

第1章 绪 论

工程技术人员在分析和设计电路、机械系统、控制系统和其他工程学科中的非线性动力学系统时,需要吸收和消化大量的非线性分析工具。本书引入了一些这样的工具,特别是强调了用李雅普诺夫(Lyapunov)方法进行非线性系统稳定性分析,并从输入-输出和无源透视方面对反馈系统的稳定性给予特别关注。我们还提出了用于检测和分析“自由”振荡的工具,包括描述函数法。此外还引入了扰动理论的渐近工具,包括一般扰动和奇异扰动。最后,我们介绍了一些非线性反馈控制工具,包括线性化、增益定序法、积分控制、反馈线性化、滑模控制、李雅普诺夫再设计、反步法(backstepping)、基于无源性的控制和高增益观测器。

1.1 非线性模型和非线性现象

我们将处理由有限个耦合一阶常微分方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)\end{aligned}$$

建模的动力学系统,其中, \dot{x}_i 表示 x_i 对时间变量 t 的导数, u_1, u_2, \dots, u_p 指输入变量。 x_1, x_2, \dots, x_n 称为状态变量,表示动力学系统对其过去状态的记忆。通常用向量符号以紧凑的形式写出这组方程。定义

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}$$

把 n 个一阶微分方程重写为一个 n 维一阶向量微分方程:

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (1.1)$$

式(1.1)称为状态方程, x 称为状态, u 称为输入。有时,把另一个方程

$$y = h(t, x, u) \quad (1.2)$$

与式(1.1)联立,定义一个 q 维输出向量 y ,该向量包含了与动力学系统分析有关的变量,如一些物理上可测量的变量或一些需要以特殊方式表现的变量。我们把式(1.2)称为输出方程,

把方程(1.1)和方程(1.2)统称为状态空间模型,或简称为状态模型。有限维物理系统的数学模型并不总是以状态模型的形式出现,但我们总可以通过仔细选择状态变量,以这种方式建立物理系统的模型。本章后面给出的例题和习题将说明状态模型的多种功能。

本书大部分分析是处理状态方程,无须输入 u 的显式表示,即所谓的无激励状态方程

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.3)$$

无激励状态方程并不一定意味着系统的输入为零。可以把输入指定为一个给定时间的函数 $u = \gamma(t)$, 一个给定状态的反馈函数 $u = \gamma(x)$, 或同时是时间和状态的函数 $u = \gamma(t, x)$ 。把 $u = \gamma$ 代入方程(1.1)中消去 u 就会产生无激励状态方程。

当函数 f 与 t 没有明显关系时,会出现一个特例,即

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.4)$$

这种情况下的系统称为自治系统或时不变系统。自治系统的特点是不随时间原点的移动而改变,因为时间变量从 t 变化到 $\tau = t - a$ 时不会改变状态方程的右边。如果系统不是自治的,就称为非自治系统或时变系统。

处理状态方程的一个重要概念是平衡点的概念。对于状态空间中的点 $x = x^*$, 只要系统状态从 x^* 点开始,在将来任何时刻都将保持在 x^* 点不变,那么这一点就称为方程(1.3)的平衡点。对于方程(1.4)的自治系统,平衡点是方程

$$f(x) = 0$$

的实根。平衡点可以是孤立的,也就是说在其邻域内不会有另一个平衡点,否则可能有一个平衡点的连续统(a continuum of equilibrium points)。

对于线性系统,状态模型(1.1)~(1.2)具有如下特殊形式:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned}$$

我们假设读者熟悉线性系统中基于叠加原理的分析方法。由于我们是从线性系统进入到非线性系统,因此将面对更难的情形。叠加原理不再成立,分析方法将包含更高深的数学理论。因为我们已知线性系统的有力分析方法,所以分析非线性系统的第一步通常是将其在某些特定点上线性化,并分析得到的线性模型。这是工程惯例,也是常用的方法。毫无疑问,只要允许,就应该尽可能通过线性化来分析非线性系统的特性。然而,仅仅线性化是不够的,我们还必须开发用于分析非线性系统的方法。线性化有两个基本限制。第一,由于线性化是在工作点附近的近似,因此仅能预测出这一点邻域内非线性系统的“局部”特性,而不能预测出远离工作点的“非局部”特性,当然也就不能预测整个状态空间的“全局”特性。第二,非线性系统动力学远比线性系统动力学丰富,有一些“本质上的非线性”只有在非线性条件下才能发生,因此不能由线性模型描述或预测。下面是几个本质上是非线性现象的例子:

- **有限逃逸时间** 非稳定线性系统的状态只有当时间趋于无穷时才会达到无穷,而非线性系统的状态可以在有限时间内达到无穷。
- **多孤立平衡点** 线性系统只有一个孤立平衡点,这样它就只有一个吸引系统状态的稳态工作点,而与初始状态无关。非线性系统可以有多个孤立平衡点,其状态可能收敛于几个稳态工作点之一,收敛于哪个工作点取决于系统的初始状态。

- **极限环** 对于振荡的线性时不变系统,必须在虚轴上有一对特征值,这是在有扰动的条件下几乎不可能保持的非鲁棒条件。即使我们能做到,振荡幅度也将取决于初始状态。在现实生活中,只有非线性系统才能产生稳定振荡,有些非线性系统可以产生频率和幅度都固定的振荡,而与初始状态无关。这类振荡就是一个极限环。
- **分频振荡、倍频振荡或殆周期振荡** 稳定线性系统的输出信号频率与输入信号频率相同。而非线性系统在周期信号激励下,可以产生具有输入信号频率的分频或倍频振荡,甚至可以产生殆周期振荡,其中一个例子就是周期振荡频率之和,而不是每个振荡频率的倍频。
- **混沌** 非线性系统的稳态特性可能更为复杂,它既不是平衡点,也不是周期振荡或殆周期振荡,这种特性通常称为混沌。有些混沌运动显示出随机性,尽管系统是确定的。
- **特性的多模式** 同一非线性系统显示出两种或多种模式是很正常的。无激励系统可能有不止一个极限环。具有周期激励的系统可能会显示倍频、分频或更复杂的稳态特性,这取决于输入信号的幅度和频率。甚至可能当激励幅度和频率平滑变化时,也会显示出不连续的跳跃性能模式。

本书仅讨论前三种现象^①,多平衡点和极限环将在下一章讲到二阶自治系统时介绍,有限逃逸时间现象将在第3章中介绍。

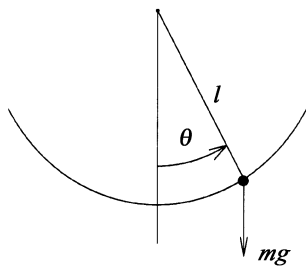
1.2 示例

1.2.1 单摆方程

考虑图 1.1 所示的单摆, l 表示摆杆的长度, m 表示摆锤的质量,假设杆是硬质的且质量为零。用 θ 表示杆与通过中心点的竖直轴间的夹角。单摆在竖直平面内自由摆动,摆锤以半径为 l 的圆运动。为了写出单摆的运动方程,先来确定作用在摆锤上的力。有一个向下的重力 mg , g 为重力加速度。还有一个阻碍运动的摩擦力,假设与摆锤的速度成正比,摩擦系数为 k 。运用牛顿第二运动定律,可写出沿切线方向的运动方程

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - k\dot{\theta}$$

图 1.1 单摆



写沿切线方向的运动方程的好处是方程中不出现杆的张力,因为它在法线方向上。写中心点的运动方程也可得到与上式相同的方程。为得到单摆的状态模型,我们取状态变量 $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, 状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.5)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \quad (1.6)$$

