第 2 章　自由空间中的电磁辐射

给定本构关系和边界条件，我们可以通过求解微分形式的麦克斯韦方程来分析电磁辐射问题。然而，对于大多数实际问题，求解麦克斯韦方程是非常困难的。仅对少数几个特例，我们可以得到麦克斯韦方程的解析解。本章考虑其中最简单的情况，即在介电常数为ϵ、磁导率为μ的无限大(无界)均匀媒质中的电磁辐射，这样的媒质通常称为**自由空间**[①]。我们首先引入标量位和矢量位的概念，以帮助求解麦克斯韦方程。接下来介绍并矢格林函数，它可以使电流辐射场的表达式更为紧凑。最后，我们将分析无限小电偶极子、有限长电偶极子、圆电流环、表面电流和简单阵列电流的辐射问题，并推导描述场在无穷远处性质的索末菲辐射条件。

2.1　标量位和矢量位

给定时谐电流源 $\mathbf{J}$ 和磁流源 $\mathbf{M}$，由源产生的电磁场满足麦克斯韦方程组：

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\mathbf{H}-\mathbf{M} \tag{2.1.1}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathrm{j}\omega\epsilon\mathbf{E}+\mathbf{J} \tag{2.1.2}$$

$$\nabla\cdot(\epsilon\mathbf{E})=\varrho_{\mathrm{e}} \tag{2.1.3}$$

$$\nabla\cdot(\mu\mathbf{H})=\varrho_{\mathrm{m}} \tag{2.1.4}$$

从这些方程式可看到电场和磁场是相互耦合的，耦合的强度取决于频率。当频率降低时，耦合减弱。当频率接近于零($\omega\rightarrow0$)时，式(2.1.1)至式(2.1.4)变为

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\mathbf{M},\qquad\nabla\cdot(\epsilon\mathbf{E})=\varrho_{\mathrm{e}} \tag{2.1.5}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J},\qquad\nabla\cdot(\mu\mathbf{H})=\varrho_{\mathrm{m}} \tag{2.1.6}$$

此时电场和磁场之间没有耦合，因而可以分别独立求解。这种场称为**静态场**。

2.1.1　静态场

在磁流为零时，静电场由电荷产生，并满足如下方程：

$$\nabla\times\mathbf{E}=0,\qquad\nabla\cdot(\epsilon\mathbf{E})=\varrho_{\mathrm{e}} \tag{2.1.7}$$

这是两个一阶偏微分方程，其中仅有一个未知函数 $\mathbf{E}$。为求解这两个方程，我们首先注意到 $\mathbf{E}$ 是一个无旋矢量，因而可以表示成一个标量函数的梯度。因此，可以设

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi \tag{2.1.8}$$

以满足式(2.1.7)中的第一个方程。标量函数 φ 称为**标量电位**或**标量电势**。将式(2.1.8)代入式(2.1.7)中的第二个方程，可以得到

---

① 术语“自由空间”经常用于描述两种特殊媒质。一种是不含任何物质的真空或空气，其介电常数和磁导率分别为 ϵ_0 和 μ_0；另一种是介电常数和磁导率为常数的均匀无限大媒质。其具体含义可以从上下文得知。

$$-\nabla\cdot(\epsilon\nabla\varphi)=\varrho_{\mathrm{e}} \tag{2.1.9}$$

这是一个二阶偏微分方程。在均匀媒质中，式(2.1.9)可以写为

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\varrho_{\mathrm{e}}}{\epsilon} \tag{2.1.10}$$

上式称为**泊松方程**。在无限大媒质中，其解为

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint_V\frac{\varrho_{\mathrm{e}}(\mathbf{r}')}{R}\,\mathrm{d}V',\qquad R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \tag{2.1.11}$$

这个结果可以通过对点电荷产生的标量电位进行线性叠加而得到，也可以通过数学求解泊松方程得到。稍后我们将对更一般的情况讨论如何求解泊松方程。

当磁荷为零时，静磁场由电流产生，并满足如下方程：

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J},\qquad \nabla\cdot(\mu\mathbf{H})=0 \tag{2.1.12}$$

这是两个一阶偏微分方程，其中仅有一个未知函数 $\mathbf{H}$。为求解这两个方程，我们首先注意到 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ 是一个无散矢量，因而可以表示成一个矢量函数的旋度。因此，可以设

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \tag{2.1.13}$$

以满足式(2.1.12)中的第二个方程。矢量函数 $\mathbf{A}$ 称为**矢量磁位**。将式(2.1.13)代入式(2.1.12)中的第一个方程，可以得到

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}\right)=\mathbf{J} \tag{2.1.14}$$

这是一个二阶的偏微分方程。由于 $\mathbf{A}$ 是一个矢量函数，仅仅知道它的旋度还不能唯一地确定这个函数，因为如果 $\mathbf{A}$ 是式(2.1.14)的一个解，由矢量恒等式 $\nabla\times\nabla f\equiv0$ 可知 $\mathbf{A}+\nabla f$ 也是式(2.1.14)的解。因此，为了唯一确定 $\mathbf{A}$，我们还要规定它的散度。在均匀媒质中，式(2.1.14)变为

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}=\mu\mathbf{J} \tag{2.1.15}$$

为使式(2.1.15)的形式更加简单，可以令 $\mathbf{A}$ 的散度为零，即

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=0 \tag{2.1.16}$$

这样，式(2.1.15)则简化为

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J} \tag{2.1.17}$$

这是矢量泊松方程。式(2.1.16)称为**库仑规范**。通过与式(2.1.10)对比，可以发现此方程在无限大媒质中的解为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R}\,\mathrm{d}V',\qquad R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \tag{2.1.18}$$

需要注意的是，$\mathbf{A}$ 的散度规定只是为了唯一地确定 $\mathbf{A}$。由于 $\mathbf{A}$ 是一个为求解 $\mathbf{H}$ 而引入的中间变量或辅助变量，它的唯一性并不重要。因为即使 $\mathbf{A}$ 不是唯一的，通过式(2.1.13)得到的磁场总是唯一的。$\mathbf{A}$ 的散度并不影响最终的磁场解，因而可以任意规定其值。一般来说，应该选择 $\mathbf{A}$ 的散度，使最后得到的方程形式尽可能简单。这一点在库仑规范[式(2.1.16)]的选择中已得到充分说明。另外需要指出的是，无源区域的静磁场也可以使用标量磁位得到，其求解过程与静电场一样，详见例 2.3。

本书的研究对象主要是动态场。关于静电和静磁问题的处理，读者可以参考 Stratton[1]、Jackson[2]、Van Bladel[3]经典教材。这些教材，以及 Harrington[4]、Balanis[5]、Kong[6]、Smith[7]等书籍，也是下面将讨论的动态场问题的优秀参考书。

▷

【例 2.1】 真空中位于 $\mathbf{r}'$的静态无限小电偶极子的电偶极矩为 $\mathbf{p}=q\mathbf{l}$，证明其标量位为

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

式中，$\mathbf{r}$ 表示观察点。基于这个结果，假设极化介质的极化强度为 $\mathbf{P}(\mathbf{r})$，体积为 V，封闭面为 S，推导极化介质的标量位。

解： 假定偶极子的正电荷位于 $\mathbf{r}'_+$，负电荷位于 $\mathbf{r}'_-$。这样，偶极子的长度为 $\mathbf{l}=\mathbf{r}'_+-\mathbf{r}'_-$；偶极子的中心位于 $\mathbf{r}'=\frac{1}{2}(\mathbf{r}'_++\mathbf{r}'_-)$。由这两个电荷产生的电位为

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\epsilon_0\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_+|}-\frac{q}{4\pi\epsilon_0\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_-|}=\frac{ql}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial l}\frac{1}{R}=\frac{q\mathbf{l}}{4\pi\epsilon_0}\cdot\nabla'\frac{1}{R}$$

式中，$R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$。应用习题 1.4 中的结果，则有

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{q\mathbf{l}}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\mathbf{R}}{R^3}=\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0R^3}=\frac{\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

对于极化强度为 $\mathbf{P}(\mathbf{r})$的极化介质，$\mathbf{r}'$处体积元 $\Delta V'$的电矩为 $\mathbf{P}(\mathbf{r}')\Delta V'$。因此，极化介质的总电位为

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,\mathrm{d}V'=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}V'$$

应用式(1.1.31)的矢量恒等式，被积函数可以写为

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\nabla'\cdot\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-\frac{\nabla'\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

再应用式(1.1.5)的高斯定理，可以得到

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint\!\!\!\oint_S\frac{\hat{n}'\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}S'-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V\frac{\nabla'\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}V'$$

