

第1章 函数与模型

函数是描述变量之间相互依赖关系的重要工具，它几乎是所有应用数学的基础。经济学中的许多变量（如价格、商品数量、成本、利润、投资、利率、货币量等）都是可度量的，经济函数或模型就是这些变量之间关系的数学描述。本章介绍函数的概念、单调性、反函数、常用的经济函数、指数函数、对数函数等。

1.1 函数的概念

在中学里，我们曾学习过函数。比如，圆的面积 A 与半径 r 的关系表示为函数

$$A = \pi r^2 \quad 0 \leq r < +\infty$$

又如，某种商品的市场价格 P 与需求量 Q 之间的关系表示为函数

$$P = 105 - 3Q \quad Q \geq 0$$

它意味着这种商品的价格越高，需求量就会越低。

其实，一个函数就是一个法则。对于每一个输入变量 x ，都有唯一确定的输出变量 y 与之对应。因此，函数可以被看作是一个“匣子”，在这个匣子里面进行着某种精确的数学运算。比如，法则“2 倍再加上 3”就是

$$\text{输入 } x \rightarrow \boxed{\text{2 倍再加上 3}} \rightarrow \text{输出 } y$$

显然，输出变量 y 的值“依赖”于输入变量 x 的值。但是，为了精确地描述这种法则，通常会采用下面的简单形式来表示：

$$y = 2x + 3 \quad \text{或} \quad f(x) = 2x + 3$$

一般地，函数可有如下几种定义方法。

定义 1.1.1

设两个集合 X 和 Y ，若对集合 X 中的每一个元素 x ，按照一定的对应规则 f ，集合 Y 中总有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数。记作

$$y = f(x) \quad x \in X$$

其中，集合 X 称为函数的定义域， x 称为自变量， y 称为因变量。

比如，二次函数

$$y = f(x) = x^2 + 5x$$

其定义域 X 是所有的实数, 其规则 f 是

$$(\quad) \rightarrow (\quad)^2 + 5(\quad)$$

又如, 在函数

$$y = \frac{1}{x+1}$$

中, 定义域 X 是所有不等于 -1 的实数, 其规则 f 是

$$(\quad) \rightarrow \frac{1}{(\quad)+1}$$

对于每一个具体的 x_0 , 通过规则 f , 有唯一确定的值 y_0 与之对应, 则称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值。所有函数值的集合称为函数的值域, 记为 M 。

为了更好地理解函数的定义, 我们做如下说明:

(1) 函数所描述的是自变量与因变量的一种对应规则或对应关系, 这种规则用 f 表示, 因此, f 是一个函数符号。在函数 $y=f(x)=x^2+2$ 中, f 代表着

$$(\quad) \rightarrow (\quad)^2 + 2$$

(2) 定义域是函数的另一个要素。给定一个函数, 就意味着同时给出了这个函数的定义域。比如, 函数 $y=\sqrt{x-3}$ 的定义域是所有使得根号下 $x-3 \geq 0$ 的实数 x 。

(3) 有时候, 把一个函数理解为一个模型也是重要的。比如, 假设某牧牛人只生产两种产品: 土豆或牛肉。他生产 1 盎司土豆需要 10 分钟, 生产 1 盎司牛肉需要 20 分钟。那么他每天工作 8 小时的生产可能性边界 (指在可得到的生产要素与生产技术既定时, 一个经济体所能生产的产量的各种组合的图形) 可以表示为

$$M = -\frac{1}{2}N + 24$$

其中, M 是牛肉的产量, N 是土豆的产量。

例 1.1.1

(1) 已知 $f(x) = 4x^2 - 3x$, 求 $f(2)$ 。

(2) 如果 $g(Q) = \frac{10}{5+2Q}$, 求 $g(5)$ 。

解: (1) 把 $x=2$ 代入 $f(x) = 4x^2 - 3x$ 之中, 可得

$$f(2) = 4 \times 2^2 - 3 \times 2 = 10$$

(2) 把 $Q=5$ 代入函数 $g(Q)$ 中, 得

$$g(2) = \frac{10}{5+2 \times 5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

定义 1.1.2

在自变量的不同取值范围内, 用不同式子表示不同的对应关系, 这样的函数称为分段函数。

比如，函数

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x\leqslant 1 \\ 2-x & 1< x\leqslant 2 \\ 2x-4 & x>2 \end{cases}$$

就是一个分段函数，其图形如 1.1.1 所示。经济学中的分段函数是非常普遍的，下面用两个例子说明。

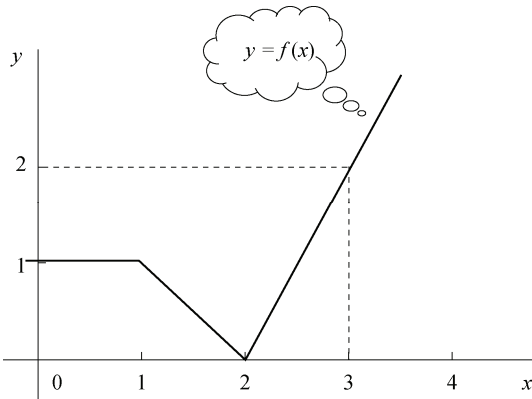


图 1.1.1

例 1.1.2

我国个人所得税采取的是累进税制，也就是超出部分的税率要递增。从 2011 年 9 月 1 日起，我国个人所得税的起征点调至 3 500 元。表 1.1.1 为现行的 7 级税率。试写出个人月收入与纳税金额间的函数关系。若小张的月收入为 12 000 元，那他应缴的税款是多少？