为求平衡点,设 $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ 并解方程求 x_1 和 x_2 :

$$0 = x_2$$

$$0 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2$$

^① 要阅读有关激励振荡、混沌、分岔及其他重要内容,请参阅文献[70],文献[74],文献[187]和文献[207]。

平衡点位于 $(n\pi, 0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。从单摆的物理描述看,很显然单摆仅有两个平衡点,对应于 $(0, 0)$ 和 $(\pi, 0)$,其他平衡点与这两个平衡点重合,平衡点数对应于单摆停在两个平衡点之一前所进行的全摆动的次数。例如,如果单摆在停于垂直向下的位置之前进行了 m 次完全 360° 循环,那么从数学意义上讲,可以说单摆的平衡点为 $(2m\pi, 0)$ 。我们在研究单摆时,将只关心两个“非平凡的”平衡点 $(0, 0)$ 和 $(\pi, 0)$,在物理上可看出这两个平衡位置彼此差异很大。单摆确实可以停留在平衡点 $(0, 0)$ 上,但在平衡点 $(\pi, 0)$ 上几乎不可能保持静止,因为来自平衡点的一个无穷小的干扰就会使单摆偏离该平衡点。这两个平衡点的区别在于其稳定性,这一点我们将进行深入研究。

有时忽略摩擦阻力有助于研究单摆方程,即设 $k = 0$,得到的系统

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.7)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 \quad (1.8)$$

在某种意义上说是保守系统,即如果给单摆一个初始推力,它就会永远保持无衰减振荡,能量在动能和势能之间相互转换而无耗散。当然这是不现实的,但给出了单摆特性,也有助于求出当摩擦系数 k 很小时单摆方程的近似解。如果能运用单摆的力矩 T ,就可以得到另一种形式的单摆方程,力矩可看成如下方程的控制输入:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.9)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{ml^2} T \quad (1.10)$$

有趣的是,用与单摆方程相似的方程可对几个毫无关系的物理系统建模。这样的例子有与无限长总线连接的同步发电机的模型(见习题 1.8),约瑟夫森(Josephson)结电路模型(见习题 1.9)和锁相环模型(见习题 1.11),因而单摆方程非常重要。

1.2.2 隧道二极管电路

考虑图 1.2^① 所示的隧道二极管电路,隧道二极管的特性为 $i_R = h(v_R)$,电路中的储能元件是电容 C 和电感 L ,假设它们是线性时不变的,可由方程

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad \text{和} \quad v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

对其建模,其中 i 是通过元件的电流, v 是其两端的电压,下标表示特指的元件。为写出系统的状态模型,取 $x_1 = v_C, x_2 = i_L$ 作为状态变量, $u = E$ 为常数输入。为写出 x_1 的状态方程,需要把 i_C 表示为状态变量 x_1, x_2 和输入 u 的函数,运用基尔霍夫电流定律,流过结点 © 的电流的代数和为零,可写出方程

$$i_C + i_R - i_L = 0$$

因此

$$i_C = -h(x_1) + x_2$$

同样,需要把 v_L 表示为状态变量 x_1, x_2 和输入 u 的函数,运用基尔霍夫电压定律,左边回路中各元件电压降的代数和为零,可写出方程

^① 本图以及图 1.3 和图 1.7 都取自文献[39]。

$$v_C - E + Ri_L + v_L = 0$$

因此

$$v_L = -x_1 - Rx_2 + u$$

$$\text{现在就可以写出电路的状态模型 } \dot{x}_1 = \frac{1}{C} [-h(x_1) + x_2] \quad (1.11)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} [-x_1 - Rx_2 + u] \quad (1.12)$$

设 $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ 并解方程

$$0 = -h(x_1) + x_2$$

$$0 = -x_1 - Rx_2 + u$$

求解 x_1 和 x_2 , 即可确定系统的平衡点。因此方程

$$h(x_1) = \frac{E}{R} - \frac{1}{R}x_1$$

的根即为平衡点。

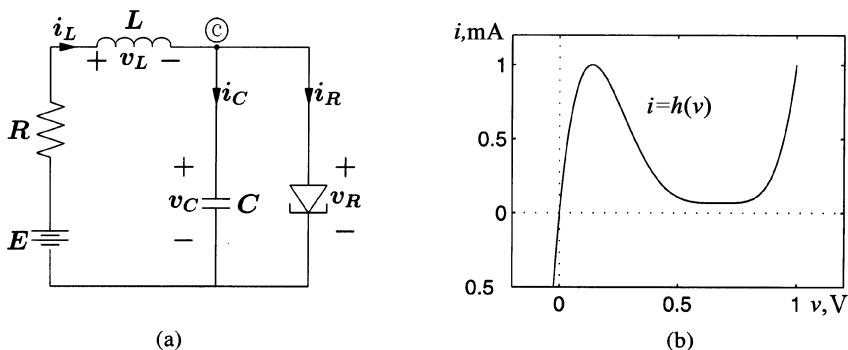


图 1.2 (a) 隧道二极管; (b) 隧道二极管 v_R - i_R 特性

图 1.3 形象地显示, 对于 E 和 R 的某个值, 方程有三个孤立的根, 对应于系统的三个孤立平衡点。平衡点的数目会随 E 和 R 值的变化而变化。例如, 如果 R 不变而增大 E , 只会得到一个平衡点, 只有 Q_3 存在。另一方面, 如果保持 R 不变而减小 E , 最后就只有平衡点 Q_1 。假设我们讨论多平衡点的情况, 在电路的实验装置中可以观察这些平衡点中的哪一个呢? 答案取决于平衡点的稳定性质, 第 2 章将再讨论这个问题, 并给出答案。

1.2.3 质量-弹簧系统

在图 1.4 所示的质量-弹簧机械系统中, 在水平面上滑动并通过弹簧连接到竖直表面的物体 m 受到一个外力 F 的作用。定义物体距参考点的位移为 y , 根据牛顿运动定律, 有

$$m\ddot{y} + F_f + F_{sp} = F$$

其中 F_f 是摩擦阻力, F_{sp} 是弹簧的回复力。设 F_{sp} 只是位移 y 的函数, 即 $F_{sp} = g(y)$, 同时假设参考点位于 $g(0) = 0$ 处, 外力 F 由我们设定。对于不同的 F, F_f 和 g , 会出现几个有趣的自治和非自治二阶系统模型。

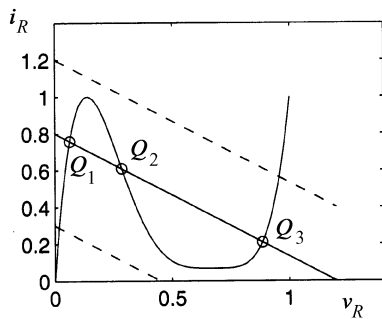


图 1.3 隧道二极管电路的平衡点

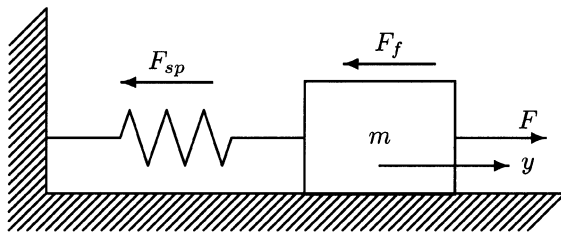


图 1.4 质量-弹簧机械系统

位移相对较小时,弹簧的回复力可用线性函数 $g(y) = ky$ 建模,其中 k 是弹性系数。但是当位移较大时,回复力与 y 是非线性关系。例如,函数

$$g(y) = k(1 - a^2y^2)y, \quad |ay| < 1$$

的模型称为软化弹簧,即超过某一特定位移时,较大的位移增量所产生的力的增量较小。另一方面,函数

$$g(y) = k(1 + a^2y^2)y$$

的模型称为硬化弹簧,即当超过某一特定位移时,较小的位移增量所产生的力的增量较大。

阻力 F_f 包括静摩擦力、库仑摩擦力和黏滞摩擦力。当物体静止时,静摩擦力 F_s 与水平面平行,其大小限制在 $\pm\mu_s mg$, $0 < \mu_s < 1$ 是静摩擦系数。 F_s 在其取值范围内无论取何值都保持物体静止。当物体开始运动时,一定有一个作用在物体上的力克服由静摩擦引起的运动阻力。在没有外力,即 $F = 0$ 时,静摩擦力将与弹簧的回复力平衡,并当 $|g(y)| \leq \mu_s mg$ 时保持平衡。一旦运动开始,作用在与运动相反方向上的阻力 F_f ,可按照滑动速度的函数 $v = \dot{y}$ 建立模型。由库仑摩擦引起的阻力 F_c ,其大小为常数 $\mu_k mg$, μ_k 是动摩擦系数,即