式中，$\hat{n}$表示 S 面上向外的单位法向矢量。将上式与式(2.1.11)进行比较，可以看出，极化介质具有体电荷密度$\varrho_{\mathrm{e}}(\mathbf{r})=-\nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r})$和面电荷密度$\varrho_{\mathrm{e,s}}(\mathbf{r})=\hat{n}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r})$。第一个结果示于式(1.3.3)中，第二个结果在例 1.5 中已推出。

◁

▷

【例 2.2】 证明磁偶极矩为 $\mathbf{m}=I\mathbf{s}$ 的恒定无限小电流环在真空中 $\mathbf{r}'$处的矢量位为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0\mathbf{m}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

式中，$\mathbf{r}$ 表示观察点。基于这个结果，假设磁化媒质的磁化强度为 $\mathbf{M}(\mathbf{r})$，体积为 V，封闭面为 S，推导磁化媒质的矢量位。

解： 在考虑任意位置、任意方向的磁偶极子之前，首先考虑中心在原点的位于 xy 平面的无限小电流环，此电流环具有 z 方向磁偶极矩。由电流环上的恒定电流 I 产生的矢量位为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C\frac{I\,\mathrm{d}\mathbf{l}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Ia(-\hat{x}\sin\phi'+\hat{y}\cos\phi')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}\phi'$$

式中，a 表示电流环的半径。由于旋转对称性，$\mathbf{A}(\mathbf{r})$仅仅具有 ϕ 分量，并且与 ϕ 无关，即 $\mathbf{A}(\mathbf{r})=\hat{\phi}A_\phi(r,\sin\theta)$。因此，可以考虑观察点位于 xz 平面的特殊情况，然后求 A_y，此时的 A_y与 A_ϕ 相同。所以

$$A_\phi = A_y\Big|_{\phi=0} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi'}{r - a\sin\theta\cos\phi'}\,\mathrm{d}\phi'$$

由于电流环非常小，即 $a\to 0$，我们可以把被积函数展开成泰勒级数，然后保留前两项，得到

$$A_\phi = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\phi'\right)\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi' = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^2}\sin\theta$$

或

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \hat{\phi}\frac{\mu_0 I a^2}{4r^2}\sin\theta$$

由于$\hat{\phi}\sin\theta = \hat{z}\times\hat{r}$和 $\mathbf{m} = \hat{z}I\pi a^2$，矢量位可以表示成

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0\mathbf{m}\times\hat{r}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

式中，$\mathbf{r}$ 为位于原点的磁偶极子指向观察点的矢量。对于位于 $\mathbf{r}'$的磁偶极子，从磁偶极子指向观察点的矢量变为 $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$。因此，位于 $\mathbf{r}'$的磁偶极子的矢量位为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0\mathbf{m}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

对于磁化强度为 $\mathbf{M}(\mathbf{r})$的磁化媒质，$\mathbf{r}'$处体积元 $\Delta V'$的磁矩为 $\mathbf{M}(\mathbf{r}')\Delta V'$。基于上面的结果，磁化媒质的总矢量位为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,\mathrm{d}V' = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}V'$$

应用式(1.1.33)的矢量恒等式，被积函数可以写为

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\nabla'\times\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \nabla'\times\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

然后应用式(1.1.38)的旋度定理，可以得到

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\nabla'\times\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}V' - \frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_S\frac{\hat{n}'\times\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}S'$$

式中，$\hat{n}$表示 S 面上向外的单位法向矢量。将上式与式(2.1.18)进行比较，可以看出，磁化媒质有体电流密度 $\mathbf{J}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r}) = \nabla\times\mathbf{M}(\mathbf{r})$和面电流密度 $\mathbf{J}_{\mathrm{m,s}}(\mathbf{r}) = -\hat{n}\times\mathbf{M}(\mathbf{r})$。第一个结果示于式(1.3.14)中，第二个结果在例 1.5 中已推出。

◁

▷

【例 2.3】　采用标量磁位的方法，推导无源、均匀区域的静磁场求解公式。

解：无源区域中，式(2.1.12)中的方程变为

$$\nabla\times\mathbf{H} = 0,\qquad \nabla\cdot(\mu\mathbf{H}) = 0$$

上式表明，$\mathbf{H}$ 是无旋矢量。因此，为满足第一个方程，可以令

$$\mathbf{H} = -\nabla\varphi_{\mathrm{m}}$$

式中，φ_{m} 称为**标量磁位**。将此式代入第二个方程中，可以得到 φ_{m} 的二阶偏微分方程

$$\nabla^2\varphi_{\mathrm{m}} = 0$$

此方程称为**拉普拉斯方程**，其解可以用来构造无源区域磁场的表达式。这种方法在求解面电流产生的磁场时比较方便，因为在这一类问题的求解中，需要带有未知系数的无源区域磁场表达式，然后可用面电流两侧磁场边界条件确定未知系数。

◁

2.1.2 时谐场和洛伦兹规范

推导静电场和静磁场方程的基本方法也可用于推导时谐场方程。但时谐场的情况更复杂。为了简化推导，我们首先把电场和磁场分解成电流源产生的场和磁流源产生的场[4, 5]，即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_m, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_e + \mathbf{H}_m \tag{2.1.19}$$

式中，$\mathbf{E}_e$ 和$\mathbf{H}_e$ 满足

$$\nabla \times \mathbf{E}_e = -j\omega\mu\mathbf{H}_e, \qquad \nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}_e) = \varrho_e \tag{2.1.20}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_e = j\omega\epsilon\mathbf{E}_e + \mathbf{J}, \qquad \nabla \cdot (\mu\mathbf{H}_e) = 0 \tag{2.1.21}$$

而$\mathbf{E}_m$ 和$\mathbf{H}_m$ 则满足

$$\nabla \times \mathbf{E}_m = -j\omega\mu\mathbf{H}_m - \mathbf{M}, \qquad \nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}_m) = 0 \tag{2.1.22}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_m = j\omega\epsilon\mathbf{E}_m, \qquad \nabla \cdot (\mu\mathbf{H}_m) = \varrho_m \tag{2.1.23}$$

接下来，求解式(2.1.20)和式(2.1.21)这四个方程。式(2.1.21)的第二个方程表明$\mathbf{B}_e = \mu\mathbf{H}_e$ 是一个无散矢量函数。在引入矢量磁位 $\mathbf{A}$ 后，$\mathbf{B}_e$满足下式：

$$\mathbf{B}_e = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2.1.24}$$

将其代入式(2.1.20)的第一个方程中，可以得到

$$\nabla \times (\mathbf{E}_e + j\omega\mathbf{A}) = 0 \tag{2.1.25}$$

为使上式得到满足，引入标量电位 φ 为

$$\mathbf{E}_e + j\omega\mathbf{A} = -\nabla\varphi \tag{2.1.26}$$

为了满足式(2.1.21)的第一个方程，将式(2.1.24)和式(2.1.26)代入其中，得到

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A}\right) = -j\omega\epsilon\nabla\varphi + \omega^2\epsilon\mathbf{A} + \mathbf{J} \tag{2.1.27}$$

在均匀介质中，这个方程简化为

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = -j\omega\mu\epsilon\nabla\varphi + k^2\mathbf{A} + \mu\mathbf{J} \tag{2.1.28}$$

式中，$k^2 = \omega^2\mu\epsilon$。与静磁场的情况类似，矢量磁位 $\mathbf{A}$ 仅由式(2.1.24)确定了其旋度。为得到矢量磁位的唯一解，可以规定一个值作为它的散度。为了使式(2.1.28)的形式得到简化，设定$\nabla \cdot \mathbf{A}$ 为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\epsilon\varphi \tag{2.1.29}$$

这样，式(2.1.28)可简化为

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \tag{2.1.30}$$

一旦确定了 $\mathbf{A}$，$\mathbf{E}_e$和 $\mathbf{H}_e$就可由如下公式计算：

$$\mathbf{E}_e = -j\omega\mathbf{A} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \tag{2.1.31}$$

$$\mathbf{H}_e = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A} \tag{2.1.32}$$

式(2.1.29)称为**洛伦兹规范**，它的引入不仅使 $\mathbf{A}$ 的值唯一确定，还简化了 $\mathbf{A}$ 满足的偏微分方程。式(2.1.30)通常称为**矢量亥姆霍兹方程**，我们将在下一节讨论这个方程的解。标量电位可以通过式(2.1.29)直接得到，无须额外求解。不过，我们可以按如下方式得到标量电位满足的方程：对式(2.1.26)取散度，然后把式(2.1.29)和式(2.1.20)的第二个方程代入这个散度结果中，得到

