第 2 章　矩　　阵

2.1　知 识 要 点

2.1.1　矩阵的概念

将 m 行 n 列的数表称为 $m\times n$ **矩阵**，其中 $m\times n$ 称为矩阵的**型**；若两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的型相同，则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**；对于两个同型矩阵，若它们对应位置的元素分别相等，则称两个**矩阵相等**；矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记为 $-\boldsymbol{A}$.

一些特殊的矩阵：

（1）**零矩阵**：矩阵的所有元素都为 0 .

（2）**单位矩阵**：对角线元素均为 1，其余位置的元素均为 0 的方阵，一般记为 $\boldsymbol{E}$.

（3）**数量矩阵**：对角线元素相同，其余位置的元素均为 0 的方阵.

（4）**对角矩阵**：非对角线元素均为 0 的方阵.

（5）**上（下）三角形矩阵**：设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $a_{ij}=0$ ($i>j,\ i,j=1,2,\cdots,n$)，则称 $\boldsymbol{A}$ 为上三角矩阵；若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $a_{ij}=0$ ($i<j,\ \ i,j=1,2,\cdots,n$)，则称 $\boldsymbol{A}$ 为下三角矩阵.

（6）**对称（反对称）矩阵**：设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $a_{ij}=a_{ji}$ ($i,j=1,2,\cdots,n$)，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵；若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $a_{ij}=-a_{ji}$ ($i,j=1,2,\cdots,n$)，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵．显然，反对称矩阵的对角线上元素都为零.

2.1.2　矩阵的运算

（1）加法　若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则称阵 $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

（2）数量乘法　设 k 为常数，矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则称矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 为数与矩阵的数量乘法，记为 $k\boldsymbol{A}$.

矩阵的加法和数量乘法统称为**矩阵的线性运算**，矩阵的线性运算满足的性质：

1） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；　　2） $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

3） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$；　　4） $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$；

5） $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；　　6） $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

7） $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；　　8） $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$.

（3）矩阵乘法　若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，称矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$. 矩阵的乘法运算满足的性质：

1） $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；　　2） $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$；

3） $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$；　　4） $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

注　矩阵的乘法一般不满足交换律、消去律，若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可交换的.

（4）方阵的幂　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，可定义矩阵的乘幂．规定

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}，\quad \boldsymbol{A}^n=\underbrace{\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}_{n个}\ （n\text{ 为自然数}）.$$

矩阵的幂运算满足的运算性质：

1）$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$；　　2）$\left(\boldsymbol{A}^k\right)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$（$k,l$ 为自然数）.

（5）矩阵的转置　若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则称矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$．矩阵转置的运算性质：

1）$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；　　2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

3）$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；　　4）$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

（6）方阵的行列式　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，由 $\boldsymbol{A}$ 中元素按原顺序构成的行列式，称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记为 $|\boldsymbol{A}|$．方阵的行列式满足的运算性质：

1）$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=|\boldsymbol{A}|$；　　2）$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$（$n$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数，k 为常数）；

3）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵）.

2.1.3　伴随矩阵

设有方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，称矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^*$．注意伴随矩阵的构成方式，元素 a_{ij} 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 应该放在 $\boldsymbol{A}^*$ 的 (j,i) 位置．由伴随矩阵的定义可知，对于任意的方阵 $\boldsymbol{A}$，有

$$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

2.1.4　可逆矩阵

对于方阵 $\boldsymbol{A}$，若存在同阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**可逆矩阵**，或称 $\boldsymbol{A}$ **可逆**，并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**.

矩阵的逆满足的运算性质：

1）$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$；

2）$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}\quad(k\neq 0)$；

3）$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

4）$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$；

5）$\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

逆矩阵的几个主要结论：

1）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵唯一；

2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$；

3）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$），则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$；

4）当 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 可逆时，$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2.1.5　矩阵分块

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用一些横线和竖线分成若干个小矩阵，每个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个子块，以子块为元素的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**分块矩阵**.

几种特殊的分块矩阵如下.

（1）若方阵 $\boldsymbol{A}$ 经分块后可以表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 均为方阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**分块对角矩阵**.