$$F_c = \begin{cases} -\mu_k mg, & \text{当 } v < 0 \\ \mu_k mg, & \text{当 } v > 0 \end{cases}$$

当物体在黏滞介质,如空气或润滑剂中运动时,会有由于黏滞性引起的摩擦力。这个力通常按照速度的非线性函数建立模型,即 $F_v = h(v)$, $h(0) = 0$ 。当速度较小时,可假设 $F_v = cv$ 。图 1.5(a) 和图 1.5(b) 所示分别为库仑摩擦力和库仑摩擦力加线性黏滞摩擦力的例子,图 1.5(c) 所示为静摩擦力大于库仑摩擦力时的例子,而图 1.5(d) 所示的是与图 1.5(c) 相似的情况,但随着速度增大,力连续减小,称为斯特里贝克 (Stribeck) 效应。

对于硬化弹簧,考虑线性黏滞摩擦力和一个周期外力 $F = A \cos \omega t$,可得到达芬 (Duffing) 方程

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + ka^2y^3 = A \cos \omega t \quad (1.13)$$

这是研究具有周期激励的非线性系统的经典例子。

对于线性弹簧,考虑静态摩擦力、库仑摩擦力和线性黏滞摩擦力,当外力为零时可得到

$$m\ddot{y} + ky + c\dot{y} + \eta(y, \dot{y}) = 0$$

$$\text{其中 } \eta(y, \dot{y}) = \begin{cases} \mu_k mg \operatorname{sign}(\dot{y}), & \text{当 } |\dot{y}| > 0 \\ -ky, & \text{当 } \dot{y} = 0 \text{ 且 } |y| \leq \mu_s mg/k \\ -\mu_s mg \operatorname{sign}(y), & \text{当 } \dot{y} = 0 \text{ 且 } |y| > \mu_s mg/k \end{cases}$$

当 $\dot{y} = 0$ 且 $|y| \leq \mu_s mg/k$ 时,可由平衡条件 $\ddot{y} = \dot{y} = 0$ 得到 $\eta(y, \dot{y})$ 的值。取 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$, 状态模型为

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.14)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 - \frac{1}{m}\eta(x_1, x_2) \quad (1.15)$$

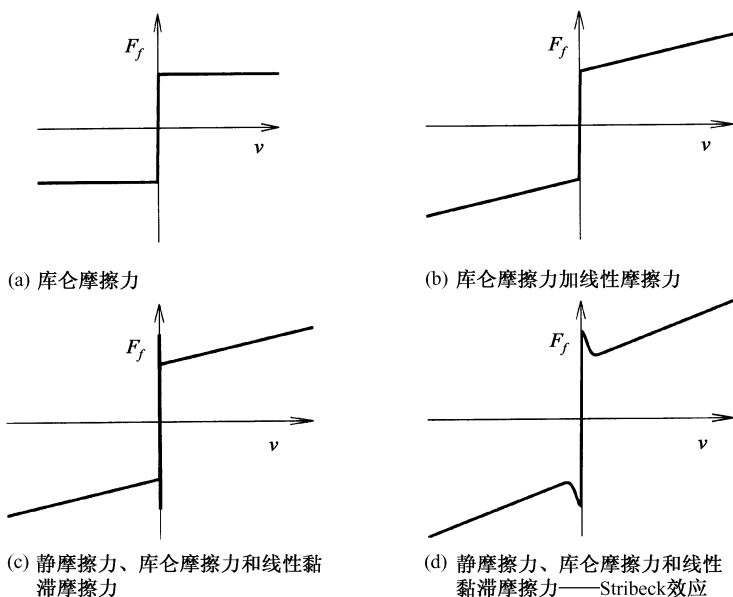


图 1.5 摩擦力模型示例

注意该状态模型的两个特点。首先,它有一组平衡点,而不是一个孤立的平衡点;其次,等式右边的函数是状态变量的不连续函数,这是由于在建立摩擦力模型时的理想化造成的。人们希望物理摩擦力由其静态摩擦力平滑地转化到滑动摩擦力,而不是理想情况下的突变^①。但理想化的不连续简化了分析,例如,当 $x_2 > 0$ 时可由线性模型

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 - \mu_k g \end{aligned}$$

建立系统模型。同样,当 $x_2 < 0$ 时可由线性模型

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \mu_k g \end{aligned}$$

建立系统模型。这样,在每个区域都可以通过线性分析预测系统特性。这就是一个所谓分段线性分析的例子,系统在状态空间的不同区域都可用线性模型表示,当从一个区域变化到另一个区域时只是系数改变而已。

1.2.4 负阻振荡器

图 1.6 所示为一类重要电子振荡器的基本电路结构。假设电感和电容是线性时不变的无源元件,即 $L > 0, C > 0$ 。电阻是具有 $v-i$ 特性为 $i = h(v)$ 的有源电路,如图 1.6 所示,函数

^① 从静摩擦到滑动摩擦的过渡可由动力学摩擦力模型获得,参见文献[12]和文献[144]。

$h(\cdot)$ 满足条件

$$h(0) = 0, \quad h'(0) < 0$$

$$h(v) \rightarrow \infty \quad \text{当 } v \rightarrow \infty, \quad h(v) \rightarrow -\infty \quad \text{当 } v \rightarrow -\infty$$

其中 $h'(v)$ 是 $h(v)$ 对 v 的一阶导数。这样的 v - i 特性是可以实现的, 例如图 1.7 所示的双隧道二极管电路, 隧道二极管特性如图 1.2 所示。运用基尔霍夫电流定律可写出方程:

$$i_C + i_L + i = 0$$

即

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(s) ds + h(v) = 0$$

对 t 求一次微分, 并两边同乘以 L , 得

$$CL \frac{d^2v}{dt^2} + v + Lh'(v) \frac{dv}{dt} = 0$$

上式可写成与非线性系统理论中一些大家熟知的公式相一致的形式, 为此把时间变量 t 变换为 $\tau = t / \sqrt{CL}$, v 对 t 的导数与对 τ 的导数有下述关系:

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{CL} \frac{dv}{d\tau}, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = CL \frac{d^2v}{d\tau^2}$$

