第 2 章　电路的分析方法

电路分析是电路理论中最重要的内容之一。它是在给定电路结构和元件参数的条件下，计算电路各部分的电压、电流、功率等物理量。

实际电路的结构形式是多种多样的。根据给定的具体电路结构，可以通过三种不同的途径进行分析。对于简单电路，可以利用等效变换的方法进行分析。对于复杂电路（即无法利用等效变换的方法变换为单回路的电路）可以利用独立变量的方法进行分析。此外，还可以根据线性电路的性质，利用电路定理进行分析。

本章以电阻电路为例介绍常用的电路分析方法，如等效变换的方法、支路电流法、网孔电流法、节点电压法、叠加定理、等效电源定理等。

2.1　二端网络与等效变换

2.1.1　等效二端网络的概念

由前面的分析可知，电阻元件是一个无源二端元件；独立电源是一个有源二端元件。如果有许多元件相互连接成一个整体，而这个整体只有两个端点，可引出来与外部电路相连接，则称此整体为二端网络。显然，分别进出这两个端点的电流是同一个电流，所以二端网络也可称为一端口（单口）网络。

如果两个二端网络与同一个外部电路相接，当相接端口处的伏安关系完全相同时，则称这两个二端网络是等效的。等效的两个二端网络可以相互替代，这种替代称为等效变换。尽管这两个二端网络内部可以具有完全不同的结构，但对于任意一个外电路而言，它们却具有完全相同的影响，没有丝毫区别。

图 2-1（a）所示是一个由三个电阻元件连接成的电路，可作为一个二端网络看待。此二端网络可用方框 N_0 来表示，如图 2-1（b）所示。很显然这个二端网络是无源的，故称为无源二端网络。

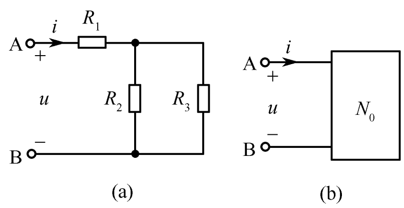

图 2-1　电阻元件电路及其等效二端网络

2.1.2　电阻的串联、并联和混联

根据等效变换的概念，可导出电阻的串、并联公式。

电路中有两个或两个以上电阻依次连接成一串，这样的连接称为电阻的串联。串联的特点是各电阻中流过同一电流。

图 2-2（a）所示为三个电阻 R_1、R_2、R_3 相串联组成的二端网络 N_1。图 2-2（b）所示为只含一个电阻 R 的另一个二端网络 N_2。二端网络 N_1 的伏安关系是

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &= R_1 i + R_2 i + R_3 i \\ &= (R_1 + R_2 + R_3) i \end{aligned}$$

而二端网络 N_2 的伏安关系是

$$u = Ri$$

根据二端网络的等效概念,若两个网络 N_1、N_2 等效,则两个二端网络的伏安关系是相同的。故有

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \tag{2-1}$$

可见电阻串联电路的总电阻等于各个电阻之和。

而每个电阻上的电压与总电压的关系是

$$u_K = R_K i = R_K \frac{u}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_K}{R}u, \quad K = 1,2,3 \tag{2-2}$$

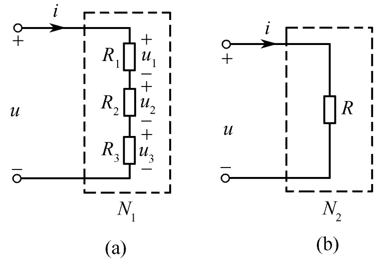

图 2-2　电阻的串联与其等效电阻

可见串联电阻上电压的分配与其电阻成正比。电阻串联电路常用于分压电路。

电路中两个或两个以上电阻连接在两个公共的节点之间,这样的连接称为电阻的并联。并联的特点是并联的各电阻承受同一电压。

图 2-3(a)所示为三个电阻 R_1、R_2、R_3 并联的二端网络 N_1,图 2-3(b)所示为只含一个电阻 R 的另一个二端网络 N_2。

二端网络 N_1 的伏安关系是

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + i_3 = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} + \frac{u}{R_3} \\ &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)u \end{aligned}$$

而二端网络 N_2 的伏安关系是

$$i = u/R$$

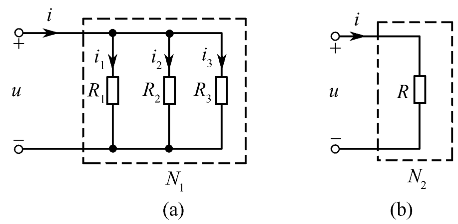

图 2-3　电阻的并联与其等效电阻

根据二端网络的等效概念,必有

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \\ G &= G_1 + G_2 + G_3 \end{aligned}\right\} \tag{2-3}$$

即

式中 $\qquad G = 1/R, \quad G_1 = 1/R_1, \quad G_2 = 1/R_2, \quad G_3 = 1/R_3$

可见电阻并联电路的总电阻的倒数(即总电导)等于各个电阻的倒数(电导)之和。

而每个电阻中的电流与总电流的关系是

$$i_K = G_K u = G_K \frac{i}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{G_K}{G}i = \frac{R}{R_K}i, \quad K = 1,2,3 \tag{2-4}$$

可见并联电阻中的电流分配与其电导成正比,而与其电阻成反比。

两个电阻 R_1、R_2 并联的总电阻为

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2-5}$$

各个电阻中的电流与总电流 i 的关系是

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}i, \quad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}i \tag{2-6}$$

式中,i_1 为流过电阻 R_1 的电流;i_2 为流过电阻 R_2 的电流。式(2-5)和式(2-6)是两组常用公式,应该熟练掌握,正确使用。

由于并联电阻的电流分配与其电阻成反比,所以并联的电阻越小时,流过该电阻的电流越大;反之并联的电阻越大时,流过该电阻的电流就越小。

并联的负载电阻越多(负载增加)时,并联后的总电阻越小,该并联电路的总电流和总功率就越大。但是,每个并联负载的电流和功率是不变的,这是因为每个并联负载上的电压是同一电压。

当电阻的连接中既有串联又有并联时,称为电阻的混联,如图 2-4(a)、(b)所示。电阻混联电路只要判断清楚电阻之间的连接关系,使用串联等效、并联等效,以及分压、分流公式,就可以很方便地解决电阻混联电路的计算。图 2-4(a)所示电路的等效电阻:

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_3$$

图 2-4(b)所示电路的等效电阻

$$R=\frac{(R_1+R_2)R_3}{(R_1+R_2)+R_3}$$

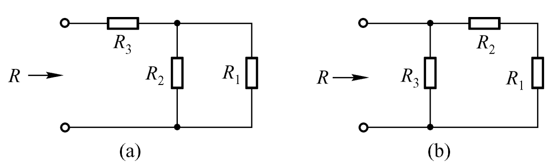

图 2-4　电阻的混联

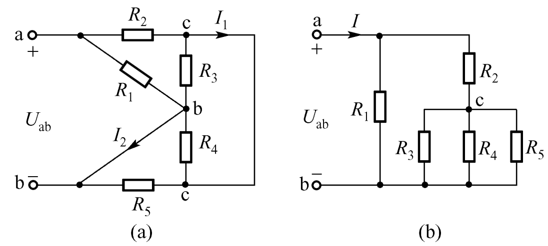

图 2-5　例 2-1 图

[例 2-1]　在图 2-5(a)所示电路中,$R_1=6\,\Omega$,$R_2=2\,\Omega$,$R_3=10\,\Omega$,$R_4=15\,\Omega$,$R_5=12\,\Omega$,$U_{ab}=12\,V$。试求等效电阻 R_{ab}及电流 I_1 和 I_2。

解:在图 2-5(a)所示电路中将每个电阻的端点标清楚后,很快可以整理成图 2-5(b)所示电路,则

$$R_{cb}=\frac{1}{\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}}=\frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{12}}\Omega=4\,\Omega$$

$$R_{ab}=\frac{(R_2+R_{cb})R_1}{(R_2+R_{cb})+R_1}=\frac{(2+4)\times 6}{(2+4)+6}\Omega=3\,\Omega$$

