

第2章 导数与微分

2.1 知识要点

2.1.1 导数的概念

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数为:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

左导数、右导数的定义分别为:

$$\begin{aligned} f'_-(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \\ f'_+(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

显然, $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数、右导数都存在并且相等.

在讨论初等函数在定义区间端点的可导性或分段函数在分段点处的可导性时, 往往利用左导数、右导数进行讨论.

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内任意一点 x 处都可导, 则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导. 对于 $\forall x \in (a, b)$, 有

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

若 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 并且 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 都存在, 则称 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可导. 类似可以给出函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 或 $(a, b]$ 上可导的定义.

2.1.2 导数的几何意义与物理意义

1. 导数的几何意义

若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率, 从而曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的法线方程为

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

其中 $f'(x_0) \neq 0$. 若 $f'(x_0) = 0$, 则法线方程为 $x = x_0$.

2. 导数的物理意义

设质点作变速直线运动, 若路程 y 可以表示为时间 x 的函数 $y = f(x)$, 则 $f'(x_0)$ 表示在 $x = x_0$ 时刻的瞬时速度.

2.1.3 基本初等函数的导数公式

- | | |
|--|--|
| (1) $c' = 0$; | (2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α 为任意实数); |
| (3) $(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$); | (4) $(e^x)' = e^x$; |
| (5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($a > 0, a \neq 1$); | (6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; |
| (7) $(\sin x)' = \cos x$; | (8) $(\cos x)' = -\sin x$; |
| (9) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$; | (10) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$; |
| (11) $(\sec x)' = \sec x \tan x$; | (12) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$; |
| (13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; | (14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; |
| (15) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$; | (16) $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$. |

2.1.4 导数的四则运算法则

如果函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 均可导, 那么它们的和、差、积、商 (除分母为零的点外) 都可导, 并且:

- $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$;
- $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$;
- $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$, 其中 $v(x) \neq 0$.

推论 若 $u_1, \dots, u_k$ 均为 x 的函数且可导, k 为某个正整数, c 为某个常数, 则

- $(u_1 + \dots + u_k)' = u_1' + \dots + u_k'$;
- $(cu)' = cu'$;
- $(u_1 u_2 \cdots u_k)' = u_1' u_2 \cdots u_k + u_1 u_2' \cdots u_k + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_k'$;
- $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$, 其中 $v \neq 0$.

2.1.5 常用求导法则

1. 复合函数的求导法则

若函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x 处有导数 $\varphi'(x)$, 函数 $y = f(u)$ 在对应点 $u = \varphi(x)$ 处有导数 $f'(u)$, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可导, 且有

$$\{f[\varphi(x)]\}' = f'(u)\varphi'(x), \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

2. 反函数的求导法则

设单调连续函数 $x = \varphi(y)$ 在点 y 处可导, 且 $\varphi'(y) \neq 0$, 则其反函数 $y = f(x)$ 在对应点 x 处可导, 且

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

3. 隐函数的求导法则

设 $y = f(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数, 将方程中的 y 看成 x 的函数, 方程两边同时对 x 求导 (注意 y 为 x 的函数, 对 y 的函数求导时, 需要用复合函数求导法则), 解出 y' 即可.

4. 对数求导法则

先对函数两边取对数, 将其变成隐函数, 然后利用隐函数求导法则即可. 当 $f(x)$ 为多个函数的乘积或商的形式, 或者为幂指函数形式时, 可考虑使用对数求导法则进行求解.

5. 参数求导法则

设 x 和 y 的函数关系 $y = f(x)$ 由参数方程

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

给定, 若函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均可导, $x'(t) \neq 0$, 则有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

2.1.6 高阶导数

1. 高阶导数的定义

函数 $y = f(x)$ 导数的导数称为 $f(x)$ 的**二阶导数**, 记为

$$f''(x), \quad y'', \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

即有

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}, \text{ 或 } f''(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f'(t) - f'(x)}{t - x}.$$

若 $y = f(x)$ 在 x 处的二阶导数存在, 也称函数 $f(x)$ 在点 x 处**二阶可导**. 一般地, $y = f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 **n 阶导数**, 记为

$$f^{(n)}(x), \quad y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n},$$

即有

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \text{ 或 } \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right).$$

同理, 若 $y = f(x)$ 在 x 处的 n 阶导数存在, 也称函数 $f(x)$ 在点 x 处 n 阶可导.