表 1.1.1

级数	全月应纳税所得额	税率/%
1	不超过 1 500 元的部分	3
2	超过 1 500 元至 4 500 元的部分	10
3	超过 4 500 元至 9 000 元的部分	20
4	超过 9 000 元至 35 000 元的部分	25
5	超过 35 000 元至 55 000 元的部分	30
6	超过 55 000 元至 80 000 元的部分	35
7	超过 80 000 元的部分	45

解：假设某人的月收入为 x 元，应缴税款为 y 元，根据图 1.1.2 可以写出分段函数。

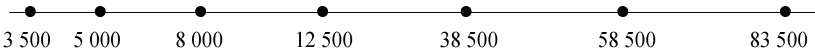


图 1.1.2

即有

(1) 当 $0 \leq x \leq 3\,500$ 时,

$$y=0$$

(2) 当 $3\,500 < x \leq 5\,000$ 时,

$$y = (x - 3\,500) \times 3\%$$

(3) 当 $5\,000 < x \leq 8\,000$ 时,

$$\begin{aligned} y &= 1\,500 \times 3\% + (x - 5\,000) \times 10\% \\ &= 45 + (x - 5\,000) \times 10\% \end{aligned}$$

(4) 当 $8\,000 < x \leq 12\,500$ 时,

$$\begin{aligned} y &= 45 + 3\,000 \times 10\% + (x - 8\,000) \times 20\% \\ &= 345 + (x - 8\,000) \times 20\% \end{aligned}$$

(5) 当 $12\,500 < x \leq 38\,500$ 时,

$$\begin{aligned} y &= 345 + 4\,500 \times 20\% + (x - 12\,500) \times 25\% \\ &= 1\,245 + (x - 12\,500) \times 25\% \end{aligned}$$

(6) 当 $38\,500 < x \leq 58\,500$ 时,

$$\begin{aligned} y &= 1\,245 + 26\,000 \times 25\% + (x - 38\,500) \times 30\% \\ &= 7\,745 + (x - 38\,500) \times 30\% \end{aligned}$$

(7) 当 $58\,500 < x \leq 83\,500$ 时,

$$\begin{aligned} y &= 7\,745 + 20\,000 \times 30\% + (x - 58\,500) \times 35\% \\ &= 13\,745 + (x - 58\,500) \times 35\% \end{aligned}$$

(8) 当 $x > 83\,500$ 时,

$$\begin{aligned} y &= 13\,745 + 25\,000 \times 35\% + (x - 83\,500) \times 45\% \\ &= 22\,495 + (x - 83\,500) \times 45\% \end{aligned}$$

根据上面的分段函数, 如果小张的月收入为 12 000 元, 那么他应交的税款为

$$y = 345 + (12\,000 - 8\,000) \times 20\% = 1\,145 \text{ 元}$$

注意, 这里并不是说, 如果你的月收入是 4 501 元, 就要按照 20% 的税率来纳税, 而另一个人的月收入是 4 500 元, 则只按 10% 的税率来纳税。否则, 这种税制就变得很荒唐。

例 1.1.3

假设销售员得到一份根据合同确定的工资, 该合同规定销售员的月收入由三部分构成:

(1) 基本工资 800 美元, (2) 10% 的提成, (3) 如果销售员的月销售额超过 10 000 美元, 那么还可得到一次性奖励 700 美元。写出他的月收入和销售业绩之间的关系。

解: 令 s 代表每月销售业绩, p 代表销售员每月收入, 则月收入 and 业绩之间的关系为

$$p = \begin{cases} 800 + 0.1s & s \leq 10\,000 \\ 800 + 700 + 0.1s & s > 10\,000 \end{cases}$$

定义 1.1.3

设 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, x_1 和 x_2 分别为区间 $[a, b]$ 上的任意两个数, 当 $x_2 > x_1$ 时, 有 $f(x_2) > f(x_1)$, 则称 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内是**单调递增**的, 如图 1.1.3 所示。当 $x_2 > x_1$ 时, 有 $f(x_2) < f(x_1)$, 则称 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内是**单调递减**的, 如图 1.1.4 所示。

从函数图形上看, 单调递增就是当 x 自左向右变化时, 函数的图形呈现上升的形态; 如图 1.1.3 所示。单调递减就是当 x 自左向右变化时, 函数的图形呈现下降的形态, 如图 1.1.4 所示。单调递增的或单调递减的函数统称为单调函数。