于是可得电路的总电流

$$I=\frac{U_{ab}}{R_{ab}}=\frac{12}{3}A=4\,A$$

由分压公式
$$U_{cb}=\frac{R_{cb}}{R_2+R_{cb}}U_{ab}=\left(\frac{4}{2+4}\times 12\right)V=8\,V$$

由 KCL
$$I_1=\frac{U_{ab}}{R_2+R_{cb}}-\frac{U_{cb}}{R_3}=\left(\frac{12}{2+4}-\frac{8}{10}\right)A=1.2\,A$$

$$I_2=I-\frac{U_{cb}}{R_5}=\left(4-\frac{8}{12}\right)A=\frac{10}{3}A$$

[例 2-2]　在图 2-6(a)所示电路中,$R_1=R_2=R_3=3\,\Omega$,$R_4=R_5=6\,\Omega$,$R_6=12\,\Omega$。试求开关 S 闭合与断开时的等效电阻 R_{ab}。

解:当开关 S 闭合时,电路中的节点 c 与节点 e 电位相等,此时可以将电路在不改变各电阻所连接节点关系的前提下进行整理,其结果如图 2-6(b)所示,则

$$R_{ac}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{3\times3}{3+3}\Omega=1.5\,\Omega \quad R_{cd}=\frac{R_3R_5}{R_3+R_5}=\frac{3\times6}{3+6}\Omega=2\,\Omega$$

$$R_{cb}=\frac{(R_{cd}+R_6)R_4}{(R_{cd}+R_6)+R_4}=\left[\frac{(2+12)\times6}{(2+12)+6}\right]\Omega=4.2\,\Omega$$

$$R_{ab}=R_{ac}+R_{cb}=(1.5+4.2)\,\Omega=5.7\,\Omega$$

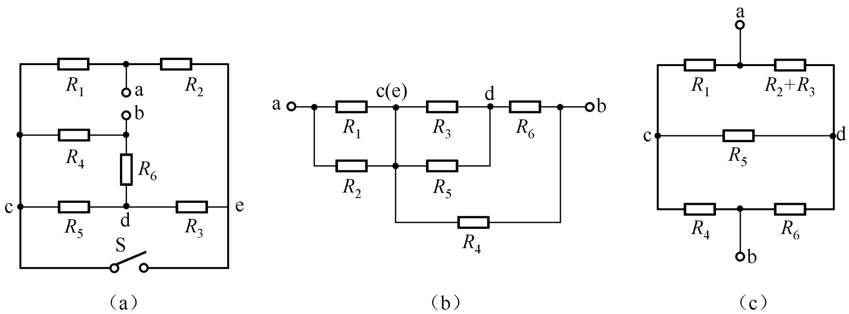

图 2-6　例 2-2 图

当开关 S 断开时，将电路进行整理，其结果如图 2-6(c)所示。可见，此时电路为一电桥电路。对于电桥电路，无公共连接端点的两个电阻称为一对相对桥臂，如图 2-6(c)中 R_1 和 R_6 是一对相对桥臂；(R_2+R_3)和 R_4 也是一对相对桥臂。而两个内节点 c 与 d 之间的 R_5 支路称为中间桥臂。对于电桥电路，当相对桥臂的电阻乘积相等时，电桥处于平衡状态。电桥平衡时，中间桥臂的两个端点的电位相等，则中间桥臂的支路电压为零，流过中间桥臂的电流也为零。此时可以将中间桥臂断路或短路，中间桥臂电阻不起作用。对于图 2-6(c)的电路，由于

$$R_1\times R_6=(R_2+R_3)\times R_4=36$$

所以该电桥处于平衡状态，R_5 的作用可以不考虑，将其断开，则

$$R_{ab}=\frac{(R_1+R_4)\times(R_2+R_3+R_6)}{(R_1+R_4)+(R_2+R_3+R_6)}=\left[\frac{(3+6)\times(3+3+12)}{(3+6)+(3+3+12)}\right]\Omega=6\,\Omega$$

若电桥电路不平衡，就不属于电阻的混联电路，需要利用电路分析的其它方法加以分析。

2.1.3　实际电源模型的等效变换

前面介绍的实际电压源模型和实际电流源模型都可以看做是一个有源二端网络。根据二端网络的等效概念，这两种电源模型也存在着等效关系。

若有源二端网络 N_1 为实际直流电压源模型，如图 2-7(a)所示。另一个有源二端网络 N_2 为实际直流电流源模型，如图 2-7(b)所示。这两个有源二端网络等效，则它们端口上的伏安关系必然是相同的。

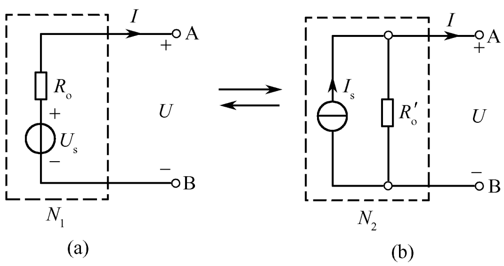

图 2-7　实际电压源与实际电流源的等效变换

由式(1-16)可得实际电流源的伏安关系是

$$I = I_s - U/R'_o$$

即

$$U = R'_o I_s - R'_o I$$

又由式(1-15)可得实际电压源的伏安关系是

$$U = U_s - R_o I$$

将以上两式相比较,若满足

$$\left.\begin{aligned} & R_o = R'_o \\ & U_s = R'_o I_s \quad \text{或} \quad I_s = U_s/R_o \end{aligned}\right\} \tag{2-7}$$

则这两个有源二端网络的伏安关系是完全相同的。换言之,式(2-7)是实际电压源与实际电流源等效互换时必须同时满足的两个条件。

在进行这种等效变换时需要注意下列几点:①电压源电压 U_s 与电流源电流 I_s 的参考方向必须如图 2-7 所示,即 I_s 的流向是由 U_s 的"－"极性端指向"＋"极性端,以保证对外电路等效;②电源的等效变换只是对外电路而言,对于电源内部由于其结构不同,是不等效的;③实际电压源与实际电流源的等效变换可以理解为有源支路的等效变换,即实际电压源的串联电阻与实际电流源的并联电阻不局限于电源的内阻;④电压源与电流源之间无等效关系,也就是说,电压源不能等效变换为电流源,反之亦然。

[例 2-3] 将图 2-8(a)电路等效变换为实际电流源电路。

解: $I_s = U_s/R_o = 10/5\ \text{A} = 2\ \text{A}$

根据图 2-8(a)中实际电压源的参考极性可知,I_s 的参考方向应向上。再把 5 Ω 电阻与 I_s 并联,即得等效实际电流源电路如图 2-8(b)所示。

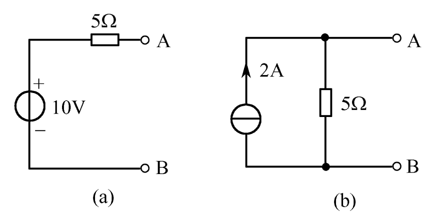

图 2-8 例 2-3 的电路

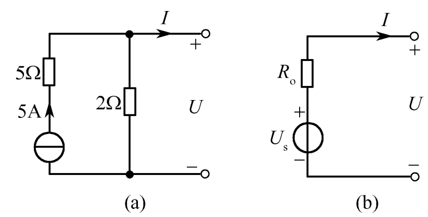

图 2-9 例 2-4 的电路

[例 2-4] 将图 2-9(a)所示有源二端网络等效变换为图 2-9(b)所示的实际电压源电路。

解:若图 2-9(a)电路与图 2-9(b)电路等效,则它们端口的伏安关系相同。图 2-29(a)电路的伏安关系,根据 KCL 有

$$I = 5 - U/2$$

图 2-9(b)电路的伏安关系为

$$I = \frac{U_s - U}{R_o} = \frac{U_s}{R_o} - \frac{U}{R_o}$$

若两个电路等效则必须有

$$R_o = 2\,\Omega, \quad U_s = (5 \times 2)\ \text{V} = 10\ \text{V}$$

即等效的实际电压源电压 $U_s = 10\ \text{V}$,$R_o = 2\,\Omega$。

由此例可见:在电流源中串入电阻后并不能影响电流源的电流值,与不串入电阻时的电流源电流 I_s 是一样的。电流源中串入电阻只能影响电流源两端的电压。对外电路而言,进行等