注 根据二阶导数的定义, 若 $y = f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导, 即 $f''(x_0)$ 存在, 则 $f'(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内一定有定义; 二阶以及二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

2. 莱布尼兹公式

设函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 均 n 阶可导, 则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

其中 $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$.

3. 参数求导法则

设 x 和 y 的函数关系 $y = f(x)$ 由参数方程

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

给定, 若函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均二阶可导, 且 $x'(t) \neq 0$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^2} \cdot \frac{1}{x'(t)} \\ &= \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^3}. \end{aligned}$$

4. 几个常用的高阶导数公式

$$(1) (\sin x)^{(n)} = \sin \left(x + \frac{n}{2} \pi \right);$$

$$(2) (\cos x)^{(n)} = \cos \left(x + \frac{n}{2} \pi \right);$$

$$(3) (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0, a \neq 1).$$

2.1.7 微分的概念与性质

1. 微分的概念

设函数 $y = f(x)$ 在点 x 的某个邻域内有定义, 当自变量在点 x 处取得增量 Δx 时 (点 $x + \Delta x$ 仍在该邻域内), 函数 y 相应地取得改变量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, 若 Δy 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0),$$

其中 A 可以与 x 有关, 但与 Δx 无关, 则称 $y = f(x)$ 在点 x 处**可微**, 并称 $A\Delta x$ 为 $y = f(x)$ 在点 x 处的**微分**, 记作 dy 或 $df(x)$, 即有

$$dy = df(x) = A\Delta x.$$

由定义, 微分 dy 是 Δx 的线性函数, 当 $A \neq 0$ 时, 也称微分 dy 是增量 Δy 的线性主部函数, 微分 dy 与增量 Δy 仅相差一个关于 Δx 的高阶无穷小, 即 $dy = \Delta y + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0)$.

2. 导数与微分的相关定理

函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可微的充分必要条件是 $y = f(x)$ 在点 x 处可导, 并且 $dy = f'(x)\Delta x$.

根据微分的定义, $dx = (x)' \Delta x = \Delta x$, 因此函数 $y = f(x)$ 在点 x 处的微分最终可以表示为

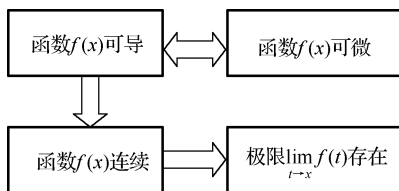
$$dy = f'(x)dx.$$

从导数与微分的关系可以看到, 一元函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可导与可微是等价的, 且有

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$, 即导数可视为函数的微分 dy 与自变量微分 dx 的商, 因此, 导数也被称为“微商”.

3. 极限、连续及微分之间的关系

设函数 $y = f(x)$ 在点 x 的某个邻域内有定义, 则函数的极限、连续、偏导数及微分之间有如下关系:



4. 微分的四则运算法则

设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在点 x 处均可微, 则有:

$$(1) \quad d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$(2) \quad d(uv) = vdu + u dv;$$

$$(3) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}, \text{ 其中 } v \neq 0.$$

5. 复合函数的微分法则

设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x 处可微, $y = f(u)$ 在对应点 $u = \varphi(x)$ 处可微, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可微, 且

$$dy = y'_x dx = f'(u)\varphi'(x)dx.$$

由于 $du = \varphi'(x)dx$, 所以 $y = f[\varphi(x)]$ 的微分也可以表示为

$$dy = f'(u)du.$$

这说明对于函数 $y = f(u)$, 不论 u 是自变量还是中间变量, 其微分都可以表示为如下形式

$$dy = f'(u)du,$$

这一性质称为一阶微分形式不变性.