（2）若方阵 $\boldsymbol{A}$ 经分块后可以表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_m & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 均为方阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**分块反对角矩阵**.

（3）若方阵 $\boldsymbol{A}$ 经分块后可以表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1m} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_{mm} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ii}\ (i=1,2,\cdots,m)$ 均为方阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**分块上三角矩阵**.

（4）若方阵 $\boldsymbol{A}$ 经分块后可以表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{m1} & \boldsymbol{A}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{mm}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ii}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 均为方阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**分块下三角矩阵**.

2.1.6　分块矩阵的运算

（1）加法　若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 有意义，对 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 进行相同的分块后得到的分块矩阵可以相加，并且加法表现为对应的子块相加.

（2）数量乘法　数与分块矩阵的乘法表现为数乘到每个子块上.

（3）矩阵乘法　若 $\boldsymbol{AB}$ 有意义，对 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 进行分块时只要 $\boldsymbol{A}$ 的列分割方式与 $\boldsymbol{B}$ 的行分割方式相同，得到分块矩阵可以相乘，并且乘法与普通矩阵的乘法运算一致.

（4）转置　把分块矩阵行上的子块换到同序数的列上，再对每个子块取转置，得到的矩阵称为分块矩阵的转置矩阵.

（5）分块矩阵的行列式　对于分块对角矩阵，分块上（下）三角矩阵，它们的行列式都等于对角线上子块的行列式相乘，即

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & & & \boldsymbol{O}\\ & \boldsymbol{A}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & \boldsymbol{A}_{mm}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1m}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_{mm}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{m1} & \boldsymbol{A}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{mm}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_m|.$$

（6）分块矩阵的逆矩阵

1）若分块对角矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \boldsymbol{O}\\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \boldsymbol{O}\\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & & \\ \boldsymbol{O} & & & \boldsymbol{A}_m^{-1}\end{pmatrix}$；

2）若分块反对角矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & & & \boldsymbol{A}_1\\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_m & & & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & & & \boldsymbol{A}_m^{-1}\\ & & \iddots & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$；

3）若分块上三角矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 可逆，则其逆为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$；

4）若分块下三角矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 可逆，则其逆为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$.

2.1.7　线性方程组

含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

称为 n **元线性方程组**，其中，a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots n)$ 称为未知数的**系数**，b_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 为**常数项**．若常数项 b_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 全为零，称线性方程组为**齐次线性方程组**，否则称其为**非齐次线性方程组**．利用矩阵乘法，n 元线性方程组可以表示为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的形式，其中的

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为线性方程组的**系数矩阵**．对于 n 个未知数、n 个方程的线性方程组有：

克拉默法则　若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式不等于 0，则该线性方程组有且只有唯一解，并且其解可表示为

$$x_1=\frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}, x_2=\frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|}, \cdots, x_n=\frac{|\boldsymbol{A}_n|}{|\boldsymbol{A}|},$$

其中，$\boldsymbol{A}_j$ 为将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列元素 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ 对应换成 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 得到的矩阵．

由克拉默法则容易得到如下结论：

（1）如果非齐次线性方程组的系数矩阵的行列式不等于零，则其有唯一解．反之，若非齐次线性方程组无解或解不唯一，则它的系数矩阵的行列式为零．

（2）如果齐次线性方程组的系数矩阵的行列式不等于零，则其只有零解．反之，若齐次线性方程组有非零解，则它的系数矩阵的行列式为零．

2.2　典型例题分析

2.2.1　题型一、矩阵的乘法及乘法的运算规律

例 2.2.1　证明：两个上三角形矩阵的乘积是上三角形矩阵；上三角形矩阵的伴随矩阵是上三角形矩阵，若其可逆，则其逆矩阵也是上三角形矩阵．

证　不妨设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素为 $0,0,\cdots,0,a_{ii},a_{i,i+1},\cdots,a_{in}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列元素为 $b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{jj},0,\cdots,0$，当 $i>j$ 时，矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的 (i,j) 位置元素 $a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$，显然为零，故 $\boldsymbol{AB}$ 为上三角形矩阵．

