

第 1 章 电网络图论基础

1.1 图的基本概念

1.1.1 图

图(Graph,简称 G)是一些点和线段(边)的集合,其中每一线段连于两个不同的点或一个相同的点,点称为顶点或节点,没有线段相连的点称为孤点,线段则称为边或支路,每条支路都连接在两个节点之间。因此一个图 G 可定义为点和线段的一个集合,如图 1-1 所示。在图 1-1 中,图 G 共有 4 个节点(a, b, c, d)和 6 条边(1,2,3,4,5,6),与支路相连的节点称为关联节点,如支路 1 关联节点 a 和 b ,支路 6 的关联节点只有 a ,支路 6 又称为自环。一个图可以用 $G=(V,E)$ 表示,其中 V 是节点的集合, E 是支路的集合。需要注意的是,孤点 d 虽然没有支路相连,但仍属于图 G ;通常图中只有直线和曲线,一般不采用折线。

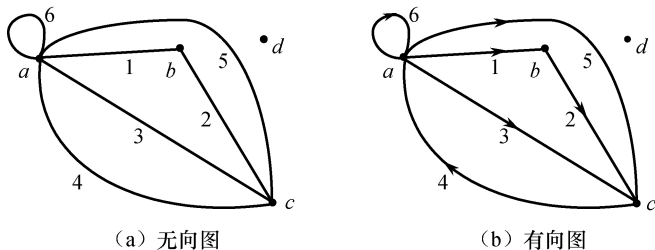


图 1-1 图 G

如果图 G 中的各支路没有方向(支路无箭头),则称为无向图,如图 1-1a 所示。反之,如果给图中的各支路都规定了方向(支路有箭头),则称其为有向图,如图 1-1b 所示。电网络理论是最早应用图论的学科之一,图论在电路中的应用称为网络图论,在电路理论中用到的图主要是描述支路电流和电压的参考方向,因此各支路赋予一个方向,通常支路的方向即代表了对应电网络中支路的方向。任何一个电路都可以用一个有向图来说明其结构的特点,如图 1-2a 所示为一电路结构图,图 1-2b 是该电路抽象出来的有向图。一个电路的图可以表示一个电网络的连接性质,即拓扑性质,因此,又称电路的拓扑图。

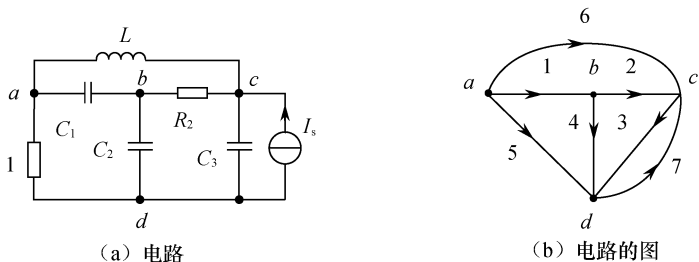


图 1-2 电路及其图

如果图 G 的任意两个节点之间至少有一条通路,则称图 G 为连通图,否则称为非连通图。图 1-3a 为连通图,图 1-3b 为非连通图。

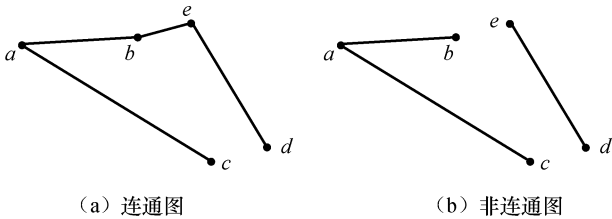


图 1-3 连通图和非连通图

如果图 G_1 的每个节点和支路都是图 G 中的节点和支路的子集,则称图 G_1 是图 G 的一个子图。一个图有很多子图,每一个图也是它自己的子图。如图 1-4a 和图 1-4b 均为图 1-1a 的子图。

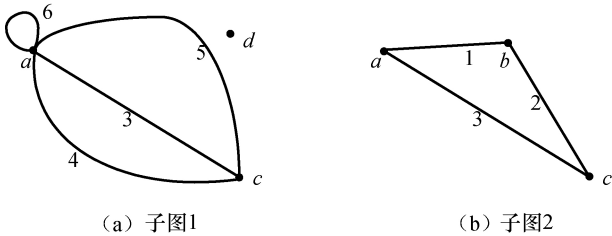


图 1-4 图及其子图

1.1.2 树和基本回路

树在图论中非常重要,一棵树是连通图 G 的一个连通子图。如果一个连通子图满足如下两个条件:

- ① 包含连通图 G 的全部节点;
- ② 不包含任何回路。

满足上述两个条件的连通子图就是图 G 的一棵生成树(Tree),简称为树 T 。

一个图的树 T 有很多种,如图 1-5c 是图 1-5a 的一棵树,而图 1-5b 则不是图 1-5a 的树,只是图 1-5a 的一个子图。

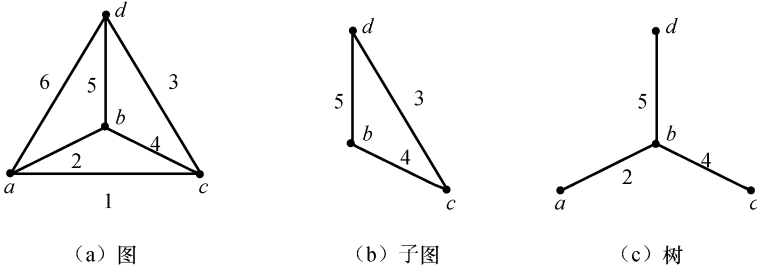


图 1-5 图及其树

树的支路称为树支,其余的支路则称为连支。树的补图称为补树,补树的支路就是连支。对

于具有 n 个节点、 b 条支路的连通图的树支数是相等的,任何一棵树的树支数 n_t 和连支数 l 为

$$\begin{cases} n_t=n-1 \\ l=b-n_t=b-(n-1) \end{cases} \tag{1-1}$$

在图 1-5c 中,共有 4 个节点、6 条支路,根据式(1-1),则树支数为 3 (即支路 2、4、5 为树支),连支数为 3(即支路 1、3、6 为连支)。

树的任意两节点间必有且仅有一条通路。若在任意两节点间加上连支,必存在一个唯一的包含该连支的回路,称为单连支回路,通常又称为基本回路。如图 1-6 所示的树,就存在一个连支 ab 和 a 、 b 间的树路径构成的基本回路。

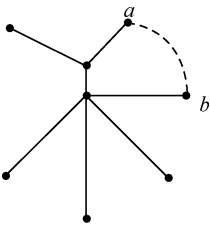


图 1-6 基本回路

1.1.3 割集和基本割集

割集是连通图 G 的一些支路的集合,如果一个支路集合满足如下两个条件:

① 把这些支路移去(移去的只是支路,该支路关联的两个节点不能移去),将使图 G 分离为两个部分(孤立节点也是一个图);

② 如果少移去其中任一条支路,图 G 仍将是连通的。

满足上述两个条件的部分支路集合就是图 G 的一个割集。割集是使图分成两个子图所需要的最少支路的集合,一个图可以有多个割集,连通图 G 的一个割集至少包含 G 的一条树支。在如图 1-7 所示的连通图中,根据割集的定义条件,可以判断 $C_1(7)$ 、 $C_2(1,3,4)$ 是割集,而 $C_3(2,5)$ 却不是割集。

只含有一条树支和若干连支可以构成一个割集,称这样的割集为单树支割集,也被称为基本割集。对于同一个连通图,选定的树不同,其对应的基本割集也不一样,如图 1-8 中的连通图,如果选取支路 3、5、6 为树支,则对应的基本割集为 $C_1(1,2,6)$ 、 $C_2(1,3,4)$ 、 $C_3(2,4,5)$ 。而如果选取支路 2、4、5 为树支,其对应的基本割集为 $C_1(3,5,6)$ 、 $C_2(1,3,4)$ 、 $C_3(1,2,6)$ 。