2.1.8 微分在近似计算中的应用

1. 函数的近似计算公式

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微, 根据微分的定义, 当 $|\Delta x|$ 很小时, 有

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)dx = f'(x_0)\Delta x,$$

从而

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

若取 $x = x_0 + \Delta x$, 则当 $|x - x_0|$ 很小时, 有

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

2. 一些常见的近似公式

当 $|x|$ 很小时, 有:

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin x &\approx x; & (2) \quad \tan x &\approx x; & (3) \quad \arcsin x &\approx x; \\ (4) \quad e^x &\approx 1 + x; & (5) \quad \ln(1+x) &\approx x; & (6) \quad \sqrt[n]{1+x} &\approx 1 + \frac{x}{n}. \end{aligned}$$

*3. 误差估计

设某个量的精确值为 A , 它的近似值为 a , 则称 $|A - a|$ 为 a 的**绝对误差**, $\frac{|A - a|}{|a|}$ 称为 a 的**相对误差**. 事实上, 在实际问题中, 由于精确值 A 往往无法得到, 故绝对误差和相对误差也就无法求得.

若 $|A - a| \leq \delta$, 则称 δ 为**绝对误差限**, $\frac{\delta}{|a|}$ 为**相对误差限**. 绝对误差限与相对误差限通常也称为**绝对误差**与**相对误差**.

2.2 典型例题分析

2.2.1 题型一、导数与微分的定义问题

例 2.2.1 【2007 (1, 3)】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是 ().

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$;
 (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$;
 (C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在;
 (D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

解 答案选 (D). 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 由

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

可知命题 (A) 正确, 类似可推知命题 (B) 正确. 又因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0),$$

故命题 (C) 正确. 故由排除法可知命题 (D) 是错误的. 事实上, 若取 $f(x) = |x|$, 显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |-x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0,$$

但函数 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导.

例 2.2.2 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \cot^2 x (\cos(\sec^2 x) - \cos 1)$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(1 + \tan^2 x) - \cos 1}{\tan^2 x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos(1 + u) - \cos 1}{u}$
 $= (\cos u)' \Big|_{u=1} = -\sin 1.$

例 2.2.3 已知 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - 2\Delta x)}{\Delta x} = x^2 + \sin x$, 试求 $df(x)$.

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - 2\Delta x)}{\Delta x} &= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - 2\Delta x)}{2\Delta x} = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x - 2\Delta x) - f(x)}{-2\Delta x} \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t} = 2f'(x), \end{aligned}$$

因此 $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + \sin x)$, 从而

$$df(x) = f'(x)dx = \frac{1}{2}(x^2 + \sin x)dx.$$

例 2.2.4 【2006 (3)】设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$, 则下列结论正确的是 ().

- (A) $f(0) = 0$ 且 $f'_-(0)$ 存在; (B) $f(0) = 1$ 且 $f'_-(0)$ 存在;
 (C) $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0)$ 存在; (D) $f(0) = 1$ 且 $f'_+(0)$ 存在.

解 令 $t = h^2$, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = 1,$$

由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 故

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} \cdot t = 1 \times 0 = 0.$$

且

$$1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'_+(0).$$

故选项 (C) 正确.

例 2.2.5 【2011 (3)】设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = ()$.

- (A) $-2f'(0)$; (B) $-f'(0)$; (C) $f'(0)$; (D) 0 .

解 根据导数的定义

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3}$$

$$= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0).$$

故选项 (B) 正确.

例 2.2.6 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的一个充要条件是 ().

- (A) $\lim_{h \rightarrow +\infty} h f\left(\frac{1}{h}\right)$ 存在; (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h}$ 存在;
 (C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(e^h - 1)$ 存在; (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(\cos h - 1)$ 存在.

