第 2 章

线 性 规 划

本章学习目标

- 掌握线性规划的建模方法以及模型特征;
- 理解单纯形法与对偶单纯形法的基本思想，掌握两种方法的基本步骤、适用前提以及它们之间的区别与联系;
- 理解对偶问题的基本性质、经济解释以及在管理决策中的应用;
- 理解灵敏度分析的作用与意义，掌握灵敏度分析工具与分析内容。

本章需掌握的基本概念与基本方法

- 线性规划与线性规划标准形式;
- 可行解、基解、基可行解、最优解;
- 凸集、顶点、可行域;
- 检验系数、最小 θ 比值;
- 对偶问题与影子价格;
- 图解法、单纯形法、大 M 法、两阶段法、对偶单纯形法;
- 灵敏度分析。

2.1 问题的提出

线性规划是运筹学的一个重要分支，是帮助管理者做出决策的有效方法之一。在经济管理活动中，通常需要对有限的资源寻求最佳的利用或分配方式。任何资源，如劳动力、原材料、设备或资金等都是有限的，因此，必须进行合理的配置，寻求最佳的利用方式。所谓最佳的方式，必须有一个标准或目标，在单一目标问题中，就是使利润达到最大或成本达到最小，由此可以把有限资源的合理配置归纳为**两类问题**：一类是如何合理地使用有限的资源，使经济管理的效益达到最大；另一类是在经济管理的任务确定的条件下，如何合理地组织、安排活动，使所消耗的资源数最少，这是最常见的两类规划问题。

与规划问题有关的数学模型主要由以下内容组成：一部分是约束条件，反映有限资源对经济管理活动的种种约束，或者必须完成的任务；另一部分是目标函数，反映决策者在有限资源条件下希望达到的目标。在学习具体内容之前，要先了解以下问题。

【例 2.1】 SY 公司计划生产Ⅰ、Ⅱ两种家电产品。已知各生产一件产品时分别占用设备的台时(小时/件)以及人工(小时/件)和资源总量，各售出一件产品时的收益(元/件)情况，见表 2.1。问该公司应如何生产可使获取的总收益为最大？这是一个如何合理地使用有限资源产生最大收益的问题。

表 2.1

资源 \ 产品	Ⅰ	Ⅱ	现有资源
设备台时	2	3	300
人工	2	1.5	180
收益	100	120	

【例 2.2】 某加工厂要制作 100 套钢架，每套要用长为 2.9 m、2.1 m 和 1.5 m 的圆钢各一根。已知原料长为 7.4 m，问应如何下料可使所用材料最省？这是一个典型的在生产任务确定条件下，如何合理地组织生产(下料)，使所消耗资源数量最少的问题。

【例 2.3】 某商场是个中型百货商场，现在需要对营业员的工作时间做出安排，营业员每周工作五天，休息两天，并要求休息的两天是连续的。问题归结为：如何安排营业员的作息时间，既能满足工作需要，又使配备的营业员人数最少？这是一个人力资源合理安排问题。

对营业员的需求进行统计分析，得到营业员每天的需求人数见表 2.2。

表 2.2

时　间	所需营业员人数	时　间	所需营业员人数	时　间	所需营业员人数
星期日	28 人	星期三	25 人	星期六	28 人
星期一	15 人	星期四	19 人		
星期二	24 人	星期五	31 人		

【例 2.4】 某部门现拥有资金 100 万元，可在今后 5 年中用于投资，拟议中的项目有 A、B、C、D 四个，各项目的投资周期及收益见表 2.3。需要解决的问题是：假定资金年初投资，投资周期末收回，那么该如何做出投资决策，能使五年末积累的资金最多？

表 2.3

项　目	A	B	C	D
投资周期	1 年	2 年	4 年	5 年
年投资收益率	8%	10%	16%	20%

上述四个问题是典型的线性规划问题，将分别在 2.2 和 2.9 节中加以讨论。

2.2 问题的数学模型

现在运用线性规划数学模型构建思路对**例 2.1** 和**例 2.2** 进行讨论。

例 2.1 中，先用变量 x_1 和 x_2 分别表示 SY 公司制造家电Ⅰ和Ⅱ的数量。这时该公司可获取的总收益为($100x_1+120x_2$)元，令 $z=(100x_1+120x_2)$元，因问题中要求获取的总收益为最大，即 $\max z$。z 是该公司能获取的总收益的目标值，它是变量 x_1 和 x_2 的函数，称为目标函数。

x_1、x_2的取值受到设备和工时能力的限制，用于描述限制条件的数学表达式称为约束条件。由此，例 2.1 的数学模型可表示为

目标函数 $$\max z = 100x_1 + 120x_2$$

约束条件 $$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 300 & (2.1a) \\ 2x_1 + 1.5x_2 \leqslant 150 & (2.1b) \\ x_1, x_2 \geqslant 0 & (2.1c) \end{cases}$$

模型中的式(2.1a)和式(2.1b)分别表示家电Ⅰ，Ⅱ的制造件数受设备和工时能力的限制，式(2.1c)称为变量的非负约束，表明家电Ⅰ、Ⅱ制造数量不可能为负值。

例 2.2 可以这样考虑：在长度确定的原料上截取三种不同规格的圆钢，有不同的下料方案，但是各种下料方案的基本原则是下料以后剩下的余料足够少，已不能再截下任何一种规格的圆钢，即余料的长度必须短于 1.5 m。这样可以归纳出 8 种不同的下料方案，按余料长度逐步递增排序可得表 2.4。

表 2.4

圆钢/m \ 下料方案	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
2.9	1	2	0	1	0	1	0	0
2.1	0	0	2	2	1	1	3	0
1.5	3	1	2	0	3	1	0	4
余料/m	0	0.1	0.2	0.3	0.8	0.9	1.1	1.4