把 v 对 τ 的导数记为 \dot{v} , 电路方程可写为

$$\ddot{v} + \varepsilon h'(v) \dot{v} + v = 0$$

其中 $\varepsilon = \sqrt{L/C}$, 该方程是李纳 (Liénard) 方程

$$\ddot{v} + f(v) \dot{v} + g(v) = 0 \tag{1.16}$$

的特例, 当

$$h(v) = -v + \frac{1}{3}v^3$$

时, 电路方程的形式为

$$\ddot{v} - \varepsilon(1 - v^2) \dot{v} + v = 0 \tag{1.17}$$

该方程称为范德波尔 (Van der Pol) 方程。Van der Pol 用该方程研究真空管电路中的振荡, 它是非线性振荡理论的基本例子。此方程有一个周期解, 在唯一的平衡点 $v = \dot{v} = 0$ 吸引除零解以外的所有其他解。为写出电路的状态模型, 取 $x_1 = v, x_2 = \dot{v}$, 得

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{1.18}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - \varepsilon h'(x_1)x_2 \tag{1.19}$$

注意, 选择电容两端的电压和流过电感的电流作为状态变量, 即可获得另一个状态模型。状态变量记为 $z_1 = i_L, z_2 = v_C$, 则状态模型由下式给出:

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{L} z_2$$

$$\frac{dz_2}{dt} = -\frac{1}{C} [z_1 + h(z_2)]$$

由于第一个状态模型是对时间变量 $\tau = t / \sqrt{CL}$ 的, 我们写出对 τ 的模型

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{\varepsilon} z_2 \tag{1.20}$$

$$\dot{z}_2 = -\varepsilon [z_1 + h(z_2)] \tag{1.21}$$

对 x 和 z 的状态模型看上去不一样,但它们是同一系统的等效表示。通过坐标变换

$$z = T(x)$$

这些模型就能相互获得,由此可看出它们是等效的。由于既有 x 又有 z 与电路物理变量的关系,因此不难找出映射 $T(\cdot)$,我们有

$$\begin{aligned} x_1 &= v = z_2 \\ x_2 &= \frac{dv}{d\tau} = \sqrt{CL} \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{L}{C}} [-i_L - h(v_C)] = \varepsilon [-z_1 - h(z_2)] \end{aligned}$$

这样

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} -h(x_1) - (1/\varepsilon)x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

其逆映射为

$$x = T^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\varepsilon z_1 - \varepsilon h(z_2) \end{bmatrix}$$

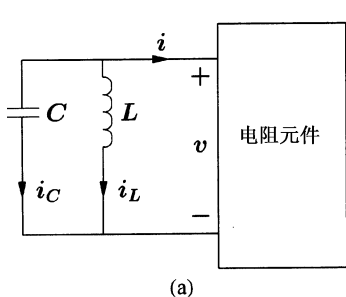


图 1.6 (a) 基本振荡电路;(b) 典型的驱动点特性

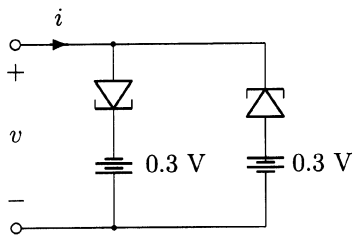
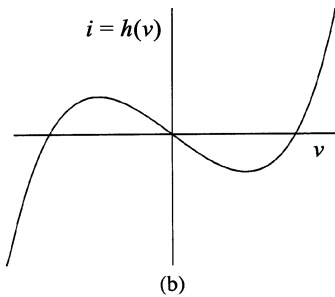


图 1.7 双隧道二极管负阻电路

1.2.5 人工神经网络

人工神经网络利用分布式信息处理及其固有的并行计算能力模拟生物结构。图 1.8 所示为实现神经网络模型的一个电路,称为霍普菲尔德(Hopfield)模型。该电路基于一个与一些放大器连接的 RC 网络,放大器的输入-输出特性由 $v_i = g_i(u_i)$ 给出,其中 u_i 和 v_i 是第 i 个放大器的输入电压和输出电压,函数 $g_i(\cdot): R \rightarrow (-V_M, V_M)$ 是一个以 $-V_M$ 和 V_M 为渐近线的 S 状函数,如图 1.9 所示,是连续可微的单调递增函数,当且仅当 $u_i = 0$ 时, $g_i(u_i) = 0$ 。 $g_i(\cdot)$ 可能的情况有

$$g_i(u_i) = \frac{2V_M}{\pi} \arctan\left(\frac{\lambda\pi u_i}{2V_M}\right), \quad \lambda > 0$$

和

$$g_i(u_i) = V_M \frac{e^{\lambda u_i} - e^{-\lambda u_i}}{e^{\lambda u_i} + e^{-\lambda u_i}} = V_M \tanh(\lambda u_i), \quad \lambda > 0$$

其中, λ 决定 $g_i(u_i)$ 在 $u_i = 0$ 点的斜率。这种 S 状输入-输出特性可用运算放大器实现。电路中每个放大器都包含一个输出为 $-v_i$ 的反相放大器,这就允许选择与给定输入所连接的放大器输出的符号。输出 v_i 和 $-v_i$ 通常由同一运算放大器电路的两个输出端提供,这一对非线性放大器称为“神经元”。电路中每个放大器的输入还有一个 RC 节。电容 $C_i > 0$ 和电阻 $\rho_i > 0$ 表示第 i 个放大器输入端的所有并联电容和并联电阻。由基尔霍夫电流定律,在第 i 个放大器输入结点,有

$$C_i \frac{du_i}{dt} = \sum_j \frac{1}{R_{ij}} (\pm v_j - u_i) - \frac{1}{\rho_i} u_i + I_i = \sum_j T_{ij} v_j - \frac{1}{R_i} u_i + I_i$$

其中

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{\rho_i} + \sum_j \frac{1}{R_{ij}}$$

T_{ij} 表示带符号的电导,其大小为 $1/R_{ij}$,其符号通过选择第 j 个放大器的正负输出决定, I_i 是一个恒定的输入电流。对于含有 n 个放大器的电路,可由 n 个一阶微分方程描述其运动。为写出状态方程,选择状态变量为 $x_i = v_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则有

$$\dot{x}_i = \frac{dg_i}{du_i}(u_i) \times \dot{u}_i = \frac{dg_i}{du_i}(u_i) \times \frac{1}{C_i} \left(\sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} u_i + I_i \right)$$

定义

$$h_i(x_i) = \left. \frac{dg_i}{du_i}(u_i) \right|_{u_i = g_i^{-1}(x_i)}$$

可把状态方程写为

$$\dot{x}_i = \frac{1}{C_i} h_i(x_i) \left[\sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} g_i^{-1}(x_i) + I_i \right] \quad (1.22)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ 。注意,由于 $g_i(\cdot)$ 的 S 状特性,函数 $h_i(\cdot)$ 满足

$$h_i(x_i) > 0, \quad \forall x_i \in (-V_M, V_M)$$

系统的平衡点就是 n 个联立方程

$$0 = \sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} g_i^{-1}(x_i) + I_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

的根,它们由 S 状特性、线性电阻连接和输入电流决定。用 $u_i, i = 1, 2, \dots, n$ 作为状态变量,可得到同样的状态模型。

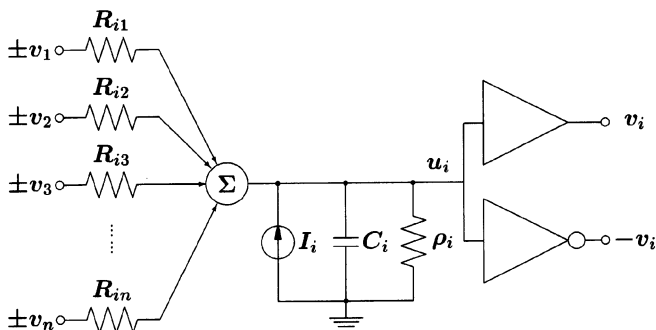


图 1.8 霍普菲尔德人工神经网络

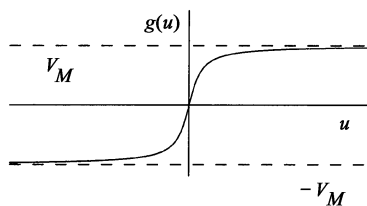


图 1.9 霍普菲尔德网络中的典型放大器输入-输出特性

神经网络的稳定性分析严格取决于是否满足对称条件 $T_{ij} = T_{ji}$, 4.2 节将给出一个当 $T_{ij} = T_{ji}$ 时的分析示例,而 9.5 节将给出一个 $T_{ij} \neq T_{ji}$ 的分析示例。