解 答案选 (C). 因为, 令 $t = e^h - 1$, 则 $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0$, 从而

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(e^h - 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e^h - 1)}{e^h - 1} \cdot \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e^h - 1)}{e^h - 1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(0). \end{aligned}$$

选项 (A) 错误. 因为令 $t = \frac{1}{h}$, 则 $h \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$, 从而

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} h f\left(\frac{1}{h}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'_+(0),$$

即选项 (A) 中的极限存在仅保证了 $f'_+(0)$ 存在.

选项 (B) 错误. 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导可以推出极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h}$ 存在. 但

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h}$ 存在不一定能推出 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 如取 $f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0,$$

即极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h}$ 存在, 但函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

选项 (D) 错误. 因为令 $t = \cos h - 1$, 则 $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0^-$, 从而

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(\cos h - 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\cos h - 1)}{\cos h - 1} \cdot \frac{\cos h - 1}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\cos h - 1)}{\cos h - 1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h^2} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t} = -\frac{1}{2} f'_-(0), \end{aligned}$$

即选项 (D) 中极限存在仅保证了 $f'_-(0)$ 存在.

2.2.2 题型二、分段函数的求导问题

例 2.2.7 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ x^2 g(x) & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 为可导函数, 试求 $f'(x)$.

解 显然当 $x > 0$ 时,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} \sin x - (1 - \cos x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x \sin x + \cos x - 1}{2\sqrt{x^3}}.$$

当 $x < 0$ 时, $f'(x) = 2xg(x) + x^2g'(x)$.

在 $x=0$ 处, 由于 $f(0)=0$, 故

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2g(x)}{x} = 0,$$

从而 $f'(0)=0$, 因此

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x \sin x + \cos x - 1}{2\sqrt{x^3}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 2xg(x) + x^2g'(x) & x < 0 \end{cases}.$$

例 2.2.8 【2012 (3)】 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x} & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$, $y = f[f(x)]$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e} =$ _____.

解 由题意 $f(e) = \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$, 根据复合函数的链式法则, 有

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e} = \left. \frac{d}{dx} f[f(x)] \right|_{x=e} = f'\left(\frac{1}{2}\right) f'(e),$$

而

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = (2x - 1)' \Big|_{x=\frac{1}{2}} = 2, \quad f'(e) = (\ln \sqrt{x})' \Big|_{x=e} = \frac{1}{2e},$$

故

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e} = 2 \times \frac{1}{2e} = \frac{1}{e}.$$

2.2.3 题型三、导数的几何意义

例 2.2.9 【2003 (3)】 已知曲线 $y = x^3 - 3a^2x + b$ 与 x 轴相切, 则 b^2 可以通过 a 表示为 _____.

解 不妨设曲线 $y = x^3 - 3a^2x + b$ 与 x 轴在 $x = x_0$ 处相切, 则

$$y(x_0) = x_0^3 - 3a^2x_0 + b = 0, \quad y'(x_0) = 3x_0^2 - 3a^2 = 0,$$

解得 $x_0 = a$ 或 $x_0 = -a$, $b = 2a^3$ 或 $b = -2a^3$, 因此 $b^2 = 4a^6$.

例 2.2.10 【1998 (3)】 曲线 $f(x) = x^n$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n, 0)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 由于

$$f'(1) = nx^{n-1} \Big|_{x=1} = n,$$

因此切线方程为 $y-1=n(x-1)$. 令 $y=0$, 解得 $\xi_n = 1 - \frac{1}{n}$. 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{(-n) \times (-1)} = \frac{1}{e}.$$

例 2.2.11 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且有

$$f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + o(x) \quad (x \rightarrow 0),$$

求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程.

解 由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 从而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 故 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. 而

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(1+\sin x) - 3 \lim_{x \rightarrow 0} f(1-\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} 8x + \lim_{x \rightarrow 0} o(x),$$

解得 $f(1) = 0$. 而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x)}{\sin x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - 3f(1-t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-3f(1-t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} + 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1-t) - f(1)}{-t} \\ &= 4f'(1), \end{aligned}$$

且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + o(x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + o(x)}{x} = 8,$$

故 $4f'(1) = 8$, 从而 $f'(1) = 2$, 因此, 切线方程为 $y-0=2(x-1)$, 即 $y=2x-2$.