效变换时它不起作用,所以可去掉,即用短路替代电流源中串联的电阻。同理,在进行等效变换时,凡是和电流源串联的任何二端元件都可以用短路替代。

根据以上的分析,如果一个电压源并联一个电阻,进行等效变换时又会怎样呢?请读者自己分析。结论是在进行等效变换时,凡是与电压源并联的任何二端元件都可以用开路替代,对外电路不产生影响,但与电压源并联的电路会影响流过电压源的电流。

[**例 2-5**] 如图 2-10(a)所示电路。已知 $U_{s1}=12\,\mathrm{V}$,$U_{s2}=24\,\mathrm{V}$,$R_1=R_2=20\,\Omega$,$R_3=50\,\Omega$。求通过 R_3 的电流 I_3。

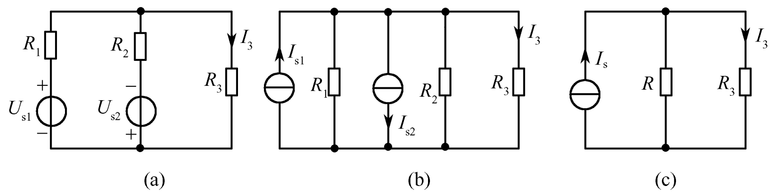

图 2-10 例 2-5 的电路

解:(1) 图 2-10(a)电路中两个实际电压源可分别等效为两个实际电流源,电路如图 2-10(b)所示。根据等效变换关系得

$$I_{s1}=U_{s1}/R_1=12/20\,\mathrm{A}=0.6\,\mathrm{A},\quad I_{s2}=U_{s2}/R_2=24/20\,\mathrm{A}=1.2\,\mathrm{A}$$

(2) 图 2-10(b)中两个电流源可简化为一个电流源 I_s(注意 I_{s2} 的方向),并将两个电阻 R_1、R_2 并联等效为 R,得到等效电路如图 2-10(c)所示。图中

$$I_s=I_{s1}-I_{s2}=(0.6-1.2)\,\mathrm{A}=-0.6\,\mathrm{A}$$

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\left(\frac{20\times 20}{20+20}\right)\Omega=10\,\Omega$$

(3) 由图 2-10(c)电路,根据分流公式得

$$I_3=\frac{R}{R+R_3}I_s=\left[\frac{10}{10+50}\times(-0.6)\right]\mathrm{A}=-0.1\,\mathrm{A}$$

负号表示 I_3 的实际方向与参考方向相反。

2.2 支路电流法

支路电流法是计算复杂电路的最基本、最直接的方法。它是以电路中的支路电流为变量,根据 KCL、KVL 分别对电路中的独立节点和独立回路列出关于支路电流的电路方程,再联立求解出各支路的电流。下面以图 2-11 所示电路,说明这一方法。

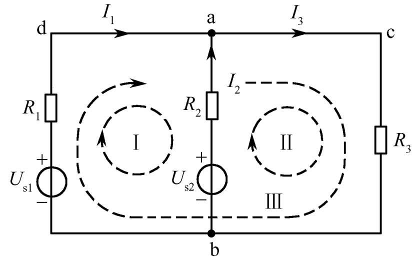

图 2-11 支路电流法的电路

图 2-11 电路是一个具有三条支路,两个节点和三个回路的复杂电路。首先在图中标出各支路电流的参考方向和回路的绕行方向,如图 2-11 所示。然后根据 KCL 列出两个节点的电流方程,即

对节点 a $\qquad -I_1-I_2+I_3=0$

对节点 b $\qquad I_1+I_2-I_3=0 \qquad (2\text{-}8)$

很显然,这两个方程是同一方程。所以,对两个节点的电路,根据 KCL 只能有一个独立的

节点电流方程。可以证明，电路中如有 n 个节点，则由 KCL 只能列出 $(n-1)$ 个独立的节点电流方程。所对应的 $(n-1)$ 个节点称为独立节点。

再根据 KVL 列出回路的电压方程。根据图 2-11 中所示的回路绕行方向，有

$$
\begin{aligned}
&\text{对回路 abda} \qquad && R_1I_1 - R_2I_2 = U_{s1} - U_{s2} \\
&\text{对回路 acba} \qquad && R_2I_2 + R_3I_3 = U_{s2} \\
&\text{对回路 acbda} \qquad && R_1I_1 + R_3I_3 = U_{s1}
\end{aligned}
\tag{2-9}
$$

上面三个方程中只有两个是独立的，因为其中任何一个方程均可由其他两个方程得出。为了获得独立方程，必须选取对应的独立回路，即应使所选取的回路中至少含有一条新支路（注意：这仅是一个充分条件）。对于一个平面电路，其网孔就是一组独立回路，以网孔为回路所列出的 KVL 方程都是独立的。可以证明，一个具有 n 个节点，b 条支路的平面电路，其网孔数 $m=b-(n-1)$。所以，对于一个平面电路，对 $(n-1)$ 个独立节点列出 KCL 方程，对 m 个网孔列出 KVL 方程，就可以得到 b 个互相独立的电路方程。在图 2-11 所示电路中，将节点 a 选作为独立节点，回路 acba 和 abda 为网孔，所得到的方程

$$
\begin{aligned}
-I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\
R_1I_1 - R_2I_2 &= U_{s1} - U_{s2} \\
R_2I_2 + R_3I_3 &= U_{s2}
\end{aligned}
$$

就是独立的电路方程组。

最后，联立求解 b 个独立方程，就可以解出 b 个未知的支路电流。

[例 2-6] 电路如图 2-11 所示。已知 $U_{s1}=120\,\text{V}$，$U_{s2}=80\,\text{V}$，$R_1=1\,\Omega$，$R_2=2\,\Omega$，$R_3=10\,\Omega$。求各支路电流与各元件的功率。

解：先在电路中标出各支路电流及其参考方向，同时标出网孔的绕行方向，如图 2-11 所示。

现根据 KCL、KVL 列出独立方程组，即

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{对节点 a} \qquad && -I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\
&\text{对网孔 Ⅰ} \qquad && R_1I_1 - R_2I_2 = U_{s1} - U_{s2} \\
&\text{对网孔 Ⅱ} \qquad && R_2I_2 + R_3I_3 = U_{s2}
\end{aligned}
\right\}
$$

将数值代入上述方程组得

$$
\left.
\begin{aligned}
I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\
I_1 - 2I_2 &= 120 - 80 \\
2I_2 + 10I_3 &= 80
\end{aligned}
\right\}
$$

联立求解上述方程组得 $I_1=20\,\text{A}$，$I_2=-10\,\text{A}$，$I_3=10\,\text{A}$。

各元件的功率为

$$
\begin{aligned}
P_{R_1} &= R_1I_1^2 = (1\times 20^2)\,\text{W} = 400\,\text{W}\text{（吸收）} \\
P_{R_2} &= R_2I_2^2 = [2\times(-10)^2]\,\text{W} = 200\,\text{W}\text{（吸收）} \\
P_{R_3} &= R_3I_3^2 = (10\times 10^2)\,\text{W} = 1000\,\text{W}\text{（吸收）} \\
P_{U_{s1}} &= -U_{s1}I_1 = (-120\times 20)\,\text{W} = -2400\,\text{W}\text{（产生）} \\
P_{U_{s2}} &= -U_{s2}I_2 = [-80\times(-10)]\,\text{W} = 800\,\text{W}\text{（吸收）}
\end{aligned}
$$