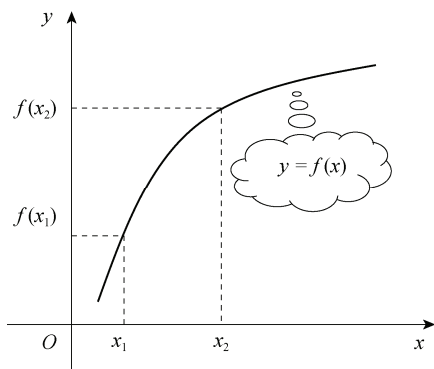


图 1.1.3

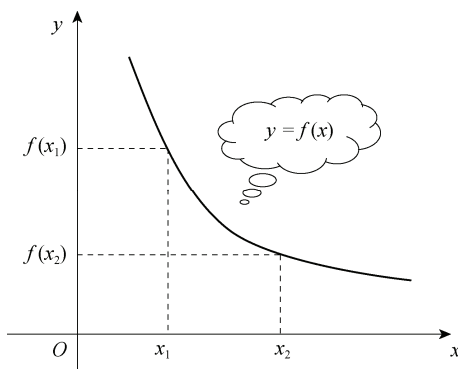


图 1.1.4

例 1.1.4

画出函数

$$P(Q) = 10 - 2Q$$

的图形, 并说明其单调性。

解: 函数 $P(Q)$ 是线性的, 其定义域是 $\mathbf{R}$ 。当 $Q=0$ 时, $P=10$; 当 $Q=5$ 时, $P=0$ 。

在平面直角坐标系上描出点 $(0, 10)$ 、 $(5, 0)$, 连接这两点所得直线即为此函数的图形, 如图所示 1.1.5。从图形上看, 函数是单调递减的。

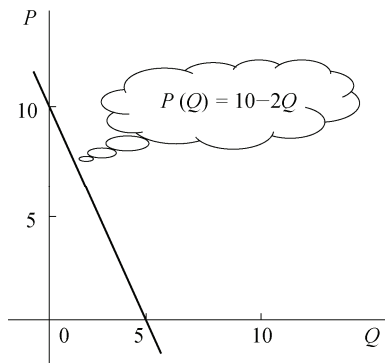


图 1.1.5

例 1.1.5

说明函数

$$f(x) = \frac{a}{x}, \text{ 其中 } a > 0$$

的单调性, 并画出函数的图形。

解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$, 在其上任取两点 x_1 和 x_2 。

(1) 若 $x_1 > x_2 > 0$ 时, 则

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &< 0 \\ f(x_1) &= \frac{a}{x_1}, \quad f(x_2) = \frac{a}{x_2} \end{aligned}$$

于是

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{a}{x_1} - \frac{a}{x_2} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} < 0$$

即

$$f(x_1) < f(x_2)$$

(2) 若 $0 > x_1 > x_2$ 时, 类似上述过程也可得出 $f(x)$ 是单调递减的, 如图 1.1.6 所示。

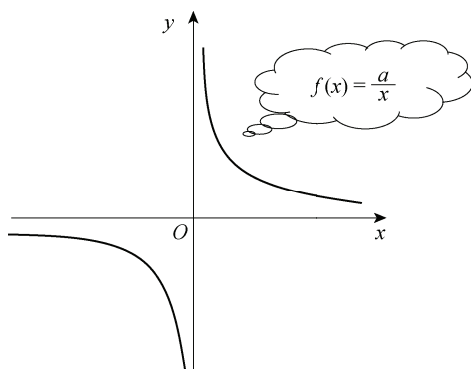


图 1.1.6

注意, 例 1.1.5 中函数的图形是双曲线, 它分为两部分: 一部分在第一象限, 另一部分在第三象限。在经济学中, 我们只取第一象限的部分。当 x 趋向于 0 的时候, 曲线逐渐靠近 y 轴; 当 x 趋向于无穷大的时候, 曲线逐渐靠近 x 轴。当 a 逐渐增大时, 曲线会向外移动, 逐渐远离坐标原点, 但保持原来的形状不变。

例 1.1.6

画出函数

$$y = 2x^2 - 3x + 1$$

的图形, 并说明其单调性。

解: 此函数是一元二次函数, 找出其关键点 (比如它与 x 轴、 y 轴的交点, 最大值点或

最小值点), 然后画出函数的图形。

令 $2x^2 - 3x + 1 = 0$, 得

$$x = 1, \quad x = \frac{1}{2}$$

所以它与 x 轴的两个交点坐标为 $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ 。

令 $x=0$, 得 $y=1$ 。它与 y 轴的交点坐标为 $(0, 1)$ 。

二次项系数是 2, 大于 0, 所以它的开口向上。在 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间的中点 $\frac{3}{4}$ 取得最小值 $-\frac{1}{8}$,

如图 1.1.7 所示。它在 $(-\infty, \frac{3}{4})$ 上是单调递减的, 在 $(\frac{3}{4}, +\infty)$ 上是单调递增的。

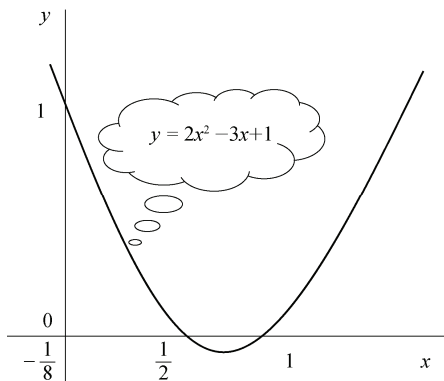


图 1.1.7

本例所示的二次函数其一般形式为 $y = ax^2 + bx + c$, 它在经济学上非常有用。通常, 当 $a > 0$ 时, 可用来描述 U 形的平均成本曲线或边际成本曲线, 它在 $x = -\frac{b}{2a}$ 处取得最小值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$; 当 $a < 0$ 时, 可用来描述总成本或总利润曲线, 它在 $x = -\frac{b}{2a}$ 处取得最大值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$ 。求最大值或最小值的具体过程与方法如下:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left\{\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