2.2.4 题型四、导函数的几何特性问题

例 2.2.12 证明下列结论.

- (1) 若函数 $f(x)$ 可导且为奇函数, 则 $f'(x)$ 为偶函数;
- (2) 若函数 $f(x)$ 可导且为偶函数, 则 $f'(x)$ 为奇函数;
- (3) 若函数 $f(x)$ 可导且为周期函数, 则 $f'(x)$ 为周期函数, 且周期相同.

证 这里只证明 (1), 结论 (2) 和 (3) 类似可证.

(1) 设 $f(x)$ 可导, 且为奇函数, 则对于任意的 $x \in D(f)$, 有

$$f(-x) = -f(x).$$

等式两边同时对 x 求导数, 得

$$f'(-x) \cdot (-1) = -f'(x),$$

即 $f'(-x) = f'(x)$, 所以 $f'(x)$ 为偶函数.

例 2.2.13 证明下列结论:

- (1) 若 $f(x)$ 为奇函数, 且 $f'(x_0) = A$, 则 $f'(-x_0) = A$;
- (2) 若 $f(x)$ 为偶函数, $f'(x_0) = A$, 则 $f'(-x_0) = -A$;
- (3) 若 $f(x)$ 为周期为 T 的函数, $f'(x_0) = A$, 则 $f'(x_0 + T) = A$.

证 这里只证明 (1), 结论 (2) 和 (3) 类似可证. 根据导数的定义, 得

$$\begin{aligned} f'(-x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x_0 + \Delta x) - f(-x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-f(x_0 - \Delta x) + f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} = f'(x_0). \end{aligned}$$

注 这里条件仅仅说明函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 没有给出导函数 $f'(x)$ 存在, 因此不能使用上题的方法, 只能按照导数的定义求解.

2.2.5 题型五、利用可导性求参数值 (域)

例 2.2.14 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax + b\sqrt{x} & x > 1 \end{cases}$ 可导, 试求 a 、 b 的值.

解 因为 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导, 所以 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1).$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + b$, $f(1) = 1$, 得 $a + b = 1$. 又因为 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导, 所以 $f'_-(1) = f'_+(1)$. 而

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2, \\ f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x-1) + b(\sqrt{x}-1)}{x-1} \\ &= a + b \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = a + \frac{b}{2}, \end{aligned}$$

故 $a + \frac{b}{2} = 2$, 解得 $a = 3$, $b = -2$.

例 2.2.15 设 $f(x) = \begin{cases} |x|^\lambda \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 其导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 λ 的取值范围

是_____.

解 显然, 当 $\lambda > 1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且当 $\lambda > 1$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\lambda \cos \frac{1}{x} - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\lambda-1} \cos \frac{1}{x} = 0;$$

又因为 $f(x)$ 为偶函数, 因此

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(-x) - f(0)}{-x - 0} = -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = -f'_+(0) = 0,$$

故 $f'(0)=0$. 当 $x>0$ 时, $f(x)=|x|^\lambda \cos \frac{1}{x}=x^\lambda \cos \frac{1}{x}$, 从而

$$f'(x)=\lambda x^{\lambda-1} \cos \frac{1}{x}+x^{\lambda-2} \sin \frac{1}{x}.$$

当 $x<0$ 时, $f(x)=|x|^\lambda \cos \frac{1}{x}=(-x)^\lambda \cos \frac{1}{x}$, 从而

$$f'(x)=-\lambda(-x)^{\lambda-1} \cos \frac{1}{x}+(-x)^{\lambda-2} \sin \frac{1}{x}.$$

由于 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0) = 0,$$

故 $\lambda > 2$.

