

模块 3 正弦交流电

课题 1 正弦交流电的描述

任务 1 认识正弦波

1. 何谓正弦波

正弦波是交流电信号的基本类型。电力系统提供的就是正弦波形式的电压和电流。另外，其他类型的重复性波形是由多种称为谐波的正弦波组成的。

正弦波或者正弦曲线有两种来源：旋转电机（交流发电机）或者电子振荡器电路。电子振荡器电路用于仪器中，通常称为电子信号发生器。图 3-1 所示的符号用来表示正弦曲线电压源。

图 3-2 显示的是一般形状的正弦波形图，这个正弦波既可以是交流电流也可以是交流电压。应注意电压（或电流）是如何变化的。坐标的垂直轴显示电压（或者电流），水平轴显示时间。由零点开始，电压（或者电流）增长到正向最大值（正向峰值），返回到零，再从零开始反向增长到负向最大值（负向峰值），再一次返回到零，由此完成了完整的一周。



图 3-1 正弦曲线电压源符号

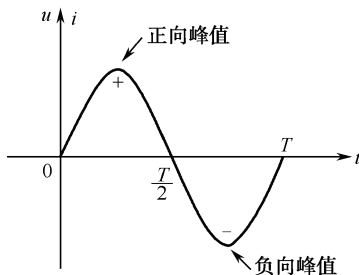


图 3-2 正弦波一周的图示

一个完整的正弦电信号的描述包括周期、大小和相位，称为三要素法。其一般表达式为

$$i(t) = I_m(\sin \omega t + \varphi)$$

其中， $i(t)$ 为正弦电流瞬时值， I_m 为正弦电流幅值， ω 为正弦电流角频率， φ 为正弦电流初相位。

2. 正弦波的极性描述

如图 3-2 所示，正弦波在零值时改变极性。也就是说，正弦波在正值与负值间交替变化。如图 3-3 所示，当正弦曲线电压 u 应用到电阻电路时，产生一个交变的正弦电流曲线，当电压改变极性时，电流相应地改变方向。图 3-3 中的虚线箭头代表电流的实际方向， \oplus 、 \ominus 代表电压的实际方向（极性）。

在电源电压正值区间内，电流的方向如图 3-3 (a) 所示；在电源电压负值区间内，电流



方向与参考方向相反，如图 3-3 (b) 所示。正值区间与负值区间的组合构成了正弦波的一周。

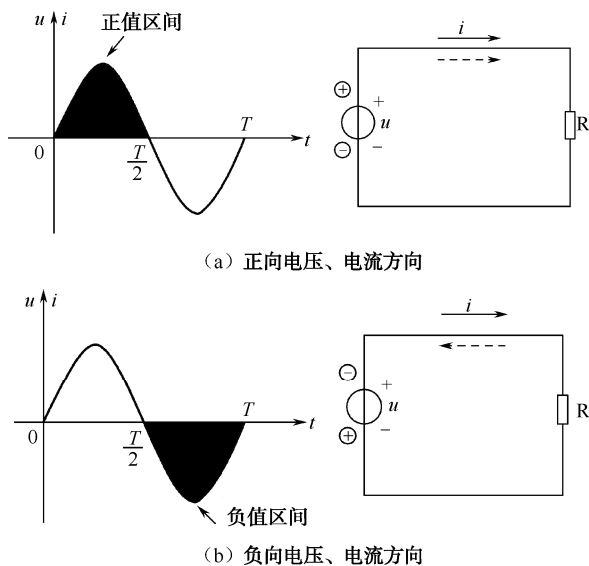


图 3-3 交变电流与交变电压

3. 正弦波的周期与频率描述

(1) 正弦波的周期

给定正弦波完成完整一周所需的时间称为周期，用符号 T 表示。

通常正弦波以完全相同的周期连续重复自身，如图 3-4 所示。由于一个重复正弦波的所有周期均相同，所以对于给定的正弦波，周期总是固定值。可以用波形的零穿越点至下一个相应的零穿越点之间的时间间隔测量正弦波的周期；还可以用给定周的任意峰值点至下一周的对应峰值点之间的时间间隔测量正弦波的周期。

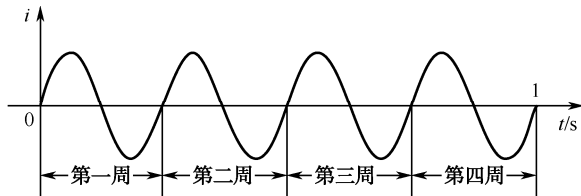


图 3-4 给定正弦波的周期

例 A1

测评目标：掌握周期的概念。

如图 3-5 所示正弦波的周期是多少？

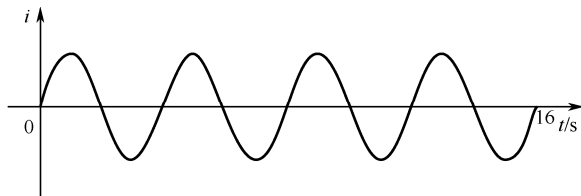


图 3-5 例 A1 图



【解】 如图所示，16s内完成了4周，因此，完成一周的时间是4s，即周期。

例 A2

测评目标：掌握周期测量。

如图 3-6 所示的正弦波，试给出测量其周期的三种可能的方法。图中所示的有多少周？

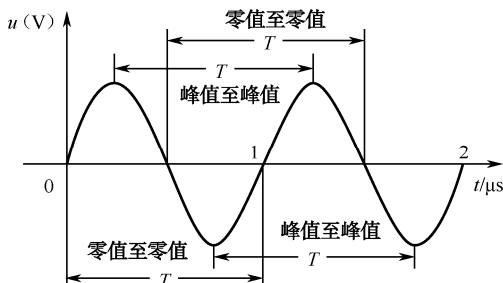


图 3-6 正弦波的周期测量

【解】

方法 1：周期可以从一个零穿越点至下一周对应的零穿越点（注意：穿越方向、斜率要一致）。

方法 2：周期可以从一周的正向峰值点至下一周对应的正向峰值点测量。

方法 3：周期可以从一周的负向峰值点至下一周对应的负向峰值点测量。

测量方法如图 3-6 所示，图中有两周的正弦波。注意，在同一波形中，无论采用的是对应峰值点或者是对应零穿越点，所获得的周期的值是相同的。

(2) 正弦波的频率

频率是正弦波在一秒内完成的周期的数目，即

$$f = \frac{1}{T} \text{ 或 } T = \frac{1}{f}$$

f 与 T 之间是互为倒数的关系，已知其中的一个，就可以计算出另一个来。这个倒数关系说明，具有较长周期的正弦波，较之具有较短周期的正弦波，它在一秒内经过的周要少一些。