求解结果正确与否，可用功率平衡来检验。由计算结果，电路中产生的功率等于吸收的功率，功率平衡，计算的结果是正确的。

[例 2-7]　电路如图 2-12 所示,各参数已标在图中,求各支路电流、U_{ab} 及各电源产生的功率。

解:先在电路图中标出各支路电流、电流源上电压的参考方向,标出独立回路的绕行方向。

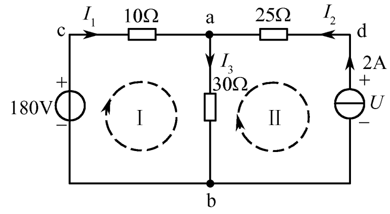

图 2-12　例 2-7 的电路

再根据 KCL、KVL 列出独立方程组,即

对节点 a　　　　　　$-I_1 - I_2 + I_3 = 0$

对网孔 Ⅰ(回路 cabc)　　$10I_1 + 30I_3 = 180$

对网孔 Ⅱ(回路 adba)　$-25I_2 - 30I_3 + U = 0$

应当注意的是支路电流 I_2 即为流过电流源的电流,是已知量。如果只求支路电流,在列写 KVL 方程时只需对不包含电流源支路的独立回路列写 KVL 方程。因此,上述联立方程组中的前两个方程就可以解得 I_1 和 I_3。根据例题的要求需求出电流源的端电压,故仍需列出三个独立方程。

联立求解上述方程组得 $I_1 = 3\,\text{A}, I_2 = 2\,\text{A}, I_3 = 5\,\text{A}$。

电流源的端电压　　　　$U = 25I_2 + 30I_3 = 200\,\text{V}$

而电压　　　　　　　$U_{ab} = 30I_3 = (30 \times 5)\,\text{W} = 150\,\text{V}$

电压源吸收的功率　　$P_{U_s} = (-180 \times 3)\,\text{W} = -540\,\text{W}$(即产生 540 W)

电流源吸收的功率　　$P_{I_s} = (-200 \times 2)\,\text{W} = -400\,\text{W}$(即产生 400 W)

此例的运算结果,同样可用电阻吸收的功率和电源产生的功率的平衡关系进行验算。

2.3　网孔电流法

应用支路电流法必须联立求解 b 个方程。当支路数很多时,需要建立的独立方程数越多,计算的工作量就越大。对同样的电路,如能减少独立方程数(即减少独立变量),将会使计算工作量大大减少。网孔电流法就是一种行之有效的方法。

网孔电流法是分析和计算复杂电路的常用方法之一。它是假想在电路的每个网孔中各有一个电流沿网孔的各支路闭合流动,如图 2-13 中的 I_{m1}、I_{m2}、I_{m3},称为网孔电流。如图 2-13 可知,网孔电流与各支路电流的关系是

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= I_{m1} \\ I_2 &= I_{m2} - I_{m1} \\ I_3 &= I_{m2} \\ I_4 &= I_{m2} - I_{m3} \\ I_5 &= I_{m3} \end{aligned}\right\} \tag{2-10}$$

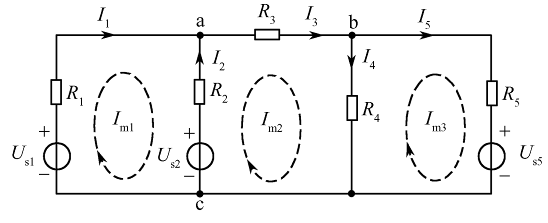

图 2-13　网孔电流法的电路

所以只要求出各网孔电流,就可以由式(2-10)求得各支路电流。为了求得网孔电流,可根据 KVL 列出以网孔电流为独立变量的回路电压方程,这些方程简称为网孔电流方程。

在图 2-13 中各电源的电压和电阻均为已知,列写求解网孔电流的方程组。根据 KVL 分别对网孔 1、网孔 2、网孔 3 列写方程

$$\left.\begin{aligned} &R_1I_{m1} - R_2(I_{m2} - I_{m1}) + U_{s2} - U_{s1} = 0 \\ &R_2(I_{m2} - I_{m1}) + R_3I_{m2} + R_4(I_{m2} - I_{m3}) - U_{s2} = 0 \\ &-R_4(I_{m2} - I_{m3}) + R_5I_{m3} + U_{s5} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-11}$$

式(2-11)可整理为

$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_2)I_{m1}-R_2I_{m2}&=U_{s1}-U_{s2}\\-R_2I_{m1}+(R_2+R_3+R_4)I_{m2}-R_4I_{m3}&=U_{s2}\\-R_4I_{m2}+(R_4+R_5)I_{m3}&=-U_{s5}\end{aligned}\right\}\tag{2-12}$$

联立求解这三个方程,便可求得三个网孔电流。

为了得到网孔电流方程的一般规律,式(2-12)可写成一般形式,即

$$\left.\begin{aligned}&\text{对网孔 1}\quad R_{11}I_{m1}+R_{12}I_{m2}+R_{13}I_{m3}=U_{s11}\\&\text{对网孔 2}\quad R_{21}I_{m1}+R_{22}I_{m2}+R_{23}I_{m3}=U_{s22}\\&\text{对网孔 3}\quad R_{31}I_{m1}+R_{32}I_{m2}+R_{33}I_{m3}=U_{s33}\end{aligned}\right\}\tag{2-13}$$

式(2-13)的各网孔电流方程左端本网孔电流前的系数称为自电阻,它为本网孔中所有支路上的电阻之和。结合图 2-13 可以得到 $R_{11}=R_1+R_2$;$R_{22}=R_2+R_3+R_4$;$R_{33}=R_4+R_5$,与式(2-12)所得结果完全一致,自电阻的值恒为正。各网孔电流方程左端相邻网孔电流前的系数称为互电阻,它为相邻的两个网孔之间公共支路上的电阻之和。互电阻的值可正可负,当相邻的两个网孔电流在公共支路上流向一致时,互电阻取正值;当相邻的两个网孔电流在公共支路上流向不一致时,互电阻取负值。结合图 2-13 可以得到 $R_{12}=R_{21}=-R_2$,$R_{23}=R_{32}=-R_4$。而网孔 1 和网孔 3 是没有公共支路的不相邻网孔,则 $R_{13}=R_{31}=0$。由此可见,如果我们选定网孔电流的绕行方向均为顺(或逆)时针方向时,则互电阻将为非正值。式(2-13)方程右端的 U_{s11}、U_{s22}、U_{s33}分别为网孔 1、2、3 中电压源电压值的代数和。在各网孔内,电压源电压的方向与网孔电流方向一致时,电压值前取负号;电压源电压的方向与网孔电流方向相反时,电压值前取正号。这样以网孔电流为独立变量,根据 KVL 列出所需的独立方程,从而解出网孔电流,再计算出各支路电流的方法,称为网孔电流法。此法只需列出 $b-(n-1)=m$ 个独立方程。m 亦即网孔数。

现将网孔电流法的解题步骤归纳如下:

① 在电路图中选定网孔,标出网孔电流与支路电流的参考方向;

② 根据自电阻、互电阻、电压源电压值代数和的形成规律,利用直接观察的方法列出关于网孔电流的电路方程;

③ 求解网孔电流方程组,解出各网孔电流;

④ 根据支路电流与网孔电流的关系,求出各支路电流及其他未知量。

[例2-8] 电路如图2-13 所示。已知 $U_{s1}=160\,\text{V}$,$U_{s2}=120\,\text{V}$,$U_{s5}=60\,\text{V}$,$R_1=R_2=20\,\Omega$,$R_3=5\Omega$,$R_4=40\,\Omega$,$R_5=10\,\Omega$。用网孔电流法求各支路电流,电压 U_{ac}与 U_{bc}。