由此，问题归纳为如何混合使用这 8 种不同的下料方案来制造 100 套钢架，且要使剩余的料头总长为最短。

可假设 x_j 为第 j 种下料方案的取料根数，j = 1，2，…，8，目标是使余料总长度 z 极小化，则

$$z = 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5 + 0.9x_6 + 1.1x_7 + 1.4x_8$$

100 套钢架生产任务的约束条件为

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 100 \\ &2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7 = 100 \\ &3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 + x_6 + 4x_8 = 100 \end{aligned}$$

同时要求 x_j ($j = 1, 2, 3, \cdots, 8$)大于零且为整数。

所以，本例合理下料问题的线性规划模型为

$$\min z = 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5 + 0.9x_6 + 1.1x_7 + 1.4x_8$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7 = 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 + x_6 + 4x_8 = 100 \\ x_j \geqslant 0(j = 0, 1, 2, \cdots, 8, \text{且为整数}) \end{cases} \tag{2.2}$$

上述两个例子表明，规划问题的数学模型由三部分组成：(1)**变量**，或称决策变量，是问题中要确定的未知量，用于表明规划中用数量表示的方案、措施，可由决策者决定和控制；(2)**目标函数**，是决策变量的函数，按优化目标分别在这个函数前加上 max 或 min；(3)**约束条件**，指决策变量取值时受到各种资源条件的限制，通常用含决策变量的等式或不等式来表达。如果在规划问题的数学模型中，决策变量的取值是连续的，目标函数是决策变量的线性函数，约束条件是含决策变量的线性等式或不等式，则该类规划问题的数学模型称为线性规划的数学模型。实际问题中线性的含义，一是严格的比例性，如生产某产品对资源的消耗量和可获取的利润，同其生产数量严格成比例；二是可叠加性，如生产多种产品时，可获取的总利润是各项产品的利润之和，对某项资源的消耗量应等于各产品对该项资源消耗量的和。

假定线性规划问题中含 n 个变量，分别用 x_j (j=1, …, n)表示，在目标函数中 x_j 的系数为 c_j，通常称 c_j 为**价值系数**，x_j 的取值受 m 项资源的限制；用 b_i (i=1, ⋯, m)表示第 i 种资源的拥有量，b_i 称为**资源系数**；用 a_{ij} 表示变量 x_j 取值为 1 个单位时所消耗或含有第 i 种资源的数量，通常称 a_{ij} 为**约束系数**或**工艺系数**，则上述线性规划问题的数学模型可表示为

$$\max(\text{或}\min)z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

该模型的简写形式为

$$\max(\text{或}\min)z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \tag{2.4}$$

用向量形式表达时，该模型可写为

$$\max(\text{或}\min)z = CX$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j (\text{或} =, \geqslant) \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

式中，$\boldsymbol{C} = (c_1, c_2, \cdots, c_n), \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{P}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$。

用矩阵和向量来表示可写为

$$\max(\min)z = \boldsymbol{CX}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX} \leqslant (\text{或}=,\geqslant)\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0\end{cases} \tag{2.6}$$
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 称为约束方程组(约束条件)的**系数矩阵**。

变量 x_j 的取值一般为非负，$x_j \geqslant 0$。在数学意义上，可以有 $x_j \leqslant 0$。又如果变量 x_j 表示第 j 种产品本期内产量相对于前期产量的增加值，则 x_j 的取值范围为 $(-\infty,+\infty)$，称 x_j 取值不受约束，或 x_j 无约束。

2.3 线性规划问题的标准形式

2.3.1 标准形式

由于目标函数和约束条件内容和形式上的差别，线性规划问题可以有多种表达式。为了便于讨论和制定统一的求解方法，规定线性规划问题的标准形式如下：

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i=1,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 & (j=1,\cdots,n)\end{cases} \tag{2.7}$$

式(2.7)用矩阵和向量来表示可写为。

$$\max z = \boldsymbol{CX}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0\end{cases} \tag{2.8}$$

标准形式的线性规划模型中，必须符合以下四个条件：

(1)目标函数为极大化型；

(2)约束条件全为等式；

(3)约束条件右端常数项 b_i 全为非负值；

(4)变量 x_j 的取值全为非负值。

2.3.2 非标准形式线性规划的转换

对不符合标准形式的线性规划问题，可分别通过下列方法化为标准形式。

(1)目标函数为求极小值的转换。设目标函数为

$$\min\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

因为求 $\min z$ 等价于求 $\max(-z)$，所以令 $z'=-z$，即

$$\max z'=-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

(2)右端项 $b_i<0$ 时，只需将等式或不等式两端同乘以−1，则等式右端项必大于零。

(3) 约束条件为不等式。当约束条件为“≤”时，如 $7x_1+3x_2\leqslant 34$，可令 $7x_1+3x_2+x_3=34$，显然 $x_3\geqslant 0$；当约束条件为“≥”时，如有 $15x_1+2x_2\geqslant 10$，可令 $15x_1+2x_2-x_4=10, x_4\geqslant 0$。$x_3$ 和 x_4 是新加上去的变量，取值均为非负，加到原约束条件中去的目的是使不等式转化为等式。其中，x_3 称为**松弛变量**，x_4 一般称为**剩余变量**。松弛变量或剩余变量在实际问题中分别表示未被充分利用的资源和超出的资源数，均未转化为价值和利润，所以引进模型后它们在目标函数中的系数均为零。

(4)取值无约束的变量。如果变量 x 代表某产品当年计划数与上一年计划数之差，显然 x 的取值可能为正也可能为负，这时可令 $x=x'-x''$，其中 $x'\geqslant 0, x''\geqslant 0$，将其代入线性规划模型即可。