频率 (f) 的度量单位是赫兹 (Hz)。1Hz=1 周/s。

图 3-4 中， $f=4\text{Hz}$ ，即表示 1s 内完成四个完整周期的正弦波。

(3) 正弦波的角频率

正弦量变化的快慢除用周期和频率表示外，还可用角频率 ω 来表示。因为一周内经历了 2π 弧度 (如图 3-2 所示)，所以角频率为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

它的单位是弧度/秒 (rad/s)。

上式表示 T 、 f 、 ω 三者之间的关系，只要知道其中之一，则其余均可求出。

例 A3

测评目标：周期与频率关系。

如图 3-5 和图 3-6 所示，哪个正弦波具有较高的频率？各自角频率又为多少？

【解】 图 3-5 中， $T=4\text{s}$ ，故 $f=1/T=0.25\text{Hz}$ ， $\omega=2\pi f=1.57\text{rad/s}$ 。



图 3-6 中, $T=1\mu\text{s}$, 故 $f=1/T=1000\text{kHz}$, $\omega=2\pi f=6.28\times 10^6\text{rad/s}$ 。

【课堂练习】

- A1-1 若给定正弦波在 16s 内经过了五周, 那么周期是多少?
- A2-1 如果正向峰值发生在 1ms, 并且下一个正向峰值发生在 2.5ms, 那么周期是多少?
- A3-1 若给定正弦波在连续负向峰值之间的时间间隔是 $50\mu\text{s}$, 那么周期和频率是多少?
- A3-2 已知某种正弦波的周期是 10ms, 那么其频率和角频率分别为多少?
- A3-3 已知某种正弦波的频率是 50Hz, 那么其周期和角频率分别为多少?

4. 正弦波的相位描述

从前面的知识可知, 正弦波可以基于时间沿着水平轴度量。然而, 由于正弦波的大小是周期性反复的, 可以用独立于频率的量来描述正弦波上的点, 这个量就是角度, 单位是度或者是弧度。

正弦波电压可以通过旋转的电机在磁场内产生, 随着交流发电机的转子转过一个完整的 360° , 所得的输出也是正弦波的一个完整的周期。因此, 正弦波的角度测量可与发电机的旋转角度相联系。

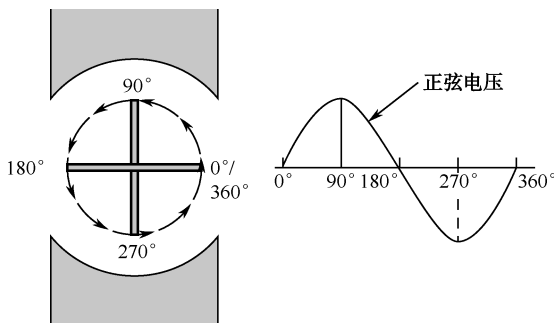


图 3-7 交流发电机中旋转运动与正弦波的关系

(1) 角度测量

1° 为角度的量度单位, 对应于一周期或者是一个完整旋转的 $1/360$ 。1 弧度 (rad) 是沿着圆周的弧长等于圆周的半径时所对应的圆心角角度。1 弧度等于 57.3° , 360° 的旋转是 2π 弧度。

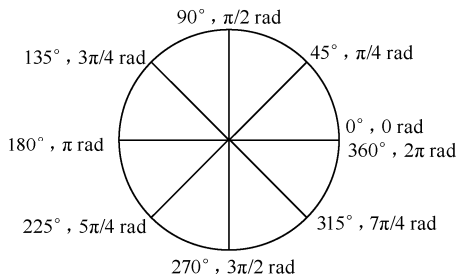


图 3-8 从 0° 开始沿逆时针绕行的角度测量

正弦波的角度测量是基于 360° 或者 2π 为一个完整的周期的。



(2) 正弦波的相位

正弦波的相位表示的是正弦波相对于参考位置的角度度量。处于参考位置的正弦电流可表示为

$$i = I_m \sin \omega t$$

其波形如图 3-9 所示。它的初始值为零。同理，处于参考位置的正弦电压可表示为

$$u = U_m \sin \omega t$$

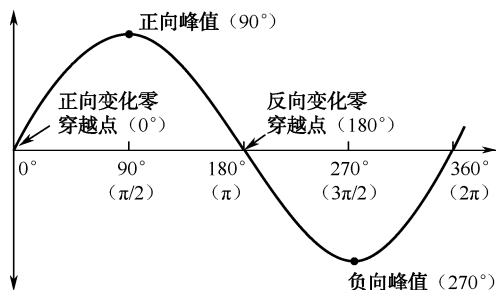
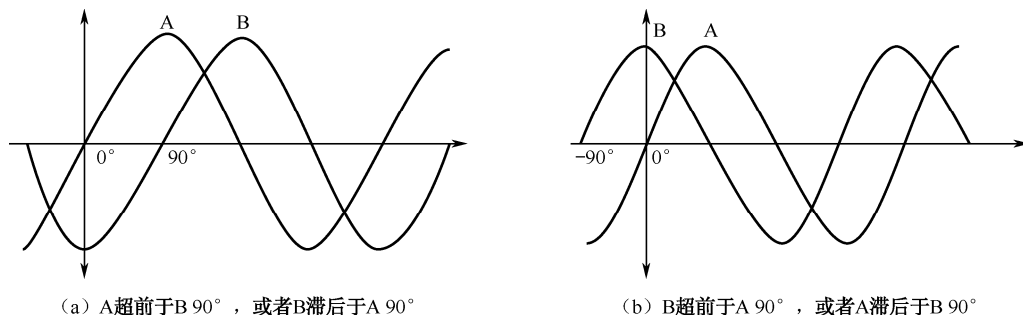