1.2.6 自适应控制

考虑由模型

$$\dot{y}_p = a_p y_p + k_p u$$

描述的一阶线性系统, u 是输入控制, y_p 是测得的输出,我们把这一系统看成设备。假设希望

得到一个闭环系统,其输入-输出特性由参考模型

$$\dot{y}_m = a_m y_m + k_m r$$

描述, r 是参考输入,且选择的模型用 $y_m(t)$ 表示闭环系统希望得到的输出,这一目的可由反馈控制

$$u(t) = \theta_1^* r(t) + \theta_2^* y_p(t)$$

达到。假设设备参数 a_p 和 k_p 已知, $k_p \neq 0$,且选择控制器参数 θ_1^* 和 θ_2^* 为

$$\theta_1^* = \frac{k_m}{k_p} \quad \text{且} \quad \theta_2^* = \frac{a_m - a_p}{k_p}$$

当 a_p 和 k_p 已知时,可以考虑输入控制器

$$u(t) = \theta_1(t)r(t) + \theta_2(t)y_p(t)$$

时变增益 $\theta_1(t)$ 和 $\theta_2(t)$ 运用已有数据,即 $r(\tau)$, $y_m(\tau)$, $y_p(\tau)$ 和 $u(\tau)$ 进行在线调节, $\tau < t$ 。自适应就是使 $\theta_1(t)$ 和 $\theta_2(t)$ 的值逐渐逼近标称值 θ_1^* 和 θ_2^* ,选择自适应准则应基于稳定性考虑,一个称为梯度算法^①的准则是运用

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= -\gamma(y_p - y_m)r \\ \dot{\theta}_2 &= -\gamma(y_p - y_m)y_p \end{aligned}$$

其中, γ 是正常数,决定自适应的速度。这一自适应控制定律假设 k_p 的符号是已知的,而且不失一般性地取为正值。为写出描述满足自适应控制定律的闭环系统的状态模型,把输出误差 e_o 和参数误差 ϕ_1 和 ϕ_2 定义为

$$e_o = y_p - y_m, \quad \phi_1 = \theta_1 - \theta_1^*, \quad \phi_2 = \theta_2 - \theta_2^*$$

更为方便。利用 θ_1^* 和 θ_2^* 的定义,参考模型可写为

$$\dot{y}_m = a_p y_m + k_p(\theta_1^* r + \theta_2^* y_m)$$

另一方面,设备输出 y_p 满足方程

$$\dot{y}_p = a_p y_p + k_p(\theta_1 r + \theta_2 y_p)$$

上面两式相减,可得到误差方程

$$\begin{aligned} \dot{e}_o &= a_p e_o + k_p(\theta_1 - \theta_1^*)r + k_p(\theta_2 y_p - \theta_2^* y_m) \\ &= a_p e_o + k_p(\theta_1 - \theta_1^*)r + k_p(\theta_2 y_p - \theta_2^* y_m + \theta_2^* y_p - \theta_2^* y_p) \\ &= (a_p + k_p \theta_2^*)e_o + k_p(\theta_1 - \theta_1^*)r + k_p(\theta_2 - \theta_2^*)y_p \end{aligned}$$

这样,闭环系统就可由下面的非线性非自治三阶状态模型描述:

$$\dot{e}_o = a_m e_o + k_p \phi_1 r(t) + k_p \phi_2 [e_o + y_m(t)] \quad (1.23)$$

$$\dot{\phi}_1 = -\gamma e_o r(t) \quad (1.24)$$

$$\dot{\phi}_2 = -\gamma e_o [e_o + y_m(t)] \quad (1.25)$$

这里用到方程 $\dot{\phi}_i(t) = \dot{\theta}_i(t)$,且把 $r(t)$ 和 $y_m(t)$ 写为时间的显函数,以强调系统的非自治特点,信号 $r(t)$ 和 $y_m(t)$ 是闭环系统的外部驱动输入。

^① 这一自适应准则将在 8.3 节中证明。

如果已知 k_p , 可得到较为简单的系统模型。在这种情况下可以取 $\theta_1 = \theta_1^*$, 且只有 θ_2 需要在线调节, 闭环模型可以简化为

$$\dot{e}_o = a_m e_o + k_p \phi [e_o + y_m(t)] \quad (1.26)$$

$$\dot{\phi} = -\gamma e_o [e_o + y_m(t)] \quad (1.27)$$

这里去掉了 ϕ_2 的下标。如果控制设计的目的是使设备输出 y_p 为零, 则取 $r(t) \equiv 0$, 因此 $y_m(t) \equiv 0$, 且闭环模型简化为自治二阶模型:

$$\dot{e}_o = (a_m + k_p \phi) e_o$$

$$\dot{\phi} = -\gamma e_o^2$$

设 $\dot{e}_o = \dot{\phi} = 0$, 得到一个代数方程

$$0 = (a_m + k_p \phi) e_o$$

$$0 = -\gamma e_o^2$$

由此确定系统的平衡点。对所有 ϕ 值系统的平衡点都在 $e_o = 0$, 即系统在 $e_o = 0$ 有一组平衡点, 而没有孤立的平衡点。

这里描述的特殊自适应控制方法称为直接参考模型自适应控制。“参考模型”一词源于控制器的任务与给定的闭环参考模型相匹配, 而“直接”一词用于表示控制器参数直接适合一种控制方法, 该方法能在线估计设备参数 a_p 和 k_p , 并用估计值计算控制器参数^①。自适应控制问题能产生一些有趣的非线性模型, 我们将用这些模型说明本书中的一些稳定性问题和微扰技术。

1.2.7 一般非线性问题

在前面的例子中, 我们看到的是物理系统建模中的一些典型非线性问题, 如非线性电阻、非线性摩擦力和 S 状非线性等, 本节将讨论其他一些典型非线性问题。图 1.10 所示为四个典型的无记忆非线性问题。之所以称为无记忆、零记忆或静态, 是因为非线性系统在任一时刻的输出仅由该时刻的输入决定, 而与历史输入无关。

图 1.10(a) 所示的是由符号函数

$$\text{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ 0, & u = 0 \\ -1, & u < 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

描述的理想中继器, 其非线性特性可由机电中继器、晶闸管电路和其他开关器件实现。

图 1.10(b) 所示的是一个理想的饱和非线性问题。饱和特性在实际放大器(如电放大器、磁放大器、气动放大器或液压放大器)、电动机及其他设备中是很普遍的, 也常用做限幅器限定变量的范围。定义饱和函数

$$\text{sat}(u) = \begin{cases} u, & |u| \leq 1 \\ \text{sgn}(u), & |u| > 1 \end{cases} \quad (1.29)$$