解:在电路图中标出各支路电流,网孔电流的参考方向,如图 2-13 所示。

列出网孔电流方程组为

$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_2)I_{m1}-R_2I_{m2}&=U_{s1}-U_{s2}\\-R_2I_{m1}+(R_2+R_3+R_4)I_{m2}-R_4I_{m3}&=U_{s2}\\-R_4I_{m2}+(R_4+R_5)I_{m3}&=-U_{s5}\end{aligned}\right\}$$

将已知数值代入上述方程组得

$$\left.\begin{aligned}40I_{m1}-20I_{m2}&=40\\-20I_{m1}+65I_{m2}-40I_{m3}&=120\\-40I_{m2}+50I_{m3}&=-60\end{aligned}\right\}$$

用消元法或行列式法，解得 $I_{m1}=3\ \mathrm{A}, I_{m2}=4\ \mathrm{A}, I_{m3}=2\ \mathrm{A}$。

故各支路电流为 $\qquad I_1=I_{m1}=3\ \mathrm{A}, I_2=I_{m2}-I_{m1}=(4-3)\ \mathrm{A}=1\ \mathrm{A}$

$$I_3=I_{m2}=4\ \mathrm{A}, I_4=I_{m2}-I_{m3}=(4-2)\ \mathrm{A}=2\ \mathrm{A}, I_5=I_{m3}=2\ \mathrm{A}$$

则
$$U_{ac}=-R_2I_2+U_{s2}=(-20\times1+120)\ \mathrm{V}=100\ \mathrm{V}$$
$$U_{bc}=R_4I_4=(40\times2)\ \mathrm{V}=80\ \mathrm{V}$$

［**例 2-9**］ 如图 2-14 所示电路，试列出网孔电流方程组。

解：在图 2-14 中标出网孔电流及电流源端电压的参考方向。注意网孔电流法是利用 KVL 列写关于网孔电流的电路方程，电流源的端电压无法用网孔电流表示，所以电流源的端电压应予以虚设。

列出网孔电流方程组为

$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_2+R_4)I_{m1}-R_2I_{m2}-R_4I_{m3}&=-U_s\\-R_2I_{m1}+(R_2+R_3+R_5)I_{m2}-R_5I_{m3}+U&=U_s\\-R_4I_{m1}-R_5I_{m2}+(R_4+R_5+R_6)I_{m3}-U&=0\end{aligned}\right\}$$

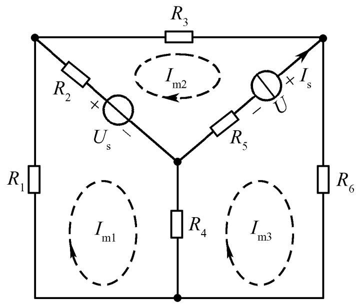

图 2-14 例 2-9 的电路

图 2-14 的电路有三个网孔，可列出三个网孔电流方程。但上述方程组中除三个网孔电流为未知量外，还有电流源的端电压 U 为未知量。三个方程中有四个未知量，显然求不出惟一解，所以还应补充一个方程。电流源的电流是已知的，它可以提供一个电流源电流与网孔电流的约束方程为

$$I_s=I_{m3}-I_{m2}$$

这样四个未知量有四个方程，故方程组是独立而完备的，可以解出网孔电流及电流源的电压值。

2.4 节点电压法

2.3 节的网孔电流法是以网孔电流为独立变量的，根据 KVL 列写方程，方程数比支路电流法减少了 $(n-1)$ 个。而如果要求某支路电流时，只要知道了该支路两节点之间的电压，就可以用欧姆定律或有源支路的欧姆定律求得该支路的电流。在任一电路的各节点中，取一点作为参考节点（令其电位为零），其余各节点与该参考节点之间的电压就称为这些节点的节点电压（或节点电位）。节点电压是彼此独立的。如何求出节点电压呢？以节点电压为独立变量，根据 KCL 列出 $(n-1)$ 个独立的节点电压方程，从而解出节点电压，再计算出各支路电流的方法，称为节点电压法。此法对于电路结构的网孔数多而节点数少时，更能显示其优越性。下面先以图 2-15(a) 所示的两节点电路为例说明这一方法。

图 2-15(a) 是一个支路数 $b=4$，网孔数 $m=3$，节点数 $n=2$ 的电路，取节点 b 为参考点，如果求出了节点电压 U_{na}，就可以求出各支路电流了。

设节点电压 U_{na} 已求出，根据欧姆定律或有源支路欧姆定律，各支路电流为

$$I_1=\frac{U_{s1}-U_{na}}{R_1},\quad I_2=\frac{-U_{s2}-U_{na}}{R_2},\quad I_4=\frac{U_{na}}{R_4},\quad I_3=I_{s3}$$

根据 KCL，对节点 a 有 $\qquad -I_1-I_2-I_3+I_4=0$

将各电流代入上式得
$$-\frac{U_{s1}-U_{na}}{R_1}-\frac{-U_{s2}-U_{na}}{R_2}-I_{s3}+\frac{U_{na}}{R_4}=0$$

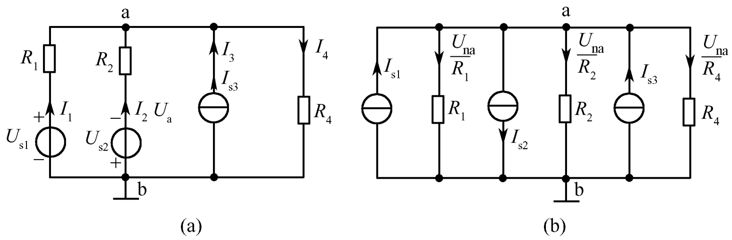

图 2-15　具有两个节点的电路

整理可得节点电压
$$U_{na}=\frac{\dfrac{U_{s1}}{R_1}-\dfrac{U_{s2}}{R_2}+I_{s3}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_4}} \tag{2-14}$$

U_{na}求出后,各支路电流也就可以求出了。

现在来说明式(2-14)的物理意义。式(2-14)的分子项是流入节点 a 的各等效电流源电流值的代数和,而分母与 U_{na}的乘积表示在节点电压 U_{na}的作用下流出节点 a 的电流。也就是说,对节点 a 而言,在节点电压 U_{na}作用下,流出节点的电流之和等于流入节点的各等效电流源电流值的代数和。相应的等效电路如图 2-15(b)所示。

式(2-14)可用一般形式表示为

$$\left(\sum G\right)U_n=\sum I_s$$

即
$$U_n=\frac{\sum I_s}{\sum G} \tag{2-15}$$

式中,$\sum I_s$ 是将各实际电压源都等效变换为实际电流源后,流向独立节点的各等效电 流源电流值的代数和。规定流入独立节点的电流源电流值前取正号,反之取负号;$\sum G$ 为与该独立节点相连的各支路电导之和。式(2-15)又称为弥尔曼定理。

［例 2-10］　用节点电压法求图 2-16 所示电路的各支路电流。

解:由式(2-15)得

$$U_{na}=\frac{U_{s1}/R_1+I_s}{1/R_1+1/R_3}=\left(\frac{38/2+2}{1/2+1/5}\right)\ \mathrm{V}=30\ \mathrm{V}$$

则
$$I_1=\frac{U_{s1}-U_{na}}{R_1}=\left(\frac{38-30}{2}\right)\mathrm{A}=4\ \mathrm{A}$$

$$I_2=I_s=2\ \mathrm{A},\quad I_3=U_{na}/R_3=30/5\ \mathrm{A}=6\ \mathrm{A}$$

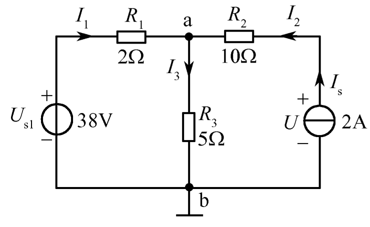

图 2-16　例 2-10 的电路

由此例可见,串入电流源支路的电阻 R_2 没有出现在分母之中,这是因串入电流源支路的电阻,对通过电流源的电流无影响,因而对外电路 U_{na}(将电流源看成是一个有源二端网络)无影响。而电阻 R_2 的存在仅对电流源两端的电压 U 有影响。当 $R_2=0$ 时,$U=U_{na}$;当 $R_2\neq 0$ 时,$U=U_{na}+R_2I_2$。