图 3-9 参考相位

值得注意的是，水平轴第一个正向穿越（零穿越）点在 0° (0 rad)，正向峰值在 90° ($\pi/2 \text{ rad}$)；负向零穿越点在 180° ($\pi \text{ rad}$)，负向峰值在 270° ($3\pi/2 \text{ rad}$)；完整周期在 360° ($2\pi \text{ rad}$) 完成。当正弦波相对于参考量左移或者右移时，即为相移。

图 3-10 说明了正弦波的相移。图 3-10 (a) 中，正弦波 B 向右移动 90° ($\pi/2 \text{ rad}$)，因此正弦波 A 与正弦波 B 的相位差是 90° ；若以时间论，正弦波 B 的正向峰值出现的较正弦波 A 的正向峰值晚。这种情况可以说成正弦波 B 滞后于正弦波 A 90° 或者 $\pi/2 \text{ rad}$ ；换言之，也就是正弦波 A 超前于正弦波 B 90° 或者 $\pi/2 \text{ rad}$ 。

图 3-10 (b) 所示为正弦波 B 向左移动 90° ($\pi/2 \text{ rad}$) 的情况。因此，同样的，正弦波 A 与正弦波 B 的相位差是 90° 。在这种情况下，正弦波 B 的正向峰值出现的较正弦波 A 的正向峰值早，因此正弦波 B 超前于正弦波 A 90° 或者 $\pi/2 \text{ rad}$ 。



(a) A超前于B 90° ，或者B滞后于A 90°

(b) B超前于A 90° ，或者A滞后于B 90°

图 3-10 相移

例 A4

测评目标：掌握相角。

如图 3-11 (a) 与图 3-11 (b) 所示，正弦波 A 与正弦波 B 之间的相角为多少？

解：图 3-11 (a) 中，正弦波 A 的零穿越点是在 0° ，正弦波 B 相应的零穿越点是在 45° 。两个波形之间的相角为 45° ，且正弦波 A 超前。



图 3-11 (b) 中, 正弦波 A 的零穿越点是在 -30° , 正弦波 B 相应的零穿越点是在 0° 。两个波形之间的相角为 30° , 且正弦波 B 超前。

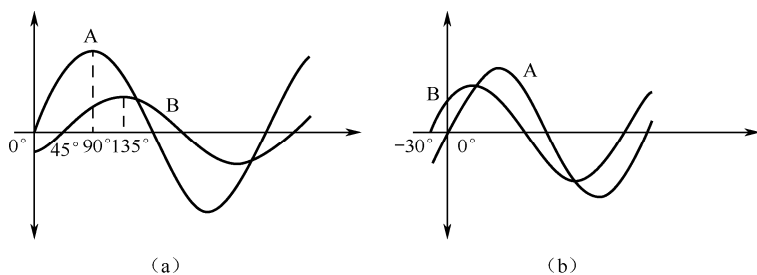


图 3-11 例 A4 图

【课堂练习】

A4-1 对于某一个参考相位, 正弦波 A 正向零穿越点的相位角为 30° ; 而对于同一个参考相位, 正弦波 B 正向零穿越点的相位角为 45° 。试计算两个正弦信号之间的相位角, 哪一个信号超前?

A4-2 已知正弦信号正向峰值处的相位角是 75° , 另一个正弦信号正向峰值处的相位角是 100° , 每一个正弦信号相应于 0° 相位角的相移是多少? 两个正弦信号间的相位角是多少?

5. 正弦波的大小描述

可以有 5 种方法来表示或者测量正弦波形的电压或者电流值, 它们是瞬时值、峰值、峰峰值、有效值 (均方根值) 和平均值。

(1) 瞬时值

如图 3-12 所示, 在正弦波上任意时间点, 电压 (或者电流) 具有瞬时值。曲线上不同点的瞬时值都不同。在正向区间内瞬时值为正, 在负向区间内瞬时值为负。电压和电流的瞬时值分别用小写符号 u 和 i 表示。图 3-12 的曲线表示电压, 当用 i 代替 u 时, 曲线表示电流。瞬时值的示例如图所示, 在 $1\mu\text{s}$ 时瞬时电压为 3.1V , 在 $2.5\mu\text{s}$ 时为 7.07V , 在 $5\mu\text{s}$ 时为 10V , 在 $10\mu\text{s}$ 时为 0V , 在 $11\mu\text{s}$ 时为 -3.1V 。

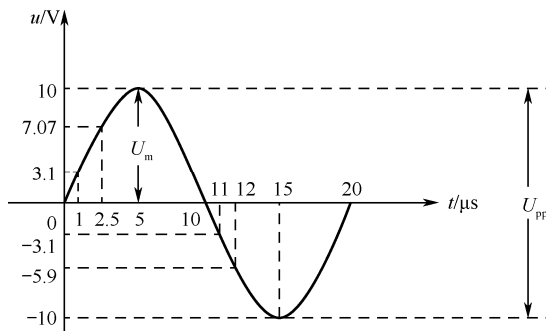


图 3-12 瞬时值



(2) 峰值

正弦波的峰值是相对于零值而言的，是在正向或者负向时的最大值。对于给定正弦波，峰值恒定，用 U_m 或者 I_m 表示。图 3-12 中，峰值电压为 10V。

(3) 峰峰值

正弦波的峰峰值如图 3-12 所示，表示的是正向峰值与负向峰值间的电压（或者电流）的差值。峰峰值为峰值的两倍，用 U_{pp} 或者 I_{pp} 表示。图 3-12 中，峰峰值为 20V。

(4) 有效值

有效值也称为均方根值。万用表测量的交流电压（电流）的大小一般都是有效值。一般所讲的正弦电压或电流的大小，如交流电压 380V 或 220V，都是指它的有效值。常用的交流测量仪表指示的读数、电气设备的额定值都是指有效值。但各种器件和电气设备的耐压值则按最大值来考虑。