表示归一化的饱和非线性特性, 并按照 $k \text{ sat}(u/\delta)$ 得到图 1.10(b)。

图 1.10(c) 所示为理想的死区非线性特性, 这是典型的电子管和其他一些放大器在输入

① 要了解更多的自适应控制问题, 可参阅文献[5], 文献[15], 文献[87], 文献[139]或文献[168]。

信号较小时的特性。用于图 1.10(b)和图 1.10(c)中表示饱和特性和死区特性的分段线性函数是实际中平滑函数的近似,如图 1.11 所示。

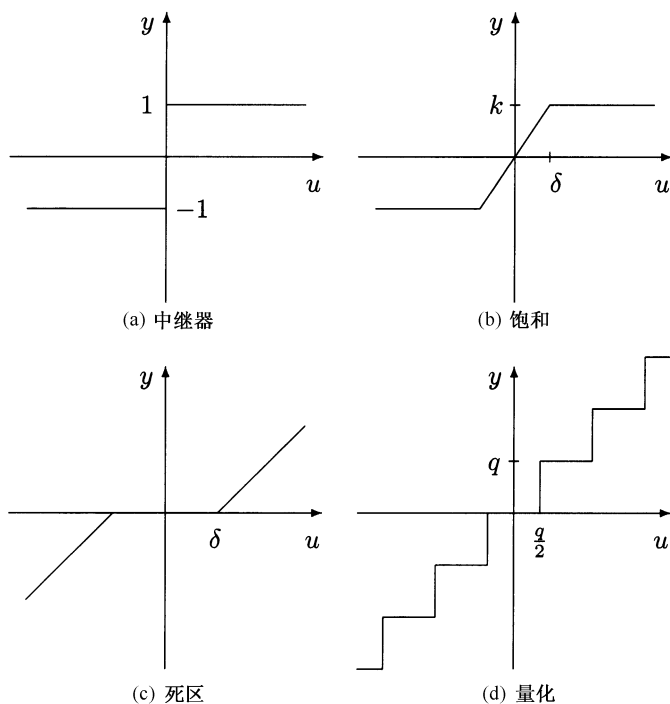


图 1.10 典型的无记忆非线性问题

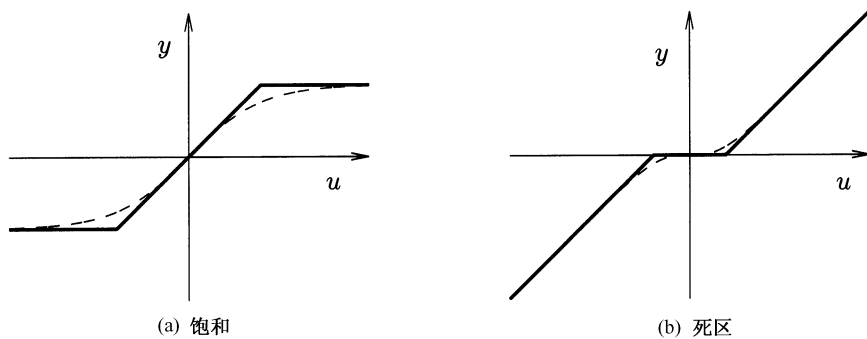


图 1.11 由分段线性特性(实线)近似的饱和和死区非线性的实际特性(虚线)

图 1.10(d)所示是量化非线性特性,是信号模-数转换的典型例子。

我们还常常遇到一些输入-输出特性有记忆的非线性部件,也就是说,任一时刻的输出与全部历史输入有关,图 1.12、图 1.15(b)和图 1.16 所示为三个迟滞型的此类特性曲线。图 1.12 为迟滞中继。当输入为较高的负电压时,输出处于低电平 L_- 。随着输入增大,输出保持在 L_- ,直到输入达到 S_+ 。当输入高于 S_+ 时,输出转换到高电平 L_+ ,并当输入电压继续升高时保持不变。现在如果减小输入,输出将保持在 L_+ ,直到输入超过 S_- 。在这一点输出转换到低电平 L_- ,且当输入为低电压时保持不变。这种输入-输出特性是可以产生的,例如,图 1.13

所示的运算放大器电路就可以产生这样的输入-输出特性^①。电路中的运算放大器和二极管都是理想的,理想运算放大器反相输入端(-)电压等于同相输入端(+)电压,并且两个输入端的电流均为零。理想二极管的 $v-i$ 特性如图 1.14 所示。当输入电压 u 较高且为负值时,二极管 D_1 和 D_3 导通,而 D_2 和 D_4 截止^②。因为两个放大器的反相输入端都是虚地的,所以通过 R_5 和 D_3 的电流为零,且 D_3 的输出也是虚地的。因此,输出电压 $y = -(R_3/R_4)E$ 。只要流过 D_1 的电流为正,这种状态就保持不变,即

$$i_{D1} = \frac{R_3 E}{R_4 R_7} - \frac{u}{R_6} > 0 \Leftrightarrow u < \frac{R_3 R_6 E}{R_4 R_7}$$

当增大输入电压 u 时,输出 y 将保持在 $(R_3/R_4)E$,直到输入电压达到 $R_3 R_6 E/R_4 R_7$ 。若超过这个值,二极管 D_1 和 D_3 将截止,而 D_2 和 D_4 将导通。与上面的情况相似,因为两个放大器的反相输入端都是虚地的,所以通过 R_5 和 D_4 的电流为零,且 D_4 的输入也是虚地的。因此,输出电压 $y = (R_2/R_1)E$ 。只要流过 D_2 的电流为正,这种状态就保持不变,即

$$i_{D2} = \frac{u}{R_6} + \frac{R_2 E}{R_1 R_7} > 0 \Leftrightarrow u > -\frac{R_2 R_6 E}{R_1 R_7}$$

这样即可得到图 1.12 所示的输入-输出特性,其中

$$L_- = -\frac{R_3 E}{R_4}, \quad L_+ = \frac{R_2 E}{R_1}, \quad S_- = -\frac{R_2 R_6 E}{R_1 R_7}, \quad S_+ = \frac{R_3 R_6 E}{R_4 R_7}$$

在例 2.1 中将会看到,对于 1.2.2 节的隧道二极管电路,当其输入电压远低于电路的动态特性时,会产生类似的特性。

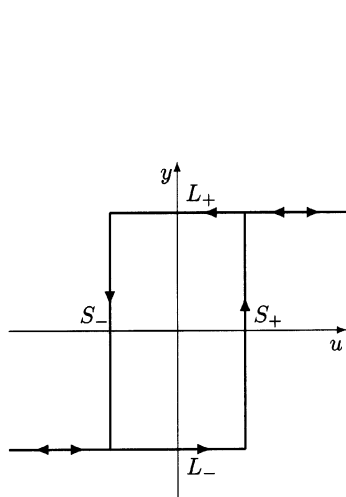


图 1.12 迟滞中继

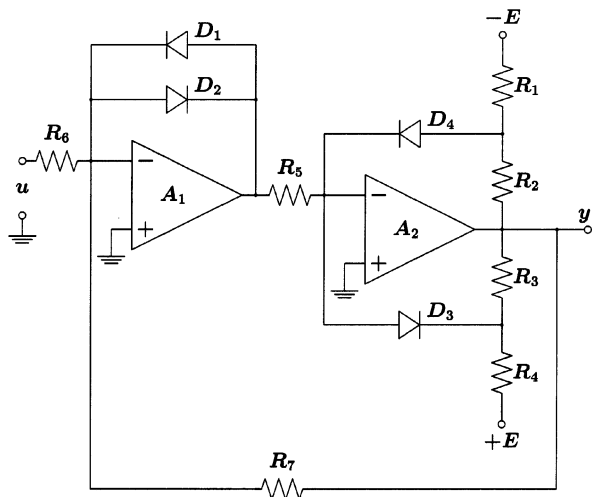


图 1.13 实现图 1.12 迟滞中继的运算放大器电路

① 该电路选自文献[204]。

② 要理解为什么当 D_3 导通时 D_1 也导通,可注意当 D_1 导通时 A_1 输出端的电压是 V_d ,为二极管的导通电压。由此产生通过 R_5 的电流 V_d/R_5 ,指向 A_2 。由于 A_2 的输入电流为零,所以流过 R_5 的电流也一定流过 D_3 。在二极管模型中,我们忽略了偏置电压 V_d ,因此也忽略了流过 R_5 和 D_3 的电流。

