$ 可以看出, RC 电路的时间常数由电路的参数 R 和 C 决定, R 是指换路后电容两端的等效电阻。当 R 越大时, 电路中放电电流越小, 放电时间就越长, 暂态过程进行得就越慢; 当 C 越大时, 电容储存的电场能量越多, 放电时间也就越长。下面以电容电压 u_C 为例说明时间常数 τ 的物理意义。

在式(3-15)中, 分别取 $t = \tau, 2\tau, 3\tau, \dots$ 不同的时间, 求出对应的 u_C 值如表 3-1 所列。

表 3-1 不同时刻对应的 u_C 值

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	∞
$u_C(t)$	U_0	$0.368 U_0$	$0.135 U_0$	$0.050 U_0$	$0.018 U_0$	$0.007 U_0$	0

从表 3-1 可以看出:

① 当 $t = \tau$ 时, $u_C = U_0 e^{-1} = 0.368 U_0$, 可见时间常数 τ 等于电压 u_C 衰减到初始值 U_0 的 36.8% 所需的时间。

② 理论上只有当 $t = \infty$ 时电路才能达到稳定, 但是当 $t = 3\tau$ 和 $t = 5\tau$ 时, 电容电压 $u_C(3\tau) = 0.05 U_0$ 和 $u_C(5\tau) = 0.007 U_0$, 已经很小, 所以工程上一般认为经历 $t = 3\tau \sim 5\tau$ 的时间后, 暂态过程结束, 电路进入新的稳定状态。

需要指出的是, 在大多数电子设备中, RC 电路的时间常数 τ 很小, 放电过程经历不过几十毫秒甚至几微秒。闪光灯就是利用了时间常数短的特点, 瞬间产生强电流, 发出强烈的闪光。但在电力系统中, 高压电力电容放电时间比较长, 可达几十分钟, 因此, 检修具有大电容的高压设备时, 一定要让电容充分放电以保证安全。

$$u_C = Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (3-14)$$

由初始值确定积分常数 A 。根据换路定则, $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$, 代入上式得 $u_C(0_+) = A$, 因此可确定积分常数 $A = U_0$, 则电容电压 u_C 的变化规律

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3-15)$$

$u_C(t)$ 随时间的变化曲线如图 3-13 所示, 它是按指数规律从初始值 U_0 衰减到零, 电路达到新的稳态。

2. 电流 i 及电阻电压 u_R 的变化规律

以 u_C 为依据, 可求出换路后其他电压电流的变化规律。

3.3.2 RC 电路的零状态响应

RC电路的零状态响应：储能元件的初始状态 $u_C(0_+)$ 为零，只由外加激励所产生的响应。其实质就是 RC 电路的充电过程。

如图 3-14 所示为闪光灯充电等效电路图。此处 R 为充电电阻，即图 3-11 中电源限流电阻 R_1 。

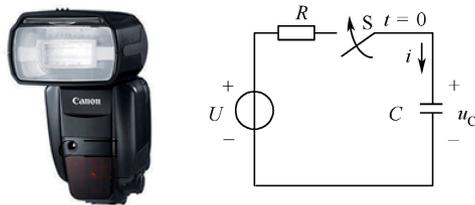


图 3-14 闪光灯充电等效电路

1. 电容电压 u_C 的变化规律

图 3-14 所示为图 3-11 闪光灯电路中开关从 1 合到 2 时的电路，换路前 C 无储能。在 $t=0$ 时将开关 S 闭合，于是电源对电容充电。

$t \geq 0$ 时电路的电压方程为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U \quad (3-18)$$

上式是一阶线性常系数非齐次微分方程。此方程的通解由两部分组成：特解 u'_C 和补函数 u''_C 。特解是满足原方程的任意一个解，令 $u'_C = K$ ，代入上式得 $U=K$ ，因而可求得特解

$$u'_C = U$$

补函数是原方程所对应的齐次方程的通解，即 u''_C 应满足

$$RC \frac{du'_C}{dt} + u''_C = 0$$

在前面分析零输入响应时已知此方程的通解为

$$u''_C = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

所以式(3-18)的通解为

$$u_C = u'_C + u''_C = U + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-19)$$

由换路定则， $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ ，代入上式可确定积分常数 $A = -U$ 。最后可得电容两端电压

$$u_C = U - Ue^{-\frac{t}{\tau}} = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3-20)$$