2.2.6 题型六、高阶导数问题

例 2.2.16 【2006 (3)】设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导, 且 $f'(x)=e^{f(x)}$, $f(2)=1$, 则 $f'''(2)=$ _____.

解 由于

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^{f(x)} \cdot e^{f(x)} = e^{2f(x)}, \\ f'''(x) &= e^{2f(x)} \cdot 2f'(x) = e^{2f(x)} \cdot 2e^{f(x)} = 2e^{3f(x)}, \end{aligned}$$

故

$$f'''(2) = 2e^{3f(2)} = 2e^3.$$

例 2.2.17 已知函数 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$, 求极限 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(2-t)-f'(2)}{t}$.

解 由于

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(2-t)-f'(2)}{t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(2-t)-f'(2)}{-t} = -f''(2),$$

又因为

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)' = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}, \\ f''(x) &= e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} + e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{x^3}\right), \end{aligned}$$

所以

$$f''(2) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{16} + e^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{16} e^{-\frac{1}{2}}.$$

例 2.2.18 已知函数 $y=f(x)=\begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 试求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

解 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = 4x^3 \sin \frac{1}{x} + x^4 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right),$$

即

$$f'(x) = 4x^3 \sin \frac{1}{x} - x^2 \cos \frac{1}{x}.$$

当 $x = 0$ 时,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0,$$

根据二阶导数的定义, 有

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(4x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \right) = 0.$$

2.2.7 题型七、反函数、复合函数的求导问题

例 2.2.19 已知函数 $x = y - \frac{1}{2} \sin y$ 一定存在反函数 $y = f(x)$, 求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$.

解 由于

$$x'_y = 1 - \frac{1}{2} \cos y > 0,$$

因此

$$f'(x) = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cos y} = \frac{2}{2 - \cos y}.$$

根据复合函数求导法则, 有

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{2 - \cos y} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{2}{2 - \cos y} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{-2 \sin y}{(2 - \cos y)^2} \cdot \frac{2}{2 - \cos y} \\ &= \frac{-4 \sin y}{(2 - \cos y)^3}. \end{aligned}$$

例 2.2.20 已知单调函数 $y = f(x)$ 存在反函数 $x = \varphi(y)$, 且 $y = f(x)$ 二阶可导, $f'(x) \neq 0$,

试求 $x = \varphi(y)$ 的二阶导数 $\frac{d^2 x}{dy^2}$.

解 由反函数求导法则可知,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}.$$

根据复合函数求导法则, 有

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{f'(x)} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f'(x)} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}.$$

例 2.2.21 已知函数 $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^{2x}$, 试求 $f'[g(x)]$ 和 $\{f[g(x)]\}'$.

解 由题意

$$f'(x) = \cos x, \quad g'(x) = 2e^{2x},$$

所以

$$f'[g(x)] = \cos(e^{2x}),$$

$$\begin{aligned}\{f[g(x)]\}' &= f'[g(x)] \cdot g'(x) \\ &= \cos(e^{2x}) \cdot 2e^{2x} = 2e^{2x} \cos(e^{2x}).\end{aligned}$$

注 $f'[g(x)]$ 表示先求导数、再进行复合运算, $\{f[g(x)]\}'$ 表示先进行复合运算、再求导数.

2.2.8 题型八、隐函数的求导问题

例 2.2.22 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\sin(xy) - \frac{1}{y-x} = 1$ 所确定, 试求曲线 $y = f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程.

解 当 $x=0$ 时, $y=-1$. 方程 $\sin(xy) - \frac{1}{y-x} = 1$ 两边同时对 x 求导数得

$$\cos(xy) \cdot (xy)' - \frac{-(y-x)'}{(y-x)^2} = 0,$$

从而有

$$\cos(xy) \cdot (y + xy') + \frac{y' - 1}{(y-x)^2} = 0,$$

将 $x=0$, $y=-1$ 代入上式得

$$-1 + \frac{y'(0) - 1}{1} = 0,$$

解得 $y'(0) = 2$, 从而 $y = f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y - (-1) = 2(x - 0)$, 即 $y = 2x - 1$.