另一类迟滞非线性是间隙特性,如图 1.15(b)所示,这在齿轮中是常见的。为说明间隙特性,图 1.15(a)的草图给出了一对配套齿轮间的一个小缝隙。假设被驱动的齿轮有较高的摩擦惯性比,使得当驱动齿轮开始减速时,其表面在 L 处保持接触。图 1.15(b)为其输入-输出特性,给出从动轮 y 与驱动轮 u 的角度间的关系。从图 1.15(a)的位置开始,当驱动轮旋转一个小于 a 的角度时,从动轮不动。当转动角大于 a 时,在 L 处建立触点,且从动轮按照输入-输出特性的 A_0A 段随驱动轮转动。若驱动轮反方向转动,在 U 点建立触点前转动的角度为 $2a$ 。在此运动过程中,角度 y 保持不变,得到特性曲线的 AB 段。触点 U 建立后,从动轮随驱动轮转动,得到特性曲线的 BC 段,直到下一个反方向转动得到曲线的 CDA 段。这样,幅度大于 a 的周期输入就产生了图 1.15(b)的 $ABCD$ 迟滞循环。注意,若输入幅度较大,迟滞循环将是 $A'B'C'D'$,这类迟滞特性与图 1.12 所示的中继迟滞特性的重要区别是,后者的迟滞循环与其输入幅度无关。

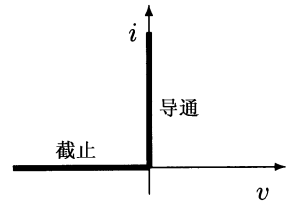
图 1.14 理想二极管的 $v-i$ 特性

图 1.16 是典型的磁性材料的迟滞特性,与间隙相似,其迟滞循环也与输入幅度有关^①。

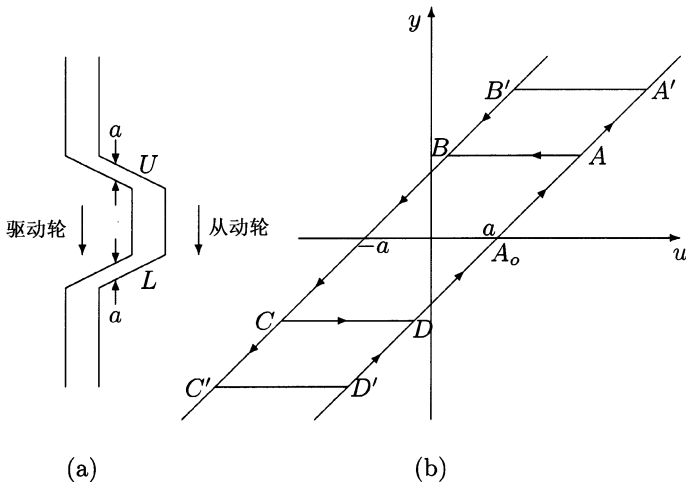


图 1.15 间隙非线性

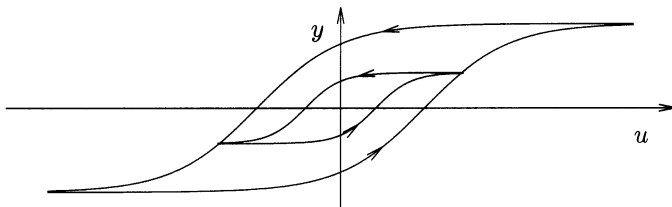


图 1.16 迟滞非线性

1.3 习题

1.1 描述大量物理非线性系统的数学模型是 n 阶微分方程

^① 建立图 1.15(b)和图 1.16 所示的迟滞特性模型相当复杂,文献[106],文献[126]和文献[203]给出了各种建模方法。

$$y^{(n)} = g(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, u)$$

其中 u 和 y 都是标量变量。以 u 作为输入, y 作为输出, 求状态模型。

1.2 考虑由 n 阶微分方程

$$y^{(n)} = g_1(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, u) + g_2(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-2)}) \dot{u}$$

描述的单输入-单输出系统, g_2 是其自变量的可微函数。以 u 作为输入, y 作为输出, 求状态模型。

提示: 取 $x_n = y^{(n-1)} - g_2(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-2)}) u$ 。

1.3 考虑由 n 阶微分方程

$$y^{(n)} = g(y, \dots, y^{(n-1)}, z, \dots, z^{(m)}), \quad m < n$$

描述的单输入-单输出系统, z 是输入, y 是输出。通过在输入端添加 m 个串联的积分器扩展系统的动态范围, 并定义 $u = z^{(m)}$ 作为扩展系统的输入, 如图 1.17 所示。用 $y, \dots, y^{(n-1)}$ 和 $z, \dots, z^{(m-1)}$ 作为状态变量, 求扩展系统的状态模型。

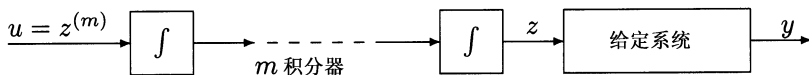


图 1.17 习题 1.3

1.4 一个 m 连杆机器人的非线性动力学问题^[171,185]可表示为

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = u$$

其中 q 是 m 维广义坐标向量, 表示结合位置, u 是 m 维控制(转动力矩)输入, $M(q)$ 是对称惯性矩阵, 对于所有 $q \in R^m$ 都是正定的。 $C(q, \dot{q})\dot{q}$ 用于说明离心力和科里奥利(Coriolis)力。对于所有 $q, \dot{q} \in R^m$, 矩阵 C 满足 $\dot{M} - 2C$ 是斜对称矩阵, 其中 \dot{M} 是 $M(q)$ 对于 t 的全微分。 Dq 用于说明黏滞阻尼, D 是半正定对称矩阵。 $g(q)$ 表示重力, 由 $g(q) = [\partial P(q)/\partial q]^T$ 给出, 其中 $P(q)$ 是由于重力产生的所有连杆的全部势能。选择适当的状态变量, 求出状态方程。

1.5 有一个具有软连接的单链路控制机^[185], 当忽略阻尼时, 其非线性动力学方程由下式给出:

$$\begin{aligned} I\ddot{q}_1 + MgL \sin q_1 + k(q_1 - q_2) &= 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) &= u \end{aligned}$$

其中 q_1 和 q_2 是角位置, I 和 J 是转动惯量, k 是弹簧系数, M 是总质量, L 是距离, u 是转动力矩输入。为该选择状态变量, 并写出状态方程。

1.6 一个具有软连接的 m 连杆机器人^[185]的非线性动力学方程为:

$$\begin{aligned} M(q_1)\ddot{q}_1 + h(q_1, \dot{q}_1) + K(q_1 - q_2) &= 0 \\ J\ddot{q}_2 - K(q_1 - q_2) &= u \end{aligned}$$

其中 q_1 和 q_2 是 m 维广义坐标向量, $M(q_1)$ 和 J 是对称非奇异惯性矩阵, u 是 m 维控制输入, $h(q, \dot{q})$ 表示离心力、科里奥利力和重力, K 是联合(joint)弹簧系数的对角矩阵。为该选择状态变量, 并写出状态方程。