2. 电流 i 及电阻电压 u_R 的变化规律

$t \geq 0$ 时的充电电流和 R 上电压为

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-21)$$

$$u_R = Ri = Ue^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-22)$$

u_C ， i 和 u_R 随时间的变化曲线如图 3-15 所示。

3. 时间常数

u_C 由初始值零按指数规律上升，电容器的端电压由零逐渐趋于稳态值 U 。

$$\text{当 } t = \tau \text{ 时, } u_C = U(1 - e^{-1}) = 0.632U$$

所以, 时间常数 τ 等于 u_C 上升到稳态值 U 的 63.2% 所需时间。

在闪光灯等效电路 3-11 中, 开关处于位置 1 时, 由于 R_1 是限流电阻, 通常很大, 所以时间常数 $\tau_{充} = R_1 C$ 很大, 电容器充电缓慢。而其电流逐渐由 $I_1 = U_s / R_1$ 下降到零, 充电时间近似地需要

$$t_{充} = 5R_1 C$$

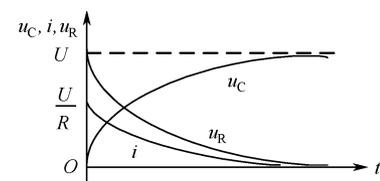


图 3-15 u_C, i 和 u_R 的曲线

当开关 S 由位置 1 切换到 2 时, 电容通过 R_2 放电, 闪光灯的电阻 R_2 阻值小, 使该电路在短时间内产生很大的电流, 使闪光灯闪亮, 其峰值电流 $I_2 = U_s / R_2$, 放电时间常数为 $\tau_{放} = R_2 C$ 。

图 3-11 所示的简单 RC 电路能产生短时间的大电流, 这一类电路还可用于电子枪、电子点焊机和雷达放射管等装置中, 其工作原理是相同的。

3.3.3 RC 电路的全响应

理论上讲, 经过 $t = \infty$ 的时间, 电容才会放电结束, 一般对此极少剩余电量可忽略不计, 因此把闪光灯电容的充电过程看成零状态响应, 但若剩余电量不能忽略, 则称为全响应。

全响应: 既存在电源激励, 又有初始储能(即电容的初始电压 $u_C(0_-)$ 不为零)时的电路响应。

图 3-16 为 RC 全响应等效电路, $u_C(0_-) = U_0$ 。其电路形式与图 3-14 相同, 因此 $t \geq 0$ 时电路的微分方程与式(3-18)相同, 其通解也是

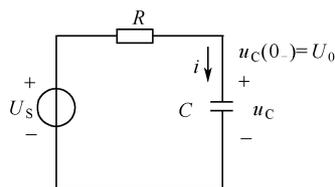


图 3-16 RC 全响应等效电路

$$u_C = u'_C + u''_C = U + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

但积分常数 A 与零状态时不同。由于 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$, 则 $A = U_0 - U$, 所以

$$u_C = U + (U_0 - U)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-23)$$

或

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3-24)$$

显然, 式(3-24)右边第一项即为式(3-15), 是零输入响应; 第二项即为式(3-20), 是零状态响应。可见, 全响应是零输入响应和零状态响应的和, 这体现了线性电路的叠加性。如果将 $u_C(0_+)$ 看作电压源, 这正是叠加原理。式(3-23)表示了响应的另一种分解方法。其中第一项是电路到达稳态时的值, 称为稳态分量, 它与电源电压 U 有关; 第二项仅存在于暂态过程中, 称为暂态分量, 因此全响应也可表示为稳态分量与暂态分量之和。

3.4 RL 电路的响应

只含有一个电感元件(储能元件)或可等效为一个电感元件(储能元件)的线性电路, 不论是简单的或复杂的, 都可以等效为最简的 RL 电路。与 RC 电路一样, RL 电路结构虽然简单, 在生产生活和军事领域却有着广泛的应用。在飞机电气系统中大量应用的航空电磁继电器, 基本原理就是 RL 电路的暂态响应。如图 3-17(a)所示为典型航空电磁继电器结构原理图, 当给线圈通电后, 衔铁、线圈