需要注意的是,同一个连通图的基本割集的个数是相等的,等于树支数;同时因为树是连通的,因此没有树支的连支支路是不可能构成割集的。

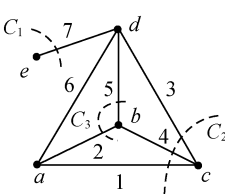


图 1-7 图和割集

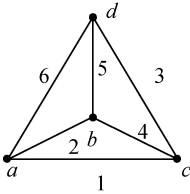


图 1-8 图和基本割集

1.2 图的矩阵表示及关系

1.2.1 矩阵表示

在电网理论中,图的节点、回路、割集与支路之间的关系,通常可以用不同的矩阵进行描述。

1. 关联矩阵

表明连通图的节点与支路之间的关系的矩阵称为节点—支路关联矩阵,简称关联矩阵,用符号 $\mathbf{A}_a$ 表示。假设有一个连通有向图具有支路数 b 、 n 个节点,在其关联矩阵 $\mathbf{A}_a$ 中,以行对应点、以列对应支路,则 $\mathbf{A}_a$ 是 $n \times b$ 阶矩阵,其中的元素 a_{ij} 定义为

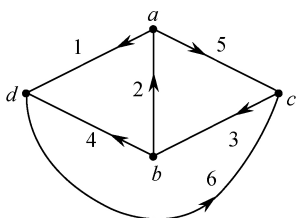
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

式中, $i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, b$ 。元素 a_{ij} 的取值满足如下原则:①当支路 j 和节点 i 关联,同时支路 j 的方向离开节点 i ,此时元素 a_{ij} 的取值为 1;②当支路 j 和节点 i 关联,同时支路 j 的方向指向节点 i ,此时元素 a_{ij} 的取值为 -1;③当支路 j 和节点 i 无关联,此时元素 a_{ij} 的取值为 0。

任何一个有向图与其关联矩阵是一一对应的,当有向图确定时,且其关联矩阵是唯一的;反之,当关联矩阵确定时,有向图是唯一的。

【例 1-1】 对于图 1-9 所示的有向图,试写出其关联矩阵 $\mathbf{A}_a$ 。

【解】 根据式(1-2)可写出其关联矩阵 $\mathbf{A}_a$ 为



$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然, $\mathbf{A}_a$ 的每一列只有一个 +1 和 -1, 其余均为 0, 这是因为一条支路只能关联两个节点, 从其中一个节点离开必定指向另一个节点。因此又可得 $\mathbf{A}_a$ 的每一列元素之和必为零, 这就意味着 $\mathbf{A}_a$ 的所有行的元素之和为零, 即 $\mathbf{A}_a$ 的行不是彼此独立的, 且其秩不超过 $n-1$ 。

事实上, 可以划去 $\mathbf{A}_a$ 的任意一行, 此时所得的 $(n-1) \times b$ 阶矩阵的行将是彼此独立的, 称这样的矩阵为降阶关联矩阵。因为降阶关联矩阵实质上包含了 $\mathbf{A}_a$ 的全部内容, 同样能描述图的拓扑关系, 被划去的一行所对应的节点称为参考节点。在电网络分析中常用的是降阶关联矩阵, 因此为了不至于混淆, 仍简称其为关联矩阵, 为了与 $\mathbf{A}_a$ 区别, 用符号 $\mathbf{A}$ 表示, $\mathbf{A}_a$ 和 $\mathbf{A}$ 具有相同的秩。

对于图 1-9, 假设取节点 d 为参考节点, 则其关联矩阵 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. 回路矩阵

表明连通图的回路与支路之间的关系的矩阵称为回路矩阵, 用符号 $\mathbf{B}_a$ 表示。假设有一个连通有向图具有支路数 b 、 n 个节点、回路总数 s , 在其回路矩阵 $\mathbf{B}_a$ 中, 以行对应回路、以列对应支路, 则 $\mathbf{B}_a$ 是 $s \times b$ 阶矩阵, 其中的元素 b_{ij} 定义为

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

式中, $i=1, 2, \dots, s; j=1, 2, \dots, b$ 。元素 b_{ij} 的取值满足如下原则: ①当支路 j 在回路 i 中, 同时支路 j 的方向与回路 i 的方向一致, 此时元素 b_{ij} 的取值为 1; ②当支路 j 在回路 i 中, 同时支路 j 的方向与回路 i 的方向相反, 此时元素 b_{ij} 的取值为 -1; ③当支路 j 不在回路 i 中, 此时元素 b_{ij} 的取值为 0。

【例 1-2】 对于图 1-10 所示的有向图, 试写出其回路矩阵 $\mathbf{B}_a$ 。

【解】 选取回路(回路方向为回路所含支路的出现顺序)为: 164, 2546, 354, 1234, 125, 236, 1635, 根据式(1-3), 则其回路矩阵 $\mathbf{B}_a$ 为

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

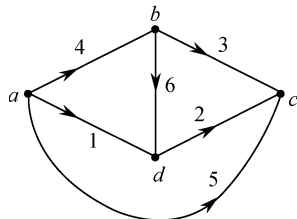


图 1-10 例 1-2 的图

由行的初等变换可知, 上述回路矩阵 $\mathbf{B}_a$ 的行间并不是线性独立的, 即部分回路不是独立的, 对于具有支路数 b 、 n 个节点的连通图, 回路矩阵的秩为 $b-(n-1)$, 其值刚好即为连支数 l 。因此没有必要把回路矩阵 $\mathbf{B}_a$ 的全部行都写出来, 只要选取 l 个独立回路并写出相应的 $l \times b$ 阶矩阵, 就可以表示出 $\mathbf{B}_a$ 的全部内容。通常情况下, 选取 l 个基本回路, 对应的矩阵称为基本回路矩阵, 为了不至于混淆, 仍简称其为回路矩阵, 为了与 $\mathbf{B}_a$ 区别, 用符号 $\mathbf{B}$ 表示, $\mathbf{B}_a$ 和 $\mathbf{B}$ 具有相同的秩。

在图 1-10 所示的有向图中, 若选取支路数 4、5、6 为树支, 经计算 l 的值为 3, 因此只需选取 3 个基本回路, 则对应的基本回路矩阵 $\mathbf{B}$ 为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 割集矩阵

表明连通图的割集与支路之间的关系的矩阵称为割集矩阵, 用符号 $\mathbf{Q}_a$ 表示。假设有一个连通有向图具有支路数 b 、 n 个节点、割集总数 q , 在其割集矩阵 $\mathbf{Q}_a$ 中, 以行对应割集、以列对应支路、则 $\mathbf{Q}_a$ 是 $q \times b$ 阶矩阵, 其中的元素 q_{ij} 定义为

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \quad (1-4)$$

式中, $i=1, 2, \dots, q; j=1, 2, \dots, b$ 。元素 q_{ij} 的取值满足如下原则: ①当支路 j 在割集 i 中, 同时支路 j 的方向与割集 i 的方向一致, 此时元素 q_{ij} 的取值为 1; ②当支路 j 在割集 i 中, 同时支路 j 的方向与割集 i 的方向相反, 此时元素 q_{ij} 的取值为 -1; ③当支路 j 不在割集 i 中, 此时元素 q_{ij} 的取值为 0。一个割集把节点分为两个互不相交的集合 (W, W') , 割集方向为以 (W, W') 或 (W', W) 来确定, 直观上可以用一个箭头来表示, 在实际中一般取树支方向为割集方向。