由于 $\boldsymbol{A}$ 为上三角形，因此当 $i<j$ 时，$|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 为上三角行列式，且主对角线中含有 0 元素（$a_{ii}=a_{i+1,i+1}=\cdots=a_{jj}=0$），即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{i-1,i-1}0\cdots 0a_{j+1,j+1}\cdots a_{nn}=0,$$

进而 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=0$，再由 $\boldsymbol{A}^*$ 的定义可知 $\boldsymbol{A}^*$ 为上三角形矩阵．当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，由 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 可知，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是上三角形矩阵．

例 2.2.2　已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为行矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$．

解　由于

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵．进而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}&=\left(\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\left(\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)=\boldsymbol{E}-\frac{4}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+\left(\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\right)^2(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\\&=\boldsymbol{E}-\frac{4}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+\frac{4}{\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)^2}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{E}-\frac{4}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+\frac{4}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

命题得证．

例 2.2.3　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 3 阶实对称矩阵与反实对称矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2$，证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$．

证　不妨设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2 & & * \\ & a_{12}^2+a_{22}^2+a_{23}^2 & \\ * & & a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -(b_{12}^2+b_{13}^2) & & * \\ & -(b_{12}^2+b_{23}^2) & \\ * & & -(b_{13}^2+b_{23}^2) \end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2$，因此有

$$a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=-(b_{12}^2+b_{13}^2),$$

从而 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=b_{12}=b_{13}=0$，类似地可得到 $a_{22}=a_{23}=a_{33}=b_{23}=0$，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

例 2.2.4　【1994（1）】已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\beta}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，则 $\boldsymbol{A}^n=$ _____.

解　由题意有

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(1,2,3)\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}=1+1+1=3,\qquad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=3$，因此

$$\boldsymbol{A}^n=\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)^n=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\cdots(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\underbrace{(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})}_{n-1}\boldsymbol{\beta}=3^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}.$$

例 2.2.5　【1999（3）】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$n\geqslant 2$ 为正整数，则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$ _____.

解　由于

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A},$$

从而

$$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-2}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

例 2.2.6　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.（$n\geqslant 2$）

解　记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&b&c\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b&c\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}+a\boldsymbol{E},$$

由于 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，因此

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{B}+a\boldsymbol{E})^n=C_n^0\boldsymbol{B}^0(a\boldsymbol{E})^n+C_n^1\boldsymbol{B}^1(a\boldsymbol{E})^{n-1}+C_n^2\boldsymbol{B}^2(a\boldsymbol{E})^{n-2}+\cdots+C_n^n\boldsymbol{B}^n(a\boldsymbol{E})^0,$$

而

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&b&c\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&b&c\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&b^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^3=\begin{pmatrix}0&0&b^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&b&c\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O},$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=C_n^0(a\boldsymbol{E})^n\boldsymbol{B}^0+C_n^1(a\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{B}^1+C_n^2(a\boldsymbol{E})^{n-2}\boldsymbol{B}^2\\&=a^n\boldsymbol{E}+na^{n-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}^2\\&=\begin{pmatrix}a^n&0&0\\0&a^n&0\\0&0&a^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&na^{n-1}b&na^{n-1}c\\0&0&na^{n-1}b\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}b&na^{n-1}c+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2\\0&a^n&na^{n-1}b\\0&0&a^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2.2.2　题型二、伴随矩阵的相关问题

认真把握伴随矩阵的定义，注意用代数余子式构造伴随矩阵方式，特别记住 2 阶方阵伴随矩阵的写法，即“主对角线上元素互换，副对角线上元素变号”；涉及伴随矩阵的计算与证明，一般应从具体问题出发，并结合公式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 进行分析，特别地，当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 常用 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 替换.

例 2.2.7　【2005（3）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵. 若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数，则 a_{11} 为（　　）.

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；　　（B）3；　　（C）$\dfrac{1}{3}$；　　（D）$\sqrt{3}$.