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = -\frac{\varrho_e}{\epsilon} \tag{2.1.33}$$

上式称为**标量亥姆霍兹方程**。

引入矢量电位和标量磁位，经过类似的处理可以得到如下公式：

$$\mathbf{E}_m = -\frac{1}{\epsilon}\nabla\times\mathbf{F} \tag{2.1.34}$$

$$\mathbf{H}_m = -j\omega\mathbf{F} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) \tag{2.1.35}$$

式中，$\mathbf{F}$ 为**矢量电位**，它满足如下矢量亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = -\epsilon\mathbf{M} \tag{2.1.36}$$

将 $\mathbf{E}_e$、$\mathbf{H}_e$ 和 $\mathbf{E}_m$、$\mathbf{H}_m$ 的表达式代入式(2.1.19)中，得到总场的表达式为

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \frac{1}{\epsilon}\nabla\times\mathbf{F} \tag{2.1.37}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A} - j\omega\mathbf{F} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) \tag{2.1.38}$$

需要指出的是，本节给出的公式对于有限大或无限大的均匀媒质都是成立的。对于一个特定的问题，一旦通过求解式(2.1.30)和式(2.1.36)得到 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{F}$，即可由式(2.1.37)和式(2.1.38)得到场解。

在电磁场著作中，另外两个经常使用的矢量位是电和磁赫兹位，分别表示为 $\mathbf{\Pi}_e$ 和 $\mathbf{\Pi}_m$。它们与上面介绍的矢量位的关系为 $\mathbf{A} = j\omega\mu\epsilon\,\mathbf{\Pi}_e$ 和 $\mathbf{F} = j\omega\mu\epsilon\,\mathbf{\Pi}_m$。

2.2　自由空间中矢量位的解

在引入矢量磁位 $\mathbf{A}$ 和矢量电位 $\mathbf{F}$ 之后，麦克斯韦方程的求解简化为对两个形式相同的二阶偏微分方程[式(2.1.30)和式(2.1.36)]的求解。因为这两个方程是线性的，所以它们的解可以表示成点源解的线性叠加。例如，式(2.1.30)的解可以表示为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu\iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,dV' \tag{2.2.1}$$

式中，$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 为对应于点源的基本解。在电磁场中，这个基本解通常称为**格林函数**[8]。

2.2.1　δ 函数和格林函数

为求出 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$，首先要给出点源的数学描述。考虑一个位于 $\mathbf{r}'$ 处的带有单位大小电量的点电荷，当电荷的体积趋于零时，电荷密度可用下面的函数表示：

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \begin{cases} \infty & \text{当}\,\mathbf{r}=\mathbf{r}' \\ 0 & \text{当}\,\mathbf{r}\neq\mathbf{r}' \end{cases} \tag{2.2.2}$$

因为总电荷值是恒定的，故有

$$\iiint_V \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dV = \begin{cases} 1 & \text{当}\,\mathbf{r}'\,\text{在}\,V\,\text{中} \\ 0 & \text{当}\,\mathbf{r}'\,\text{不在}\,V\,\text{中} \end{cases} \tag{2.2.3}$$

式(2.2.2)和式(2.2.3)定义的函数称为**狄拉克函数**(**δ 函数**)[8]。很显然，给定任意在 $\mathbf{r}'$ 连续的函数，故有

$$\iiint_V f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dV = \begin{cases} f(\mathbf{r}') & \text{当}\,\mathbf{r}'\,\text{在}\,V\,\text{中} \\ 0 & \text{当}\,\mathbf{r}'\,\text{不在}\,V\,\text{中} \end{cases} \tag{2.2.4}$$

上式表明,任意源函数 $f(\mathbf{r}')$ 均可看成无数点源函数 $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ 的线性叠加。

对一维问题,δ 函数可以表示成一个函数的极限:

$$\delta(x-x')=\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(x-x') \tag{2.2.5}$$

式中,$u_\varepsilon(x-x')$ 称为 **$\boldsymbol{\delta}$ 函数族**。它可以是一个宽度为 ε 且高度为 $1/\varepsilon$ 的矩形函数,也可以是宽度为 2ε 且高度为 $1/\varepsilon$ 的三角形函数,其中心在 $x=x'$。δ 函数的形状并不重要,重要的是当宽度趋于零时,它的面积恒定,即

$$\int_a^b \delta(x-x')\,\mathrm{d}x=\begin{cases}1 & \text{当 } x' \text{ 在 } (a,b) \text{ 中}\\ 0 & \text{当 } x' \text{ 不在 } (a,b) \text{ 中}\end{cases} \tag{2.2.6}$$

因而

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x')\,\mathrm{d}x=\begin{cases}f(x') & \text{当 } x' \text{ 在 } (a,b)\\ 0 & \text{当 } x' \text{ 不在 } (a,b) \text{ 中}\end{cases} \tag{2.2.7}$$

如此定义的 δ 函数不是一个经典意义上的函数,因此称其为**符号函数**或**广义函数**[9]。很容易看出,δ 函数是一个对称函数

$$\delta(x-x')=\delta(x'-x) \tag{2.2.8}$$

在笛卡儿坐标、柱坐标和球坐标系中,三维 δ 函数与一维 δ 函数的关系为

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \tag{2.2.9}$$

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z')}{\rho} \tag{2.2.10}$$

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')}{r^2\sin\theta} \tag{2.2.11}$$

这些函数均满足式(2.2.3)。

在引入 δ 函数后,电流密度 $\mathbf{J}$ 可以表示成点源的线性叠加

$$\mathbf{J}(\mathbf{r})=\iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V' \tag{2.2.12}$$

将上式和式(2.2.1)代入式(2.1.30)中,可以得到

$$\iiint_V[\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}')+k^2G(\mathbf{r},\mathbf{r}')]\mathbf{J}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V'=-\iiint_V\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V' \tag{2.2.13}$$

由于上式对任意 $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ 都成立,由此可以得到 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 满足的方程为

$$\nabla^2G(\mathbf{r},\mathbf{r}')+k^2G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{2.2.14}$$

现在,通过求解式(2.2.14)可以得到 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{F}$。下一节将讨论自由空间中式(2.2.14)的求解过程。

2.2.2 自由空间格林函数

对大多数实际问题,式(2.2.14)是很难求解的。但是,如果媒质是均匀无限大的,比如自由空间,则可以通过几种不同的方法得到该方程的解析解。下面介绍一种最简单的方法。

我们用记号 $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 表示自由空间中的格林函数。为了求解 $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$,首先考虑 $\mathbf{r}'=0$ 时的特殊情况。此时,$G_0(\mathbf{r},0)$ 对于坐标原点是球对称的,因而式(2.2.14)变为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}G_0(\mathbf{r},0)}{\mathrm{d}r}\right]+k^2G_0(\mathbf{r},0)=-\delta(\mathbf{r}-0) \tag{2.2.15}$$

对于 $\mathbf{r}\neq 0$，式(2. 2. 15)可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^2[rG_0(\mathbf{r},0)]}{\mathrm{d}r^2}+k^2[rG_0(\mathbf{r},0)]=0 \tag{2.2.16}$$

此方程有两个独立解

$$rG_0(\mathbf{r},0)=C\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}kr} \tag{2.2.17}$$

式中，C 是待定常数。其中的一个解为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$，其时域形式为 $\cos(\omega t-kr)$，表示的是从源点向外传播的波；另一个解为 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr}$，其时域形式为 $\cos(\omega t+kr)$，表示的是从无穷远处向源点传播的波。对于点源，波只能从点源向外传播，因此只有第一个解有物理意义。即

$$G_0(\mathbf{r},0)=C\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r} \tag{2.2.18}$$

为确定未知常数 C，把式(2. 2. 18)代入式(2. 2. 15)中，然后对其在以 $\mathbf{r}=0$ 为中心的小球上进行体积分，并令小球半径 $\varepsilon\to 0$，由此可以得到 $C=1/4\pi$。因此，式(2. 2. 18)变为

$$G_0(\mathbf{r},0)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r} \tag{2.2.19}$$

对于 $\mathbf{r}'\neq 0$ 时的一般情况，从 $\mathbf{r}'$到观察点 $\mathbf{r}$ 的距离为 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$，因此 G_0变为

$$G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{2.2.20}$$

这个函数就是**自由空间的标量格林函数**，它代表从 $\mathbf{r}'$点发出的向外传播的球面波。正如第 4 章将要讨论的，k 称为波数，与波长 λ 的关系为 $k=2\pi/\lambda$。