- 1.7 图 1.18 所示为两个系统的反馈连接, 传递函数 $G(s)$ 表示的是一个线性时不变系统, $z = \psi(t, y)$ 定义了一个非线性时变部件。变量 r, u, y 和 z 是维数相同的向量, $\psi(t, y)$ 是向量值函数。以 r 作为输入, y 作为输出, 求状态模型。

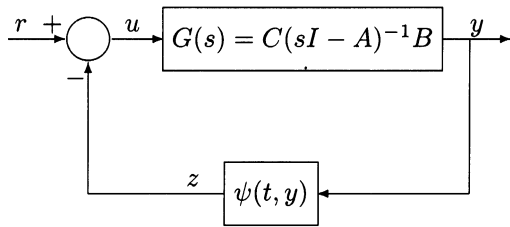


图 1.18 习题 1.7

- 1.8 一个与无限长总线 (infinite bus) 连接的同步发电机由下式表示^[148]:

$$\begin{aligned} M\ddot{\delta} &= P - D\dot{\delta} - \eta_1 E_q \sin \delta \\ \tau \dot{E}_q &= -\eta_2 E_q + \eta_3 \cos \delta + E_{FD} \end{aligned}$$

其中 δ 是用弧度表示的角度, E_q 是电压, P 是机械输入功率, E_{FD} 是场电压 (输入), D 是阻尼系数, M 是惯性系数, τ 是时间常数, η_1, η_2 和 η_3 是常数参数。

- (a) 用 $\delta, \dot{\delta}$ 和 E_q 作为状态变量, 写出状态方程。
 (b) 设 $P=0.815, E_{FD}=1.22, \eta_1=2.0, \eta_2=2.7, \eta_3=1.7, \tau=6.6, M=0.0147, D/M=4$, 求出所有平衡点。
 (c) 假设 τ 比较大, 使 $\dot{E}_q \approx 0$ 。证明假设 E_q 为常数, 可简化为单摆方程。

- 1.9 图 1.19 所示的电路中含有一个非线性电感, 电路由与时间相关的电流源驱动。假设非线性电感是约瑟夫森结^[39], 其特性为 $i_L = I_0 \sin k \phi_L$, 其中 ϕ_L 是电感的磁通量, I_0 和 k 是常数。

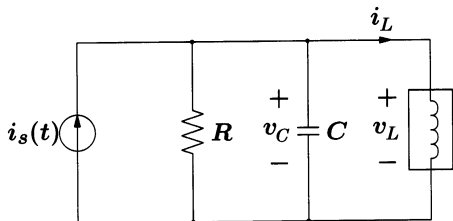


图 1.19 习题 1.9 和习题 1.10

- (a) 用 ϕ_L 和 v_C 作为状态变量, 求状态方程。
 (b) 选择 i_L 和 v_C 作为状态变量会更容易吗?
- 1.10 图 1.19 所示的电路中含有一个非线性电感, 电路由与时间相关的电流源驱动。假设非线性电感的特性为 $i_L = L \phi_L + \mu \phi_L^3$, 其中 ϕ_L 是电感的磁通量, L 和 μ 是正常数。
 (a) 用 ϕ_L 和 v_C 作为状态变量, 求状态方程。
 (b) 当 $i_s = 0$ 时, 求所有平衡点。
- 1.11 锁相环^[64]可由图 1.20 的方框图表示。设 $\{A, B, C\}$ 是标量, 是严格正则传递函数 (strictly proper transfer function) $G(s)$ 的一个最小实现。假设 A 的所有特征值都具有负实部, $G(0) \neq 0$, 且 θ_i 为常数。设 z 是 $\{A, B, C\}$ 实现的状态。
 (a) 证明该闭环系统可由如下状态方程表示:

$$\dot{z} = Az + B \sin e, \quad \dot{e} = -Cz$$

- (b) 求系统的所有平衡点。
 (c) 证明当 $G(s) = 1/(\tau s + 1)$ 时, 该闭环模型与单摆方程的模型一致。
- 1.12 考虑图 1.21 所示的质量-弹簧系统, 假设弹簧是线性的, 非线性黏滞阻尼由 $c_1 \dot{y} + c_2 \dot{y} |\dot{y}|$ 描述。求描述系统运动的状态方程。

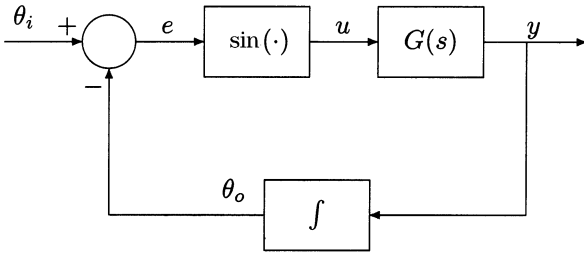


图 1.20 习题 1.11

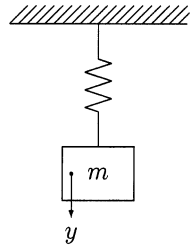


图 1.21 习题 1.12

- 1.13** 图 1.22 的结构是一个机械系统的例子^[7],其摩擦力在某一区域可以为负。一个由线性弹簧固定的物体 m ,在传动带上以速度 v_0 做匀速运动,弹簧的弹性系数为 k_1 和 k_2 。由传动带施加的摩擦力 $h(v)$ 是相对速度 $v = v_0 - \dot{y}$ 的函数。假设当 $|v| > 0$ 时, $h(v)$ 是光滑函数。除摩擦力外,假设还有一个线性黏滞摩擦力正比于 \dot{y} 。
- (a) 写出物体 m 的运动方程。
- (b) 只分析 $|\dot{y}| \ll v_0$ 的区域,可通过 $h(v_0) - \dot{y} h'(v_0)$ 用泰勒级数逼近 $h(v)$,利用该近似降价系统模型。
- (c) 考虑到 1.2.3 节讨论的摩擦力模型,描述哪种摩擦力特性 $h(v)$ 会使系统具有负摩擦力?
- 1.14** 图 1.23 所示为一个坡度为 θ 的道路上运动的车辆, v 是车的速度, M 是其质量, F 是由发动机产生的牵引力。假设摩擦力有库仑摩擦力和线性黏滞摩擦力,拉力正比于 v^2 。把 F 看成控制输入, θ 作为扰动输入,求系统的状态模型。

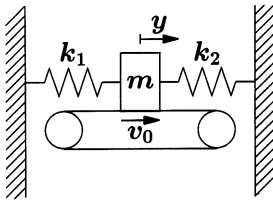


图 1.22 习题 1.13

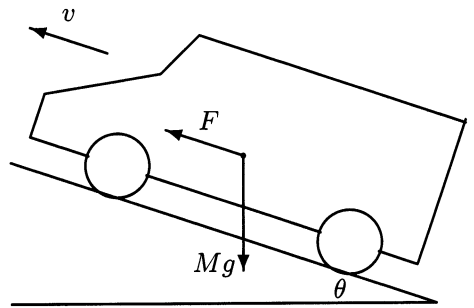


图 1.23 习题 1.14

- 1.15** 考虑图 1.24 所示的倒摆^[110]。单摆的支点装在一个沿水平方向运动的小车上,小车由电机驱动,电机在小车上施加水平方向的力 F 。图中还给出了单摆的受力分析:重心的力 mg , 水平方向的反作用力 H , 以及作用于支点的竖直方向的反作用力 V 。写出单摆重心在水平方向和竖直方向上的牛顿定律,有

$$m \frac{d^2}{dt^2} (y + L \sin \theta) = H, \quad m \frac{d^2}{dt^2} (L \cos \theta) = V - mg$$

取对重心的力矩可得到转矩方程

$$I \ddot{\theta} = VL \sin \theta - HL \cos \theta$$

而小车在水平方向上的牛顿定律为