通常情况下, 选取基本割集, 对应的矩阵称为基本割集矩阵, 为了不至于混淆, 仍简称其为割集矩阵, 为了与 $\mathbf{Q}_a$ 区别, 用符号 $\mathbf{Q}$ 表示。

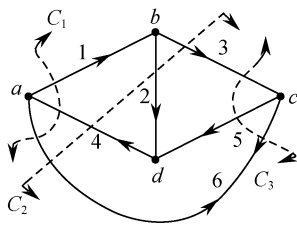


图 1-11 例 1-3 的图

【例 1-3】对于图 1-11 所示的有向图,试写出其割集矩阵 Q 。

【解】选取基本割集为: 146, 3246, 356, 割集方向如图 1-11 所示,根据式(1-4),则其割集矩阵 Q 为

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.2 矩阵 A 、 B 、 Q 之间的关系

在书写上述的矩阵 A 、 B 、 Q 时,若树支号和连支号分开编号,采用先连支号后树支号的原则,用 A_t 、 B_t 、 Q_t 表示树支列,用 A_l 、 B_l 、 Q_l 表示连支列,而且 B_l 恰好为单位矩阵 1_l 和 Q_l 恰好为单位矩阵 1_t ,则可得如下表达式

$$A = [A_l, A_t] \quad (1-5)$$

$$B = [B_l, B_t] = [1_l, B_t] \quad (1-6)$$

$$Q = [Q_l, Q_t] = [Q_l, 1_t] \quad (1-7)$$

矩阵 B 表示了一个连通图 G 中基本回路与各支路之间的关系,而一个确定的连通图 G ,即确定了矩阵 A 的唯一性,因此 A 和 B 之间必定存在一定的联系。

根据定理(证明可参看文献[3]):如果同一连通图的 A 和 B 的列具有相同的支路排列次序,则

$$AB^T = 0 \text{ 或 } BA^T = 0 \quad (1-8)$$

将式(1-5)和式(1-6)代入式(1-8)整理得

$$A = [A_l, A_t] \cdot [1_l, B_t]^T = A_l + A_t B_t^T = 0$$

进一步得

$$B_t^T = -A_t^{-1} A_l \quad (1-9)$$

即

$$B_t = -(A_t^{-1} A_l)^T = -A_l^T (A_t^{-1})^T \quad (1-10)$$

根据式(1-10) 即可推出回路矩阵 B 。

再如,推论(证明可参看文献[3]):如果同一连通图的 Q 和 B 的列具有相同的支路排列次序,则

$$B_t = -Q_l^T \text{ 或 } Q_l = -B_t^T \quad (1-11)$$

将式(1-9)代入式(1-11)可得

$$Q_l = -B_t^T = A_t^{-1} A_l \quad (1-12)$$

根据式(1-12)即可推出割集矩阵 Q 。

1.2.3 电路方程的矩阵表示

如图 1-12 所示为用一个连通有向图表示的一个电路,在有向图中支路的方向即代表该支路电流和电压的参考方向。

对于图 1-12,选节点 d 为参考节点,共有 7 个支路电流,3 个独立节点,根据电路的基尔霍夫电流定律可得

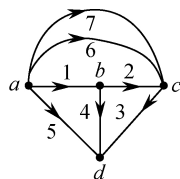


图 1-12 电路有向图

$$\begin{cases} i_1 + i_5 + i_6 + i_7 = 0 \\ -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -i_2 + i_3 - i_6 - i_7 = 0 \end{cases} \quad (1-13)$$

在图论中,能够表示节点与支路关系的是关联矩阵 $\mathbf{A}$,选节点 d 为参考节点,因此可得图 1-12 的关联矩阵 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

如果用 7 阶列向量 $\mathbf{i}$ 表示 7 个支路电流,即

$$\mathbf{i} = [i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_4 \quad i_5 \quad i_6 \quad i_7]^T$$

对于式(1-13)容易发现,下述关系成立

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = 0 \quad (1-14)$$

因此在电网络理论中,设一个电路用具有支路数 b 、 n 个节点的一个连通有向图进行表示,用 b 阶列向量 $\mathbf{i}$ 表示 b 个支路电流,则对于 n 个节点的 KCL 可以得到其矩阵表示形式为

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = 0 \quad (1-15)$$

由于关联矩阵 $\mathbf{A}$ 和割集矩阵 $\mathbf{Q}$ 可以通过非奇异变换联系起来,即

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}\mathbf{A}$$

其中, $\mathbf{D}$ 为元素 1, -1, 0 的非奇异矩阵。所以 KCL 可以得到其矩阵表示的另一种形式

$$\mathbf{Q}\mathbf{i} = 0 \quad (1-16)$$

在图论中,能够表示回路与支路关系的是回路矩阵 $\mathbf{B}$,采用同样的方法先写出电路状态下的 KVL 方程组和有向图的回路矩阵 $\mathbf{B}$,用 b 阶列向量 $\mathbf{u}$ 表示 b 个支路电压,可以得到 KVL 其矩阵表示的一种形式

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = 0 \quad (1-17)$$

对于图 1-12,用列向量 $\mathbf{u}_n$ 表示 3 个节点电压,因为任意一支路电压可表示为两节点电压之差,因此有

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n1} - u_{n2} \\ u_{n2} - u_{n3} \\ u_{n3} \\ u_{n2} \\ u_{n1} \\ u_{n1} - u_{n3} \\ u_{n1} - u_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}_n = 0$$

进一步 KVL 可以得到其矩阵表示的另一种形式

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}_n \quad (1-18)$$

将式(1-6)和式(1-7)分别代入式(1-16)和式(1-17)有

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = [\mathbf{1}_l \quad \mathbf{B}_t] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix} = \mathbf{u}_l + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t = 0$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{i} = [\mathbf{Q}_l \quad \mathbf{1}_t] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_l \\ \mathbf{i}_t \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_l \mathbf{i}_l + \mathbf{i}_t = 0$$

所以

$$\mathbf{u}_l = -\mathbf{B}_l \mathbf{u}_t \tag{1-19}$$

$$\mathbf{i}_t = -\mathbf{Q}_l^T \mathbf{i}_l \tag{1-20}$$

式(1-19)和式(1-20)分别称为 KVL 和 KCL 的另一种表示形式。
又根据式(1-11)和式(1-12),代入式(1-19)和式(1-20)可得

$$\mathbf{u}_l = -\mathbf{B}_l \mathbf{u}_t = \mathbf{Q}_l^T \mathbf{u}_t \quad \text{或} \quad \mathbf{u} = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}_t$$
$$\mathbf{i}_t = -\mathbf{Q}_l^T \mathbf{i}_l = \mathbf{B}_l^T \mathbf{i}_l \quad \text{或} \quad \mathbf{i} = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_l$$

上述结果也是 KVL 和 KCL 的另一种表示形式。
综上所述,对于矩阵形式的 KCL 和 KVL 的表示形式,总结如表 1-1 所示。表 1-1 所示 KCL 和 KVL 的矩阵形式对于任何网络元件均适合,与网络内容无关。对于大型网络的计算,可以借助计算机进行辅助分析。

表 1-1 KCL、KVL 的矩阵形式

	KCL	KVL
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}\mathbf{i}=0$	$\mathbf{u}=\mathbf{A}^T\mathbf{u}_n$
$\mathbf{B}$	$\mathbf{i}=\mathbf{B}^T\mathbf{i}_l$ 或 $\mathbf{i}_t=\mathbf{B}_l^T\mathbf{i}_l$	$\mathbf{B}\mathbf{u}=0$ 或 $\mathbf{u}_l=-\mathbf{B}_l\mathbf{u}_t$
$\mathbf{Q}$	$\mathbf{Q}\mathbf{i}=0$ 或 $\mathbf{i}_t=-\mathbf{Q}_l\mathbf{i}_l$	$\mathbf{u}=\mathbf{Q}^T\mathbf{u}_t$ 或 $\mathbf{u}_l=\mathbf{Q}_l^T\mathbf{u}_t$