2. 2. 3　自由空间中的场–源关系

由格林函数的解，可以得到自由空间中电流源和磁流源产生的矢量位为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}')\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\,\mathrm{d}V',\qquad R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \tag{2.2.21}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=\frac{\epsilon}{4\pi}\iiint_V \mathbf{M}(\mathbf{r}')\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\,\mathrm{d}V',\qquad R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \tag{2.2.22}$$

给定任何源，可以通过上式计算矢量位，然后由式(2. 1. 37)和式(2. 1. 38)得到场解。如果令$\omega\to 0$，式(2. 2. 21)就退化为式(2. 1. 18)，对应于静磁场的情况。

通过傅里叶逆变换，可以得到矢量位的时域表达式

$$\mathscr{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathscr{J}(\mathbf{r}',t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}V' \tag{2.2.23}$$

$$\mathscr{F}(\mathbf{r},t)=\frac{\epsilon}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathscr{M}(\mathbf{r}',t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}V' \tag{2.2.24}$$

式中，$c=1/\sqrt{\mu\epsilon}$代表场在媒质中的传播速度。这些矢量位称为**滞后位**，因为它们反映了有限传播速度带来的延迟效应。由此，式(2. 1. 37)和式(2. 1. 38)变为

$$\mathscr{E}(\mathbf{r},t)=-\frac{\partial\mathscr{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}+\frac{1}{\mu\epsilon}\int_0^{t-R/c}\nabla[\nabla\cdot\mathscr{A}(\mathbf{r},\tau)]\,\mathrm{d}\tau-\frac{1}{\epsilon}\nabla\times\mathscr{F}(\mathbf{r},t) \tag{2.2.25}$$

$$\mathscr{H}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathscr{A}(\mathbf{r},t)-\frac{\partial\mathscr{F}(\mathbf{r},t)}{\partial t}+\frac{1}{\mu\epsilon}\int_0^{t-R/c}\nabla[\nabla\cdot\mathscr{F}(\mathbf{r},\tau)]\,\mathrm{d}\tau \tag{2.2.26}$$

式(2. 2. 23)至式(2. 2. 26)给出了在时域由瞬态源求解瞬态场的方法。

本书主要介绍电磁场的频域分析。对于时域分析，读者可以参考 Smith 的著作[7]，其中

对时域电磁辐射问题做了非常全面的介绍。一般来说，时域分析更为复杂，但也更清晰地揭示了方程背后的物理过程，对工程应用很有意义。

2.2.4 辅助位函数的意义

2.1.2 节介绍了如何从源出发计算矢量位函数，再由位函数出发计算场。矢量位是中间函数，本身没有物理意义。事实上，场可以直接用电流源和磁流源表示。例如，对式(2.1.1)取旋度，代入式(2.1.2)，可以得到

$$\nabla^2\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=\mathrm{j}\omega\mu\mathbf{J}-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{J})+\nabla\times\mathbf{M} \tag{2.2.27}$$

类似地，可以得到磁场满足的方程

$$\nabla^2\mathbf{H}+k^2\mathbf{H}=\mathrm{j}\omega\epsilon\mathbf{M}-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{M})-\nabla\times\mathbf{J} \tag{2.2.28}$$

表面上看，式(2.2.27)和式(2.2.28)比式(2.1.30)和式(2.1.36)更复杂。然而实际上，它们等号左边的算子完全一样，因而所得解具有相同的形式。经过对比，可以写出式(2.2.27)和式(2.2.28)的解为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\frac{1}{4\pi}\iiint_V\left\{\mathrm{j}\omega\mu\mathbf{J}(\mathbf{r}')-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\epsilon}\nabla'[\nabla'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')]+\nabla'\times\mathbf{M}(\mathbf{r}')\right\}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\mathrm{d}V' \tag{2.2.29}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r})=-\frac{1}{4\pi}\iiint_V\left\{\mathrm{j}\omega\epsilon\mathbf{M}(\mathbf{r}')-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\nabla'[\nabla'\cdot\mathbf{M}(\mathbf{r}')]-\nabla'\times\mathbf{J}(\mathbf{r}')\right\}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\mathrm{d}V' \tag{2.2.30}$$

式中，∇'表示求导针对 $\mathbf{r}'$进行。由于不涉及中间变量矢量位函数，这种方法称为直接法(见图2.1)。

从数学角度来看，这两种方法的计算量相同：对源所在区域进行体积分、一次旋度运算、一次散度运算和一次梯度计算。它们的主要区别是：在式(2.2.29)和式(2.2.30)中，旋度、散度和梯度算子作用于源函数($\mathbf{J}$ 和 $\mathbf{M}$)；而在式(2.1.37)和式(2.1.38)中，这些算子作用于矢量位函数。对于解析且连续的源函数，它们的导数很容易计算，这两种方法确实等效。然而对于大多数实际问题，比如线电流源和面电流源，源函数并不连续，因而也没有经典意义上的导数。对于线电流源和面电流源，电流密度采用 δ 函数定义。如果不采用广义函数中的概念，则它们的旋度、散度和梯度均无法计算。因此，对于这种情况很难使用式(2.2.29)和式(2.2.30)计算场。而另一方面，在矢量位函数法中，仅需源函数的值就可以通过式(2.2.21)和式(2.2.22)求出矢量位。而这些矢量位函数是空间坐标 $\mathbf{r}$ 的解析函数。因而在计算式(2.1.37)和式(2.1.38)所需的旋度、散度及随后的梯度时不会遇到困难。可以看出，在引入矢量位函数之后，对源函数($\mathbf{J}$ 和 $\mathbf{M}$)形式的要求可以大大放宽，因而这种方法在实际应用中更加有用。

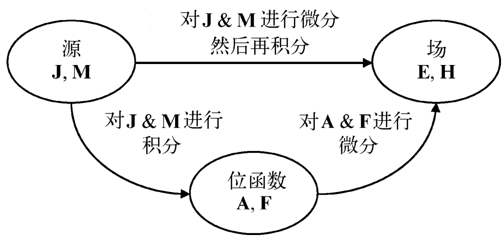


图 2.1 由源计算辐射场的两种方法

▷

【例 2.4】 在一个无源区域中，媒质的介电常数为$\epsilon(\mathbf{r})$，是空间位置的函数；磁导率为常数μ。从麦克斯韦方程出发，推导下面的波动方程

$$\nabla^2\mathbf{E}+k^2(\mathbf{r})\mathbf{E}+\nabla[\mathbf{E}\cdot\nabla\ln\epsilon(\mathbf{r})]=0$$

式中，$k(\mathbf{r})=\omega\sqrt{\mu\,\epsilon(\mathbf{r})}$。

解： 媒质中，无源区域的麦克斯韦方程为

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\mathbf{H},\qquad \nabla\times\mathbf{H}=\mathrm{j}\omega\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}$$

对第一个方程取旋度，然后代入第二个方程，可以得到

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=-\mathrm{j}\omega\mu\nabla\times\mathbf{H}=\omega^2\mu\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}=k^2(\mathbf{r})\mathbf{E}$$

由于$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E}$，上式变为

$$\nabla^2\mathbf{E}+k^2(\mathbf{r})\mathbf{E}-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})=0$$

下面对第二个麦克斯韦方程取旋度，得到$\nabla\cdot[\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}]=0$，此式可以写为

$$\mathbf{E}\cdot\nabla\epsilon(\mathbf{r})+\epsilon(\mathbf{r})\nabla\cdot\mathbf{E}=0$$

由此得到

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=-\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})}\mathbf{E}\cdot\nabla\epsilon(\mathbf{r})=-\mathbf{E}\cdot\nabla\ln\epsilon(\mathbf{r})$$

将此式代入前面推出的方程中，可以得到

$$\nabla^2\mathbf{E}+k^2(\mathbf{r})\mathbf{E}+\nabla[\mathbf{E}\cdot\nabla\ln\epsilon(\mathbf{r})]=0$$

这就是问题中要推导的方程。

2.2.5　自由空间并矢格林函数

将式(2.2.21)和式(2.2.22)代入式(2.1.37)中，交换积分和微分的顺序，并使用一些矢量恒等式，就可以得到场–源关系中电场的表达式为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r})=&-\mathrm{j}\omega\mu\iiint_V\left[G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}')+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')\right]\mathrm{d}V'\\&-\iiint_V\nabla G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\times\mathbf{M}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V'\end{aligned}\tag{2.2.31}$$