对于具有 n 个节点,m 个网孔的电路,取电路中的任意节点为参考点,即该节点的电位为零,再由 KCL 列出$(n-1)$个独立的节点电压方程。

现以图 2-17 所示电路为例,说明用节点电压法对具有多个节点电路的求解步骤。

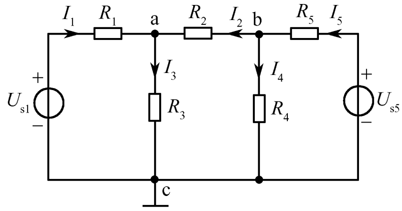

图 2-17　具有多个节点的节点电压法电路

图 2-17 所示电路中节点数 $n=3$。取节点 c 为参考节点，即 $U_c=0$。各支路电流参考方向已标出。

根据 KCL 得

对节点 a　　$-I_1-I_2+I_3=0$

对节点 b　　$I_2+I_4-I_5=0$

运用欧姆定律与有源支路欧姆定律得

$$I_1=\frac{U_{s1}-U_{na}}{R_1},\quad I_2=\frac{U_{nb}-U_{na}}{R_2},\quad I_3=\frac{U_{na}}{R_3},\quad I_4=\frac{U_{nb}}{R_4},\quad I_5=\frac{U_{s5}-U_{nb}}{R_5}$$

将上面各式分别代入节点 a、节点 b 的节点电流方程中，得

$$\left.\begin{aligned}-\frac{U_{s1}-U_{na}}{R_1}-\frac{U_{nb}-U_{na}}{R_2}+\frac{U_{na}}{R_3}=0\\ \frac{U_{nb}-U_{na}}{R_2}+\frac{U_{nb}}{R_4}-\frac{U_{s5}-U_{nb}}{R_5}=0\end{aligned}\right\}$$

整理后可得

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)U_{na}-\frac{1}{R_2}U_{nb}=\frac{U_{s1}}{R_1}\\ -\frac{1}{R_2}U_{na}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)U_{nb}=\frac{U_{s5}}{R_5}\end{aligned}\right\}\tag{2-16}$$

若用电导表示每个电阻的倒数，式(2-16)又可写为

$$\left.\begin{aligned}(G_1+G_2+G_3)U_{na}-G_2U_{nb}=G_1U_{s1}\\ -G_2U_{na}+(G_2+G_4+G_5)U_{nb}=G_5U_{s5}\end{aligned}\right\}\tag{2-17}$$

将上述方程写成一般形式为

$$\left.\begin{aligned}G_{aa}U_{na}+G_{ab}U_{nb}=I_{saa}\\ G_{ba}U_{na}+G_{bb}U_{nb}=I_{sbb}\end{aligned}\right\}\tag{2-18}$$

式(2-18)的各节点电压方程左端各节点电压前的系数称为自电导，它为连接到该节点上所有支路的电导之和。结合图 2-17 可以得到 $G_{aa}=G_1+G_2+G_3$；$G_{bb}=G_2+G_4+G_5$，与式(2-17)所得结果完全一致，自电导的值恒为正。各节点电压方程左端相邻节点电压前的系数称为互电导，它为相邻的两个节点之间公共支路上的电导之和。互电导的值恒为负。结合图 2-17 可以得到 $G_{ab}=G_{ba}=-G_2$。若两个节点之间没有公共支路相连，则它们的互电导为零。式(2-18)方程右端的 I_{saa}、I_{sbb} 分别为流入节点 a 和 b 的等效电流源电流值的代数和，流入节点的电流源电流值前取正号；流出节点的电流源电流值前取负号。式(2-18)是具有两个独立节点的电路的节点电压方程的一般形式。节点电压方程是 KCL 的体现，因为方程左端是各节点电压所引

起的流出节点的电流,而方程右端则是由电流源流入节点的电流。

现将节点电压法的解题步骤归纳如下:

① 在电路中任选某一节点为参考节点,则其余节点与参考节点间的电压就是独立的节点电压;

② 根据自电导、互电导、电流源电流值代数和的形成规律,利用直接观察的方法列出关于节点电压的电路方程;

③ 求解节点电压方程组,解出各节点电压;

④ 求出各支路电流及其他未知量。

[**例 2-11**] 电路如图 2-17 所示。已知 $R_1=5\,\Omega$,$R_2=10\,\Omega$,$R_3=5\,\Omega$,$R_4=10\,\Omega$,$R_5=15\,\Omega$,$U_{s1}=15\,\text{V}$,$U_{s5}=65\,\text{V}$。求各支路电流。

解:选节点 c 为参考节点,然后选用直接观察的方法列出节点电压方程组为

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)U_{na}-\frac{1}{R_2}U_{nb}=\frac{1}{R_1}U_{s1}\\-\frac{1}{R_2}U_{na}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)U_{nb}=\frac{1}{R_5}U_{s5}\end{aligned}\right\}$$

将已知数值代入上述方程组得

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)U_{na}-\frac{1}{10}U_{nb}=\frac{15}{5}\\-\frac{1}{10}U_{na}+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)U_{nb}=\frac{65}{15}\end{aligned}\right\}$$

解得 $U_{na}=10\,\text{V}$,$U_{nb}=20\,\text{V}$。

各支路电流分别为

$$I_1=\frac{U_{s1}-U_{na}}{R_1}=\left(\frac{15-10}{5}\right)\text{A}=1\text{ A}$$

$$I_2=\frac{U_{nb}-U_{na}}{R_2}=\left(\frac{20-10}{10}\right)\text{A}=1\text{ A}$$

$$I_3=\frac{U_{na}}{R_3}=\frac{10}{5}\text{A}=2\text{ A},\quad I_4=\frac{U_{nb}}{R_4}=\frac{20}{10}\text{A}=2\text{ A}$$

$$I_5=\frac{U_{s5}-U_{nb}}{R_5}=\frac{65-20}{15}\text{A}=3\text{ A}$$

检验:对节点 c 列 KCL 方程,有

$$I_1-I_3-I_4+I_5=0$$

代入各支路电流数值为

$$1-2-2+3=0$$

证明计算结果正确。

2.5 叠加定理

叠加定理是线性电路的重要定理之一,它可以将一个复杂电路的分析与计算简化为几个简单电路的分析与计算,它体现了线性电路的基本性质——叠加性。

下面以图 2-18 所示电路来说明叠加定理及其应用。

对于图 2-18(a)所示的电路,R_2 支路中的电流 I_2,由基尔霍夫定律得

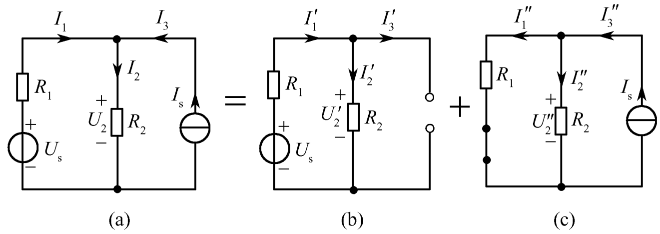

图 2-18　叠加定理的电路

$$I_1 = I_2 - I_3 = I_2 - I_s$$
$$U_s = R_1 I_1 + R_2 I_2 = R_1(I_2 - I_s) + R_2 I_2 = (R_1 + R_2) I_2 - R_1 I_s$$

移项整理后得
$$I_2 = \frac{U_s}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s = I_2' + I_2'' \tag{2-19}$$