1.3 网络的矩阵分析

1.3.1 支路的伏安特性

在电网中,通常无源的二端元件 R 、 L 、 C 可看作一条支路。如果一个二端元件有与其相接的独立电源或受控源,则支路通常是对二端元件的等效复合支路。在电网中建立网络矩阵方程,应首先获得每个支路的伏安关系或约束关系。下面以正弦稳态电路进行分析,获得各种支路的伏安关系,该关系对直流电路同样适用,因为直流稳态是其特例。

1. 含独立电源的二端元件支路

含独立电源的二端元件的标准支路组合如图 1-13 所示。其中, $Z_k(Y_k)$ 为第 k 条支路的元件阻抗或导纳, $\dot{U}_{ek}$ 为第 k 条支路二端元件 Z_k 的电压; $\dot{I}_{ek}$ 为流过第 k 条支路二端元件 Z_k 的电流; $\dot{U}_{sk}$ 为第 k 条支路中电压源电压; $\dot{I}_{sk}$ 为第 k 条支路中电流源电流; $\dot{U}_k$ 为第 k 条支路电压; $\dot{I}_k$ 为第 k 条支路电流。

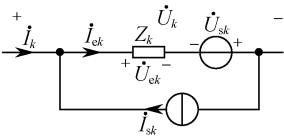


图 1-13 含独立电源的标准复合支路

假设共有 b 条支路,则 k 的范围是 $1\sim b$,则图 1-13 中的各个物理量矩阵如下。

b 条支路的元件阻抗和导纳分别用 $b\times b$ 阶对角矩阵 $\mathbf{Z}_b$ 和 $\mathbf{Y}_b$ 表示,并称为支路阻抗矩阵和支路导纳矩阵

$$\mathbf{Z}_b = \text{diag}[Z_1 \quad Z_2 \quad \cdots \quad Z_k \quad \cdots \quad Z_b]$$

$$\mathbf{Y}_b = \text{diag}[Y_1 \quad Y_2 \quad \cdots \quad Y_k \quad \cdots \quad Y_b]$$

且

$$\mathbf{Z}_b = \mathbf{Y}_b^{-1}$$

所有二端元件 Z_k 的电压矩阵: $\dot{\mathbf{U}}_e = [\dot{U}_{e1} \quad \dot{U}_{e2} \quad \dots \quad \dot{U}_{ek} \quad \dots \quad \dot{U}_{eb}]^T$

所有二端元件 Z_k 的电流矩阵: $\dot{\mathbf{I}}_e = [\dot{I}_{e1} \quad \dot{I}_{e2} \quad \dots \quad \dot{I}_{ek} \quad \dots \quad \dot{I}_{eb}]^T$

所有二端元件 Z_k 的支路中电压源矩阵: $\dot{\mathbf{U}}_s = [\dot{U}_{s1} \quad \dot{U}_{s2} \quad \dots \quad \dot{U}_{sk} \quad \dots \quad \dot{U}_{sb}]^T$

所有二端元件 Z_k 的支路中电流源矩阵: $\dot{\mathbf{I}}_s = [\dot{I}_{s1} \quad \dot{I}_{s2} \quad \dots \quad \dot{I}_{sk} \quad \dots \quad \dot{I}_{sb}]^T$

b 条支路电压矩阵: $\dot{\mathbf{U}} = [\dot{U}_1 \quad \dot{U}_2 \quad \dots \quad \dot{U}_k \quad \dots \quad \dot{U}_b]^T$

b 条支路电流矩阵: $\dot{\mathbf{I}} = [\dot{I}_1 \quad \dot{I}_2 \quad \dots \quad \dot{I}_k \quad \dots \quad \dot{I}_b]^T$

在电压源矩阵 $\dot{\mathbf{U}}_s$ 和电流源矩阵 $\dot{\mathbf{I}}_s$ 中各元素的正负号原则: 当电压源(电压降的方向)、电流源的方向与所在支路方向相反时, 取“+”, 一致时, 取“-”。

注意: 本书仅对网络中标准支路间的电感之间无耦合时, 支路阻抗矩阵和支路导纳矩阵 $\mathbf{Z}_b$ 和 $\mathbf{Y}_b$ 均是对角矩阵。如果电感之间有耦合, 则 $\mathbf{Z}_b$ 和 $\mathbf{Y}_b$ 将不再是对角矩阵, 需要对 $\mathbf{Z}_b$ 和 $\mathbf{Y}_b$ 进行修正, 可以参考有关书籍, 在此不予讨论。

由元件的欧姆定律可得

$$\dot{I}_{ek} = Y_k \dot{U}_{ek} \quad (1-21)$$

$$\dot{U}_{ek} = Z_k \dot{I}_{ek} \quad (1-22)$$

则矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{I}}_e = \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_e \quad (1-23)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_e = \mathbf{Z}_b \dot{\mathbf{I}}_e \quad (1-24)$$

根据电路的 KCL 和 KVL 理论, 由图 1-13 可得

$$\dot{I}_k = \dot{I}_{ek} - \dot{I}_{sk} \quad (1-25)$$

$$\dot{U}_k = \dot{U}_{ek} - \dot{U}_{sk} \quad (1-26)$$

矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{I}}_e - \dot{\mathbf{I}}_s \quad (1-27)$$

$$\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}_e - \dot{\mathbf{U}}_s \quad (1-28)$$

将式(1-23)和式(1-24)分别代入式(1-27)和式(1-28), 则得

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_e - \dot{\mathbf{I}}_s = \mathbf{Y}_b (\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_s) - \dot{\mathbf{I}}_s = \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{I}}_s + \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_s \quad (1-29)$$

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Z}_b \dot{\mathbf{I}}_e - \dot{\mathbf{U}}_s = \mathbf{Z}_b (\dot{\mathbf{I}} + \dot{\mathbf{I}}_s) - \dot{\mathbf{U}}_s = \mathbf{Z}_b \dot{\mathbf{I}} - \dot{\mathbf{U}}_s + \mathbf{Z}_b \dot{\mathbf{I}}_s \quad (1-30)$$

2. 含受控电源的二端元件支路

含受控电源的二端元件的标准支路组合如图 1-14 所示。

图 1-14 中增加的各个受控物理量矩阵如下。

所有二端元件 Z_k 的受控电压源矩阵: $\dot{\mathbf{U}}_d = [\dot{U}_{d1} \quad \dot{U}_{d2} \quad \dots \quad \dot{U}_{dk} \quad \dots \quad \dot{U}_{db}]^T$

所有二端元件 Z_k 的受控电流源矩阵: $\dot{\mathbf{I}}_d = [\dot{I}_{d1} \quad \dot{I}_{d2} \quad \dots \quad \dot{I}_{dk} \quad \dots \quad \dot{I}_{db}]^T$