等及工作气隙所组成的磁路内就产生磁通，当线圈内电流达到一定值时，电磁吸力克服恢复弹簧和接触簧片的反力，使常闭触点断开，常开触点闭合。当线圈断电后，电磁吸力消失，触点恢复到原来的状态。对于其电磁过程的分析，可以将其电路等效为 RL 电路，如图 3-17(b)所示。通过电信号来控制触点的开合，当信号电压不为零时，相当于开关由 2 合到 1，电源向线圈充电，当电流达到一定值时，产生的磁力克服弹簧反力，触点断开，这一过程可看作零状态响应；当电压信号为零时，相当于开关从 1 合到 2，电感通过 R 放电，电磁吸力消失，触点在弹簧力的作用下回到常闭触点处，这一过程可看作零输入响应。下面分别对这两种响应展开定量分析。

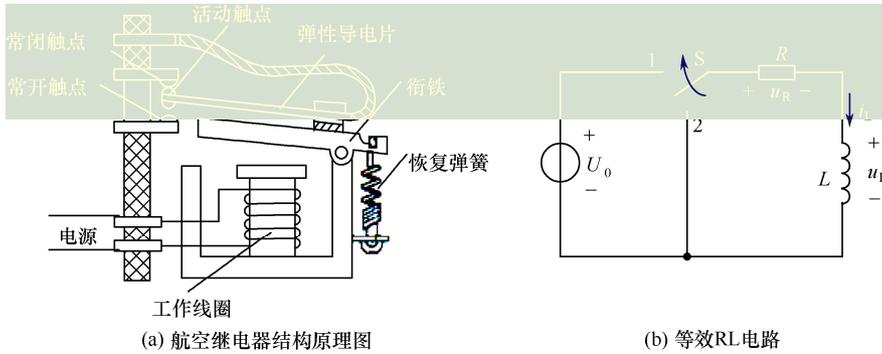


图 3-17 航空电磁继电器

3.4.1 RL 电路的零输入响应

在航空电磁继电器电磁力消失时，外施激励值为零，线圈释放所储存的磁场能量，此时即为 RL 电路的零输入响应。其过程相当于如图 3-17(b)所示，开关原来接在位置 1，电路已经稳定，电感中电流 $i_L(0_-) = I_0$ 。 $t = 0$ 时，将开关 S 从位置 1 合到 2，使电路脱离电源，输入为零。

1. i_L 、 u_L 、 u_R 的变化规律

$t \geq 0$ 时，电路的方程为

$$u_L + Ri_L = 0$$

而 $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ ，电路的微分方程为

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0 \quad (3-25)$$

参照式(3-13)结果，可知其通解为

$$i_L = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-26)$$

式中

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (3-27)$$

τ 称为 RL 电路的时间常数。

电感电压和电阻电压的变化规律分别为

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-28)$$

$$u_R = Ri_L = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-29)$$

2. i_L 、 u_L 、 u_R 的变化曲线

电路中电流和电压随时间变化的曲线如图 3-18 所示。

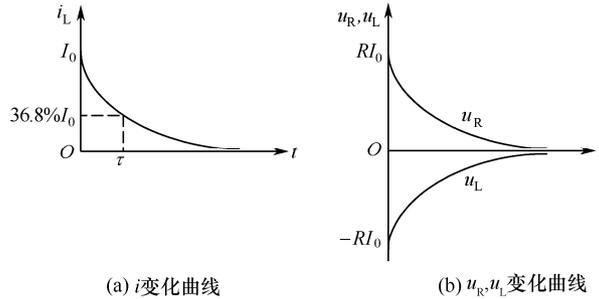


图 3-18 零输入响应变化曲线

通过式(3-26)和图 3-18(a)曲线可知, RL 电路的零输入响应 i_L 是一个按指数规律衰减的过程, 由此可以得出航空电磁继电器的释放时间(线圈断开电源起至衔铁返回常闭触点)。

由于是线性线圈, 磁通 Φ_L 与电流 i 成正比, 因此磁通的变化规律也同电流一样, 即

$$\Phi_L = \Phi_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

则继电器的释放触动时间为

$$t = \tau \cdot \ln \frac{\Phi_0}{\Phi_L}$$

3.4.2 RL 电路的零状态响应

在航空电磁继电器的吸合过程中, 假设线圈已经放电完毕, 此时外施激励信号不为零, 将对电感线圈充电, 产生磁力, 此时即为 RL 电路的零状态响应。其过程相当于如图 3-17(b)所示, 开关原来接在位置 2, 电路已经稳定, 电感中电流 $i_L(0_-) = 0$ 。 $t = 0$ 时, 将开关 S 从位置 2 合到 1。接通电路后, 根据基尔霍夫电压定律, $t \geq 0$ 的电路微分方程为