(5)对 $x<0$ 的情况，令 $x=-x'$，显然 $x'\geqslant 0$。

【例 2.5】 将下述线性规划化为标准形式:

$$\min z=7x_1+3x_2+5x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-2x_1+3x_2+x_3\leqslant 6\\-4x_1+2x_2-2x_3\geqslant 3\\5x_1-3x_2-2x_3=-6\\x_1\leqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\text{取值无约束}\end{cases}$$

解：上述问题中令 $z'=-z$，$x_1=-x_1', x_3=x_3'-x_3''$,其中 $x_3'\geqslant 0$，$x_3''\geqslant 0$，并按上述规则，该问题的标准形式为

$$\max z'=7x_1'-3x_2-5x_3'+5x_3''+0x_4+0x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1'+3x_2+x_3'-x_3''+x_4=6\\4x_1'+2x_2-2x_3'+2x_3''-x_5=3\\5x_1'+3x_2+2x_3'-2x_3''=6\\x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5\geqslant 0\end{cases}$$

2.4　标准型线性规划解的概念

考虑以下标准的线性规划问题：

$$\max z=\boldsymbol{CX} \tag{2.9}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} & (2.10) \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 & (2.11) \end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{C}$ 是 n 维行向量；$\boldsymbol{X}$ 是 n 维列向量；$\boldsymbol{b}$ 是 m 维列向量；$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵。通常可假定 $m\times n$ 阶矩阵满足 $m\leqslant n$，而且 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=m$,否则可以删去一些多余等式，使之满足条件。

下面介绍线性规划问题各种解的概念。

(1) **可行解**。满足上述约束条件式(2.10)和式(2.11)的 $\boldsymbol{X}=[x_1,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，称为线性规划问题的**可行解**，全部可行解的集合称为**可行域**。

(2) **最优解**。使目标函数(2.9)达到最大值的可行解称为**最优解**。

(3) **基**。设 $\boldsymbol{A}$ 为约束方程组(2.10)的 $m\times n$ 阶系数矩阵(设 $n>m$)，其秩为 m；$\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的一个 $m\times m$ 阶的满秩子矩阵，称为线性规划问题的一个**基**。不失一般性地，设

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}=\left(P_1,\cdots,P_m\right)$$

$\boldsymbol{B}$ 中的每个列向量 $\boldsymbol{P}_j$（j=1, $\cdots$, m)称为**基向量**，与基向量 $\boldsymbol{P}_j$ 对应的变量 x_j 称为**基变量**。线性规划中除基变量以外的变量称为**非基变量**。

(4) **基解**。在约束方程组(2.10)中，令所有非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，又因为有 $|B|\neq0$，根据克莱姆规则，由 m 个约束方程可解出 m 个基变量的唯一解 $\boldsymbol{X}_B=[x_1,\ \cdots,\ x_m]^{\mathrm{T}}$。将这个解加上非基变量取 0 的值，有 $\boldsymbol{X}=[x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$，称为线性规划问题的**基解**。显然，在基解中变量取非零值的个数不大于方程数 m，故基解的总数不超过 C_n^m 个。

(5) **基可行解**。满足变量非负约束条件式(2.11)的基解称为**基可行解**。

(6) **可行基**。对应于基可行解的基称为**可行基**。

【例 2.6】 求出下列线性规划问题的全部基解，指出其中的基可行解，并确定最优解：

$$\max z=3x_1+2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4 \\ 2x_1+6x_2+x_4=12 \\ x_j\geqslant 0,\ (j=1,\cdots,4) \end{cases}$$

该线性规划问题的全部基解见表 2.5，表中打√者为基可行解，标注*者为最优解 $z^*=12$。

表 2.5

序号	x_1	x_2	x_3	x_4	z	是否基可行解
①	0	0	4	12	0	√
②	0	4	0	−12	8	×
③	0	2	2	0	4	√
④	4	0	0	4	12	√*
⑤	6	0	−2	0	18	×
⑥	3	1	0	0	11	√

2.5　线性规划的图解法

线性规划的图解法是借助几何图形来求解线性规划的一种方法。这种方法通常只适用于求解两个变量的线性规划问题，因此它不是线性规划问题的通常算法，但是有助于直观地了解线性规划的基本性质以及将在 2.6 节介绍的单纯形法的基本思想。

2.5.1　图解法的基本步骤

【例 2.7】 利用图解法求解下列线性规问题：

$$\max z = 10x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leqslant 9 & (2.12\text{a}) \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 8 & (2.12\text{b}) \\ x_1, x_2 \geqslant 0 & (2.12\text{c}) \end{cases}$$

现结合例 2.7 对图解法的主要步骤进行说明：

(1) 以变量 x_1 为横坐标轴、x_2 为纵坐标轴画出直角平面坐标系，并适当选取单位坐标长度。由变量的非负约束条件式(2.12c)知，满足该约束条件的解(对应坐标系中的一个点)均在第 1 象限内。

(2) 图示约束条件，找出可行域。约束条件式(2.12a)可分解为 $3x_1 + 4x_2 = 9$ 和 $3x_1 + 4x_2 < 9$，前者是斜率为 $-\frac{3}{4}$ 的直线，后者为位于这条直线下方的半平面。因此，$3x_1 + 4x_2 \leqslant 9$ 是位于直线 $3x_1 + 4x_2 = 9$ 的点及其下方的半平面，如图 2.1 所示。类似地，约束条件式(2.12b)，在坐标系中是 $5x_1 + 2x_2 = 8$ 这条直线上的点及其左下方的半平面。同时满足约束条件式(2.12a) ~ 式(2.12c)的点如图 2.2 所示，图中的凸多边形 *OABCD* 所包含的区域(用阴影线表示)是**例 2.7** 线性规划问题的**可行域**。