如果按照如下方式定义一个新的数学量：

$$\bar{\mathbf{I}}=\hat{x}\hat{x}+\hat{y}\hat{y}+\hat{z}\hat{z}\tag{2.2.32}$$

很容易证明：

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}')=\bar{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}'),\qquad \nabla G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\times\mathbf{M}(\mathbf{r}')=[\nabla G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\times\bar{\mathbf{I}}]\cdot\mathbf{M}(\mathbf{r}')\tag{2.2.33}$$

由此，式(2.2.31)可以写为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r})=&-\mathrm{j}\omega\mu\iiint_V\left[\left(\bar{\mathbf{I}}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right]\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V'\\&-\iiint_V\left[\nabla G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\times\bar{\mathbf{I}}\right]\cdot\mathbf{M}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V'\end{aligned}\tag{2.2.34}$$

此式可以写为如下更紧凑的形式：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\mathrm{j}\omega\mu\iiint_V\overline{\mathbf{G}}_{\mathrm{e}0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V'-\iiint_V\overline{\mathbf{G}}_{\mathrm{m}0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\mathbf{M}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V'\tag{2.2.35}$$

式中，

$$\overline{\mathbf{G}}_{\mathrm{e}0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\left(\bar{\mathbf{I}}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\tag{2.2.36}$$

$$\overline{\mathbf{G}}_{\mathrm{m}0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\nabla G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\times\bar{\mathbf{I}}\tag{2.2.37}$$

由这些新定义的函数，也可以将式(2.1.38)写为

$$\mathbf{H}(\mathbf{r})=\iiint_V \overline{\mathbf{G}}_{\mathrm{m}0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V'-\mathrm{j}\omega\epsilon\iiint_V \overline{\mathbf{G}}_{\mathrm{e}0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\mathbf{M}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V' \tag{2.2.38}$$

由式(2.2.36)定义的新函数$\overline{\mathbf{G}}_{\mathrm{e}0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$称为自由空间**电并矢格林函数**；由式(2.2.37)定义的新函数$\overline{\mathbf{G}}_{\mathrm{m}0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$称为自由空间**磁并矢格林函数**[10]。这里引入的这两个函数使得场-源关系表达式可以写成非常紧凑的形式。

为了更好地理解并矢格林函数，可以简要地介绍一下**并矢**。并矢用$\overline{\mathbf{D}}$表示①，由两个没有任何运算的矢量并行排列组成，即

$$\overline{\mathbf{D}}=\mathbf{AB} \tag{2.2.39}$$

矢量有明确的物理意义，而并矢本身没有任何物理解释。但是，当并矢和另一个矢量作用时，其结果是有物理意义的。并矢的作用在于，当它和一个矢量点乘时，得到的是一个不同幅度不同方向的新矢量。例如，并矢和矢量 $\mathbf{C}$ 的左点乘为

$$\mathbf{C}\cdot\overline{\mathbf{D}}=(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B} \tag{2.2.40}$$

这是一个矢量。并矢和矢量 $\mathbf{C}$ 的右点乘为

$$\overline{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) \tag{2.2.41}$$

这也是一个矢量。显然，式(2.2.40)和式(2.2.41)得到的矢量是不同的。除了两个点乘外，还有两个叉乘。左叉乘的定义为

$$\mathbf{C}\times\overline{\mathbf{D}}=(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\mathbf{B} \tag{2.2.42}$$

右叉乘的定义为

$$\overline{\mathbf{D}}\times\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \tag{2.2.43}$$

显然，得到的结果是两个不同的并矢。我们可以对并矢求旋度和散度，对一个矢量求梯度得到的是一个并矢。关于并矢分析，读者可以参考戴振铎的著作[11]。

由式(2.2.39)定义的并矢非常特殊，它仅包含 6 个独立的标量，因为两个矢量各含有 3 个标量。一个更广义的并矢是一个**张量**，定义为

$$\overline{\mathbf{D}}=\mathbf{D}_x\hat{x}+\mathbf{D}_y\hat{y}+\mathbf{D}_z\hat{z} \tag{2.2.44}$$

式中，$\mathbf{D}_x$、$\mathbf{D}_y$ 和 $\mathbf{D}_z$ 为矢量。因此，式(2.2.44)可以表示成

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{D}}=&D_{xx}\hat{x}\hat{x}+D_{yx}\hat{y}\hat{x}+D_{zx}\hat{z}\hat{x}+D_{xy}\hat{x}\hat{y}+D_{yy}\hat{y}\hat{y}+D_{zy}\hat{z}\hat{y}\\&+D_{xz}\hat{x}\hat{z}+D_{yz}\hat{y}\hat{z}+D_{zz}\hat{z}\hat{z}\end{aligned} \tag{2.2.45}$$

它包含 9 个独立的分量。由式(2.2.32)定义的特殊并矢称为**单位并矢**，显然有

$$\mathbf{C}\cdot\bar{\mathbf{I}}=\bar{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{C} \tag{2.2.46}$$

并矢可以通过点乘改变一个矢量的幅度和方向，因而在矢量运算中非常有用。正如前面提到的，它使得场-源关系的表达式变得非常紧凑。

虽然很难解释或者描述并矢的物理含义，但并矢格林函数各个分量的含义是显而易见的。如果把$\overline{\mathbf{G}}_{\mathrm{e}0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$和$\overline{\mathbf{G}}_{\mathrm{m}0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$表示成式(2.2.44)的形式：

$$\overline{\mathbf{G}}_{\mathrm{e}0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\mathbf{G}_{\mathrm{e}0,x}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{x}+\mathbf{G}_{\mathrm{e}0,y}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{y}+\mathbf{G}_{\mathrm{e}0,z}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{z} \tag{2.2.47}$$

$$\overline{\mathbf{G}}_{\mathrm{m}0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\mathbf{G}_{\mathrm{m}0,x}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{x}+\mathbf{G}_{\mathrm{m}0,y}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{y}+\mathbf{G}_{\mathrm{m}0,z}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{z} \tag{2.2.48}$$

① 并矢也是用黑体字母上方加横线表示，因为一个广义的并矢等效于一个张量。

然后，将其代入式(2.2.35)和式(2.2.38)中，可看到：$-\mathrm{j}\omega\mu\,\mathbf{G}_{e0,u}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$代表由位于$\mathbf{r}'$处的$\hat{u}$方向无限小电流元在$\mathbf{r}$处产生的电场；$\mathbf{G}_{m0,u}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$代表由位于$\mathbf{r}'$处的相同电流元在$\mathbf{r}$处产生的磁场。

考虑只有电流源的情况。在$\mathbf{M}$为零时，将式(2.2.35)和式(2.2.38)代入式(2.1.1)和式(2.1.2)中，可得到$\overline{\mathbf{G}}_{e0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$和$\overline{\mathbf{G}}_{m0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$的关系为

$$\nabla\times\overline{\mathbf{G}}_{e0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\overline{\mathbf{G}}_{m0}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \tag{2.2.49}$$

$$\nabla\times\overline{\mathbf{G}}_{m0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=k^2\overline{\mathbf{G}}_{e0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')+\bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{2.2.50}$$

由矢量恒等式，可以进一步得到

$$\nabla\cdot\overline{\mathbf{G}}_{e0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\frac{1}{k^2}\nabla\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{2.2.51}$$

$$\nabla\cdot\overline{\mathbf{G}}_{m0}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=0 \tag{2.2.52}$$

这四个方程与四个麦克斯韦方程在形式上一一对应。在推导过程中，我们所做的唯一限定是场可以表示成式(2.2.35)和式(2.2.38)的形式，因此上述方程并不局限于自由空间。对自由空间的限制其实来自于式(2.2.36)和式(2.2.37)，因为其中使用了自由空间中的标量格林函数。

2.3　自由空间中的电磁辐射

在得到2.2.5节的场–源关系后，理论上讲，可以求解自由空间中任意源的辐射问题。本节考虑几个例子来说明辐射问题的求解过程。这里介绍的方法是天线分析的基本工具[12~14]。

2.3.1　无限小电偶极子

考虑一个非常短的线电流，其长度为l，带有时谐电流I。这样的线电流称为无限小电偶极子，可以用偶极矩$Il(l\to 0)$来描述。假定偶极子为z方向，并且放置于原点(见图2.2)。为求出辐射场，首先计算它的矢量磁位：

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r})&=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}')\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\,\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\hat{z}I\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\,\mathrm{d}z'=\hat{z}\frac{\mu Il}{4\pi r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