正弦波电压的均方根值实际上是正弦波热效应的度量。设周期电流 i 和恒定电流 I 通过同样大小的电阻 R ，如果在周期电流 i 的一个周期时间内，两个电流产生的热量相等，就平均效应而言，二者的作用是相同的，该恒定电流 I 称为周期电流 i 的有效值。有效值都用大写字母表示，和表示直流的字母一样。则对正弦量有

$$\begin{cases} I_m = \sqrt{2}I \\ U_m = \sqrt{2}U \\ E_m = \sqrt{2}E \end{cases} \quad \begin{cases} I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \\ U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \\ E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

(5) 平均值

工程上有时还用到平均值（Average Value）这一概念。取正弦波完整的一周，正弦波的平均值总是为零，因为正值（零以上）与负值（零以下）相抵消。为了比较和确定如供电中常用的可调电压的平均值，正弦波的平均值指的是周期量的绝对值在一个周期内的平均值。对于正弦波电压和电流，以峰值表示的平均值为

$$I_{av} = 0.637I_m$$

$$U_{av} = 0.637U_m$$

用来测量交流电压、电流的全波整流系仪表，其指针的偏转角与所通过电流的平均值成正比，而标尺则是按有效值刻度的，二者的关系为

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 1.11I_{av}$$

例 A5

测评目标：正弦量大小的表示。

确定图 3-13 所示正弦波的 U 、 U_m 、 U_{pp} 和 U_{av} 。

【解】 根据图可直接得出结论： $U_m = 5V$ ，则可得

$$U_{pp} = 2U_m = 10V$$

$$U = 0.707U_m = 3.535V$$

$$U_{av} = 0.637U_m = 3.185V$$

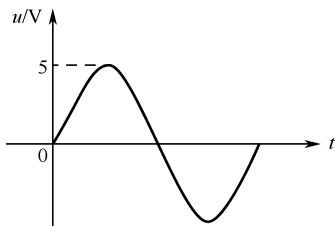


图 3-13 例 A5 图

【课堂练习】

A5-1 已知以下各量, 试确定每种情况下的 U_{pp} 值。

(a) $U_m=1V$ (b) $U=1.414V$ (c) $U_{av}=3V$

A5-2 已知以下各量, 试确定每种情况下的 U 值。

(a) $U_m=2.5V$ (b) $U_{pp}=10V$ (c) $U_{av}=3V$

A5-3 已知以下各量, 试确定每种情况下的 U_{av} 值。

(a) $U_m=10V$ (b) $U=2.3V$ (c) $U_{pp}=3V$

任务 2 正弦波的相量描述

沿着正弦波的水平轴移动时, 角度增加且大小 (沿 y 轴的高度) 变化。在任意给定的瞬时, 正弦波的大小可以通过相角值与振幅 (最大值) 来描述, 因此也能够用相量表示。相量是具有大小和方向 (相角) 的物理量, 可以用绕着固定点旋转的箭头表示。正弦波相量的长度为峰值 (振幅), 旋转到的位置为相角。正弦波的一个完整的周期能够看做相量经 360° 的旋转投影所得。

1. 复数及运算

正弦量的各种表示方法是分析与计算正弦交流电路的工具。利用相量对正弦稳态电路进行分析计算的方法称为相量法。相量的运算方法就是复数的运算方法, 因此先对复数的有关知识做一简单介绍。

设 A 为一复数, a 和 b 分别为复数的实部和虚部, 其代数形式为

$$A = a + jb$$

式中, $j = \sqrt{-1}$ 为虚数单位, 取复数 A 的实部和虚部分别用下列符号表示:

$$\operatorname{Re}[A] = a, \quad \operatorname{Im}[A] = b$$

复数 A 可以用复平面上的一条有向线段来表示, 如图 3-14 所示。从图 3-14 可得复数 A 的三角形式为

$$A = r \cos \theta + jr \sin \theta = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

式中, r 为复数的模, θ 为复数的辐角。 r 和 θ 与 a 和 b 的关系为

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

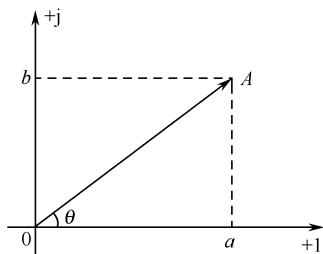


图 3-14 复数的表示

由欧拉公式



$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

可得复数 A 的指数形式为

$$A = r e^{j\theta}$$

指数形式常简写成极坐标式, 即

$$A = r \angle \theta$$

在计算中, 复数的相加和相减用代数形式进行。可用解析法, 也可用图解法求解。

例如, 已知 $A_1 = a_1 + j b_1$, $A_2 = a_2 + j b_2$, 则

$$A_1 \pm A_2 = (a_1 + j b_1) \pm (a_2 + j b_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

如果用图解法, 则如图 3-15 所示。

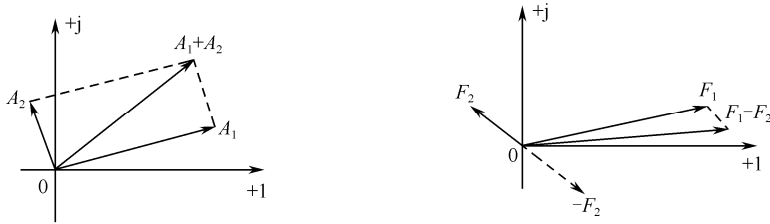


图 3-15 图解法

而复数的乘除运算, 常用指数形式或极坐标形式。

如设 $A_1 = r_1 \angle \theta_1$, $A_2 = r_2 \angle \theta_2$, 如果两复数相乘, 则有

$$A_1 A_2 = r_1 \angle \theta_1 \cdot r_2 \angle \theta_2 = r_1 \cdot r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

如两复数相除, 则有

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

2. 用相量表示正弦量

设有一个正弦电压 $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$, 其波形图如图 3-16 (b) 所示, 图 3-16 (a) 是一旋转矢量。