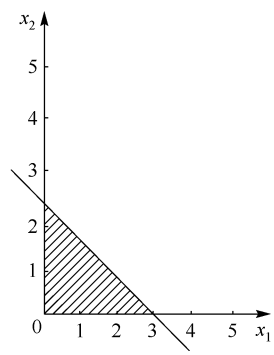

图 2.1

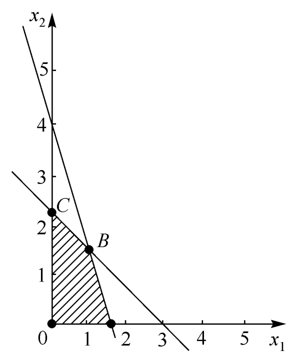

图 2.2

(3) 图示目标函数。由于 z 是一个要优化的目标函数值，随 z 的变化，$z = 10x_1 + 5x_2$ 是斜率为−2 的一族平行的直线，如图 2.3 所示，图中向量 $\boldsymbol{P}$ 代表目标函数值 z 的增大方向。

(4) 最优解的确定。因最优解是可行域中使目标函数值达到最优的点，将图 2.2 和图 2.3 合并得到图 2.4，可以看出，当代表目标函数的那条直线由原点开始向右上方移动时，z 值逐

渐增大，一直移动到目标函数的直线与约束条件包围成的凸多边形相切时为止，切点就是代表最优解的点。因为再继续向右上方移动，z 值仍然可以增大，但在目标函数的直线上找不出一个点位于约束条件包围成的凸多边形内部或边界上。

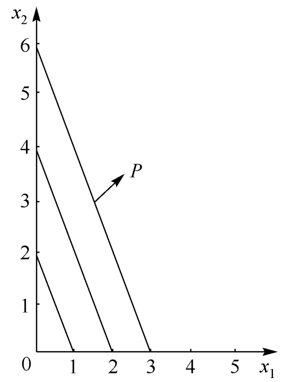
图 2.3

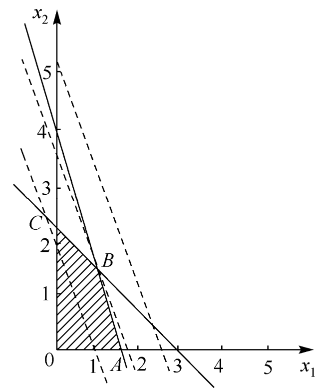
图 2.4

本例中目标函数直线与凸多边形的切点是 B，该点坐标可由求解直线方程 $3x_1+4x_2=9$ 和 $5x_1+2x_2=8$ 得到，$\boldsymbol{X}^*=\left[1,\dfrac{3}{2},0,0\right]^{\mathrm{T}}$，将其代入目标函数得 $z^*=17.5$ 。

2.5.2 图解法的几种可能结果

在运用图解法求解线性规划过程中，除了存在上述唯一最优解的结果，还可能存在多个解、无界解和无可行解，下面分别讨论总结。

(1) 可行域为封闭的有界区域

①存在唯一最优解，如图 2.5 所示。

②存在无穷多最优解，如图 2.6 所示。

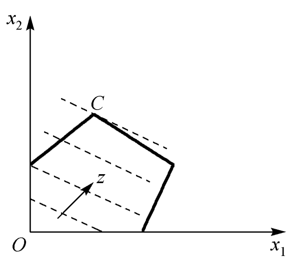
图 2.5

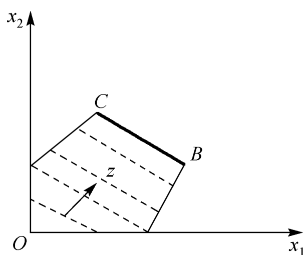
图 2.6

(2) 可行域为非封闭的无界区域。

①存在唯一最优解，如图 2.7 所示。

②存在无穷多最优解，如图 2.8 所示。

③存在无界解，如图 2.9 所示。

(3) 可行域为空集。这种情况下无可行解，如图 2.10 所示。

2.5.3 图解法基本结论

对于两个变量的线性规划问题，可以利用图解法求解，从几何的角度得出以下几个结论。

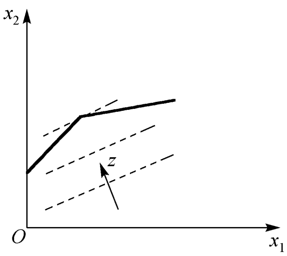

图 2.7

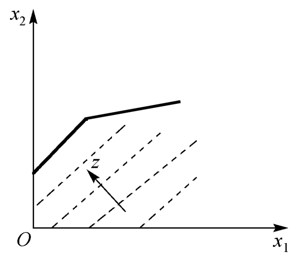

图 2.8

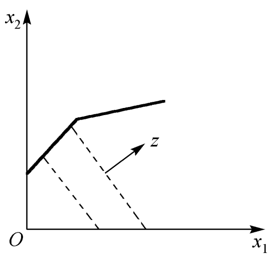

图 2.9

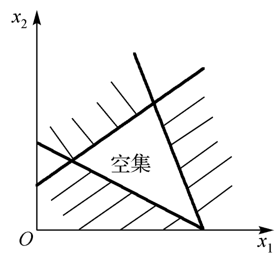

图 2.10

(1)线性规划问题的可行域是一个有界或无界的凸多边形，其顶点个数是有限个，且对应该问题的基可行解。

(2)若线性规划问题有唯一最优解，那么最优解一定可在可行域的某个顶点(基可行解)上找到。

(3)求解线性规划问题时，解的可能情况有：唯一最优解、无穷多最优解、无界解、无可行解等。

2.6　线性规划的单纯形法

在图解法中，线性规划可行域的顶点与线性规划的基可行解之间存在的对应关系，启发我们思考如下问题：若线性规划问题有最优解，那么这个最优解是否一定能在线性规划的基可行解中找到？如果结论是肯定的，那么线性规划问题的求解过程将大大简化。因为线性规划问题的基可行解的个数不会超过 C_n^m 个，在有限个基可行解中寻找最优解显然要比在所有可行解中寻找方便得多。单纯形法就是一种基于上述基本结论提出的求解线性规划的通用算法，下面将从理论上做出证明。