例 2.2.23 已知 $y = \frac{(x+1)\sqrt{x-1}}{(x+4)^2 e^{2x}}$, 求 y' .

解 等式两边同时取对数, 则有

$$\ln y = \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x-1) - 2 \ln(x+4) - 2x,$$

上式两边同时对 x 求导数, 并将 y 视为 x 的函数, 得

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{x+4} - 2,$$

所以

$$y' = y \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{x+4} - 2 \right)$$

$$= \frac{(x+1)\sqrt{x-1}}{(x+4)^2 e^{2x}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{x+4} - 2 \right).$$

2.2.9 题型九、导函数的连续性问题

例 2.2.24 设 $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 试求 $f'(x)$ 的表达式, 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

解 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = \left(x^3 \sin \frac{1}{x} \right)' = 3x^2 \sin \frac{1}{x} + x^3 \cos \frac{1}{x} \times \left(\frac{1}{x} \right)' = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}.$$

当 $x=0$ 时, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0,$$

即 $f'(0) = 0$. 因此

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \right] = 0 = f'(0),$$

因此 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 从而函数 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

2.2.10 题型十、参数方程的求导问题

例 2.2.25 【2010 (1)】 设 $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2) du \end{cases}$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 正确答案为 0; 由于

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}} = -e^t \ln(1+t^2), \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{1}{x'(t)} \\ &= \left[-e^t \ln(1+t^2) - e^t \cdot \frac{2t}{1+t^2} \right] \cdot \frac{1}{-e^{-t}} \\ &= e^{2t} \left[\ln(1+t^2) + \frac{2t}{1+t^2} \right], \end{aligned}$$

因此 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=0} = 0$.

例 2.2.26 设 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t^2 + 3t + 4 \\ e^y \cos t + y^2 + t = 0 \end{cases}$ 确定, 试求 $\frac{dy}{dx}$.

解 由题意, $x'(t) = 4t + 3$. 等式 $e^y \cos t + y^2 + t = 0$ 两边同时对 t 求导数得

$$y'(t) \cdot e^y \cos t - e^y \sin t + 2y \cdot y'(t) + 1 = 0,$$

解得

$$y'(t) = \frac{e^y \sin t - 1}{e^y \cos t + 2y},$$

从而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{e^y \sin t - 1}{e^y \cos t + 2y}}{4t + 3} = \frac{e^y \sin t - 1}{(e^y \cos t + 2y)(4t + 3)}.$$

2.2.11 题型十一、微分问题

例 2.2.27 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $x^2 \arctan y + x + y = 1$ 确定, 试求 $dy|_{x=0}$.

解法 1 当 $x = 0$ 时, $y = 1$, 等式 $x^2 \arctan y + x + y = 1$ 两边同时对 x 求导数, 则

$$2x \arctan y + x^2 \cdot \frac{y'}{1 + y^2} + 1 + y' = 0,$$

解得 $y' = -\frac{(1 + y^2)(1 + 2x \arctan y)}{x^2 + y^2 + 1}$, 从而

$$dy = y' dx = -\frac{(1 + y^2)(1 + 2x \arctan y)}{x^2 + y^2 + 1} dx,$$

故 $dy|_{x=0} = -dx$.

解法 2 当 $x = 0$ 时, $y = 1$, 等式 $x^2 \arctan y + x + y = 1$ 两边同时取微分, 则

$$2x dx \cdot \arctan y + x^2 \cdot \frac{dy}{1 + y^2} + dx + dy = 0,$$

解得 $dy = -\frac{(1 + y^2)(1 + 2x \arctan y)}{x^2 + y^2 + 1} dx$, 从而 $dy|_{x=0} = -dx$.

例 2.2.28 若函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微, dy 与 Δy 分别表示函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的微分与增量, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy - \Delta y}{\Delta x} = (\quad)$.

(A) 1; (B) -1; (C) 0; (D) 无法确定.