在讨论函数关系时，我们也会用到一个相反的对对应关系。比如，在关系式 $y = 3x + 2$ 之中，对每一个实数 x ，有唯一确定的 y 与之对应，因而 y 是 x 的函数。但是，从另一个方向看，我们发现，对每一个实数 y ，有唯一确定的 x 与之对应。这种对应关系显然符合前面的函数定义，因而此时可以说， x 是 y 的函数，记为

$$x = \frac{y-2}{3}$$

并称它为 $y = 3x + 2$ 的反函数。一般定义如下：

定义 1.1.4

设函数 $y = f(x)$ 定义在集合 X 上，其值域为 M 。如果对集合 M 中的每一个 y ，集合 X 中都有唯一确定的 x 使得 $f(x) = y$ ，则说 x 是 y 的函数，并称这个函数为 $y = f(x)$ 的反函数，记为

$$x = f^{-1}(y)$$

其定义域为 M ，值域为 X 。注意，此时函数的自变量为 y ，因变量为 x 。

为了更清晰地揭示一个函数与其反函数的关系，可以做如下对比，详见表 1.1.2。

表 1.1.2

x 与 y 的关系式	自变量	因变量	对应规则	函数
$y = 3x + 2$	对每个 x	有唯一的 y 与之对应	$(\) \rightarrow 3(\) + 2$	y 是 x 的函数
	对每个 y	有唯一的 x 与之对应	$(\) \rightarrow \frac{(\) - 2}{3}$	x 是 y 的函数

一般地说，并不是每一个函数 $y = f(x)$ 都有其相应的反函数。比如，函数

$$y = x^2$$

就没有反函数，因为在 $y = x^2$ 之中，对于每一个大于零的 y 值，与之对应的 x 值都有两个，不是唯一的。但是，函数

$$y = x^2, x \geq 0$$

是存在反函数的，因为此时对于每一个大于零的 y 值，都有唯一的 x 与之对应。其反函数为

$$x = \sqrt{y}, y \geq 0$$

因此，一个函数有反函数须要满足一定的条件。这个条件就是要求函数的自变量与因变量之间的对应关系必须是一对一的。从图形上看，如果一个函数是单调递增（或单调递减）的，那么它就一定存在反函数。

例 1.1.7

求函数 $y = 2x - 1$ 的反函数，并写出它的定义域与值域。

解：此函数的定义域为 $\mathbf{R}$ ，值域为 $\mathbf{R}$ 。

对函数 $y=2x-1$ 的值域 M 中的每一个 y , 在其定义域 X 中都有唯一确定的 x 与之对应。通过 $y=2x-1$ 求出 x , 得

$$x = \frac{y+1}{2}$$

这就是所求的反函数。

通常情况下, 人们习惯于用 x 表示自变量, y 表示因变量。所以上式也可改写为

$$y = \frac{x+1}{2}$$

这样, 人们就可以把函数 $y=2x-1$ 与其反函数 $y=\frac{x+1}{2}$ 画在同一坐标系中进行比较, 如图 1.1.8 所示。

通过比较可以发现, 一个函数与其反函数的图形关于直线 $y=x$ 对称。这个结论是普遍成立的。

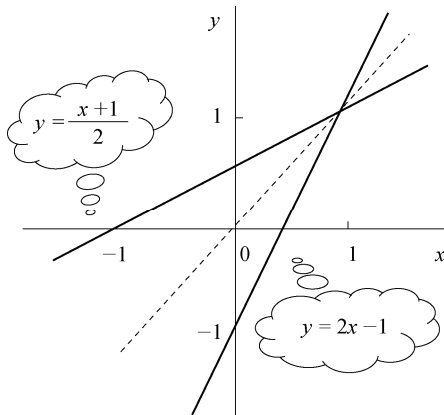


图 1.1.8

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域。

(1) $y = 2x - 3$

(2) $y = -\frac{x-4}{5}$

(3) $y = \frac{18}{2x-3}$

(4) $y = \frac{5-x}{(x-2)(x+3)}$

2. 给定两个函数 $f(x) = -2x + 50$ 与 $g(x) = -\frac{1}{2}x + 25$, 计算 $f(25)$ 、 $f(1)$ 、 $g(3)$ 、 $g(48)$ 的值, 并说明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是什么关系?

3. 已知分段函数 $f(t) = \begin{cases} -2 & t > -1 \\ (t+1)^2 & t = -1 \\ 4t & t < -1 \end{cases}$, 求 $f(0)$ 、 $f(-5)$ 、 $f(-1)$ 。

4. 画出下列分段函数的图形。

$$(1) f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ 3 & 3 \leq x < 4 \end{cases} \quad (2) g(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x < 3 \\ 0 & 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

5. 假设某快递公司收寄物件的计费规定是：当物件不超过 5 千克时，按基本的 2 元/千克计费；当超过 5 千克时，超过的部分按 5.5 元/千克计费。试写出收寄物件的邮费与物件质量之间的函数关系。

6. 某移动通信营业部推出一种套餐收费标准：当月通话时间不超过 35 分钟时，月租费 18 元；超过 35 分钟时，超过的部分每分钟加收 0.15 元。试表示这个套餐收费与当月通话时间的函数关系。

7. 某个班级有 120 名学生，如果汉堡的价格 $P=0$ 元，则每个学生要 2 个；若汉堡的价格 $P \geq 4$ 元，则没有人买汉堡。设汉堡的需求曲线是线性的，试给出其方程。并指出当 $P=3.99$ 时，汉堡的需求量是多少？