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = U \quad (3-30)$$

参照式(3-18)的求解过程和方法, 可得式(3-30)的通解为

$$i_L = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3-31)$$

令 $I = i(\infty) = \frac{U}{R}$, 它是线圈稳定电流, $\tau = \frac{L}{R}$ 是线圈时间常数。当 $i_L = I_1$, $t = t_1$ 时, 在不考虑铁芯涡流的作用时, 可得电磁继电器吸合触动时间为

$$t_1 = \tau \cdot \ln \left(\frac{I}{I - I_1} \right)$$

由此式可以看出, 继电器的吸合触动时间与继电器线圈的时间常数成正比, 与 $I/(I - I_1)$ 的自然对数成正比。

根据式(3-31)可得电阻元件和电感元件上的电压分别为

$$u_R = Ri_L = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3-32)$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = U e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-33)$$

电流和电压随时间变化的曲线如图 3-19 所示。

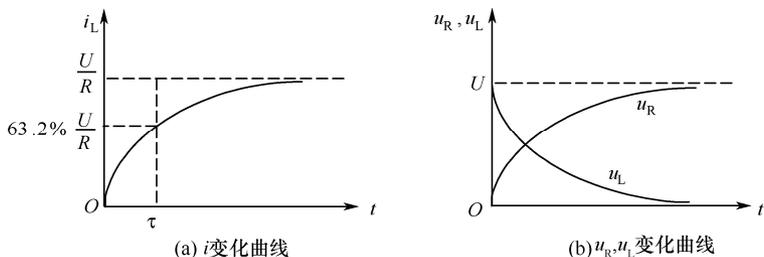


图 3-19 零状态响应变化曲线

3.4.3 RL 电路的全响应

对于航空电磁继电器的工作过程，若电感线圈没有放电完毕(电流不为零)，就有外施激励进行充电，则此时为全响应。根据 RC 电路分析所得出的结论，全响应可以看成零输入响应加上零状态响应，则 $t \geq 0$ 时，RL 电路全响应表达式为

$$i_L = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (3-34)$$

还可以写成稳态分量与暂态分量和的形式，即

$$i_L = \frac{U}{R} + \left(I_0 - \frac{U}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} \quad (3-35)$$

式中，右边第一项为稳态分量，第二项为暂态分量。

3.5 一阶电路的三要素法

前面所讨论的 RC 和 RL 电路，是仅含有一个或可等效为一个储能元件的电路，描述其电压、电流的方程是一阶微分方程，故称其为一阶电路。如果所遇到的是一阶电路，即使不是最简形式，也可以把该储能元件以外的电阻电路用戴维南定理进行等效，从而变换为最简 RC 电路或 RL 电路。因此前面的结论具有普遍性，在此基础上，总结出适合所有一阶电路暂态分析的三要素法。

一阶电路的响应由稳态分量和暂态分量两部分组成，写成一般式子，则为

$$f(t) = f'(t) + f''(t) = f(\infty) + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-36)$$

式中， $f(t)$ 是待求的电压或电流， $f(\infty)$ 是稳态分量(即稳态值)， $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ 是暂态分量。将初始值 $f(0_+)$ 代入上式，可确定积分常数 $A = f(0_+) - f(\infty)$ 。于是

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-37)$$

可见，只要求得初始值 $f(0_+)$ 、稳态值 $f(\infty)$ 和时间常数 τ 这三个要素，就可以直接写出电路的响应，这种方法称为三要素法。下面举例说明三要素法的应用。

【例 3-2】 在图 3-20 所示电路中，开关长期合在 1。 $t = 0$ 时将开关合到 2，求电容电压 u_C 。已知 $R_1 = 1\text{k}\Omega$ ， $R_2 = 2\text{k}\Omega$ ， $C = 3\mu\text{F}$ ， $U_1 = 3\text{V}$ ， $U_2 = 5\text{V}$ 。

解 (1) 求初始值

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1 = \frac{2}{1+2} \times 3 = 2\text{V}$$