根据电路的 KCL 和 KVL 理论, 由图 1-14 可得

$$\dot{I}_k + \dot{I}_{sk} = \dot{I}_{ek} + \dot{I}_{dk} \quad (1-31)$$

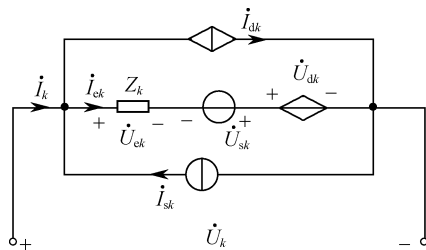


图 1-14 含受控电源的标准复合支路

$$\dot{U}_k = \dot{U}_{ck} + \dot{U}_{dk} - \dot{U}_{sk} \quad (1-32)$$

矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{I}}_e + \dot{\mathbf{I}}_d - \dot{\mathbf{I}}_s \quad (1-33)$$

$$\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}_e + \dot{\mathbf{U}}_d - \dot{\mathbf{U}}_s \quad (1-34)$$

由于受控电压源的电压可能是控制支路的电压,也可能是控制支路的电流,因此,可以假设受控电压源的电压是控制支路元件的电压 $\dot{U}_e$ 和电流 $\dot{I}_e$ 的线性组合,因此

$$\dot{U}_d = \boldsymbol{\mu} \dot{U}_e + \mathbf{R} \dot{I}_e \quad (1-35)$$

式中, $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\mathbf{R}$ 均是 b 阶系数方阵,分别由元件电压控制电压源的系数和元件电流控制电压源的系数组成。

将式(1-35)、式(1-23)代入式(1-34)可得

$$\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_s = \dot{\mathbf{U}}_e + \dot{\mathbf{U}}_d = \dot{\mathbf{U}}_e + \boldsymbol{\mu} \dot{U}_e + \mathbf{R} \dot{I}_e = (1 + \boldsymbol{\mu} + \mathbf{R} \mathbf{Y}_b) \dot{\mathbf{U}}_e \quad (1-36)$$

或者

$$\dot{U}_e = (1 + \boldsymbol{\mu} + \mathbf{R} \mathbf{Y}_b)^{-1} (\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_s) \quad (1-37)$$

同样,受控电流源的电流可能是控制支路的电压,也可能是控制支路的电流,因此,可以假设受控电流源的电流是控制支路元件的电压 $\dot{U}_e$ 和电流 $\dot{I}_e$ 的线性组合,因此

$$\dot{I}_d = \mathbf{G} \dot{U}_e + \mathbf{H} \dot{I}_e \quad (1-38)$$

式中, $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{H}$ 均是 b 阶系数方阵,分别由元件电压控制电流源的系数和元件电流控制电流源的系数组成。

将式(1-38)、式(1-24)代入式(1-33)可得

$$\dot{\mathbf{I}} + \dot{\mathbf{I}}_s = \dot{\mathbf{I}}_e + \dot{\mathbf{I}}_d = \dot{\mathbf{I}}_e + \mathbf{G} \dot{U}_e + \mathbf{H} \dot{I}_e = (1 + \mathbf{H} + \mathbf{G} \mathbf{Y}_b) \dot{\mathbf{I}}_e \quad (1-39)$$

将式(1-23)代入式(1-39)可得

$$\dot{\mathbf{I}} + \dot{\mathbf{I}}_s = (1 + \mathbf{H} + \mathbf{G} \mathbf{Y}_b) \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_e \quad (1-40)$$

将式(1-37)代入式(1-40)可得伏安关系

$$\dot{\mathbf{I}} + \dot{\mathbf{I}}_s = (1 + \mathbf{H} + \mathbf{G} \mathbf{Y}_b) \mathbf{Y}_b (1 + \boldsymbol{\mu} + \mathbf{R} \mathbf{Y}_b)^{-1} (\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_s) \quad (1-41)$$

需要注意的是, b 阶系数方阵 $\boldsymbol{\mu}$ 、 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{H}$ 均是根据网络受控源的情况直接生成的。生成原则:它们的主对角元素均为零,只在受控支路 k 所对应的 k 行和控制支路 j 所对应的列 j 的位置有元素;元素的值是受控源的受控系数大小,当受控源的方向和所在复合支路方向一致时取正,反之取负;当网络中系数方阵 $\boldsymbol{\mu}$ 、 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{H}$ 没有对应的控制关系时,相应的 $\boldsymbol{\mu}$ 、 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{H}$

矩阵为 0。比如,网络中没有元件电压控制电流源的关系,即没有受控电流源的电流是由控制支路元件的电压 $\dot{U}_c$ 控制的,则 $\mathbf{G}=0$,其他情况以此类推。

当电网络中电压源、电流源或无源元件两端的电压或电流的电压极性或电流方向与图 1-13和图 1-14 标准支路中所示的极性或方向相反时,式(1-29)、式(1-30)和式(1-41)的形式不变,只是相应的各项前的正负号发生改变。

1.3.2 节点电压法

由 1.2 节获得的对于 n 个节点的 KCL 的矩阵表示形式即式(1-15),其相量形式为

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{I}} = 0 \quad (1-42)$$

1. 对于不含受控源的电网络

将式(1-29)的关于支路电流 $\dot{\mathbf{I}}$ 的表达式代入式(1-42)得

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{A} \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}} - \mathbf{A} \dot{\mathbf{I}}_s + \mathbf{A} \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_s = 0$$

整理得

$$\mathbf{A} \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{A} \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_s \quad (1-43)$$

将 KVL 矩阵的另一种形式表示即 $\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}_n$ 的相量形式代入式(1-43)得

$$\mathbf{A} \mathbf{Y}_b \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{A} \dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{A} \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_s \quad (1-44)$$

式(1-44)是电网络的节点电压矩阵 $\dot{\mathbf{U}}_n$ 与关联矩阵 $\mathbf{A}$ 、支路导纳矩阵 $\mathbf{Y}_b$ 和独立电源矩阵 $\dot{\mathbf{U}}_s$ 、 $\dot{\mathbf{I}}_s$ 的关系式,其中只有节点电压 $\dot{\mathbf{U}}_n$ 为未知数,因此将式(1-44)称为节点电压方程的矩阵形式。

令

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{A} \mathbf{Y}_b \mathbf{A}^T \text{ 和 } \dot{\mathbf{J}}_n = \mathbf{A} \dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{A} \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_s$$

则式(1-44)可简化为

$$\mathbf{Y}_n \dot{\mathbf{U}}_n = \dot{\mathbf{J}}_n \quad (1-45)$$

将 $\mathbf{Y}_n = \mathbf{A} \mathbf{Y}_b \mathbf{A}^T$ 称为节点导纳矩阵,同时将 $\dot{\mathbf{J}}_n = \mathbf{A} \dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{A} \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_s$ 称为注入节点的电流源向量,其含义是由支路独立电压源注入节点的等效电流 $-\mathbf{A} \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_s$ 和支路独立电流源引起的注入节点的电流 $\mathbf{A} \dot{\mathbf{I}}_s$ 的总和电流向量。

2. 对于含受控源的电网络

将式(1-41)的关于支路电流 $\dot{\mathbf{I}}$ 的表达式代入式(1-42)得

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{A} (1 + \mathbf{H} + \mathbf{GZ}_b) \mathbf{Y}_b (1 + \boldsymbol{\mu} + \mathbf{R} \mathbf{Y}_b)^{-1} (\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_s) - \mathbf{A} \dot{\mathbf{I}}_s = 0 \quad (1-46)$$

将 KVL 矩阵的另一种形式表示即 $\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}_n$ 的相量形式代入式(1-46)得

$$\mathbf{A} (1 + \mathbf{H} + \mathbf{GZ}_b) \mathbf{Y}_b (1 + \boldsymbol{\mu} + \mathbf{R} \mathbf{Y}_b)^{-1} \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{A} \dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{A} (1 + \mathbf{H} + \mathbf{GZ}_b) \mathbf{Y}_b (1 + \boldsymbol{\mu} + \mathbf{R} \mathbf{Y}_b)^{-1} \dot{\mathbf{U}}_s$$