2.6.1　单纯形法的基本原理

1．几个基本概念

(1)**凸集**。设 K 是 n 维欧氏空间的一个点集，若在任意两点 $\boldsymbol{X}^{(1)}\in K$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}\in K$ 的连线上的一切点，有 $\alpha\boldsymbol{X}^{(1)}+(1-\alpha)\boldsymbol{X}^{(2)}\in K$（$0\leqslant\alpha\leqslant1$），则称 K 为**凸集**。

凸集的几何特征是：连接几何形体中任意两点的线段仍完全在该几何形体之中。不难证明：有限个凸集的交集仍然是凸集。

(2) **凸组合**。设 $\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{X}^{(k)}$是 n 维欧氏空间中的 k 个点，若存在 $\mu_1, \mu_1, \cdots, \mu_k$,满足 $0 \leqslant \mu_i \leqslant 1$ $(i=1, 2, \cdots, k)$， $\sum_{i=1}^{k}\mu_i = 1$，使 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{X}^{(k)}$的**凸组合**。

显然，凸集 K 中任意两点 $\boldsymbol{X}^{(1)}$和 $\boldsymbol{X}^{(2)}$连线上的任一点 $\boldsymbol{X}$ 都是 $\boldsymbol{X}^{(1)}$与 $\boldsymbol{X}^{(2)}$的一个凸组合。

(3) **顶点**。设 K 为凸集，$\boldsymbol{X} \in K$，若 $\boldsymbol{X}$ 不能用 $\boldsymbol{X}^{(1)} \in K$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)} \in K$ 两点的一个凸组合表示为 $\alpha \boldsymbol{X}^{(1)} + (1-\alpha)\boldsymbol{X}^{(2)} \in K$（$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$），则称 $\boldsymbol{X}$ 为 K 的一个**顶点**。

2．线性规划的基本定理

定理 1　若线性规划问题存在可行域，则其可行域 $D = \{\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X} \geqslant 0\}$ 是一个凸集。(证明见附录 A)

定理 2　设线性规划问题的可行域 $D = \left\{\boldsymbol{X} \mid \sum^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b}, x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n\right\}$，则 $\boldsymbol{X}$ 是 D 的一个顶点的充分必要条件是 $\boldsymbol{X}$ 为线性规划问题的基可行解。(证明见附录 A)

定理 3　若线性规划问题有最优解，则一定存在一个基可行解是最优解。(证明见附录 A)

2.6.2　单纯形法的基本思路

由**定理 3** 可知，如果线性规划问题存在最优解，则一定有一个基可行解是最优解。因此，单纯形法迭代的基本思路是：先找出一个基可行解，判断其是否为最优解，如为否，则通过换基迭代转换到相邻的基可行解，并使目标函数值不断增大，这称为换基迭代，直至找到最优解为止。单纯形法的基本思路如图 2.11 所示。下面通过一个例子来解释单纯形法求解最优解的基本过程。

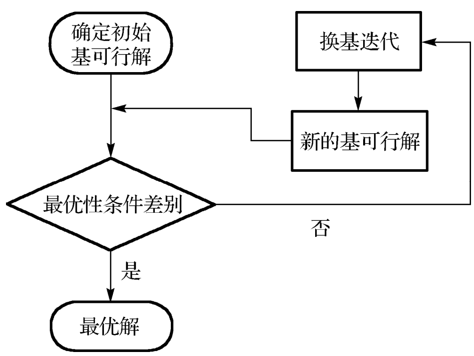

图 2.11　单纯形法的基本过程

【例 2.8】　用单纯形基本思路求解**例 2.7** 的线性规划问题:

$$\max z = 10x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leqslant 9 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：(1) 化为标准形式

$$\max z = 10x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) 确定初始的基可行解。本例中 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C} = [10, 5, 0, 0]$，因为在系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中存在一个单位矩阵 $\boldsymbol{B}_1 = [\boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，所以容易确定一个初始的基可行解。可取 x_3、x_4 为基变量，x_1、x_2 为非基变量，此时令非基变量为零，求得初始基可行解为 $\boldsymbol{X}^{(0)} = [0, 0, 9, 8]^{\mathrm{T}}$，相当于图 2.4 中的原点 O，此时，目标值 $z^{(0)} = 0$。

(3) 最优性判断。判断 $\boldsymbol{X}^{(0)} = [0, 0, 9, 8]^{\mathrm{T}}$ 是否最优。由该问题的约束方程可得 $x_3 = 9 - 3x_1 - 4x_2$，$x_4 = 8 - 5x_1 - 2x_2$，将此二式代入目标函数，用非基变量来表示目标函数，此时 $z = 10x_1 + 5x_2$，$[10, 5]$ 为判断 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 是否为最优解的检验系数，用 σ_1、σ_2 表示，$\sigma_i (i = 1, 2)$ 称为最优性判断的**检验系数**。因为 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$，，所以无论 x_1 或 x_2 变为基变量（进基）都能使当前的目标值 $z^{(0)}$ 增加，据此判断，$X^{(0)}$ 不是最优解。

(4) 换基迭代，求新的基可行解。换基的目的是找一个非基变量作为进基（换入）变量，同时确定一个基变量作为出基（换出）变量，以使新的解目标值增加，同时新的解又在基可行解集合内。