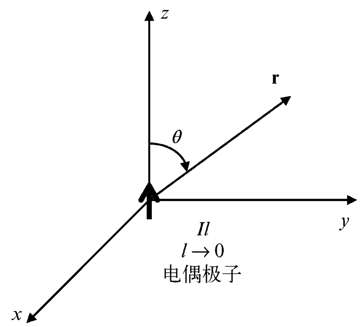


图2.2　自由空间中的无限小电偶极子的辐射

为了计算球坐标中的电场和磁场，可以把$\mathbf{A}$投影到球坐标的三个坐标轴上，得到

$$A_r=A_z\cos\theta=\frac{\mu Il}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\cos\theta \tag{2.3.2}$$

$$A_\theta=-A_z\sin\theta=-\frac{\mu Il}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\sin\theta \tag{2.3.3}$$

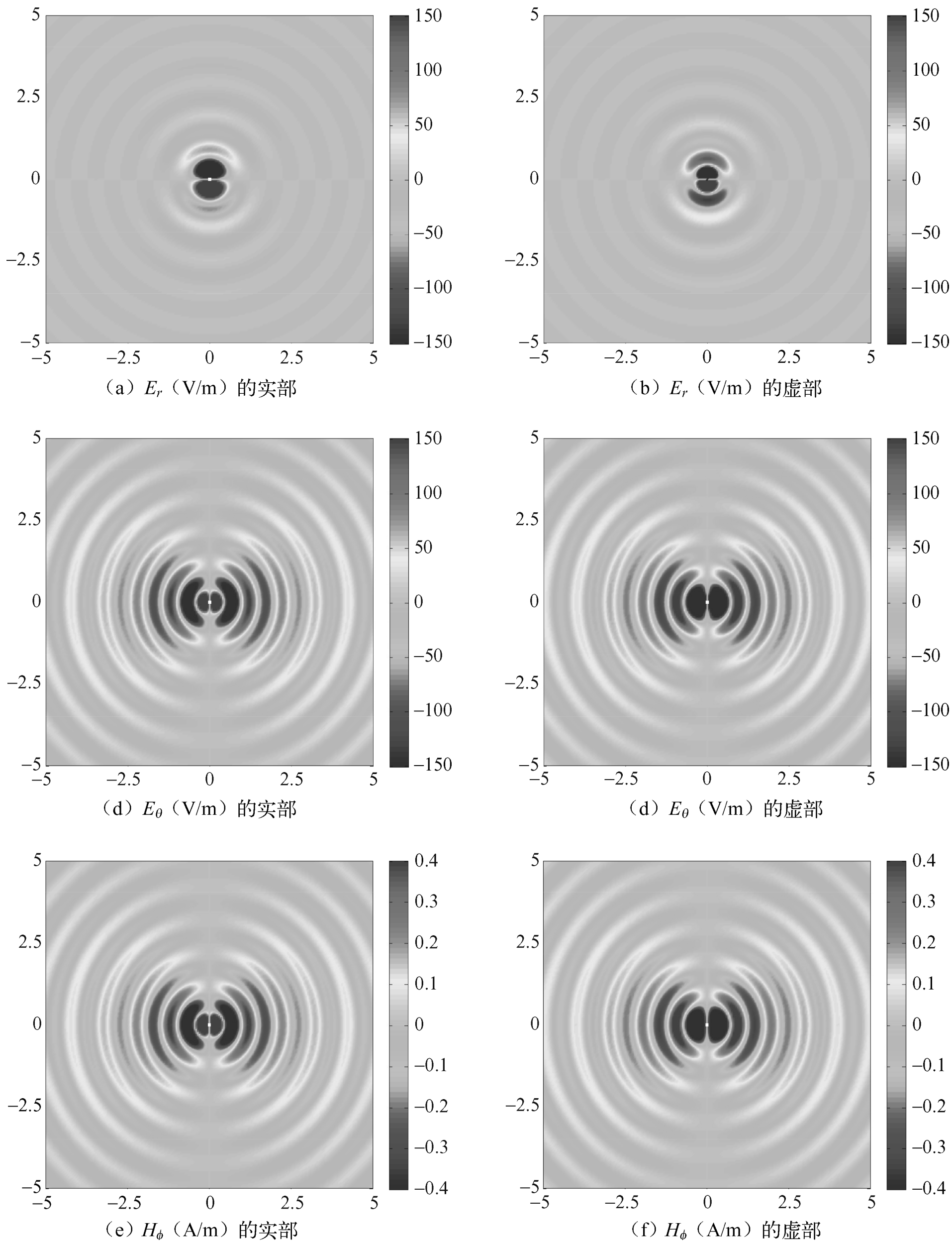
和$A_\phi=0$。因此，磁场为

$$\begin{aligned}\mathbf{H}&=\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}=\hat{\phi}\frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\\&=\hat{\phi}\frac{\mathrm{j}kIl\sin\theta}{4\pi r}\left(1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

从磁场出发，可以计算出电场为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega\epsilon}\nabla\times\mathbf{H} \\
&= \hat{r}\frac{\eta Il\cos\theta}{2\pi r^2}\left(1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}+\hat{\theta}\frac{\mathrm{j}k\eta Il\sin\theta}{4\pi r}\left[1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}-\frac{1}{(kr)^2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}
\end{aligned}
\tag{2.3.5}
$$

式中，$\eta=\sqrt{\mu/\epsilon}$。图 2.3 所示为辐射电场和磁场在 rz 平面上的分布，辐射场关于 z 轴旋转对称。



（a）E_r（V/m）的实部　（b）E_r（V/m）的虚部

（d）E_θ（V/m）的实部　（d）E_θ（V/m）的虚部

（e）H_ϕ（A/m）的实部　（f）H_ϕ（A/m）的虚部

图 2.3　在 $10\lambda\times10\lambda$ 的区域内无限小电偶极子的辐射场

如果只关心远区场，即 $kr\gg1$，则可以在场的表达式中只保留主要项，即

$$E_\theta \approx \frac{\mathrm{j}k\eta Il\sin\theta}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr},\qquad H_\phi \approx \frac{\mathrm{j}kIl\sin\theta}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{2.3.6}$$

这样的场称为**远场**，其能流密度为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^* = \hat{r}\frac{\eta}{2}\left|\frac{kIl\sin\theta}{4\pi r}\right|^2 \tag{2.3.7}$$

其形状为圆环状。在正负 z 方向上没有辐射，而最大的辐射发生在 xy 平面上。

由上面得到的场，我们对坡印亭复矢量在半径为 r 的球面上积分，得到流出的复功率为

$$\begin{aligned}P_\mathrm{e} &= \frac{1}{2}\oint\!\!\!\oint_S(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}E_\theta H_\phi^* r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\\ &= \eta\frac{\pi}{3}\left|\frac{Il}{\lambda}\right|^2\left[1-\frac{\mathrm{j}}{(kr)^3}\right]\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

其实部为辐射功率的时均值，即

$$\mathrm{Re}(P_\mathrm{e}) = \eta\frac{\pi}{3}\left|\frac{Il}{\lambda}\right|^2 \tag{2.3.9}$$

它与 r 无关。因此，如果仅关心辐射功率的时均值，可以由式(2.3.6)的远场表达式得到相同的结果。考虑半径为 a 和 $b(b>a)$ 的两个球面之间的区域，这个区域内的无功功率为

$$2\omega(W_\mathrm{m}-W_\mathrm{e}) = \eta\frac{\pi}{3}\left|\frac{Il}{\lambda}\right|^2\left[\frac{1}{(kb)^3}-\frac{1}{(ka)^3}\right] \tag{2.3.10}$$

上式表明，电偶极子周围的电场能量时均值总是大于磁场能量的时均值。

2.3.2　有限长电偶极子

无限小电偶极子在现实中并不存在。这一节考虑一个更实际的例子：中心馈电的长度为 L 的电偶极子(见图 2.4)。偶极子上的电流分布一般是未知的，需要用第 8 章至第 11 章介绍的数值方法求解边值问题得到。这里，假定电流分布已知，而只是求解它的辐射场。当偶极子的长度小于一个波长时，其上的电流分布可近似为

$$I(z) = I_0\sin\left[k\left(\frac{L}{2}-|z|\right)\right] \tag{2.3.11}$$

式中，I_0 为常数。对这一电流分布，矢量磁位为

$$\mathbf{A} = \hat{z}\frac{\mu}{4\pi}\int_{-L/2}^{L/2}I_0\sin\left[k\left(\frac{L}{2}-|z'|\right)\right]\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\mathrm{d}z' \tag{2.3.12}$$

式中，$R=\sqrt{r^2+z'^2-2rz'\cos\theta}$。由于被积函数非常复杂，这个积分很难计算。但是如果我们只关心远场，则 $r\gg z'$，R 就可以简化为 $R\approx r-z'\cos\theta$。我们在指数项中使用这个近似，而在分母中直接用 r 代替 R，则式(2.3.12)变为