(2) 求稳态值

$$u_C(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_2 = \frac{2}{1+2} \times 5 = 3.33\text{V}$$

(3) 求时间常数

$$\tau = RC = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = \frac{1 \times 2}{1+2} \times 10^3 \times 3 \times 10^{-6} = 2 \times 10^{-3} \text{s}$$

所以

$$\begin{aligned} u_C &= u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 3.33 + (2 - 3.33) e^{-\frac{t}{2 \times 10^{-3}}} = 3.33 - 1.33 e^{-500t} \text{V} \end{aligned}$$

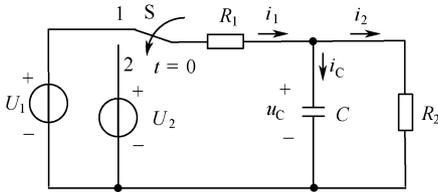


图 3-20 例 3-2 的图

在求时间常数 $\tau = RC$ 时, R 是等效电阻, 为电路换路后从 C 两端向电路看进去(电源不作用)的等效电阻。

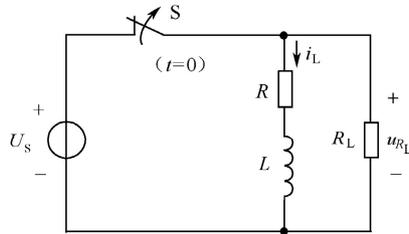
【例 3-3】 图 3-21 所示为汽车自动点火装置的电路模型, 其中, RL 电路为点火线圈的等效电路, R_L 为火花塞等效电阻。若 $R_L = 20\text{k}\Omega$, $L = 4\text{H}$, $R = 5\Omega$, 汽车

电池的直流电压 $U_s = 10\text{V}$, $t = 0$ 时断开开关 S 。

试求: (1) $t \geq 0$ 时的 u_{R_L} ; (2) 说明汽车点火原理。



(a)



(b)

图 3-21 汽车点火等效电路

解 (1) $t < 0$ 时, 电路直流稳态, 电感相当于短路, 故

$$i_L(0_-) = \frac{10}{5} = 2\text{A}$$

由换路定律有

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2\text{A}$$

而 $R_L \gg R$, 等效电阻为

$$R_0 = R + R_L \approx R_L = 20\text{k}\Omega$$

时间常数

$$\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{4}{20 \times 10^3} \text{s} = 2 \times 10^{-4} \text{s}$$

$$i_L(\infty) = 0\text{A}$$

$$i_L(t) = 2e^{-5 \times 10^3 t} \text{A}$$

$$u_{R_L}(t) = -R_L i_L(t) = -40e^{-5 \times 10^3 t} \text{kV}$$

(2) 当 $t = 0$ 时, $u_{R_L}(0) = -40\text{kV}$ 。可见, 当点火线圈在 $t = 0$ 时刻断开时, 根据换路瞬间电感电

流不能突变的特点，在很短的时间内产生很大的感应电动势加在两个电极间，从而产生火花点燃发动机。

从上例分析中可见，电感线圈的直流电源断开时，火花塞两端会产生很高的电压，从而出现火花甚至电弧，如果电路不是以点火为目的设计的，轻则损坏开关设备，重则引起火灾，因此工程上都采用一些保护措施，常用的方法是在线圈两端并联通流二极管或接入阻容吸收电路，如图 3-22 所示。

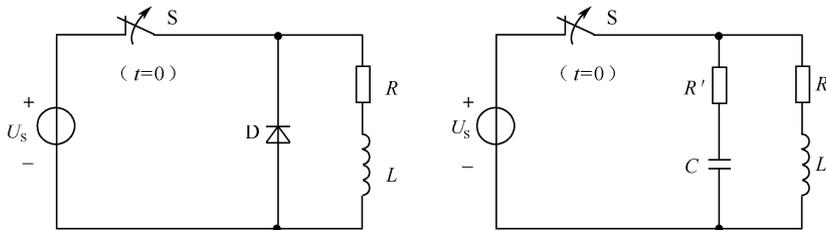


图 3-22 RL 电路切断电源时保护电路

【例 3-4】 图 3-23 所示为测子弹速度的电路原理图，测速时电路处于稳定状态，已知 $U = 100\text{V}$ ， $R = 50\text{k}\Omega$ ， $C = 0.2\mu\text{F}$ ， $l = 3\text{m}$ ，子弹先撞开开关 S_1 ，经距离 l 后又撞开开关 S_2 ，同时将 S_3 关闭，此时电荷测定计 G 测得电容 C 上面的电荷为 $Q_1 = 7.65\mu\text{C}$ ，试求子弹的速度 v 。