8. 考虑下面的收入所得税计划：最初收入的 5 000 美元不用缴任何税，下一个收入的 15 000 美元按 20% 的税率缴税，下一个收入的 30 000 美元按 30% 的税率缴税，其他的更多收入按 50% 的税率缴税。写出税收函数 $T(y)$ 。

9. 画出下列函数的图形，并说明它在哪个区间是单调递增的或单调递减的。

$$\begin{array}{ll} (1) y = 5x - 10 & (2) y = -2x + 5 \\ (3) y = x^2 - 2x - 3 & (4) y = -x^2 + x - 2 \\ (5) y = e^x & (6) y = \ln x \end{array}$$

10. 判断下列各对函数是否互为反函数？

$$\begin{array}{ll} (1) y = -2x - 3, y = -\frac{x+3}{2} & (2) y = 7x, y = \frac{x}{7} \\ (3) y = x + 5, y = x - 5 & (4) y = \frac{5}{x} + 2, y = \frac{5}{x-2} \end{array}$$

11. 已知函数 $P(Q) = -5Q + 13$ ，写出它的反函数，并将它们画在同一坐标系中。

1.2 需求与供给

在经济活动中，市场是某种物品（或劳务）的消费者（买者）与生产者（卖者）组成的一个群体，是联系生产与消费桥梁。商品的需求量 Q 是指在特定时间内，消费者愿意并且能够购买的某种商品的数量。实际上，它会受多种因素的影响，比如商品的市场价格 P 、季节、消费者的购买力和消费偏好等，其中市场价格 P 是决定需求量的一个重要因素。如果仅仅考虑市场价格 P 这个因素，那么市场价格 P 与需求量 Q 之间的关系，称为需求函数 (Demand Function)，记为

$$Q = f(P)$$

对于给定的需求函数 $f(P)$ ，我们可以在直角坐标系上画出相应需求曲线。在数学里，一般会把 P 画在横轴上，把 Q 画在纵轴上；而在经济学中，通常把 Q 画在横轴上，把 P 画在纵轴上。我们知道，通过 $Q = f(P)$ 可以求出它的反函数：

$$P = g(Q)$$

本书采用经济学的习惯。下面讨论的微观经济学中的函数（如需求、总收益、平均成本和利润等）都把 Q 作为横轴上的自变量。比如，线性的需求函数就表示为

$$P = aQ + b$$

其中， a 和 b 是常数（也被称为参数）。当然，现实中商品价格与数量之间的关系远比这个复杂。

经济理论告诉我们，当某种商品的价格上升时，它的需求量会下降；当某种商品的价格下降时，它的需求量会上升。因此，这条直线的斜率是一个负数，也就是说， P 是 Q 的减函数，如图 1.2.1 所示。

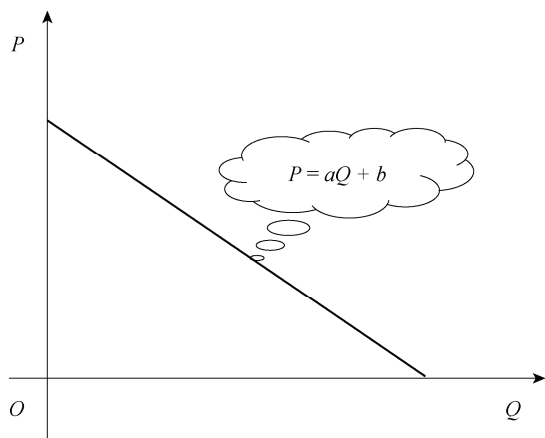


图 1.2.1

事实上，需求曲线在理论上也可能是水平的，即 $a=0$ ，此时有 $P=b$ 。它对应着完全竞争的市场。在这种情况下，市场价格对每个人或公司都是已知的，单个公司的产量选择不会影响市场价格，因此，市场价格被看成是一个固定值。将在第 3 章讨论这种特殊情况。