解　由 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，有

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^2,$$

再由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，以及 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，有

$$\left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\right| = \left\|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}\right| = \left|\boldsymbol{A}\right|^3,$$

从而有$\left|\boldsymbol{A}\right| = 1$或$\left|\boldsymbol{A}\right| = 0$，因为

$$\left|\boldsymbol{A}\right| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 3a_{11}^2 \neq 0,$$

故$\left|\boldsymbol{A}\right| = 1$，进而解得$a_{11} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，因此本题选择（A）.

例 2.2.8　【2009（1，3）】设$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$分别为2阶矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$的伴随矩阵，若$\left|\boldsymbol{A}\right| = 2$，$\left|\boldsymbol{B}\right| = 3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$的伴随矩阵为（　　）.

（A）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^* \\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$；　　（B）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^* \\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$；　　（D）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

解　由于$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}\left|\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{B}\right| = 2\times 3 = 6 \neq 0$，故$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$可逆，从而

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = 6\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 6\boldsymbol{B}^{-1} \\ 6\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\left|\boldsymbol{B}\right|\boldsymbol{B}^{-1} \\ 3\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

所以本题选择（B）.

例 2.2.9　【1996（4）】设$\boldsymbol{A}$为$n\,(n \geqslant 2)$阶非奇异矩阵，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则$\left(\boldsymbol{A}^*\right)^*$等于（　　）.

（A）$\left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1}\boldsymbol{A}$；　　（B）$\left|\boldsymbol{A}\right|^{n+1}\boldsymbol{A}$；　　（C）$\left|\boldsymbol{A}\right|^{n-2}\boldsymbol{A}$；　　（D）$\left|\boldsymbol{A}\right|^{n+2}\boldsymbol{A}$.

解　由于$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}$，以及$\boldsymbol{A}$为非奇异矩阵，有$\boldsymbol{A}^* = \left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{A}^{-1}$，进而

$$\left(\boldsymbol{A}^*\right)^* = \left|\boldsymbol{A}^*\right|\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1} = \left|\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\left(\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \left|\boldsymbol{A}\right|^n\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\left|\boldsymbol{A}\right|^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \left|\boldsymbol{A}\right|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

本题选择（C）.

2.2.3　题型三、矩阵可逆的判定及逆矩阵的求法

矩阵可逆的判定方法主要如下几种.

（1）矩阵的行列式不为零.

（2）两个方阵乘积为单位阵，则两个方阵都可逆且互为逆矩阵.

（3）一个矩阵可以表示为一些可逆矩阵的乘积，则该矩阵可逆.

（4）方阵是满秩的，则其可逆（参见第 3 章）.

（5）方阵的全部特征值不为零，则其可逆（参见第 5 章）.

逆矩阵的求解方法主要有如下几种.

（1）解方程组的方法．这种方法在计算上很麻烦，基本不用．

（2）伴随矩阵的方法．常在证明中使用的公式有：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\ ,\quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\ ,$$

在计算上，这种方法也基本不用，但应记住 2 阶方阵的逆矩阵公式．

（3）矩阵的初等变换的方法．这是求逆计算中主要使用的方法，也是一个重要的考点，必须熟练掌握（参见第 3 章）．

例 2.2.10　讨论矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & \cdots & 1+a_1b_n \\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & 1+a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+a_nb_1 & 1+a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{pmatrix}$ 是否可逆．

解　由于

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & \cdots & 1+a_1b_n \\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & 1+a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+a_nb_1 & 1+a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

有：当 $n=1$ 时，$|\boldsymbol{A}| = 1+a_1b_1$；当 $n=2$ 时，$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_2-a_1)(b_2-b_1)$；当 $n>2$ 时，

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix} = 0\ .$$

因此，当 $n=1$ 时，若 $a_1b_1 \neq -1$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆；当 $n=2$ 时，若 $a_2 \neq a_1$ 且 $b_2 \neq b_1$，$\boldsymbol{A}$ 可逆；而 $n>2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 不可逆．

例 2.2.11　【2003（3）】设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a, 0, \cdots, 0, a)^{\mathrm{T}}, a<0$；$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $a =$ _____.