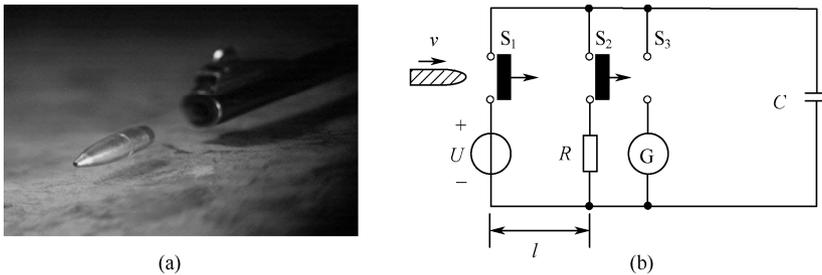


图 3-23 例 3-4 的图

解 求速度 v 的关键是求出子弹经过 l 所需要的时间 t_1 。设子弹撞开 S_1 的瞬间为 $t = 0$ ，可以看出

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = U = 100\text{V}$$

当 S_1 断开后， C 开始经过 R 放电，且 $u_c(\infty) = 0$ ， $\tau = RC = 10\text{ms}$ ，所以

$$u_c(t) = 100e^{-10^2 t} \text{V}$$

在 t_1 时， S_2 断开的同时 S_3 闭合，此时，电容的端电压为

$$u_c(t_1) = 100e^{-10^2 t_1} \text{V}$$

电容 C 上的电荷量为

$$Q(t_1) = Cu_c(t_1) = 0.2 \times 10^{-6} \times 100e^{-10^2 t_1} = 7.65 \times 10^{-6} \text{C}$$

解出

$$t_1 = 9.61\text{ms}$$

于是，子弹速度为

$$v = \frac{l}{t_1} \approx 312.2\text{m/s}$$

3.6 微分电路和积分电路

前面的几节中，详细介绍了一阶电路的零输入响应、零状态响应和全响应的分析方法，本节介绍由 RC 电路组成的微分电路和积分电路。所谓积分电路和微分电路，是指在特定的条件下，电路的输出与输入之间近似为积分关系和微分关系，实质上是 RC 充放电电路。积分电路和微分电路在工程上应用广泛，可将输入脉冲转换为三角波、锯齿波、尖脉冲等。

3.6.1 微分电路

图 3-24 所示的 RC 电路，输入电压 u_1 是幅度为 U 、宽度为 t_p 的矩形脉冲，如图 3-25 所示。输出电压为电阻 R 的两端电压 u_2 。通过选择 R 、 C 的值，使电路的时间常数 $\tau = RC \ll t_p$ 。

设电容 C 无初始储能， $u_C(0_-) = 0$ 。 $t = 0$ 时换路，输入电压由零变到 U ，对 C 充电。由于 $\tau \ll t_p$ ，相对于 t_p 而言，充电很快， u_C 从初始值 $u_C(0_+) = 0$ 迅速上升到稳态值 U 。而输出电压 $u_2 = u_1 - u_C$ ，因此 u_2 从初始值 $u_2(0_+) = U$ 迅速下降到零。这样在电阻两端就输出一个正的尖脉冲，如图 3-25 所示。

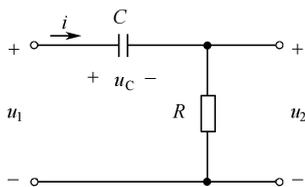


图 3-24 微分电路

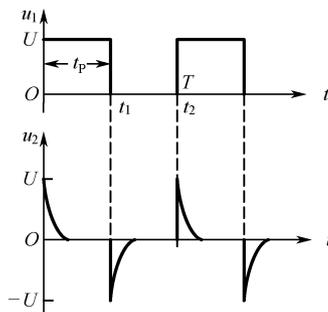


图 3-25 微分电路的输入电压和输出电压的波形

在 $t = t_1$ 时，电容上已充有电压 U ，这时输入电压 u_1 由 U 变为零，电容开始放电。同样由于 τ 很小，所以 u_C 很快地从初始值 U 衰减到零，而 u_2 也很快地从初始值 $-U$ 上升到零。这样，就输出一个负的尖脉冲。