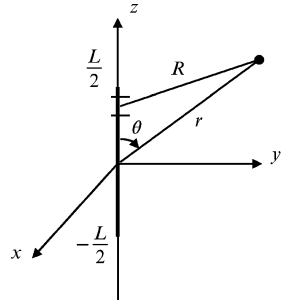


图 2.4　有限长电偶极子在自由空间中的辐射

$$\mathbf{A} = \hat{z}\frac{\mu I_0}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\int_{-L/2}^{L/2}\sin\left[k\left(\frac{L}{2}-|z'|\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz'\cos\theta}\mathrm{d}z' \tag{2.3.13}$$

将此积分区间分成两段，一段为$(-L/2,0)$，另一段为$(0,L/2)$，然后反复应用分部积分，得到

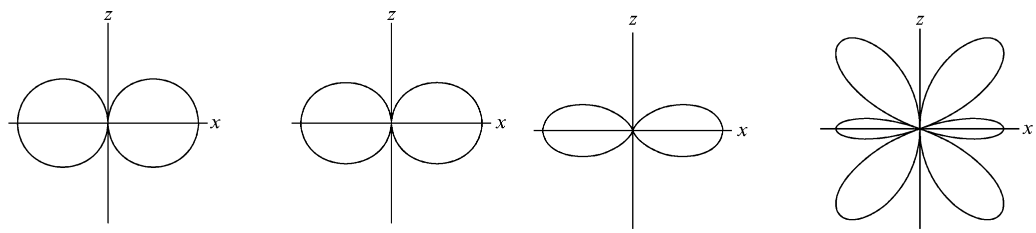
$$A_z=\frac{\mu I_0}{2\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\frac{\cos\left(k\frac{L}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(k\frac{L}{2}\right)}{k\sin^2\theta} \tag{2.3.14}$$

使用与无限小电偶极子相同的处理方法，可以求得远场为

$$E_\theta=\frac{\mathrm{j}\eta I_0}{2\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\frac{\cos\left(k\frac{L}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(k\frac{L}{2}\right)}{\sin\theta} \tag{2.3.15}$$

$$H_\phi=\frac{\mathrm{j}I_0}{2\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\frac{\cos\left(k\frac{L}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(k\frac{L}{2}\right)}{\sin\theta} \tag{2.3.16}$$

从上面的场解中可以求出能流密度的时均值和总辐射功率。对于非常短的电偶极子($kL\ll 1$)，远场方向图与无限小电偶极子类似。当偶极子长度增加时，辐射功率更加向$\theta=\pi/2$(xy平面)集中，因而辐射的方向性更强。然而当长度超过一个波长时，辐射波束开始分裂。从式(2.3.11)可以看出，此时偶极子上的电流不再沿一个方向流动。这导致向$\theta=\pi/2$的辐射减小，而向其他方向的辐射增加，如图2.5所示。最后需要再次强调，偶极子上的电流分布通常是未知的，需要用数值方法计算；式(2.3.11)给出的表达式仅仅是一种粗略的近似。



（a）$L=\lambda/4$ （b）$L=\lambda/2$ （c）$L=\lambda$ （d）$L=3\lambda/2$

图2.5 不同长度电偶极子的远场辐射

2.3.3 远场近似和索末菲辐射条件

计算矢量位时涉及的积分[式(2.2.21)和式(2.2.22)]通常非常复杂，只有对非常简单的源，如无限小偶极子才能进行计算。不过在大多数实际应用中，我们感兴趣的是远场，即满足$R\gg\lambda$和$r\gg r'$。在这种情况下，积分可以大大简化。如图2.6所示，若将$\mathbf{r}$和$\mathbf{r}'$之间的夹角记为ψ，则有

$$R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\psi}\approx r-r'\cos\psi \tag{2.3.17}$$

将上式代入式(2.2.21)和式(2.2.22)中，可以得到

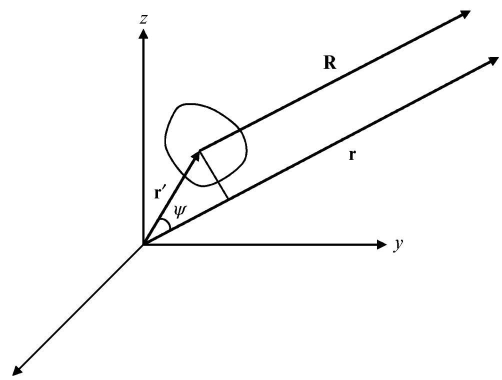


图2.6 对于远场区的观察点，$\mathbf{R}$和$\mathbf{r}$几乎相互平行

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\mathbf{N}, \qquad \mathbf{F} = \frac{\epsilon}{4\pi r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\mathbf{L} \tag{2.3.18}$$

式中，

$$\mathbf{N} = \iiint_V \mathbf{J}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr'\cos\psi}\,\mathrm{d}V', \qquad \mathbf{L} = \iiint_V \mathbf{M}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr'\cos\psi}\,\mathrm{d}V' \tag{2.3.19}$$

把式(2.3.18)代入式(2.1.37)和式(2.1.38)中，并且只保留主要项，得到远场为

$$\mathbf{E} \approx \frac{\mathrm{j}k}{4\pi r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\left[\hat{r}\times\mathbf{L} - \eta(\mathbf{N} - \hat{r}N_r)\right] \tag{2.3.20}$$

$$\mathbf{H} \approx -\frac{\mathrm{j}k}{4\pi r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\left[\frac{1}{\eta}(\mathbf{L} - \hat{r}L_r) + \hat{r}\times\mathbf{N}\right] \tag{2.3.21}$$

注意，由于$\hat{r}\times\mathbf{L} = \hat{\theta}L_\phi - \hat{\theta}L_\phi$ 和 $\mathbf{N} - \hat{r}N_r = \hat{\theta}N_\theta + \hat{\phi}N_\phi$，在远场的计算中其实只需要 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{N}$ 的角坐标分量。不难发现，远场没有任何径向分量，即远场相对于$\hat{r}$方向是横电磁场：

$$\mathbf{E} \approx -\frac{\mathrm{j}k}{4\pi r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\left[\hat{\theta}(L_\phi + \eta N_\theta) - \hat{\phi}(L_\theta - \eta N_\phi)\right] \tag{2.3.22}$$

$$\mathbf{H} \approx -\frac{\mathrm{j}k}{4\pi r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\frac{1}{\eta}\left[\hat{\theta}(L_\theta - \eta N_\phi) + \hat{\phi}(L_\phi + \eta N_\theta)\right] \tag{2.3.23}$$

只要源与坐标原点的距离为有限远，上述结论均成立。

为了用式(2.3.19)计算 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{N}$，首先要求出 $r'\cos\psi$ 的表达式。这可以通过用 $\mathbf{r}'$和$\hat{r}$点乘得到，即

$$r'\cos\psi = \mathbf{r}'\cdot\hat{r} = \mathbf{r}'\cdot\hat{x}\sin\theta\cos\phi + \mathbf{r}'\cdot\hat{y}\sin\theta\sin\phi + \mathbf{r}'\cdot\hat{z}\cos\theta \tag{2.3.24}$$

这里所用 $\mathbf{r}'$的表达式是由具体问题决定的。由式(2.3.20)和式(2.3.21)，可以得到坡印亭矢量为

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^* \\ &= \hat{r}\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left[\frac{1}{\eta}\left(|L_\theta|^2 + |L_\phi|^2\right) + \eta\left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right) + 2\mathrm{Re}\left(L_\phi N_\theta^* - L_\theta N_\phi^*\right)\right]\end{aligned} \tag{2.3.25}$$

可以看出，虽然两种源产生的总场是每种源产生的场的线性叠加，但其功率密度不是线性叠加的关系，因为还含有交叉项。

式(2.3.20)和式(2.3.21)表明，远区电场和磁场满足一个很简单的关系。将式(2.3.20)叉乘$\hat{r}$，得到

$$\hat{r}\times\mathbf{E} = -\frac{\mathrm{j}k}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\left[(\mathbf{L} - \hat{r}L_r) + \eta(\hat{r}\times\mathbf{N})\right] = \eta\mathbf{H} \tag{2.3.26}$$

这个结果可以更清楚地写为

$$\lim_{r\to\infty} r(\nabla\times\mathbf{E} + \mathrm{j}k\hat{r}\times\mathbf{E}) = 0 \tag{2.3.27}$$