①选择进基变量。按最大目标值增加原则，$\max[\sigma_1, \sigma_2] = [10, 5] = 10$，所以 x_1 为进基变量。

②确定出基变量。因为 x_2 未被选为进基变量，所以仍为非基变量，令 $x_2 = 0$，由该问题的约束方程得 $x_3 = 9 - 3x_1, x_4 = 8 - 5x_1$。为保持新的解在基可行解范围内，无论是 x_3 或 x_4 被选为出基变量，都需满足 $x_3 \geqslant 0$，$x_4 \geqslant 0$，即 $9 - 3x_1 \geqslant 0$，$8 - 5x_1 \geqslant 0$，得到 $x_1 \geqslant \frac{9}{3}$，$x_1 \geqslant \frac{8}{5}$。令 $\theta_1 = \frac{9}{3}$，$\theta_2 = \frac{8}{5}$，称 $\frac{9}{3}$ 和 $\frac{8}{5}$ 为 θ 比值，此时应取 $\min \theta_i = \left\{\frac{9}{3}, \frac{8}{5}\right\} = 1.5 (i = 1, 2)$，才能保证 $x_3 \geqslant 0$，$x_4 \geqslant 0$，由此得到出基变量为 x_4。从这里可以看出 θ 比值是判断出基变量的指标。

③迭代，求新的基可行解。可对约束方程组的增广矩阵进行初等行变换，使进基变量 x_1 所对应的系数列向量 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ 变换成出基变量 x_4 所对应的单位向量 $\boldsymbol{P}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，需要注意的是，在变换过程中必须保持基变量 x_3 的系数列向量 $\boldsymbol{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 为单位向量不变。

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第二行除以5}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第一行减去第二行乘以3}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{14}{5} & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{21}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

下面的增广矩阵是在原约束方程组增广矩阵的基础上通过初等行变换得到的，因此所对应的约束方程组与原约束方程组是同解的线性方程组，在讨论中具有同等地位，由此可得到

改进的新基可行解 $\boldsymbol{X}^{(1)}$。此时，$\boldsymbol{X}^{(1)}=\left[\frac{8}{5},0,\frac{21}{5},0\right]^{\mathrm{T}}$，$z^{(1)}=16$，相当于图 2.4 中的 A 点。

(5)回到最优性判断。判断 $\boldsymbol{X}^{(1)}=\left[\frac{8}{5},0,\frac{21}{5},0\right]^{\mathrm{T}}$ 是否为最优解，由式(2.13)最终的增广矩阵可以得到 $x_3=\frac{21}{5}-\frac{14}{5}x_2+\frac{3}{5}x_4$，$x_1=\frac{8}{5}-\frac{2}{5}x_2-\frac{1}{5}x_4$。将此二式代入目标函数，用非基变量来表示目标函数，此时，

$$z=10x_1+5x_2=16+\underset{\substack{\uparrow\\ \sigma_2}}{x_2}-2\underset{\substack{\uparrow\\ \sigma_4}}{x_4}$$

由于非基变量检验系数 $\sigma_2=1$ 大于零，表明若 x_2 进基，则能使当前的目标值 16 增加，所以 $\boldsymbol{X}^{(1)}=\left[\frac{8}{5},0,\frac{21}{5},0\right]^{\mathrm{T}}$ 不是最优解，需改进。

(6)再次换基迭代，求新的基可行解。

①选择进基变量。因为只有 x_2 的检验系数 $\sigma_2>1$，所以选取 x_2 为进基变量。

②确定出基变量。由于 x_4 仍然为非基变量，所以令 $x_4=0$，由式(2.13)最终的增广矩阵可得 $x_3=\frac{21}{5}-\frac{14}{5}x_2$，$x_1=\frac{8}{5}-\frac{2}{5}x_2$。为了保证新的解在基可行解范围中，需满足 $x_3=\frac{21}{5}-\frac{14}{5}x_2\geqslant 0$，$x_1=\frac{8}{5}-\frac{2}{5}x_2\geqslant 0$，计算 θ 比值得 $\theta_1=\frac{3}{2}$，$\theta_2=4$，取 $\min\theta_i=\left\{\frac{3}{2},4\right\}=\frac{3}{2}\quad(i=1,2)$，表明出基变量是 x_3。

③迭代，求新的基可行解。对式(2.13)再施以初等行变换，使进基变量 x_2 所对应的系数列向量 $\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}\frac{14}{5}\\ \frac{2}{5}\end{bmatrix}$ 变换成出基变量 x_3 所对应的单位向量 $\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，见式(2.14)。需要注意的是，在变换过程中必须保持基变量 x_1 的系数列向量 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 为单位向量不变。变换过程如下：

$$\begin{bmatrix}0 & \frac{14}{5} & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{21}{5}\\ 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{8}{5}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{第一行除以}\frac{14}{5}}\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{5}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{8}{5}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{第二行减去第一行乘以}\frac{2}{5}}\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{5}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{3}{2}\\ 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 1\end{bmatrix}\tag{2.14}$$

于是可得新的基可行解 $\boldsymbol{X}^{(2)}=\left[1,\frac{3}{2},0,0\right]^{\mathrm{T}}$，$z^{(1)}=17.5$，相当于图解法例 6 中图 2.4 的 B 点。

(7)再次回到最优性判断。判断 $\boldsymbol{X}^{(2)}=\left[1,\frac{3}{2},0,0\right]^{\mathrm{T}}$ 是否为最优解，由式(2.14)最终的增广矩阵可得 $x_2=\frac{3}{2}-\frac{5}{14}x_3+\frac{3}{14}x_4$，$x_1=1+\frac{1}{7}x_3-\frac{2}{7}x_4$，将此二式代入目标函数，用非基变量来表示目标函数，此时有

$$z = 10x_1 + 5x_2 = 17\frac{1}{2} - \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma_3}}{\frac{5}{14}}x_3 - \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma_4}}{\frac{25}{14}}x_4$$