例 1.2.1

画出需求函数

$$P = -3Q + 75$$

的图形，并求出：（1）当 $Q=10$ 时的 P 值；（2）当 $P=15$ 时的 Q 值。

解：

对于需求函数 $P = -3Q + 75$ ，有 $a = -3$ ， $b = 75$ ，所以这条直线的斜率为 -3 ，截距为 75 。

当 Q 每增加 1 个单位时, P 就向下移动 3 个单位。

当 $P=0$ 时, $Q=25$ 。所以当 $Q=25$ 时, 这条直线和横轴相交, 如图 1.2.2 所示。

(1) 给定任何数量 Q , 通过函数图形可以找出相对应的价格 P ; 也可以令 $Q=10$ 代入需求函数, 得

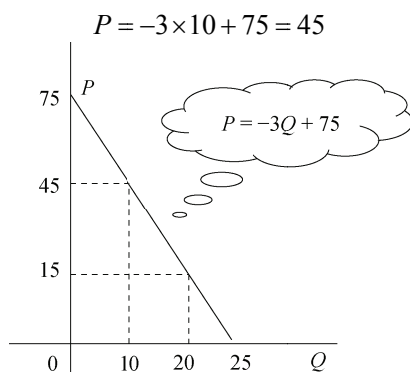


图 1.2.2

(2) 类似地, 当 $P=15$ 时,

$$\begin{aligned} 15 &= -3Q + 75 \\ Q &= 20 \end{aligned}$$

刚才假定需求量 Q 唯一地依赖于商品的市场价格 P 。在实际中, 需求量 Q 还依赖于其他因素, 如消费者的收入水平 Y , 替代商品的价格 P_S , 互补商品的价格 P_C , 广告支出 A 和消费偏好 T 。当一种商品价格下降引起对另一种商品的需求量减少时, 这两种商品被称为**替代品** (Substitute), 替代品是那些经常相互替代使用的成对商品。比如, 毛衣与长袖衫、公共汽车与出租车等都是相互替代使用的。当毛衣的价格下降时, 人们会更多地选择毛衣替代长袖衫, 从而减少了对长袖衫的需求。当一种商品价格下降引起另一种商品的需求量增加时, 这两种商品称为**互补品** (Complement), 互补品是那些经常被消费者同时使用的成对商品。比如, 汽车和汽油、电脑和软件、音乐唱片和音响设备被同时消费或使用。此时, Q 就是多个变量 P, Y, P_S, P_C, A 和 T 的函数, 表示为

$$Q = f(P, Y, P_S, P_C, A, T)$$

这里有 6 个输入变量和 1 个输出变量, 用“黑匣子”表示如图 1.2.3 所示。

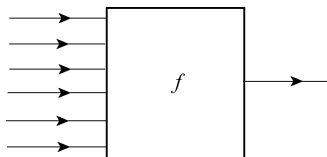


图 1.2.3

当 Y, P_S, P_C, A 和 T 固定时, Q 和 P 称为**内生变量**, 因为它们的变化由模型本身决

定；其他的变量被称为**外生变量**，它们由模型外的因素决定。在外生变量固定的情况下，可以得到标准的需求曲线 EF ，如图 1.2.4 所示。当价格为 P^* 时，需求量为 Q_1 。现在假设收入 Y 增加，需求量通常会增加，因为在价格为 P^* 时，额外的收入可以买到更多的商品，此时消费者购买的商品数量为 Q_2 。这种效应就会把整个需求曲线向右移（意味着需求增加）。也就是说，如果需求曲线是 $P=aQ+b$ ，那么收入的增加会导致截距 b 增加。当收入增加时，需求量也增加的这种商品称为**正常品**（Normal Good），比如小汽车和电子产品就是正常品。

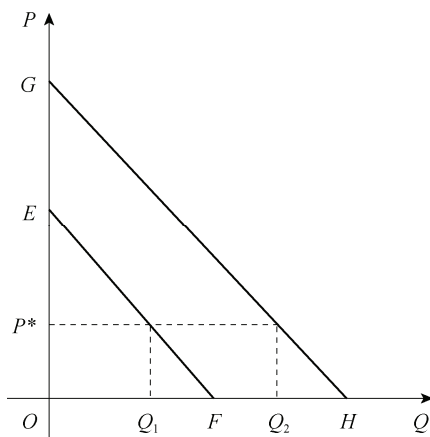


图 1.2.4

对某些商品来说，收入的增加也可能导致需求曲线向左移动（意味着需求减少）。比如，在 20 世纪六七十年代，大多数西方国家的收入上升，但煤炭消费需求却下降了，因为此时的收入增加使更多的人能够使用另外一种形式的能源——安装中央供热设备。像煤炭这种商品，当人们的收入增加时，它的需求量会减少，或者当收入减少时，它的需求量会增加，这种商品称为**低档品**（Inferior Good）。比如，乘公共汽车是一个低档品。一般地，随着收入的增加，你可能会买小汽车或乘出租车，从而减少对乘公共汽车的需求。当然，出于对交通拥堵和环境污染的考虑而选择乘公共汽车，这个因素应该包含在消费者偏好 T 中，但很难用数学方法来衡量。

于是可以得到结论：当某一个外生变量（用坐标轴表示的变量之外的其他相关变量）发生变化时，整条需求曲线会发生移动；而当某一个内生变量发生变化时，我们只沿着需求曲线进行移动。

从生产者的角度看，**供给量**（ Q ）是指在特定时间内，厂家愿意并且能够出售的某种商品的数量。**供给函数**（Supply Function）用来描述生产者供给市场的供给量 Q 和商品价格 P 之间的关系。图 1.2.5 中给出了一个典型的线性供给函数：

$$P=aQ+b$$

其中，斜率 $a>0$ ，截距 $b>0$ 。

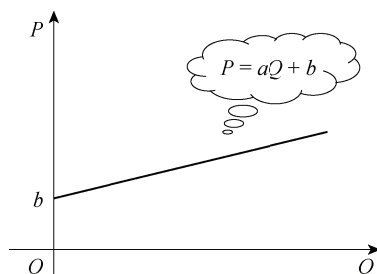


图 1.2.5

注意，当价格 $P=b$ 时，供给量 $Q=0$ ；这是因为只有当价格超过 b 时，生产者才会有利可图，才可能生产商品。

经济理论告诉我们，当商品的价格上升时，供给量也会上升，所以 P 是 Q 的增函数。当某种商品的价格上升时，生产者会增加产出，同时也吸引着新的企业进入到市场中来。

当然，供给函数不一定是线性的，而且供给数量 Q 也不只受价格 P 的影响，还受到一些外生变量的影响，如生产要素（土地、资本、劳动和管理者素质）的价格、其他商品可以获得的利润以及生产技术等。