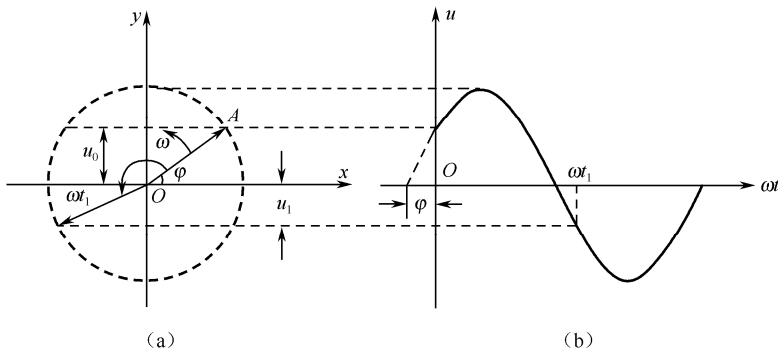


图 3-16 旋转矢量与正弦波的关系

这一旋转矢量的长度等于正弦函数的最大值, 它在 $t=0$ 时和横坐标 (正 x 轴) 间的夹角等于正弦函数的初相位 φ , 它绕坐标原点沿逆时针方向旋转的角速度, 等于正弦函数的角频



率 ω ，这就说明了正弦函数的三要素可以用旋转矢量完整地表达。这一旋转矢量任意时刻在纵坐标（y轴）上的投影，就是这个矢量所代表的正弦函数在同一时刻的瞬时值，即

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

例如，在 $t = 0$ 时， $u = U_m \sin \varphi$ ；当 $t = t_1$ 时，矢量与x轴的正向的夹角为 $(\omega t_1 + \varphi)$ ，则 $u_1 = U_m \sin(\omega t_1 + \varphi)$ 。这样，就可以用一个旋转矢量表示正弦量。

在正弦量的3个要素中，最重要的是最大值和初相位，因为在线性电路中，只要电源的频率确定，那么电路中各处的频率和电源的频率保持一致，因此只要能反映出最大值和初相位这两个因素，一个正弦量就可以确定。所以可以用一个固定的矢量来代替图3-16中的旋转矢量，如图3-17所示。固定矢量的模为正弦量的最大值，与横轴的夹角为初相位，称此固定矢量为相量，记为 \dot{U}_m ，称为最大值相量。今后会经常用到有效值的概念，用 \dot{U} 表示有效值相量。

按照正弦量的大小和相位关系用初始位置的有向线段画出的若干个相量的图形，称为相量图。

将 $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_1)$ 写成相量 $\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_1} = I_m \angle \varphi_1$ ，模 I_m 正好是正弦电流的最大值，辐角 φ_1 是正弦电流的初相。这正是正弦量的两个要素。 \dot{I}_m 称为电流相量。为了将相量（表示正弦量的复数）与一般复数相区别，在符号 I_m 上加“·”。如将它表示在复平面上，则称为相量图，如图3-17（b）所示。

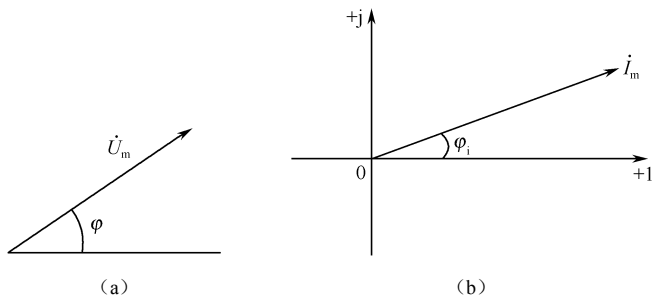


图 3-17 相量图

正弦量与相量之间有着简单的对应关系，只要知道了正弦量，就可方便地写出它的相量；反之，知道了正弦量的相量（频率一定），也可方便地写出它所表示的正弦量。如以正弦电流为例，这种对应关系如下：

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_1) \Leftrightarrow \dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_1} = I_m \angle \varphi_1$$

注意：用相量表示正弦量，并不是相量等于正弦量。相量法只适用于正弦稳态电路的分析计算。

相量也可以用有效值来定义，即

$$\begin{aligned} \dot{i} &= I e^{j\varphi_1} = I \angle \varphi_1 = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle \varphi_1 \\ \dot{U} &= U e^{j\varphi_u} = U \angle \varphi_u = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \angle \varphi_u \end{aligned}$$

式中， \dot{i} 和 \dot{U} 分别称为电流和电压的有效值相量，相应地， \dot{I}_m 和 \dot{U}_m 分别称为电流和电压的最大值相量，它们的关系为



$$i = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}}$$

例 A6

测评目标：掌握相量、相量图。

已知正弦电压 $u_1 = 311\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\text{V}$, $u_2 = 537\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)\text{V}$, 写出它们的有效值相量, 并绘出相量图。

【解】

$$U_{1m} = 311\text{V}, U_{2m} = 537\text{V}$$

则

$$U_1 = 220\text{V}, U_2 = 380\text{V}$$

所以

$$\dot{U}_1 = 220\angle\frac{\pi}{6}\text{V}, \dot{U}_2 = 380\angle-\frac{\pi}{3}\text{V}$$

相量图如图 3-18 所示。

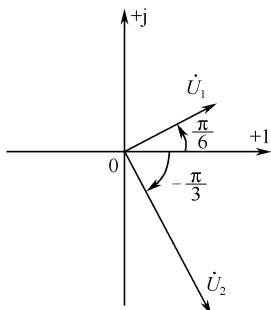


图 3-18 例 A6 图

例 A7

测评目标：掌握相量与解析式的关系。

已知正弦量的相量为 $\dot{I}_1 = 8\angle 30^\circ\text{A}$, 频率 $f = 50\text{Hz}$, 写出正弦量的解析式。

【解】

$$f = 50\text{Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 2 \times 3.14 \times 50 = 314\text{rad/s}$$

$$I = 8\text{A} \Rightarrow I_m = 8\sqrt{2}\text{A}$$

则

$$i = 8\sqrt{2}\sin(314t + 30^\circ)\text{A}$$

3. 正弦波的相量法求和

在正弦电路中, 电压、电流、电动势等物理量都呈正弦规律变化。分析正弦电路时, 经常需要将这些正弦量进行加、减运算。若利用三角函数公式进行运算, 则过程很麻烦, 运算量非常大。用相量法求同频率正弦量的代数和, 是将复杂的三角函数的计算通过简单的复数计算来实现, 大大简化了计算过程。其理论依据:

- ① 同频率的两个正弦量相加, 得到的仍然是一个同频率的正弦量 (证明略)。
- ② 正弦量和的相量等于各正弦量相量的和 (证明略)。



例 A8

测评目标：正弦量求和。

已知， $u_1 = 220\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$ ， $u_2 = 220\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ) \text{ V}$ ，求 $u = u_1 - u_2$ 。

【解】 将瞬时量用相量来表示为

$$\dot{U}_1 = 220 \angle 0^\circ = 220 \text{ V}$$

$$\dot{U}_2 = 220 \angle -120^\circ = 220 \cos(-120^\circ) + j220 \sin(-120^\circ)$$

$$= -\frac{220}{2} - j220 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ V}$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = 220 + \frac{220}{2} + j\frac{220\sqrt{3}}{2}$$

$$= 330 + j110\sqrt{3} = 380 \angle 30^\circ \text{ V}$$

所以

$$u = u_1 - u_2 = 380\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$$

也可以用相量图来求同频率正弦量的代数和，应遵循矢量运算法则。为方便计算，相量的始端不一定都画在原点。

用相量图求解，结果与复数计算的结果相同，如图 3-19 所示。图 3-19 中，求 $\dot{U}_1 - \dot{U}_2$ 的差是通过求 $\dot{U}_1 + (-\dot{U}_2)$ 来完成的。

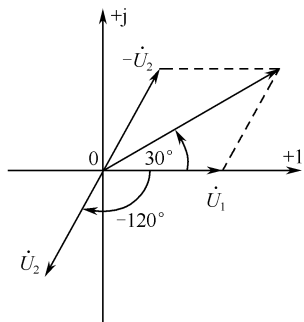


图 3-19 例 A8 图

4. 基尔霍夫的相量形式

由以上内容可知，若同频率正弦量 i_1 、 i_2 和 i_3 满足关系式：

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

则 i_1 、 i_2 和 i_3 对应的相量 \dot{I}_1 、 \dot{I}_2 和 \dot{I}_3 也满足关系式：

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$$

如果 i_1 、 i_2 和 i_3 是正弦交流电路中某节点的所有支路电流，则各支路电流相量和恒等于零。

即

$$\sum \dot{I} = 0$$

同理，对电路中任一回路，所有电压相量的代数和为零，即

$$\sum \dot{U} = 0$$

以上两式即是正弦交流电路中基尔霍夫的相量形式。

例 A9

测评目标：KVL 相量式。



图 3-20 例 A9 图

如图 3-20 所示电路中， $u = 24\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$ ，

$u_1 = 14\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$ ， $u_2 = 6\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$ ，求 u_3 。

【解】 $u = 24\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$ ，则 $\dot{U} = 24 \angle 30^\circ \text{ V}$ 。

$u_1 = 14\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$ ，则 $\dot{U}_1 = 14 \angle 30^\circ \text{ V}$ 。

$u_2 = 6\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$ ，则 $\dot{U}_2 = 6 \angle 30^\circ \text{ V}$ 。

KVL 表达式为

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

则有

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 \\ \dot{U}_3 &= 4\angle 30^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

则

$$u_3 = 4\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$$

例 A10

测评目标: KCL 相量式。

如图 3-21 所示电路中, $i = 8\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ mA}$, $i_1 = 3\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ mA}$, 求 i_2 。

【解】 $i = 8\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ mA}$, 则 $\dot{I} = 8\angle 45^\circ \text{ mA}$ 。

$i_1 = 3\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ mA}$, 则 $\dot{I}_1 = 3\angle 45^\circ \text{ mA}$ 。

KCL 表达式为

$$i = i_1 + i_2$$

则有

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

$$\dot{I}_2 = 5\angle 45^\circ \text{ mA}$$

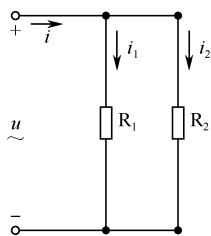


图 3-21 例 A10 图

$$i_2 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ mA}$$

【课堂练习】

A9-1 电路如图 3-22 所示, 请用 KCL 和 KVL 方程的相量形式表示 \dot{I}_1 及 \dot{U}_{ab} 。

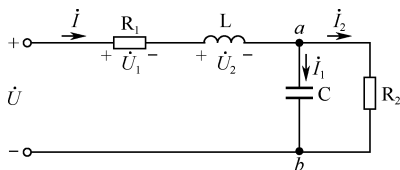


图 3-22 题 A9-1 图

课题 2 交流电路中的元件描述

任务 1 电阻元件

1. 电阻元件的伏安特性

电阻元件中电流和电压的参考方向如图 3-23 所示。设通过电阻中的正弦交流电流为

$$i_R = I_m \sin(\omega t + \varphi_1)$$

则由欧姆定律有

$$u_R = RI_m \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (3-1)$$

显然, 电压 u 与电流 i 是同频率的正弦量, 如图 3-24 所示为 u 和 i 的波形图。将 u 写成正弦量的一般形式:



$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (3-2)$$

比较式 (3-1) 和式 (3-2) 可得

$$\begin{cases} U_m = RI_m \\ \varphi_u = \varphi_i \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} U = RI \\ \varphi_u = \varphi_i \end{cases} \quad (3-3)$$