所有非基变量的检验系数均小于零，表明不管是 x_3 或 x_4 进基都不能使目标值在 17.5 的基础上增加，所以求得最优解 $\boldsymbol{X}^* = \left[1, \frac{3}{2}, 0, 0\right]^{\mathrm{T}}$，$z^* = 17.5$。

2.6.3　表格形式的单纯形法

对于如下形式的线性规划问题 $(b_i > 0, i = 1, 2, \cdots, m)$：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

加入松弛变量后化为标准式

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n + c_{n+1}x_{n+1} + \cdots + c_{n+m}x_{n+m}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

为了书写规范和便于计算，对单纯形法的计算设计了一种专门表格，称为单纯形表(见表 2.6)。迭代计算中每找出一个新的基可行解时，就需重新画一张单纯形表。含初始基可行解的单纯形表称为初始单纯形表，含最优解的单纯形表称为最终(优)单纯形表。

表 2.6

c_j			c_1	c_2	…	c_n	c_{n+1}	c_{n+2}	…	c_{n+m}	θ_i
$\boldsymbol{C}_\mathrm{B}$	$\boldsymbol{X}_\mathrm{B}$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	
c_{n+1}	x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	θ_1
c_{n+2}	x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	θ_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
c_{n+m}	x_{n+m}	b_m	a_{n1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	θ_m
z		z	σ_1	σ_2	…	σ_n	0	0	…	0	

1．单纯形表的含义

表 2.6 是初始单纯形表，$\boldsymbol{X}_\mathrm{B}$ 列填入基变量，$\boldsymbol{C}_\mathrm{B}$ 列填入基变量对应的价值系数；$\boldsymbol{b}$ 列中

填入约束方程右端项系数，代表基变量的取值；第 2 行填入所有的变量；第 1 行填入相应的价值系数；第 4 列至倒数第 2 列、第 3 行至倒数第 2 行填入整个约束系数矩阵；最后一行是检验系数行，用来确定进基变量，对应于各个非基变量的检验系数为 σ_j，而基变量的检验系数都为零。

在整个运算过程中，$\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}$ 列的价值系数随着基变量的变化而变化，以便计算新的检验系数，若非基变量存在大于零的检验系数，则当前的基可行解不是最优解。检验系数的计算公式为（推导见 2.6.4 小节）

$$\boldsymbol{\sigma}_j = \boldsymbol{c}_j - \boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{c}_j - \sum_{i=1}^{m} c_{n+i}a_{ij} \tag{2.16}$$

单纯形表最右边这列是 θ 比值，用来确定出基变量。在确定了进基变量 x_k 之后，分别由 $\boldsymbol{b}$ 列元素 b_i 除以 x_k 列的对应元素 a_{ik} 确定，即当 $a_{ik}>0$ 时，有

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}\ (i=1,2,\cdots,m) \tag{2.17}$$

为了保证新的基解是可行的，取 θ 比值最小值所在行的变量作为出基变量。

2．表格形式单纯形法计算步骤

（1）化标准形式，建立初始单纯形表（见表 2.6）。

（2）计算非基变量的检验系数，若所有检验系数都小于等于零，则得到最优解，停止计算，否则转下一步，检验系数计算公式（2.16）。

（3）确定进基变量和出基变量。$\sigma_k = \max\{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\}$，取 x_k 为进基变量。根据最小 θ 规则，$\theta_i = \min\left\{\dfrac{b_i}{a_{ik}} \mid a_{ik} > 0\right\}$，取 x_i 为出基变量，若此时 a_{ik} 都小于零，则无最优解，停止计算，否则进入下一步。

（4）换基迭代，求出新的基可行解，转步骤（2）。

【例 2.9】 利用单纯形表求**例 2.7** 中的最优解。

解：（1）求初始基可行解，列出初始单纯形表。

根据**例 2.7** 的标准形，取 x_3、x_4 为基变量，它们所对应的系数列向量构成一个单位矩阵，可作为初始可行基，由此可得初始的单纯形表，见表 2.7。

表 2.7

C			10	5	0	0	**θ**
C_{B}	X_{B}	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	9	3	4	1	0	3
0	x_4	8	$\boxed{5}$	2	0	1	8/5
z		0	10	5	0	0	

得初始基本可行解 $\boldsymbol{X}^{(0)} = [0,0,9,8]^{\mathrm{T}}$，$z^{(0)} = 0$。

（2）最优性检验。因为检验系数行存在正的检验数，所以 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 不是最优解。

（3）换基迭代，求新的基可行解。

①确定进基变量。因为 $\max\{10, 5\}=10$，由最大增加原则，取 x_1 为进基变量。

②确定出基变量。因为 $\min\theta_i=\left\{\frac{9}{3},\frac{8}{5}\right\}=1.5$，由最小比值原则，确定 x_4 为出基变量。

③迭代，求新的基可行解。以 x_4 所在行和 x_1 所在列的交叉元素“5”为主元素(加上“□”，以示区别)，进行初等行变换，可得新的单纯形表，见表 2.8。

表 2.8

C			10	5	0	0	θ
C_B	X_B	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	21/5	0	$\boxed{14/5}$	1	−3/5	3/2
10	x_1	8/5	1	2/5	0	1/5	4
z		16	0	1	0	−2	

(4) 回到步骤(2)，再次检验。得到改进的基本可行解为 $\boldsymbol{X}^{(1)}=\left[\frac{8}{5},0,\frac{21}{5},0\right]^{\mathrm{T}}$，$z^{(1)}=16$。但是检验数 $\sigma_2>0$，所以改进后的 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 仍不是最优解。