在微观经济学中，人们关心供给曲线与需求曲线的交点。如图 1.2.6 所示，画出了一个供给曲线和一个需求曲线。它们的交点表示供给数量正好等于需求数量，在这个点上，市场达到了均衡（Equilibrium），此时相对应的价格 P_0 和数量 Q_0 称为均衡价格（Equilibrium Price）和均衡数量（Equilibrium Quantity）。

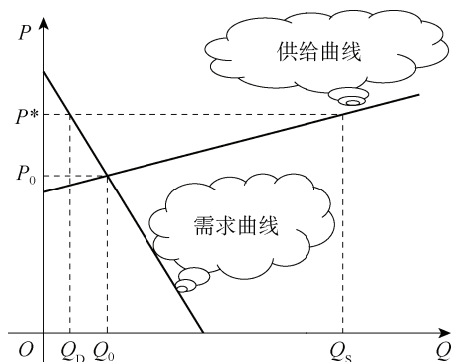


图 1.2.6

当然，人们也关心市场价格与均衡价格的偏离。假设市场价格 P^* 超过均衡价格 P_0 ，从图 1.2.6 可以看出，供给量 Q_s 大于需求量 Q_D ，会出现**超额供给或过剩**。此时卖不出的存货会迫使市场价格下降，企业减少生产量。同样，如果市场价格低于均衡价格，需求量 Q_D 大于供给量 Q_s ，此时会出现**超额需求或短缺**，迫使商品价格上升，从而鼓励企业生产更多商品。这种过程会循环往复地进行，最终使市场回到均衡状态。

例 1.2.2

已知某商品的需求函数与供给函数如下：

$$P = -2Q_D + 50$$

$$P = \frac{1}{2}Q_S + 25$$

其中， P 、 Q_D 和 Q_S 分别表示商品的价格、需求量和供给量。

(1) 求市场的均衡价格与均衡数量。

(2) 当政府向生产者征税，且每单位商品征收 5 美元的税收时，请分析此项税收对市场均衡产生的影响。

(3) 当政府向消费者征税，且每单位商品征收 5 美元的税收时，请分析此项税收对市场均衡产生的影响。

解：(1) 如图 1.2.7 所示，在市场均衡时，有 $Q_D = Q_S = Q$ 。

联立方程组，得

$$\begin{cases} P = -2Q + 50 \\ P = \frac{1}{2}Q + 25 \end{cases}$$

解之得， $Q=10$ ， $P=30$ 。

(2) 假设政府向生产者征税，且在单位商品上征收 5 美元的固定税金，这对供给者产生直接影响，使其在每一价格水平下的获利能力减少。也就是，企业销售每单位商品的收入就变为 $P-5$ ，即消费者所支付的 P 美元减去 5 美元税的剩余量。这时，供给函数就变为新的供给函数

$$P - 5 = \frac{1}{2}Q_S + 25$$

即

$$P = \frac{1}{2}Q_S + 30$$

类似 (1) 的过程，解方程组

$$\begin{cases} P = -2Q + 50 \\ P = \frac{1}{2}Q + 30 \end{cases}$$

得

$$Q = 8, P = 34$$

由图 1.2.7 看出，税收的引入使得供给曲线向上移动了 5 个单位，图中虚线表示新的供给曲线。由于并不向买者（消费者）征税，在任何一种既定价格下，需求量是相同的，所以需求曲线没有移动。从供给曲线与需求曲线的交点可以得出新的均衡数量为 8，均衡价格为 34。也就是说，政府向生产者征税，一方面使得市场的总体规模减小（ Q 从 10 变为 8），

另一方面也使得均衡价格上升 (P 从 30 美元升至 34 美元)。这说明, 消费者每购买 1 个单位商品要比原来多支付 4 美元, 而剩下的 1 美元税收由企业支付。也就是说, 政府向生产者征税, 有一部分税收转移到了消费者身上。

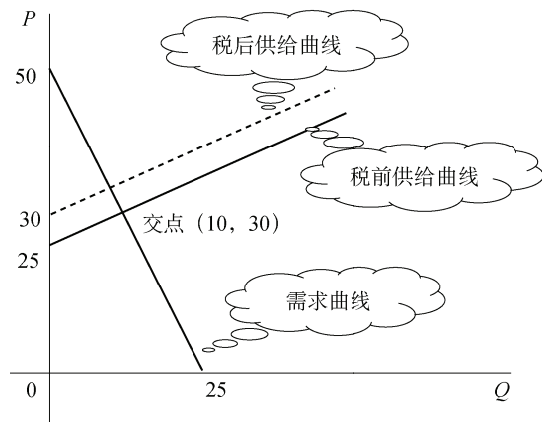


图 1.2.7

(3) 假设政府向买者 (消费者) 征税, 且在单位商品上征收 5 美元的固定税金, 这直接降低了商品的吸引力, 使在每一价格水平下买者的需求量减少。也就是, 消费者在每单位商品的支出就变为 $P+5$, 即生产者所供给的 P 加上 5 美元税收量。这时, 需求函数就变为新的需求函数