解　由题意

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = (a, 0, \cdots, a)\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = 2a^2,\quad \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}(a, 0, \cdots, a) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & \cdots & a^2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^2 & 0 & \cdots & a^2 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{O}\ ,$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，从而

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right) = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

$$=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-(1-\frac{1}{a}+2a)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},$$

于是$1-\frac{1}{a}+2a=0$，解得$a=\frac{1}{2},a=-1$，再由已知$a<0$，所以$a=-1$.

例 2.2.12　设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，且满足$\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，判断$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$是否一定可逆，如果可逆，求出其逆.

解　由$\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$整理可得

$$(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\left(\frac{4}{15}\boldsymbol{E}-\frac{1}{30}\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{E},$$

故$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$必可逆，且有$(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{4}{15}\boldsymbol{E}-\frac{1}{30}\boldsymbol{A}$.

对于矩阵$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$，由于$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$或$\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{E}$都满足$\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，并且当$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$时，$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$可逆，而$\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{E}$时，$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=3\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$不可逆，因此$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$不一定可逆.

例 2.2.13　已知$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}$均为可逆矩阵，证明矩阵$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}$及$\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$都可逆.

证　由于

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{AE}-\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{ABB}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^{-1},$$

故$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}$可逆．又因为

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}&=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{AA}^{-1}-\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}\\&=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}[\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})]A^{-1}=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}\\&=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1},\end{aligned}$$

而$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}$可逆，因此$\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$也可逆.

例 2.2.14　设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-3&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，求$\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}$.

解　由$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-3&1\end{vmatrix}=1$，有$\boldsymbol{A}$可逆，从而$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，因此

$$\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-3&1\end{pmatrix}.$$

例 2.2.15　设可逆矩阵$\boldsymbol{A}$的每行元素之和都等于常数a，证明$a\neq0$，且$\boldsymbol{A}^{-1}$的每行元素之和都等于$\frac{1}{a}$.

证法 1　不妨设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{A}$ 可逆，有 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，从而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

故 $a\neq 0$．再由 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$，以及 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的第1行元素为 $\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{21},\cdots,\boldsymbol{A}_{n1}$ 可知，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第1行元素之和为

$$\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{21}+\cdots+\boldsymbol{A}_{n1})=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\frac{|\boldsymbol{A}|}{a}=\frac{1}{a},$$

命题得证.

证法 2　若设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，则由已知有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix},$$

再由 $\boldsymbol{A}$ 可逆，有 $a\neq 0$，从而

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{a} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{a} \end{pmatrix},$$

由矩阵乘法可知，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每行元素之和都等于 $\dfrac{1}{a}$.

例 2.2.16　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&1&3\\4&2&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的全部代数余子式之和.

解　由于 $\boldsymbol{A}^*$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的全部代数余子式构成，在 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，可以利用 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 求出 $\boldsymbol{A}^*$，再求全部代数余子式之和．将 $\boldsymbol{A}$ 分块并记为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}4&2\\-1&0\end{pmatrix}$，

由于 $|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1\neq 0$，$|\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix}4&2\\-1&0\end{vmatrix}=2\neq 0$，因此 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}_1|}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{pmatrix}4&2\\-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}_2|}\begin{pmatrix}0&-2\\1&4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-2\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\\frac{1}{2}&2\end{pmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2^{-1}\\\boldsymbol{A}_1^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&\frac{1}{2}&2\\3&-2&0&0\\-1&1&0&0\end{pmatrix}.$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&0&1&2\\0&0&1&3\\4&2&0&0\\-1&0&0&0\end{vmatrix}\xlongequal[r_2\leftrightarrow r_4]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}4&2&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&1&2\\0&0&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&2\\-1&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=2,$$

因此

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=2\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&\frac{1}{2}&2\\3&-2&0&0\\-1&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-2\\0&0&1&4\\6&-4&0&0\\-2&2&0&0\end{pmatrix},$$

所以$|\boldsymbol{A}|$的全部代数余子式之和为$(-2)+1+4+6+(-4)+(-2)+2=5$.

2.2.4　题型四、矩阵的分块及分块运算

矩阵分块的主要目的是为了简化高阶矩阵运算，要注意分块的方式及分块运算怎么进行．合理分块后，分块矩阵之间的运算与矩阵的运算规则相似，矩阵分块常和矩阵的逆、行列式及矩阵的幂等知识点构成一些综合性题目．

例 2.2.17　【2010（3）】设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为3阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$_____.