显然，R_2 支路中的电流是由两个分量 I_2' 和 I_2'' 叠加而成的。其中
$$I_2' = \frac{U_s}{R_1 + R_2}$$
它是在电流源开路时，由电压源单独作用时，所产生的流过 R_2 的电流，如图 2-18(b)所示；而另一分量
$$I_2'' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s$$
则是在电压源短路时，由电流源单独作用时，所产生的流过 R_2 的电流，如图 2-18(c)所示。

流过 R_2 的电流可以如此计算，而 R_2 两端的电压
$$\begin{aligned} U_2 &= R_2 I_2 = R_2\left(\frac{U_s}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s\right) \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_s + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_s = U'_2 + U''_2 \end{aligned} \tag{2-20}$$
也可以用这种方法计算。

同样可以证明这一结论也适用于其他支路中的电流和电压的计算。

上述结果，反映了线性电路的一个很重要的性质，称为叠加定理。它的内容是：在线性电路中，有多个独立电源同时作用时，任何一条支路的电流(或电压)等于各个独立电源单独作用在该支路产生的电流(或电压)分量的代数和。

应用叠加定理时需注意以下几点：

① 电路中仅考虑某一个独立电源单独作用时，其他独立电源应视为零值，即电压源用短路替代；电流源用开路替代。同时保持电路结构不变。

② 分量的“代数和”意指各分量进行叠加时，若分量的参考方向与原物理量的参考方向一致时，该分量前取正号；若分量的参考方向与原物理量的参考方向相反时，该分量前取负号。

③ 叠加定理只适用于线性电路，不适用于非线性电路。

④ 叠加定理不能用于求功率。比如计算图 2-18 中电阻 R_2 上的功率为
$$P_2 = R_2 I_2^2 = R_2 (I_2' + I_2'')^2 \neq R_2 I_2'^2 + R_2 I_2''^2$$
这是因为功率与电流不是正比关系，而是平方关系。

[例 2-12]　用叠加定理求图 2-19(a)所示电路中的各支路电流。

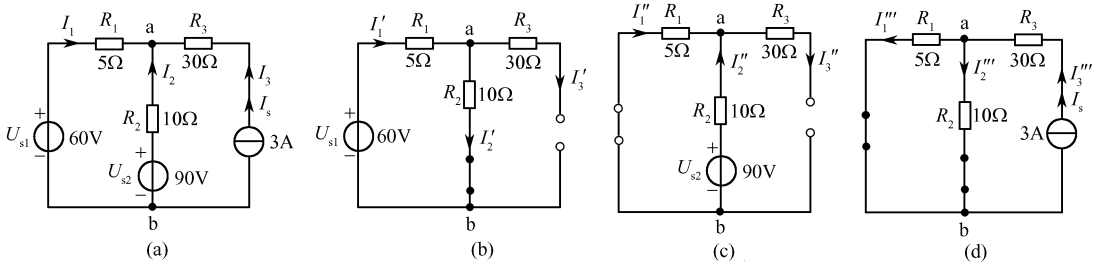

图 2-19 例 2-12 电路

解:(1) 当电压源 U_{s1} 单独作用时,对应的电路如图 2-19(b)所示。由图可得

$$I'_1 = I'_2 = \frac{U_{s1}}{R_1 + R_2} = \frac{60}{5+10}\text{ A} = 4\text{ A},\quad I'_3 = 0$$

当电压源 U_{s2} 单独作用时,对应的电路如图 2-19(c)所示。由图可得

$$I''_2 = -I''_1 = \frac{U_{s2}}{R_1 + R_2} = \frac{90}{5+10}\text{ A} = 6\text{ A},\quad I''_3 = 0$$

当电流源 I_s 单独作用时,对应的电路如图 2-9(d)所示,由图可得

$$I'''_3 = I_s = 3\text{ A}$$

$$I'''_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_s = \left(\frac{10}{5+10} \times 3\right)\text{A} = 2\text{ A}$$

$$I'''_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s = \left(\frac{5}{5+10} \times 3\right)\text{A} = 1\text{ A}$$

(2) 求各路电流。要特别注意各支路电流的参考方向与每个独立电源单独作用时在该支路的电流分量参考方向的关系。由图 2-19 可得

$$I_1 = I'_1 + I''_1 - I'''_1 = (4 - 6 - 2)\text{ A} = -4\text{ A}$$

$$I_2 = -I'_2 + I''_2 - I'''_2 = (-4 + 6 - 1)\text{ A} = 1\text{ A}$$

$$I_3 = -I'_3 - I''_3 + I'''_3 = 3\text{ A}$$

由叠加定理可推知,当电路中只有一个独立源作用时,该电路中各处电压或电流,都与该独立电源成正比关系。这个关系称为齐性原理。

[**例 2-13**] 梯形电路如图 2-20 所示,试求各支路电流。

解:电路中只有一个电压源作用,可利用电阻串并联关系进行化简,求出 I_1;再利用分流关系依次求出其它各支路的电流,但过程较为繁琐。一般情况下,应用齐性原理分析梯形电路更为方便。

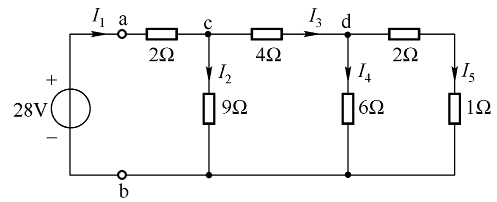

图 2-20 例 2-13 电路

如果设电流 $I_5 = 1\text{ A}$,则各支路电流和电压分别为

$$U_{db} = (2+1) \times I_5 = 3\text{ V},\quad I_4 = U_{db}/6 = 0.5\text{ A},\quad I_3 = I_4 + I_5 = 1.5\text{ A}$$

$$U_{cb} = 4 \times I_3 + U_{db} = (6+3)\text{ V} = 9\text{ V},\quad I_2 = U_{cb}/9 = 1\text{ A},\quad I_1 = I_2 + I_3 = 2.5\text{ A}$$

$$U_{ab} = 2 \times I_1 + U_{cb} = (5+9)\text{ V} = 14\text{ V}$$

可见,在假设电流 $I_5=1\ \mathrm{A}$ 时,需要在 a 和 b 两点之间加入一个电压为 14 V 的电压源。现已知电压源的电压值为 28 V,故 $K=28/14=2$,根据齐性原理,只需将前面所求各支路的电流,乘上比例常数 K,即可得到电压值为 28 V 的电压源作用下的各支路电流,即

$$I_1=2.5\ \mathrm{A}\times2=5\ \mathrm{A},\quad I_2=1\ \mathrm{A}\times2=2\ \mathrm{A},\quad I_3=1.5\ \mathrm{A}\times2=3\ \mathrm{A}$$

$$I_4=0.5\ \mathrm{A}\times2=1\ \mathrm{A},\quad I_5=1\ \mathrm{A}\times2=2\ \mathrm{A}$$

本例是由离电源最远的支路开始计算,假设其电流为 1 A,然后由远到近地推算到电压源支路,最后利用齐性原理予以修正。这种方法可以称为“倒推法”。

2.6 等效电源定理

当仅需计算一个复杂电路中某一支路的电流(或电压)时,若用前面介绍的计算方法,必然要多计算出不需要的支路电流(或电压),增加了计算工作量。这种情况下应用等效电源定理求解就比较简便。其方法是将所要求的某一支路划出,而把其余电路视为一个有源二端网络,如图 2-21(a)所示。通过讨论将知道,任何一个有源二端网络,对外电路而言,都可以用一个等效电源替代。等效电源可以是实际电压源,也可以是实际电流源。这样,使计算简化为如图 2-21(b)、(c)所示的简单电路求解。