即电阻元件电路中，电压与电流的大小关系与欧姆定律形式相同；且电压和电流是同相的（相位差 $\psi = 0$ ）。

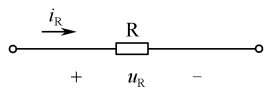


图 3-23 电阻元件

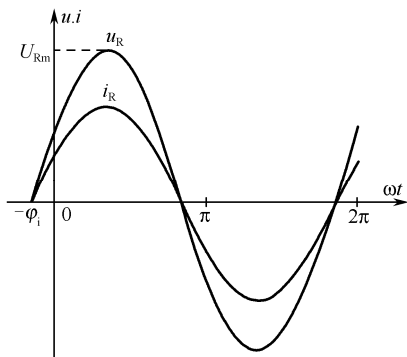


图 3-24 电阻元件电压、电流的波形

如用相量表示电压与电流的关系，则

$$\dot{U}_R = R\dot{I}_R \quad \text{或} \quad \frac{\dot{U}_R}{\dot{I}_R} = R \quad (3-4)$$

此即欧姆定律的相量表达式。其相量图如图 3-25 所示。

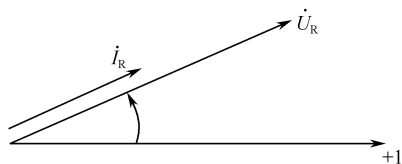


图 3-25 电阻元件电压、电流的相量图

2. 功率

知道了电压与电流的变化规律和相互关系后，便可计算出电路中的功率。在任意瞬间，电压瞬时值与电流瞬时值的乘积，称为瞬时功率，用小写字母 p 代表。

设电阻元件上通过的电流为

$$i_R = I_{Rm} \sin \omega t$$

在关联的参考方向下电压与电流同相，则电压可表示为

$$u_R = U_{Rm} \sin \omega t$$

则瞬时功率为



$$\begin{aligned}
 p_R &= u_R \cdot i_R \\
 &= U_{Rm} \sin \omega t \cdot I_{Rm} \sin \omega t \\
 &= U_{Rm} I_{Rm} \sin^2 \omega t \\
 &= \frac{1}{2} U_{Rm} I_{Rm} (1 - \cos 2\omega t) \\
 &= U_R I_R - U_R I_R \cos 2\omega t
 \end{aligned} \tag{3-5}$$

由式(3-5)可绘出瞬时功率的曲线, 见图 3-26。从图 3-26 可看出, 电阻元件的瞬时功率以 2 倍电流的频率随时间做周期性的变化, 其值始终大于或等于零。这说明电阻元件是耗能元件, 在正弦交流电路中, 除了电流为零的瞬间, 电阻元件总是吸收功率的, 也就是说, 电阻元件从电源取用电能而转化为热能, 这是一种不可逆的能量转换过程。通常用下式计算电能:

$$W = Pt$$

式中, P 是一个周期内电路消耗电能的平均值, 即瞬时功率的平均值, 称为平均功率。在电阻电路中, 平均功率为

$$P_R = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = U_R I_R = RI_R^2 = \frac{U_R^2}{R}$$

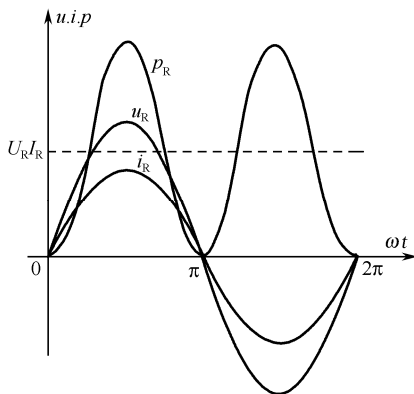


图 3-26 电阻元件电压、电流和瞬时功率的波形

上式的形式与直流电路中功率的计算公式相同, 只是上式中的电压、电流均为交流量的有效值。电阻元件的平均功率又称为有功功率。

例 A11

测评目标: 掌握交流电路中电阻元件性质。

设电阻元件电压、电流的参考方向关联, 已知电阻 $R = 100\Omega$, 通过电阻的电流 $i_R = 1.414 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{A}$, 求: ①电阻元件的电压 U_R 及 u_R ; ②电阻消耗的功率; ③画相量图。

【解】 由 $i_R = 1.414 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{A}$, 有 $\dot{I}_R = 1 \angle 30^\circ \text{A}$, 则

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_R &= R \dot{I}_R = 100 \angle 30^\circ \text{V} \\
 U_R &= 100 \text{V} \\
 u_R &= 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{V} \\
 P_R &= R I_R^2 = 100 \times 1^2 = 100 \text{W}
 \end{aligned}$$

相量图如图 3-27 所示。

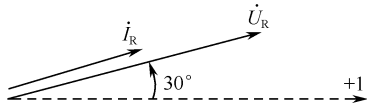


图 3-27 例 A11 图

【课堂练习】

A11-1 图 3-28 中， $R_1 = 940\Omega$ ， $R_2 = 2k\Omega$ ， R_3 、 R_4 两端压降有效值分别为 60V、130V，求 R_1 、 R_2 两端的压降幅值。

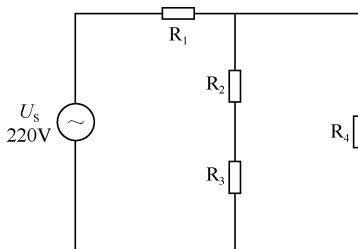


图 3-28 题 A11-1 图

A11-2 1 个“220V、100W”的灯泡，接在电压 $u(t) = 220\sqrt{2} \sin(100\pi t + 2\pi / 3)V$ 的电源上，求：

- (1) 通过灯泡的电流 i 及 i ；
- (2) 灯泡工作 20h 消耗的电能。

任务 2 交流电路中的电感元件

1. 电磁感应定律

1831 年，法拉第从一系列实验中总结出：当穿过某一导电回路所围面积的磁通发生变化时，回路中即产生感应电动势及感应电流，感应电动势的大小与磁通对时间的变化率成正比。这一结论称为法拉第定律。这种由于磁通的变化而产生感应电动势的现象称为电磁感应现象。1834 年，楞次进一步发现：感应电流的方向，总是要使它的磁场阻碍引起感应电流的磁通的变化。这一结论即楞次定律。法拉第定律经楞次补充后，完整地反映了电磁感应的规律，这就是电磁感应定律。