解　由题意

$$2=|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}^{-1}||\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

所以

$$|\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}|=2|\boldsymbol{B}^{-1}||\boldsymbol{A}|=2\times\frac{1}{2}\times 3=3.$$

例 2.2.18　【1988（1）】设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$，其中$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$均为4维列向量，且已知行列式$|\boldsymbol{A}|=4$，$|\boldsymbol{B}|=1$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$_____.

解　由题意

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4|=8|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|\\&=8\big(|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|+|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|\big)=8\big(|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|\big)=40.\end{aligned}$$

例 2.2.19　已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-3\\0&0&-1&3\end{pmatrix}$，求$|\boldsymbol{A}^6|$和$\boldsymbol{A}^8$.

解　依题意，记$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&3\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$，对于$\boldsymbol{A}_1$有，$|\boldsymbol{A}_1|=1$，且

$$\boldsymbol{A}_1^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\times 2\\0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_1^3=\begin{pmatrix}1&3\times 2\\0&1\end{pmatrix},\quad\cdots,\quad \boldsymbol{A}_1^8=\begin{pmatrix}1&8\times 2\\0&1\end{pmatrix};$$

对于$\boldsymbol{A}_2$有$|\boldsymbol{A}_2|=0$，且

$$\boldsymbol{A}_2^8=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&3\end{pmatrix}^8=\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\end{pmatrix}\right)^8=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\underbrace{\left(\begin{pmatrix}1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)\cdots\left(\begin{pmatrix}1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)}_{7个}\begin{pmatrix}1&-3\end{pmatrix}$$

$$=4^7\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\end{pmatrix}=4^7\boldsymbol{A}_2,$$

因此，

$$|\boldsymbol{A}^6|=|\boldsymbol{A}|^6=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_1&O\\O&\boldsymbol{A}_2\end{vmatrix}^6=\big(|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\big)^6=0,$$

$$A^8=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}^8=\begin{pmatrix} A_1^8 & O \\ O & A_2^8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 8\times 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^7\times 1 & -4^7\times 3 \\ 0 & 0 & -4^7\times 1 & 4^7\times 3 \end{pmatrix}.$$

例 2.2.20　【1997（3）】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量，b 为常数，记分块矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & 0 \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^* & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵.

（1）计算并化简 $\boldsymbol{PQ}$.（2）证明：$\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

解　（1）由题意，及 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，有

$$\boldsymbol{PQ}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & 0 \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^* & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}+|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}+b|\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ 0^{\mathrm{T}} & |\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}) \end{pmatrix}.$$

（2）由（1）有

$$|\boldsymbol{PQ}|=|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{Q}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ 0^{\mathrm{T}} & |\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}) \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|^2(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}),$$

再由 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，及 $|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}|\neq 0$，可得 $|\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})$，所以 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{Q}|\neq 0$，即 $-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

例 2.2.21　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，分块矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$. 证明 $\boldsymbol{D}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{D}^{-1}$.

证　由题意

$$|\boldsymbol{D}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1} \\ 2\boldsymbol{A}^{-1} & 2\boldsymbol{A}^{-1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{vmatrix}$$

$$=|2\boldsymbol{A}^{-1}||2\boldsymbol{B}^{-1}|\neq 0,$$

从而 $\boldsymbol{D}$ 可逆，设 $\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{pmatrix}$，则有

$$\boldsymbol{DD}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_1+(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_3 & (\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_2+(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_4 \\ (\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_1+(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_3 & (\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_2+(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix},$$

因此

$$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_1+(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{E}，\quad (\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_2+(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{O}，$$
$$(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_1+(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{O}，\quad (\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_2+(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{E}，$$

解得

$$\boldsymbol{X}_1=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})/4，\quad \boldsymbol{X}_2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})/4，\quad \boldsymbol{X}_3=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})/4，\quad \boldsymbol{X}_4=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})/4，$$

所以

$$\boldsymbol{D}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) & (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\\ (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) & (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\end{pmatrix}.$$

2.2.5　题型五、矩阵方程的求解

求解矩阵方程的基本原则是“先化简，后计算”，以 $\boldsymbol{X}$ 是未知矩阵为例，一般先将已知中含有 $\boldsymbol{X}$ 的矩阵等式化简为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 等基本形式，若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆，可进一步化简为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CB}^{-1}$，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$，然后再将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 代入进行计算；若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不可逆，则应假设 $\boldsymbol{X}$ 的元素形式，进行矩阵乘法，按矩阵相等联立方程组来解.