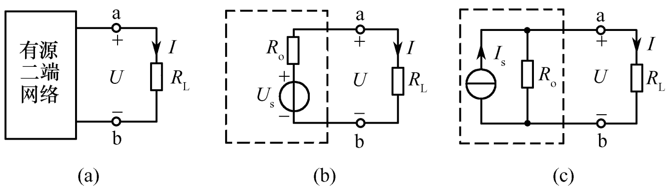

图 2-21 有源二端网络

将一个有源二端网络等效化简为实际电压源或实际电流源的方法称为等效电源定理。等效电源定理包含戴维南定理和诺顿定理。

2.6.1 戴维南定理

任意一个线性有源二端网络,可以用一个对外与它等效的电压源 U_s 和电阻为 R_o 相串联的实际电压源来替代,如图 2-22 所示。其电压源的电压值 U_s 等于该有源二端网络两端间的开路电压 U_{oc},串联电阻 R_o 等于该有源二端网络内所有独立电源都为零值(即电压源用短路替代,电流源用开路替代)时从所得的无源二端网络两端处看进去的等效电阻。这就是戴维南定理。

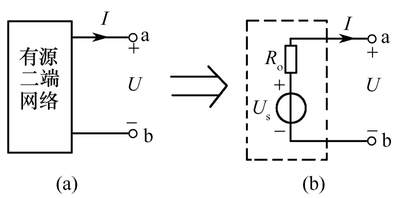

图 2-22 戴维南等效电路

下面来证明戴维南定理。

如前所述,电路的等效指的是对外电路等效,即它们具有相同的伏安关系。从图 2-22 所示电路可知,当外电路开路时,等效实际电压源的电压 U_s 应当和此时原有源二端网络的开路电压 U_{oc} 相等,即

$$U_s=U_{oc} \tag{2-21}$$

当外电路接通而输出电流 I 时，等效电压源的端电压为

$$U = U_s - R_o I = U_{oc} - R_o I \tag{2-22}$$

它也应当和此时原有源二端网络的端电压相等。这时原有源二端网络的端电压可以这样来分析：设想在原有源二端网络两端接一个 $I_s = I$ 的电流源来替代它的外电路，如图 2-23(a)所示。这同样符合它在输出电流 I 时的工作状态，因为它不会改变原有源二端网络各支路的电流和电压。

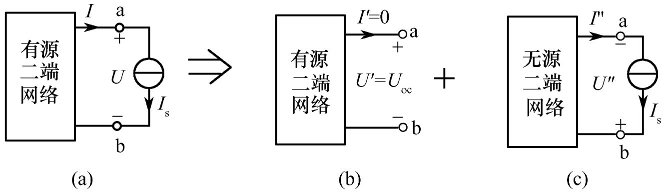

图 2-23　戴维南定理的证明

图 2-23(a)中的电压 U 可应用叠加定理来求得。当原有源二端网络中各个独立电源均作用，而外电路的电流源 I_s 为零时，如图 2-23(b)所示，此时 a、b 两端开路，$I' = 0$，端电压 $U' = U_{oc}$；当原有源二端网络中所有独立电源为零(变成无源二端网络)，仅有外电路的电流源 I_s 作用时，如图 2-23(c)所示，此时 $I'' = I_s = I$，端电压 U'' 等于无源二端网络的等效电阻(用 R_{abo} 表示)乘以电流 I，即

$$U'' = R_{abo} I$$

根据图 2-23 所示电路的叠加关系得

$$U = U' - U'' = U_{oc} - R_{abo} I \tag{2-23}$$

比较式(2-22)和式(2-23)，可以得

$$R_o = R_{abo} \tag{2-24}$$

因此，有源二端网络可以用一个电压源电压为 U_s，串联电阻为 R_o 的实际电压源来等效。

[例 2-14]　求图 2-24(a)所示电路的戴维南等效电路。

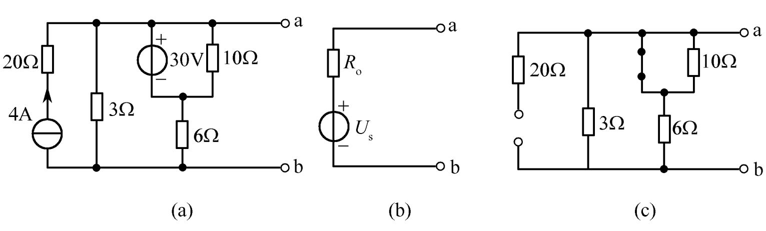

图 2-24　例 2-14 的电路

解：求戴维南等效电路就是将图 2-24(a)等效变换为图 2-24(b)所示电路，就是要求等效电压源电压 U_s 和电阻 R_o。

本题中因 10 Ω 电阻与电压源并联，20 Ω 电阻与电流源串联，对输出电压 U_{ab} 无影响。可分别用开路与短路替代 10 Ω 与 20 Ω 电阻，用弥尔曼定理得

$$U_{abo} = \frac{30/6 + 4}{1/6 + 1/3}\text{ V} = 18\text{ V}$$

即等效电压源电压 $U_s = 18$ V。

令图 2-24(a)所示电路中的独立电源皆为零,得对应的无源二端网络如图 2-24(c)所示,可得

$$R_o = \frac{3 \times 6}{3 + 6}\Omega = 2\,\Omega$$

即等效电压源串联电阻 $R_o = 2\,\Omega$。

根据已求出的 U_s 和 R_o 可画出戴维南等效电路,如图 2-24(b)所示。

[**例 2-15**] 利用截维南定理求图 2-25(a)所示电路中的电压 U。

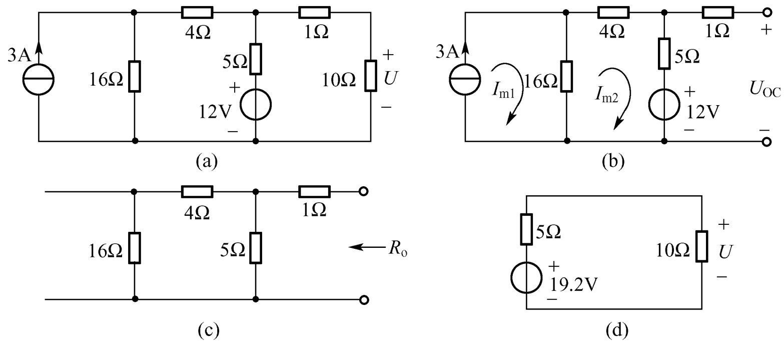

图 2-25 例 2-15 的电路

解:利用戴维南定理求电压 U 时,首先将待求的 $10\,\Omega$ 电阻支路断开,求出左侧线性含源二端网络的戴维南等效电路。

求开路电压 U_{oc} 的电路如图 2-25(b)所示,根据网孔电流法,则有

$$\left.\begin{aligned} I_{m1} &= 3\text{ A} \\ -16I_{m1} + 25I_{m2} &= -12 \end{aligned}\right\}$$

由此可解得 $I_{m1} = 3\text{ A}, I_{m2} = 1.44\text{ A}$,于是可得

$$U_{oc} = 5I_{m2} + 12 = 19.2\text{ V}$$

令图 2-25(a)所示电路中的独立电源皆为零,得对应的无源二端网络如图 2-25(c)所示,可得

$$R_o = \left[\frac{(4+16)\times 5}{(4+16)\times 5} + 1\right]\Omega = 5\,\Omega$$

根据已求得的 U_{oc} 和 R_o 画出对应的等效电路,如图 2-25(d)所示,于是求得

$$U = \left(\frac{10}{10+5} \times 19.2\right)\text{V} = 12.8\text{ V}$$

由以上计算可以看出,利用戴维南定理进行电路分析时,通常有三个步骤,即求开路电压 U_{oc};求等效电阻 R_o;画出等效电路,求出未知量。

计算开路电压时,可以运用前面介绍的各种分析方法,例如等效变换、网孔电流法、节点电压法等。

计算等效电阻时,若无源二端电阻网络为电阻的混联电路时,可以用电阻串、并联化简的方法求取等效电阻。若无源二端电阻网络不是电阻的混联电路时,则要用到求等效电阻的一般方法。

求等效电阻的一般方法分为外加电源法和开路电压、短路电流法。