解 根据微分的定义, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta y = dy + o(\Delta x)$, 因此

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy - \Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-o(\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

故答案选 (C).

2.3 深化训练

2.3.1 填空题

- (1) 【2011 (3)】 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$, 则 $f'(x) =$ _____.
- (2) 设 $y = x^2 2^x + e^{\sqrt{2}}$, 则 $y' =$ _____.
- (3) 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(\ln x) - 1}{x - 1} =$ _____.
- (4) 已知 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 满足 $f(x_0) = 2$, 则 $f[f'(x_0)] =$ _____.
- (5) 【2007 (3)】 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) =$ _____.
- (6) 已知 $y^{(n-2)} = f(\ln x)$, 其中 f 任意阶可导, 则 $y^{(n)} =$ _____.
- (7) 【2013 (1)】 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y - x = e^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] =$ _____.
- (8) 【2008 (1)】 曲线 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 _____.
- (9) 【2011 (3)】 曲线 $\tan\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 _____.
- (10) 【2013 (1)】 设 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases}$ (t 为参数), 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$ _____.

2.3.2 单项选择题

- (1) 【2004 (1)】 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 ().
- (A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加;
 (B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少;
 (C) 对于任意的 $x \in (0, \delta)$, 有 $f(x) > f(0)$;
 (D) 对于任意的 $x \in (-\delta, 0)$, 有 $f(x) > f(0)$.
- (2) 【2012 (1, 3)】 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$ ().
- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$; (B) $(-1)^n(n-1)!$;
 (C) $(-1)^{n-1}n!$; (D) $(-1)^n n!$.
- (3) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 则下列选项不一定正确的是 ().
- (A) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; (B) $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = f'(a)$;
 (C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a+h)}{h}$ 存在; (D) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a) - f(x)}{x-a}$ 存在.
- (4) 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0)} = \frac{1}{4}$, 则 $f'(x_0)$ 等于 ().
- (A) 4; (B) -4; (C) 2; (D) -2.

(5) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处 ().

- (A) 不连续; (B) 连续但不可导;
(C) 可导; (D) 不确定.

(6) 设 $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-2\Delta x)}{\Delta x} = ()$.

- (A) $\frac{1}{1+a^2}$; (B) $-\frac{1}{1+a^2}$; (C) $\frac{2}{1+a^2}$; (D) $-\frac{2}{1+a^2}$.

(7) 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 则下列结论正确的是 ().

- (A) dy 与 Δx 是等价无穷小量; (B) dy 是比 Δx 高阶的无穷小量;
(C) $\Delta y - dy$ 是比 Δx 高阶的无穷小量; (D) $\Delta y - dy$ 与 Δx 是同阶无穷小量.

(8) 若下列极限都存在, 则下列等式成立的是 ().

- (A) $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$; (B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - x)}{x} = f'(x_0)$;
(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$; (D) $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.

(9) 设函数 $f(x)$ 对 $\forall x \in \mathbb{R}$ 均满足 $f(-x) = f(x)$, 且 $f'(-x_0) = 2$, 则 $f'(x_0) = ()$.

- (A) 2; (B) -2; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $-\frac{1}{2}$.

(10) 【2016 (4)】已知函数 $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$, 则 ().

- (A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点; (B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点;
(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导; (D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

2.3.3 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 0$, $f'(1) = 2$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + f\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]^n$.

2.3.4 设 $f(x)$ 为可导的偶函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x-1) - f(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$, 求 $f'(-1)$.

2.3.5 【2015(1,3)】(1) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明: $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

(2) 设函数 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x) \cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

2.3.6 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且周期为 5, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1+2x)}{x} = \frac{1}{4}$, 试求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, 1)$ 处的切线方程.

2.3.7 已知 $g(x)$ 具有连续导数, $f(x) = (x-a)^2 g(x)$, 试求 $f'(a), f''(a)$.

2.3.8 设 $f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ \ln(ax+b) & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 试求常数 a, b 的值.