磁场也满足相似的关系：

$$\lim_{r\to\infty} r(\nabla\times\mathbf{H} + \mathrm{j}k\hat{r}\times\mathbf{H}) = 0 \tag{2.3.28}$$

上面两个等式称为**索末菲辐射条件**[15]。这个条件对任何距离坐标原点有限远的源产生的辐射场均成立。它表明：(1)在离开源的远处，场只能从源向远处传播；(2)电场和磁场对传播方向来说是横向的，并且互相正交；(3)电场和磁场的幅度比值固定，等于 $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$。

2.3.4 圆电流环和磁偶极子

在介绍了远场近似法之后，我们可以处理更复杂一些的辐射问题。现在考虑一个半径为 a，携带均匀时谐电流 $\mathbf{I}=\hat{\phi}'I$ 的圆环的辐射(见图 2.7)。由于$\hat{\phi}'$不是一个常矢量，首先把$\hat{\phi}'$分解成$\hat{\phi}'=-\hat{x}\sin\phi'+\hat{y}\cos\phi'$，然后把 $\mathbf{r}'=a\cos\phi'\hat{x}+a\sin\phi'\hat{y}$代入式(2.3.24)中，得到 $r'\cos\psi=a\sin\theta\cos(\phi-\phi')$。把这些代入式(2.3.19)的第一个方程中，得到

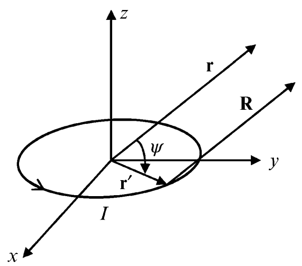


图 2.7　圆形电流环在自由空间中的辐射

$$\mathbf{N}=\int_0^{2\pi}(-\hat{x}I\sin\phi'+\hat{y}I\cos\phi')\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}ka\sin\theta\cos(\phi-\phi')}a\,\mathrm{d}\phi' \tag{2.3.29}$$

对于远场来说，仅需要求出 N_ϕ 和 N_θ。其中 N_ϕ 由下式给出：

$$\begin{aligned}N_\phi&=-N_x\sin\phi+N_y\cos\phi\\&=aI\int_0^{2\pi}\cos(\phi-\phi')\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}ka\sin\theta\cos(\phi-\phi')}\,\mathrm{d}\phi'\\&=aI\int_0^{\pi}\cos\Phi'\mathrm{e}^{\mathrm{j}ka\sin\theta\cos\Phi'}\,\mathrm{d}\Phi'+aI\int_\pi^{2\pi}\cos\Phi'\mathrm{e}^{\mathrm{j}ka\sin\theta\cos\Phi'}\,\mathrm{d}\Phi'\\&=aI\int_0^{\pi}\cos\Phi'\mathrm{e}^{\mathrm{j}ka\sin\theta\cos\Phi'}\,\mathrm{d}\Phi'-aI\left[\int_0^{\pi}\cos\Phi'\mathrm{e}^{\mathrm{j}ka\sin\theta\cos\Phi'}\,\mathrm{d}\Phi'\right]^*\end{aligned} \tag{2.3.30}$$

上式中的积分结果为[16]

$$\int_0^{\pi}\cos\Phi'\mathrm{e}^{\mathrm{j}ka\sin\theta\cos\Phi'}\,\mathrm{d}\Phi'=\mathrm{j}\pi J_1(ka\sin\theta) \tag{2.3.31}$$

式中，J_1为一阶贝塞尔函数，第 6 章将更详细地讨论这个函数。由此

$$N_\phi=\mathrm{j}2\pi aIJ_1(ka\sin\theta) \tag{2.3.32}$$

另一方面

$$N_\theta=N_x\cos\theta\cos\phi+N_y\cos\theta\sin\phi=0 \tag{2.3.33}$$

将式(2.3.32)和式(2.3.33)代入式(2.3.22)和式(2.3.23)中，得到远场为

$$\mathbf{E}\approx\hat{\phi}\frac{\eta kaI}{2r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}J_1(ka\sin\theta) \tag{2.3.34}$$

$$\mathbf{H}\approx-\hat{\theta}\frac{kaI}{2r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}J_1(ka\sin\theta) \tag{2.3.35}$$

对于小电流环，即 $ka\ll1$，$J_1(ka\sin\theta)\approx(ka\sin\theta)/2$。因此，远场可以简化为

$$\mathbf{E}\approx\hat{\phi}\frac{\eta(ka)^2I}{4r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\sin\theta \tag{2.3.36}$$

$$\mathbf{H}\approx-\hat{\theta}\frac{(ka)^2I}{4r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\sin\theta \tag{2.3.37}$$

我们可以把这个小电流环的辐射场与一个长度为 l 的磁流为 K 的 z 方向无限小磁偶极子的远场结果进行比较。假定这个磁偶极子位于坐标原点，可以证明它的远场为(见习题 2.14)

$$\mathbf{E}\approx-\hat{\phi}\frac{\mathrm{j}kKl}{4\pi r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\sin\theta \tag{2.3.38}$$

$$\mathbf{H} \approx \hat{\theta}\frac{\mathrm{j}kKl}{4\eta\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\sin\theta \tag{2.3.39}$$

将上述两式与式(2.3.36)和式(2.3.37)比较，会发现只要满足下列关系，这两种情况下的辐射场是完全相同的：

$$Kl = \mathrm{j}\omega\mu IS \tag{2.3.40}$$

式中，$S = \pi a^2$ 为电流环的面积。可以证明(见习题 2.16)，无限小电流环与磁偶极子不仅仅远场相同，它们的近场也相同。因此，小电流环与小磁偶极子是等效的，其中磁偶极子的磁矩由式(2.3.40)给出。显然，磁偶极子的场更容易求解。这个例子展示了磁流源的用途。

2.4　面电流和平面阵列的辐射

这一节首先考虑有限尺寸面电流在自由空间中的辐射，然后讨论由电偶极子组成的阵列的辐射。其目的是研究源在电磁场辐射中所起的作用。

2.4.1　面电流的辐射

考虑位于 xy 平面上，长为 A、宽为 B 的矩形面电流(见图 2.8)。其面电流密度为

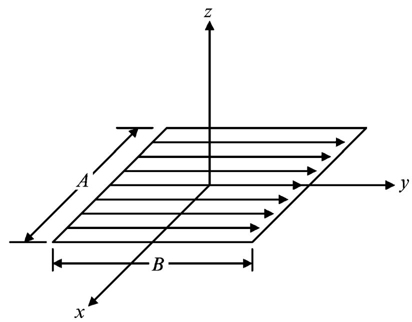


图 2.8　位于 xy 平面的矩形面电流

$$\mathbf{J}_s(x,y) = \hat{y}J_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(h_x x + h_y y)} \tag{2.4.1}$$

式中，J_0、h_x 和 h_y 均为常数。为了计算面电流在自由空间的辐射场，首先利用式(2.3.19)中的第一个方程求矢量函数 $\mathbf{N}$：

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \hat{y}J_0\int_{-B/2}^{B/2}\int_{-A/2}^{A/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(h_x x' + h_y y')}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi)}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \\ &= \hat{y}J_0 AB\frac{\sin X}{X}\frac{\sin Y}{Y}\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

式中，

$$X = (k\sin\theta\cos\phi - h_x)\frac{A}{2}, \qquad Y = (k\sin\theta\sin\phi - h_y)\frac{B}{2} \tag{2.4.3}$$

从式(2.3.20)可以得到电场远场为

$$E_\theta \approx -\frac{\mathrm{j}k\eta J_0 AB}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\cos\theta\sin\phi\frac{\sin X}{X}\frac{\sin Y}{Y} \tag{2.4.4}$$

$$E_\phi \approx -\frac{\mathrm{j}k\eta J_0 AB}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\cos\phi\frac{\sin X}{X}\frac{\sin Y}{Y} \tag{2.4.5}$$

若用两个参量 θ_s 和 ϕ_s 来控制相位常数，即

$$h_x = k\sin\theta_s\cos\phi_s, \qquad h_y = k\sin\theta_s\sin\phi_s \tag{2.4.6}$$

则 X 和 Y 可以表示成

$$X = (\sin\theta\cos\phi - \sin\theta_s\cos\phi_s)\frac{kA}{2} \tag{2.4.7}$$

$$Y = (\sin\theta\sin\phi - \sin\theta_s\sin\phi_s)\frac{kB}{2} \tag{2.4.8}$$

显然，辐射场在两个方向上幅度最大。第一个方向为 $\theta = \theta_s$ 和 $\phi = \phi_s$，在这个方向上