电磁感应定律指出：如果选择磁通 Φ 的参考方向与感应电动势 e 的参考方向符合右手螺旋关系，如图 3-29 所示。则对一匝线圈来说，其感应电动势为

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{3-6}$$

式中，各量均采用 SI 单位，即磁通的单位为 Wb，时间的单位为 s，电动势的单位为 V。若线圈的匝数为 N ，且穿过各匝的磁通均为 Φ ，如图 3-30 所示，则

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt} \tag{3-7}$$

式中， $\Psi = N\Phi$ ，称为与线圈交链的磁链，它的单位与磁通相同。



感应电动势将使线圈的两端出现电压，称为感应电压。若选择感应电压 u 的参考方向与 e 相同，即 u 的参考方向与磁通 Φ 的参考方向也符合右手螺旋关系，并将 u 与 Φ 的这一参考方向的关系称为关联，则当外电路开路时，图 3-29 所示单匝线圈两端的感应电压为

$$u = -e = -\left(-\frac{d\Phi}{dt}\right)$$

即

$$u = \frac{d\Phi}{dt}$$

若线圈匝数为 N ，且穿过各匝的磁通均为 Φ ，如图 3-30 所示，则关联参考方向下线圈两端的感应电压

$$u = N \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} \quad (3-8)$$

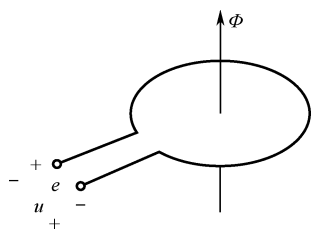


图 3-29 单匝线圈

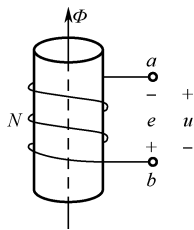


图 3-30 匝数为 N 的线圈

例 A12

测评目标：掌握感应电压。

如图 3-30 所示线圈的匝数为 N ，且在图中所示的参考方向下，磁通 $\Phi > 0$ 。试分别确定磁通 Φ 增加和减少时，感应电动势 e 和感应电压 u 的真实极性。

【解】 图中， Φ 和 e 的参考方向符合右手螺旋关系，故可应用式 (3-7) 分析 e 的真实极性； Φ 和 u 的参考方向关联，则可应用式 (3-8) 分析 u 的真实极性。

Φ 增加时， $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ ，所以 $e = -N \frac{d\Phi}{dt} < 0$ ，说明 e 的真实极性与图 3-30 中所示的参考极性相反；而 $u = N \frac{d\Phi}{dt} > 0$ ，说明 u 的真实极性与图 3-30 中所示的参考极性相同。

Φ 减少时， $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ ，所以 $e = -N \frac{d\Phi}{dt} > 0$ ，说明 e 的真实极性与图 3-30 中所示的参考极性相同；而 $u = N \frac{d\Phi}{dt} < 0$ ，说明 u 的真实极性与图 3-30 中所示的参考极性相反。

2. 电感元件和电感

电感元件是一种理想二端元件，它是实际线圈的理想化的模型。实际线圈通入电流时，线圈内及其周围都会产生磁场，并储存磁场能量。电感元件就是反映实际线圈这一基本性能的理想元件。如图 3-31 所示为电感元件的图形符号。

当电感线圈中有电流通过时，电流在该线圈内产生的磁通称为自感磁通。图 3-32 中， Φ_L 即表示电流 i_L 产生的自感磁通。其中， Φ_L 与 i_L 的参考方向符合右手螺旋关系，今后，将电



流与磁通的这一参考方向的关系也称做关联。如果线圈的匝数为 N ，且穿过线圈每一匝的自感磁通都是 Φ_L ，则

$$\Psi_L = N\Phi_L$$

即电流 i_L 产生的自感磁链。

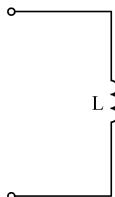


图 3-31 电感元件的图形符号

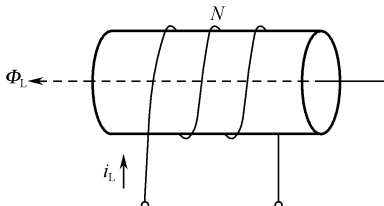


图 3-32 电流产生的自感磁通

电感元件的自感磁链与其电流的比为

$$L = \frac{\Psi_L}{i_L} \quad (3-9)$$

称为电感元件的电感系数，或自感系数，简称电感（Inductance）。

电感的 SI 单位为亨 [利]，简称为亨 (H)； $1\text{H}=1\text{Wb}/\text{A}$ 。亨利的十进制分数单位毫亨 (mH) 和微亨 (μH) 也是常用的电感单位，它们和亨的关系为

$$1\text{mH}=10^{-3}\text{H}$$

$$1\mu\text{H}=10^{-6}\text{H}$$

如果电感元件的电感为常量，而不随通过它的电流的改变而改变，则称为线性电感元件；否则，为非线性电感元件。今后所说的电感元件，除非特别指明，都指的是线性电感元件。

电感元件和电感线圈也简称为电感。所以，电感一词有时是指电感元件或电感线圈，有时则是指电感元件或电感线圈的参数，即电感系数 L 。

3. 影响电感的因素

电感线圈的电感与线圈的形状、尺寸、匝数及其周围的介质都有关系。图 3-33 所示的圆柱形线圈是常见的电感线圈之一。若线圈绕制均匀紧密，且其长度远大于截面半径，可以证明，一段圆柱形线圈的电感为

$$L = \mu \frac{N^2 S}{l} \quad (3-10)$$

式中， S 为线圈的截面积， l 表示该段线圈的轴向长度， N 为该段线圈的匝数， $\mu=\mu_N\mu_0$ 是磁介质的磁导率。

形状、尺寸、匝数完全相同的线圈，有铁芯和没有铁芯，由于磁导率的悬殊，其电感的大小相差几十乃至数千倍。

4. 电感元件的伏安特性

(1) 瞬时描述

电感元件中的电流发生变化时，其自感磁链也随之变化，从而在元件两端产生自感电压。若选择 i_L 、 u_L 的参考方向都和磁通 Φ_L 关联，则 i_L 和 u_L 的参考方向也彼此关联，如图 3-33 所示。此时，自感磁链为

$$\Psi_L = Li_L$$