令

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{A} (1 + \mathbf{H} + \mathbf{GZ}_b) \mathbf{Y}_b (1 + \boldsymbol{\mu} + \mathbf{R} \mathbf{Y}_b)^{-1} \mathbf{A}^T$$

$$\dot{\mathbf{J}}_n = \mathbf{A} \dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{A} (1 + \mathbf{H} + \mathbf{GZ}_b) \mathbf{Y}_b (1 + \boldsymbol{\mu} + \mathbf{R} \mathbf{Y}_b)^{-1} \dot{\mathbf{U}}_s$$

则式(1-46)可简化为

$$\mathbf{Y}_n \dot{\mathbf{U}}_n = \dot{\mathbf{J}}_n \quad (1-47)$$

显然,式(1-45)和式(1-47)具有完全相同的节点电压方程的矩阵形式和含义。但是,称为节点导纳矩阵 $\mathbf{Y}_n$ 和注入节点的电流源向量 $\mathbf{J}_n$ 的计算内容不同。

【例 1-4】如图 1-15a 所示的电路中,各支路中元件参数的值分别为 $R_1=R_3=R_5=0.5\Omega$, $R_2=R_4=R_6=0.2\Omega$, $I_{s1}=3A$, $I_{s3}=1A$, $U_{s3}=2V$, $U_{s5}=6V$,试写出节点电压方程的矩阵形式。

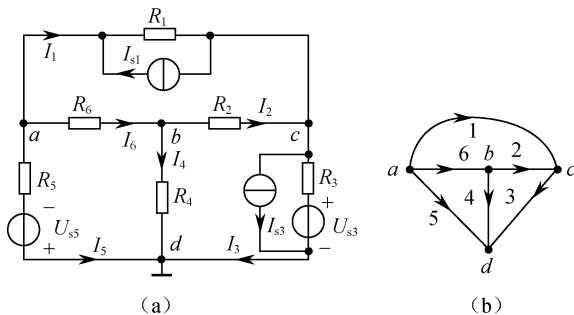


图 1-15 例 1-4 的电路及其图

【解】画出图 1-15a 所示电路网络的有向图为图 1-15b,选节点 d 为参考节点,对 6 条支路进行编号,如图 1-15b 所示。根据关联矩阵的定义可得 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6 条支路对应的导纳矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_b &= \text{diag} \left[\frac{1}{R_1} \quad \frac{1}{R_2} \quad \frac{1}{R_3} \quad \frac{1}{R_4} \quad \frac{1}{R_5} \quad \frac{1}{R_6} \right] \\ &= \text{diag} \left[\frac{1}{0.5} \quad \frac{1}{0.2} \quad \frac{1}{0.5} \quad \frac{1}{0.2} \quad \frac{1}{0.5} \quad \frac{1}{0.2} \right] \end{aligned}$$

支路中电压源矩阵: $\mathbf{U}_s = [0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 6 \quad 0]^T$

支路中电流源矩阵: $\mathbf{I}_s = [3 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

根据式(1-45)、 $\mathbf{Y}_n = \mathbf{A}\mathbf{Y}_b\mathbf{A}^T$ 和 $\mathbf{J}_n = \mathbf{A}\mathbf{I}_s - \mathbf{A}\mathbf{Y}_b\mathbf{U}_s$ 得

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_n &= \begin{bmatrix} 9 & -5 & -2 \\ -5 & 10 & -5 \\ -2 & -5 & 7 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_n &= \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则节点电压方程 $\mathbf{Y}_n\mathbf{U}_n = \mathbf{J}_n$ 具体为

$$\begin{bmatrix} 9 & -5 & -2 \\ -5 & 10 & -5 \\ -2 & -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

【例 1-5】如图 1-16a 所示电路,各支路中元件参数的值均已知,试写出节点电压方程的矩阵形式。

【解】图 1-16a 和图 1-15a 的区别是图 1-16a 中各个元件参数的值均是正弦量,因此应该

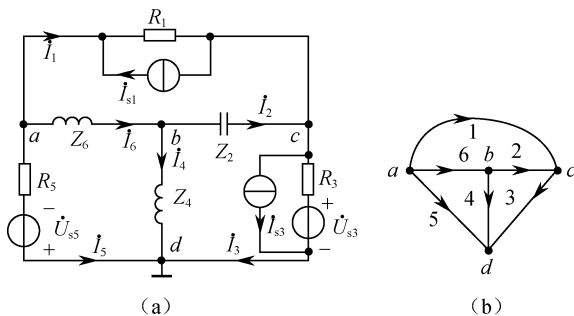


图 1-16 例 1-5 电路及其图

用相量矩阵运算。图 1-16a 的有向图和图 1-15b 的有向图一样,依然选节点 d 为参考节点,对 6 条支路进行编号,如图 1-16b 所示。因为有向图不变,因此关联矩阵不变,则 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6 条支路对应的导纳矩阵为

$$\mathbf{Y}_b = \text{diag} \left[\frac{1}{R_1} \quad \frac{1}{Z_2} \quad \frac{1}{R_3} \quad \frac{1}{Z_4} \quad \frac{1}{R_5} \quad \frac{1}{Z_6} \right]$$

支路中电压源矩阵: $\dot{\mathbf{U}}_s = [0 \quad 0 \quad \dot{U}_{s3} \quad 0 \quad -\dot{U}_{s5} \quad 0]^T$

支路中电流源矩阵: $\dot{\mathbf{I}}_s = [-i_{s1} \quad 0 \quad i_{s3} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

根据式(1-45)、 $\mathbf{Y}_n = \mathbf{A} \mathbf{Y}_b \mathbf{A}^T$ 和 $\mathbf{J}_n = \mathbf{A} \dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{A} \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_s$ 得

$$\mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{Z_6} & -\frac{1}{Z_6} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{Z_6} & \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_6} + \frac{1}{Z_4} & -\frac{1}{Z_2} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{Z_2} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} i_{s1} - \frac{\dot{U}_{s5}}{R_5} \\ 0 \\ \frac{\dot{U}_{s3}}{R_3} - i_{s1} - i_{s3} \end{bmatrix}$$

则节点电压方程 $\mathbf{Y}_n \dot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{J}_n$ 具体为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{Z_6} & -\frac{1}{Z_6} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{Z_6} & \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_6} + \frac{1}{Z_4} & -\frac{1}{Z_2} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{Z_2} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_a \\ \dot{U}_b \\ \dot{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1} - \frac{\dot{U}_{s5}}{R_5} \\ 0 \\ \frac{\dot{U}_{s3}}{R_3} - i_{s1} - i_{s3} \end{bmatrix}$$

【例 1-6】 如图 1-17a 所示电路,各支路中元件参数的值分别为 $R_1 = R_3 = R_5 = 0.5\Omega$, $R_2 =$

$R_4=R_6=0.2\Omega, I_{s1}=3A, U_{s3}=2V$,受控源的受控关系如图中标注,试写出节点电压方程的矩阵形式。

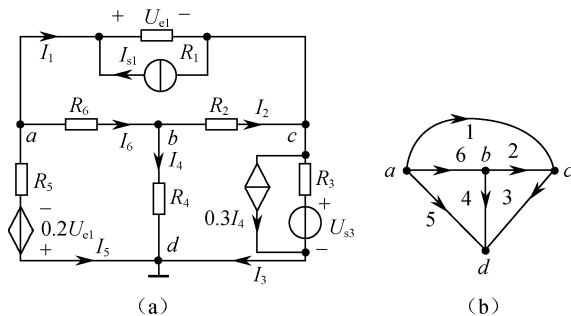


图 1-17 例 1-6 电路及其图

【解】画出图 1-17a 所示电路网络的有向图为图 1-17b,选节点 d 为参考节点,对 6 条支路进行编号,如图 1-17b 所示。根据关联矩阵的定义可得 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6 条支路对应的导纳和阻抗矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_b &= \text{diag} \left[\frac{1}{R_1} \quad \frac{1}{R_2} \quad \frac{1}{R_3} \quad \frac{1}{R_4} \quad \frac{1}{R_5} \quad \frac{1}{R_6} \right] \\ &= \text{diag} \left[\frac{1}{0.5} \quad \frac{1}{0.2} \quad \frac{1}{0.5} \quad \frac{1}{0.2} \quad \frac{1}{0.5} \quad \frac{1}{0.2} \right] \\ \mathbf{Z}_b &= \mathbf{Y}_b^{-1} = \text{diag} [0.5 \quad 0.2 \quad 0.5 \quad 0.2 \quad 0.5 \quad 0.2] \end{aligned}$$