例 2.2.22　【1998（3）】设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 伴随矩阵，则 $\boldsymbol{B}=$_____.

解　由题意 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，再由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$，有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^{-1}，$$

整理可得

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{AB}-8\boldsymbol{E}，$$

从而有

$$\boldsymbol{B}=8(2\boldsymbol{A}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})^{-1}，$$

其中

$$(2\boldsymbol{A}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}，$$

因此

$$\boldsymbol{B}=8\begin{pmatrix}4&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}^{-1}=8\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

例 2.2.23　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA}^*=3\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{-1}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$．

解　方程两边右乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$(\boldsymbol{XA}^*)\boldsymbol{A}=\left(3\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{-1}\right)\boldsymbol{A},$$

整理得

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})=3\boldsymbol{XA}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A},$$

因此

$$\boldsymbol{X}\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}=3\boldsymbol{XA}+\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{X}(\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E},$$

故 $\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{X}=(\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A})^{-1},$$

而

$$\left|\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=1\times2\times(-1)=-2,$$

所以

$$\boldsymbol{X}=(-2\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A})^{-1}=\left(\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&6&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}&0&0\\0&-\frac{1}{8}&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

2.2.6　题型六、克莱姆法则的应用

克莱姆法则适用于方程数与未知数相等的线性方程组，该法则建立了方程组中系数、常数与方程组解之间的关系．在利用该法则时，需要注意非齐次线性方程组系数行列式为零，方程组存在无解和无穷多解两种情况．

例 2.2.24　设 a 为常数，讨论线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=a\\x_1+x_2+ax_3=a^2\end{cases}$ 解的情况．

解　由于方程组的系数矩阵的行列式

$$\left|\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}\xlongequal[r_1+r_3]{r_1+r_2}\begin{vmatrix}a+2&a+2&a+2\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2,$$

从而当 $a\neq1$，$a\neq-2$ 时，$\left|\boldsymbol{A}\right|\neq0$，方程组有唯一解，否则方程组无解或有无穷多解．

当 $a=1$ 时，方程组化为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=1 \end{cases},$$

即 $x_1+x_2+x_3=1$，故其有无穷多解，而当 $a=-2$ 时，方程组化为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-2x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2-2x_3=4 \end{cases},$$

这需要 x_1,x_2,x_3 满足 $0x_1+0x_2+0x_3=3$，因此方程组无解.

例 2.2.25　【1996（3）】设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $a_i\neq a_j\ (i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n)$，则线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解是_____.

解　由题意，由范德蒙德行列式有 $\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)\neq 0$．从而方程组有唯一解，并且

$$x_j=\frac{D_j}{\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|}\quad (j=1,2,\cdots,n),$$

其中 D_j 为将 $\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|$ 的第 j 列用 $\boldsymbol{b}$ 替换后对应的行列式，因此有

$$D_1=\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|,\qquad D_j=0\quad (j=2,\cdots,n),$$

故线性方程组的解是 $\boldsymbol{x}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

例 2.2.26　求二次多项式 $f(x)$，使其满足 $f(1)=2$，$f(2)=6$，$f(3)=12$.

解　设 $f(x)=a+bx+cx^2$，由题意，可得到以 a，b，c 为未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a+b1+c1^2=2, \\ a+b2+c2^2=6, \\ a+b3+c3^2=12, \end{cases}$$

其系数矩阵的行列式

$$\left|\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{范德蒙德}}(3-2)(3-1)(2-1)=2\neq 0,$$

因此，方程组有唯一解．又因为