$$P+5=-2Q+50$$

即

$$P=-2Q+45$$

类似 (1) 的过程, 解方程组

$$\begin{cases} P=-2Q+45 \\ P=\frac{1}{2}Q+25 \end{cases}$$

得

$$Q=8, P=29$$

其实, 税收的引入使得需求曲线向下移动了 5 个单位。由于并不向供给者征税, 在任一种既定的价格下, 供给者向市场提供的量是相同的, 所以供给曲线没有移动。从供给曲线与需求曲线的交点可以得出新的均衡数量为 8, 均衡价格为 29。也就是说, 政府向消费者征税, 一方面使得市场的总体规模减小 (Q 从 10 变为 8), 卖者卖得少, 买者买得也少; 另一方面也使得均衡价格下降 (P 从 30 美元降至 29 美元)。由于引进了税收, 商品的市场价格从 30 美元降至 29 美元, 卖者卖掉一个商品的收入比没有税收时减少了 1 美元, 因此, 税收使卖者的状况变坏了。虽然买者付给卖者较低的价格 (29 美元), 但包括税收在内的有效价格从征税前的 30 美元上升到有税收时的 34 美元 (29 美元+5 美元=34 美元),

因此, 税收使买者的状况也变坏了。这说明, 买者每购买 1 个单位商品要比原来多支付 4 美元, 而剩下的 1 美元税收由企业支付。也就是说, 政府向消费者征税, 有一部分税收转移到了生产者的身上。

从上述例子得出两个结论:

(1) 税收抑制了市场活动, 缩小了市场规模。也就是说, 当对一种商品征税时, 该商品在新均衡时的销售量会减少。

(2) 一旦市场达到新的均衡, 无论向哪一方征税, 买者与卖者分摊了不同的税收负担, 唯一的区别是由谁来把钱交给政府。

上述的两个结论可以从图 1.2.8 得到解释。图中, $Q=10$, $P=30$ 是原来的均衡数量与价格, 而 $Q=8$ 是征税后的均衡数量, 将其分别代入需求函数和供给函数, 得到新均衡的需求价格和供给价格:

$$P_D = 34, P_S = 29$$

消费者所交税就是 $34-30=4$ 美元, 生产者所交税为 $30-29=1$ 美元。

显然, 税收分担的多少取决于需求曲线或供给曲线的斜率。也就是说, 谁的曲线相对越平坦, 它分担的税收就会越小; 谁的曲线相对越陡峭, 它分担的税收就会越多。

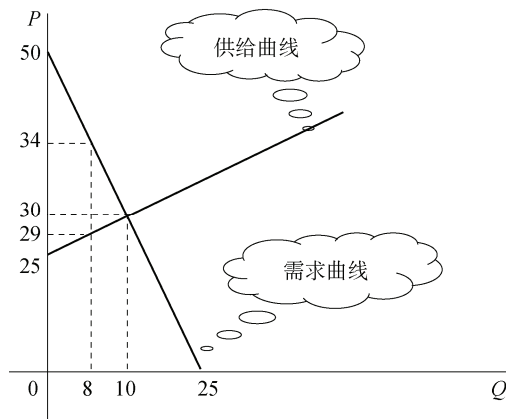


图 1.2.8

例 1.2.3

已知某种商品的需求和供给函数如下:

$$P = -4Q_D + 120$$

$$P = \frac{1}{3}Q_S + 29$$

其中, P , Q_D 和 Q_S 分别表示价格、需求量和供给量。(1) 求均衡价格与均衡数量; (2) 当政府对企业给予每单位商品 13 美元的价格补贴时, 求新的均衡价格和均衡数量, 并分析市场双方的利益变化。

解：(1) 在市场达到均衡时，有 $Q_D = Q_S = Q$ 。则

$$\begin{cases} P = -4Q + 120 \\ P = \frac{1}{3}Q + 29 \end{cases}$$

解之得， $Q=21$ ， $P=36$ 。

(2) 假设政府向生产者实行价格补贴时，这对供给者产生了直接影响，使其在每一价格水平下的获利能力得到增强。也就是，企业每单位商品的收入就变为 $P+13$ ，供给函数就变为新的供给函数

$$P+13 = \frac{1}{3}Q_S + 29$$

即

$$P = \frac{1}{3}Q_S + 16$$

而需求函数保持不变，类似 (1) 联立方程组，得

$$\begin{cases} P = -4Q + 120 \\ P = \frac{1}{3}Q + 16 \end{cases}$$

求得均衡解 $P=24$ ， $Q=24$ 。

这说明，当政府对生产者实行价格补贴时，会导致市场均衡价格的降低（从 36 美元降到 24 美元），市场规模得到扩大，消费者从购买的单位商品中获得了 $36-24=12$ 美元利益，从而分享了政府给予企业价格补贴的利益。

在第 4 章将介绍政府对生产者实行价格补贴将导致生产者剩余和消费者剩余增加。

例 1.2.4

已知某种商品的需求和供给函数如下：

$$P = -\frac{1}{2}Q_D + 20$$

$$P = \frac{1}{3}(Q_S + 10)$$

政府在每单位商品上征收了 α 美元的固定税收，分别计算 $\alpha=0$ ， $\alpha=2.5$ ， $\alpha=5$ ， $\alpha=10$ 情况时的均衡价格与均衡数量，对以上每种情况，分别计算由消费者支付的税收数量，并对其发表评论。

解：(1) 当 $\alpha=0$ 时，没有对产品征税，需求函数与供给函数即为以上给出的形式。在均衡条件下，有 $Q_D=Q_S=Q$ ，则

$$\begin{cases} P = -\frac{1}{2}Q + 20 \\ P = \frac{1}{3}(Q + 10) \end{cases}$$