支路中电压源矩阵: $\mathbf{U}_s = [0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

支路中电流源矩阵: $\mathbf{I}_s = [3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

由于本题是含受控源的电路,因此还需要写出网络中系数方阵 $\boldsymbol{\mu}$ 、 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{H}$ 。

经过观察,发现没有受控电压源的电压是由控制支路元件的电流 $\dot{I}_c$ 控制的,因此 $\mathbf{R}=\mathbf{0}$,则系数方阵 $\boldsymbol{\mu}$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

同时,没有受控电流源的电流是由控制支路元件的电压 $\dot{U}_c$ 控制的,因此 $\mathbf{G}=\mathbf{0}$ 。则系数方阵 $\mathbf{H}$ 的矩阵为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

根据

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_n &= \mathbf{A}(1 + \mathbf{H} + \mathbf{GZ}_b)\mathbf{Y}_b(1 + \boldsymbol{\mu} + \mathbf{RY}_b)^{-1}\mathbf{A}^T \\ \mathbf{J}_n &= \mathbf{AI}_s - \mathbf{A}(1 + \mathbf{H} + \mathbf{GZ}_b)\mathbf{Y}_b(1 + \boldsymbol{\mu} + \mathbf{RY}_b)^{-1}\mathbf{U}_s\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_n &= \begin{bmatrix} 9.4 & -5 & -2.4 \\ -5 & 15 & -5 \\ -2 & -3.5 & 9 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_n &= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

则节点电压方程 $\mathbf{Y}_n \mathbf{U}_n = \mathbf{J}_n$ 整理为

$$\begin{bmatrix} 9.4 & -5 & -2.4 \\ -5 & 15 & -5 \\ -2 & -3.5 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{U}_n = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

综上所述,要对一个电网络建立节点电压方程方法和对电路进行分析的基本步骤总结如下。

基本方法是:先根据给定的网络结构和元件参数写出矩阵 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{Y}_b$ 、 $\dot{\mathbf{I}}_s$ 、 $\dot{\mathbf{U}}_s$,然后利用式(1-45)求出节点电压 $\dot{\mathbf{U}}_n$,再由式(1-18)求出各支路电压 $\dot{\mathbf{U}}$,最后根据式(1-29)或式(1-41)求出各支路电流。下面将利用节点电压法分析电路的基本步骤总结如下:

- (1) 对节点和支路进行编号,并选定支路的参考方向,画出对应电网络的有向图;
- (2) 确定参考节点,写出相应的关联矩阵 $\mathbf{A}$;

(3) 写出支路导纳矩阵 $\mathbf{Y}_b$ 、支路中电压源矩阵 $\dot{\mathbf{I}}_s$ 和支路中电流源矩阵 $\dot{\mathbf{U}}_s$,如果是含受控源网络,还需写出支路阻抗矩阵 $\mathbf{Z}_b$ 和网络中系数方阵 $\boldsymbol{\mu}$ 、 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{H}$;

(4) 根据相应公式求出节点导纳矩阵 $\mathbf{Y}_n$ 和等效注入节点的电流源向量 $\dot{\mathbf{J}}_n$;

(5) 根据公式 $\mathbf{Y}_n \dot{\mathbf{U}}_n = \dot{\mathbf{J}}_n$ 写出节点电压方程,求解方程可得到节点电压 $\dot{\mathbf{U}}_n$ 的值。

在实际中,有时还需要求解支路电压 $\dot{\mathbf{U}}$,此时根据公式 $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{U}}_n$ 可求出各支路电压的值;如果要求解支路电流 $\dot{\mathbf{I}}$,则根据支路的伏安特性公式可求出各支路电流的值。两种情况的伏安特性公式如下:

$$\text{不含受控源电网络} \quad \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_e - \dot{\mathbf{I}}_s = \mathbf{Y}_b (\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_s) - \dot{\mathbf{I}}_s = \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{I}}_s + \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_s$$

$$\text{含受控源电网络} \quad \dot{\mathbf{I}} + \dot{\mathbf{I}}_s = (1 + \mathbf{H} + \mathbf{GZ}_b)\mathbf{Y}_b(1 + \boldsymbol{\mu} + \mathbf{RY}_b)^{-1}(\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_s)$$

1.3.3 移源法

电网络中对于组合支路而言,如果网络中包含纯电压源,即此支路中电压源串联的阻抗为零;如果网络中包含纯电流源支路,即此支路中只有电流源支路;利用前面的节点电压法建立方程时,会带来困难。因此,此种电网络在建立节点电压方程时,一般要进行网络等效变换,称为移源法。移源法的基本思路是设法把纯电压源支路中的电压源和纯电流源支路中的电流源转移到与其相邻的其他支路中,但不能改变网络中其他支路中的各节点彼此之间的电压和各节点的 KCL 方程。

1. 纯电压源支路

根据移源法原理,其转移的基本思路是:将仅含有纯电压源的支路中的电压源转移到与该支路有公共节点的其他支路上,该支路以短路线代替,电压源转移到其他支路上的极性是根据 KVL 定律来获得的。具体过程是要求与该支路有公共节点的其他支路上的节点、该支路的节点(非公共节点)彼此间的电压值在电压源转移前后保持不变。

【例 1-7】如图 1-18a 所示电路,各支路中元件参数的值均已知,试求解各节点电压值。

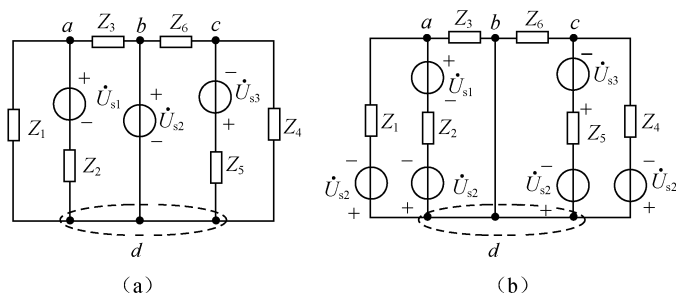
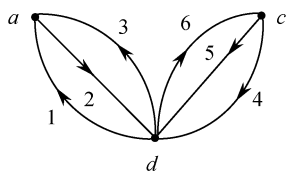


图 1-18 例 1-7 电压源转移电路的等效

【解】图 1-18a 所示电路是含有纯电压源支路的电路,需要用移源法进行网络等效。节点 d 是公共节点,因此根据移源法进行电压源转移时,将电压源 $\dot{U}_{s2}$ 转移到与节点 d 相连的另外 4 条支路中,为了保证节点 a, b, c 彼此之间的电压在转移前后不变,根据 KVL 定律,可以得到被转移的电压源 $\dot{U}_{s2}$ 在 4 条支路中的极性,如图 1-18b 所示。由于节点 a, b, c 彼此之间的电压在转移前后不变,因此转移前后各支路电流也不会发生变化,节点 a, b, c 的 KCL 也没有改变。不同的是,节点 b, d 成为等电位点,原电路网络的节点数少了一个,此时,可以将节点 b, d 合成为一个电位点,记为节点 d ,那么,支路数也减少了一个。