当输入电压 u_1 为周期性的矩形脉冲时，则输出电压 u_2 为周期性的正负尖脉冲，如图 3-25 所示。从波形形状上看，输出的尖脉冲近似于对输入的矩形脉冲的微分，因此这种电路称为微分电路。

3.6.2 积分电路

如果将图 3-24 所示微分电路中的 R 和 C 对调，并且满足电路的时间常数 $\tau = RC \gg t_p$ ，且从电容器两端输出，则该电路就成为积分电路，如图 3-26(a)所示。

图 3-26(b)是积分电路的输入电压 u_1 和输出电压 u_2 的波形。由于 $\tau \gg t_p$ ，电容充电缓慢，其电压 u_2 增大也缓慢。在 $0 \leq t \leq t_1$ 时， u_2 的上升曲线只是指数曲线起始部分的一小段，可以认为近似于一条直线。 $t \gg t_1$ 后，电容开始放电，同样放电速度也很缓慢， u_2 将近似线性下降。

这样，在周期性矩形脉冲的作用下，此电路输出一个锯齿波信号，如图 3-26(b)所示。 u_2 近似地与 u_1 成积分关系，因此这种电路称为积分电路。

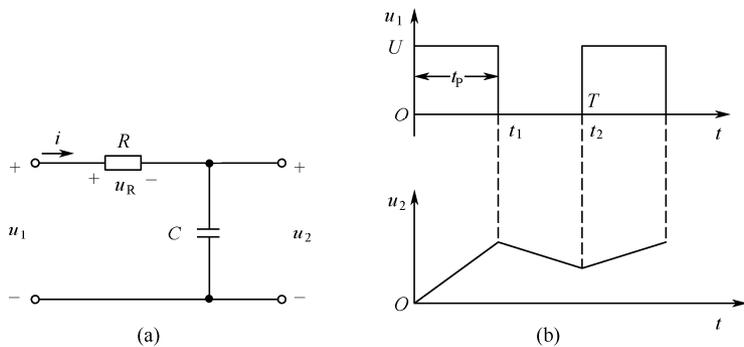


图 3-26 积分电路及输入电压和输出电压的波形

小 结

本章主要介绍了暂态过程、时间常数等基本概念。利用经典法分析一阶电路的零输入响应、零状态响应和全响应，从而归纳出分析一阶电路的三要素法。

1. 换路、暂态过程和时间常数的概念

换路：由于电路结构或参数变化引起的电路状态的变化称为换路。

暂态过程：电路从一种稳态暂态到另一种稳态所经历的过程。

时间常数：

一阶 RC 电路的时间常数 $\tau = RC$ ；

一阶 RL 电路的时间常数 $\tau = L/R$ 。

时间常数反映了暂态过程进行的快慢。时间常数越大，暂态过程进行得就越慢；时间常数越小，暂态过程进行得就越快。

2. 换路定则

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

换路定则主要用于求换路后电容电压和电感电流的初始值。

3. 一阶电路的三要素法

全响应=稳态分量+瞬态分量

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中， $f(0_+)$ 为待求响应的初始值； $f(\infty)$ 为待求响应的稳态值； τ 为电路的时间常数。

习 题 3

- 3-1 (应用常识)用模拟万用表(即机械指针式万用表) $R \times 1k$ 挡检查容量较大的电容器，指针摆动后，再回到刻度原始处(即 ∞)，说明电容器没有损坏；指针摆动后，返回速度的快或慢说明了电容量的小与大。试用 RC 电路的暂态分析解释上述现象。说明什么是电路的暂态？产生暂态的原因是什么？
- 3-2 (基础知识)电路如题图 3-1 所示，开关 S 闭合前电路已处于稳态，试求闭合开关 S 瞬间的 $u_L(0_+)$ 。
- 3-3 (基础知识)电路如题图 3-2 所示，开关 S 闭合前电路已处于稳态，试求闭合开关瞬间的初始值 $i_L(0_+)$ 和 $i(0_+)$ ，在换路瞬间流过电感的电流为什么不能突变？