由于只有一个正检验数 σ_2，所以取 x_2 为进基变量。此时 $\min\theta_i=\left\{\frac{3}{2},4\right\}=\frac{3}{2}$，所以取 x_3 为出基变量，再以 14/5 为主元素进行初等行变换，可得表 2.9。

表 2.9

C			10	5	0	0	θ
C_B	X_B	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	
5	x_2	3/2	0	1	5/14	−3/14	3/2
10	x_1	1	1	0	−1/7	2/7	4
z		17.5	0	0	−5/14	−25/14	

因为不再存在大于零的检验系数，所以现行的基可行解为最优解，$\boldsymbol{X}^*=\left[1,\frac{3}{2},0,0\right]^{\mathrm{T}}$，相应的最优值 $z^*=17.5$。

2.6.4　单纯形法的矩阵表示

对于以下标准形式线性规划问题：

$$\max z=\boldsymbol{CX}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX}=b\\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\end{cases}$$

设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n]$，其中 $\boldsymbol{P}_j(j=1,2\cdots,n)$ 是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 个列向量。再设 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_{B_1},\boldsymbol{P}_{B_2},\cdots,\boldsymbol{P}_{B_m})$ 是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个基矩阵，这样系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可分为两块，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N})$，$\boldsymbol{N}$ 是非基变量的系数矩阵。相应的向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 可以记为

$$X=\begin{bmatrix}X_B\\X_N\end{bmatrix},\quad C=[C_B,C_N]$$

这样，目标函数可写成

$$\max z=(C_B,C_N)\begin{bmatrix}X_B\\X_N\end{bmatrix}=C_BX_B+C_NX_N \tag{2.18}$$

约束条件 $AX=b$ 可写成

$$(B,N)\begin{bmatrix}X_B\\X_N\end{bmatrix}=BX_B+NX_N=b$$

由于 B 可逆，可得到

$$X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N \tag{2.19}$$

对于一个确定的基 B，将式(2.19)代入式(2.18)，目标函数可以表示为

$$\begin{aligned}z&=C_B(B^{-1}b-B^{-1}NX_N)+C_NX_N\\&=C_BB^{-1}b+(C_N-C_BB^{-1}N)X_N\end{aligned} \tag{2.20}$$

令
$$\sigma_N=C_N-C_BB^{-1}N \tag{2.21}$$
为非基变量的检验系数。

又令非基变量 $X_N=0$，可得相应的解为

$$X=\begin{bmatrix}X_B\\X_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix} \tag{2.22}$$

如果 B 为可行基，则有

$$X=\begin{bmatrix}X_B\\X_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}\geqslant 0$$

目标函数为 $z=C_BB^{-1}N$ 。

用矩阵描述时，θ 规则的表达式是

$$\theta=\min\left\{\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_k)_i}\mid(B^{-1}P_k)_i>0\right\}=\frac{(B^{-1}b)_l}{(B^{-1}P_k)_l} \tag{2.23}$$

式中，k 是出基变量的下标；l 是进基变量的下标。

用矩阵和向量表示的单纯形表见表 2.10。

表 2.10

C_B	X_B	b	C_B	C_N	θ
			X_B	X_N	
C_B	X_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}B$	$B^{-1}N$	$\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_k)_i}$
z		$C_BB^{-1}b$	0	$C_N-C_BB^{-1}N$	

从表 2.9 中可以看出，单纯形表的每一次迭代，其实质都是在系数增广矩阵的左边乘以 $\boldsymbol{B}^{-1}$，这个结论将在 2.7.7 小节灵敏度分析中得到运用。

2.6.5　单纯形法的进一步讨论

1．借助人工变量求初始的基可行解

在例 2.8 中，化为标准形式后约束条件的系数矩阵中含有单位矩阵，以此作为初始基，使得求初始基可行解和建立初始单纯形表都十分方便。但在下述的例 2.9 中，化为标准形后的约束条件的系数矩阵中不存在单位矩阵，解决这类问题，必须引入人工变量。

引入人工变量后的约束方程组与未引入人工变量的约束方程组一般是不等价的。在这点上，人工变量与松弛变量或剩余变量是不同的，松弛变量或剩余变量只是将约束方程不等式改写成等式，改写前后两个约束是等价的。而人工变量则不同，因为人工变量是在约束方程已为等式的基础上，人为地加上去的一个新变量，因此加上人工变量后的约束方程与原来是不一样的。加上人工变量以后，线性规划的基可行解不一定是原线性规划问题的基可行解，只有当基可行解中所有人工变量都取零值的非基变量时，该基可行解对原线性规划才有意义。此时只需去掉基可行解中的人工变量部分，剩余部分即为原线性规划的一个基可行解，而这正是我们引入人工变量的主要目的。人工变量法主要有大 M 法和两阶段法两种，下面分别介绍。

(1) **大 M 法**。以下通过例题来讲解大 M 法的思路和过程。

【例 2.10】

$$\max z = -x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 2 \\ -x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

化为标准形式后得

$$\max z = -x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 & (2.24\text{a}) \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 1 & (2.24\text{b}) \\ x_2 + x_5 = 3 & (2.24\text{c}) \\ x_j \geqslant 0 (j = 1,2,3,4,5) \end{cases}$$

在将线性规划问题化为标准形式的基础上可以添加两列单位向量 $\boldsymbol{P}_6$、$\boldsymbol{P}_7$，与约束条件中的向量 $\boldsymbol{P}_5$ 构成单位矩阵

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{P}_6 & \boldsymbol{P}_7 & \boldsymbol{P}_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\boldsymbol{P}_6$、$\boldsymbol{P}_7$ 是人为添加的，它相当于在上述问题的约束条件式 (2.24a) 中添加变量 x_6，约束条件式 (2.24b) 中添加变量 x_7，变量 x_6、x_7 称为人工变量。由于约束条件式 (2.24a) 和式 (2.24b)