画出图 1-18b 的有向图,选节点 d 为参考节点,并对 6 条支路进行编号,如图 1-19 所示。

因此关联矩阵 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

图 1-19 图 1-18b 的有向图

6 条支路对应的导纳矩阵为

$$\mathbf{Y}_b = \text{diag} \left[\frac{1}{Z_1} \quad \frac{1}{Z_2} \quad \frac{1}{Z_3} \quad \frac{1}{Z_4} \quad \frac{1}{Z_5} \quad \frac{1}{Z_6} \right]$$

支路中电压源矩阵: $\dot{\mathbf{U}}_s = [-\dot{U}_{s2} \quad \dot{U}_{s2} - \dot{U}_{s1} \quad 0 \quad \dot{U}_{s2} \quad \dot{U}_{s3} + \dot{U}_{s2} \quad 0]^T$

支路中电流源矩阵: $\dot{\mathbf{I}}_s = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

根据式(1-45)、 $\mathbf{Y}_n = \mathbf{A} \mathbf{Y}_b \mathbf{A}^T$ 和 $\dot{\mathbf{J}}_n = \mathbf{A} \dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{A} \mathbf{Y}_b \dot{\mathbf{U}}_s$ 得

$$\mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5} + \frac{1}{Z_6} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j}_n = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{U}_{s2}}{Z_1} + \frac{\dot{U}_{s1} - \dot{U}_{s2}}{Z_2} \\ -\frac{\dot{U}_{s2}}{Z_4} + \frac{-\dot{U}_{s3} - \dot{U}_{s2}}{Z_5} \end{bmatrix}$$

则节点电压方程 $\mathbf{Y}_n \dot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{j}_n$ 具体为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5} + \frac{1}{Z_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_a \\ \dot{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{U}_{s2}}{Z_1} + \frac{\dot{U}_{s1} - \dot{U}_{s2}}{Z_2} \\ -\frac{\dot{U}_{s2}}{Z_4} + \frac{-\dot{U}_{s3} - \dot{U}_{s2}}{Z_5} \end{bmatrix}$$

可求解出 $\dot{U}_a$ 和 $\dot{U}_c$ 的值,再根据图 1-18a 中的回路关系,就可求出 $\dot{U}_b$ 的值。

2. 纯电流源支路

根据移源法原理,其转移的基本思路是:将仅含有纯电流源的支路中的电流源并联到与该支路构成回路的其他支路上,该支路以开路代替,并联的电流源的方向是根据 KCL 定律来获得的,具体过程是应保证其他支路上节点的 KCL 在转移中前后保持不变。

【例 1-8】如图 1-20a 所示电路,各支路中元件参数的值均已知,试求解各节点电压值。

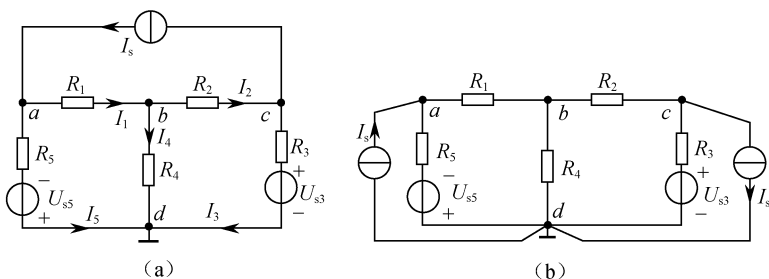


图 1-20 例 1-8 电流源转移电路的等效

【解】图 1-20a 所示电路是含有纯电流源支路的电路,需要用移源法进行网络等效。

支路 ac 开路,将电流源 I_s 分别并联在 ad 支路和 cd 支路,为了保证节点 a, b, c, d 上的 KCL 在转移中前后保持不变,根据 KCL 定理,电流源的方向如图 1-20b 所示。根据 KCL,电流源按照上述方法转移后,除电流源支路外,连接于节点 a, b, c, d 上的其他支路电流没有发生改变,所以,节点 a, b, c, d 之间的电压也不会发生改变,因此,移源后对网络的其他部分并没有影响。不同的是,网络的支路减少了一个,因为只有电流源支路的电流源被转移到与其他两条支路进行并联,节点数没有改变。

画出图 1-20b 的有向图,选节点 d 为参考节点,并对 5 条支路进行编号,如图 1-21 所示。

因此关联矩阵 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5 条支路对应的导纳矩阵为

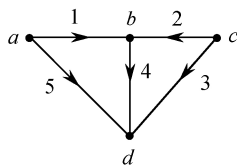


图 1-21 图 1-20b 的有向图

$$\mathbf{Y}_b = \text{diag} \left[\frac{1}{R_1} \quad \frac{1}{R_2} \quad \frac{1}{R_3} \quad \frac{1}{R_4} \quad \frac{1}{R_5} \right]$$

支路中电压源矩阵: $\mathbf{U}_s = [0 \quad 0 \quad -U_{s3} \quad 0 \quad U_{s5}]^T$

支路中电流源矩阵: $\mathbf{I}_s = [0 \quad 0 \quad -I_s \quad 0 \quad I_s]^T$

根据式(1-45)、 $\mathbf{Y}_n = \mathbf{A}\mathbf{Y}_b\mathbf{A}^T$ 和 $\mathbf{J}_n = \mathbf{A}\mathbf{I}_s - \mathbf{A}\mathbf{Y}_b\mathbf{U}_s$ 得

$$\mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} I_s - \frac{U_{s5}}{R_5} \\ 0 \\ -I_s + \frac{U_{s3}}{R_3} \end{bmatrix}$$

则代入节点电压方程 $\mathbf{Y}_n \mathbf{U}_n = \mathbf{J}_n$ 得

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s - \frac{U_{s5}}{R_5} \\ 0 \\ -I_s + \frac{U_{s3}}{R_3} \end{bmatrix}$$

解线性方程组,即可求解出 U_a 、 U_b 和 U_c 的值。

1.3.4 回路电流法

以回路电流为变量列写方程进行电路求解的方法,称为回路电流法。在实际电网络分析中,通常选取独立回路即基本回路,因此回路电流法主要是针对独立回路(基本回路)的回路电流为变量列写方程的。

本节仅推导不含受控源的电网络的回路电流方程,对于含受控源的电网络的回路电流方程方法和该过程基本一致,不同之处是在推导过程中使用的复合标准支路的伏安关系表达式不同。

表 1-1 中给出了以回路矩阵表示的 KCL 和 KVL 矩阵形式

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_l \text{ 和 } \mathbf{B} \dot{\mathbf{U}} = 0$$

式(1-30)给出了不含受控源的电网络复合标准支路的伏安关系

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Z}_b \dot{\mathbf{I}} - \dot{\mathbf{U}}_s + \mathbf{Z}_b \dot{\mathbf{I}}_s$$

将上述 $\dot{\mathbf{U}}$ 和 $\dot{\mathbf{I}}$ 的表达式代入回路的 KVL 矩阵形式中,可得

$$\mathbf{BZ}_b \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_l - \mathbf{B} \dot{\mathbf{U}}_s + \mathbf{BZ}_b \dot{\mathbf{I}}_s = 0$$

整理得回路电流方程的矩阵形式为

$$\mathbf{BZ}_b \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_l = \mathbf{B} \dot{\mathbf{U}}_s - \mathbf{BZ}_b \dot{\mathbf{I}}_s \quad (1-48)$$