

第 1 章 引 言

一旦你正确地把握了物理性质，剩下的就是数学问题了。

——Rudolf E. Kalman

Kailath Lecture, 斯坦福大学, 2009 年 5 月 11 日

1.1 本章重点

本章对我们的讨论主题进行了扼要介绍，简述了在此以前这个主题的发展历史，综述了所有内容之间的相互联系，并且给出了常用符号以及使其更加清晰的名词术语。

1.2 关于卡尔曼滤波

1.2.1 第一个问题：什么是卡尔曼滤波器

从理论上讲，卡尔曼滤波器曾经被称为线性最小均方估计子 (Linear Least Mean Squares Estimator, LLMSE)，因为它利用含有噪声的线性传感器 (数据) 使线性随机系统的均方估计误差最小化。卡尔曼滤波器也曾称为线性二次估计子 (Linear Quadratic Estimator, LQE)，因为它根据白色测量值和扰动噪声，使线性动态系统的估计误差的二次函数最小化。即使在卡尔曼滤波器出现半个世纪以后的今天，它仍然是估计理论历史上的唯一成就。它是随机系统实时最优估计问题的唯一实际的有限维解决方法，它对涉及的概率分布做出很少的假设，只要要求它们具有有限的均值和二阶中心距 (协方差)。卡尔曼滤波器的数学模型代表了一类重要应用，它利用含有噪声的测量值来估计具有难以预测扰动的动态系统的当前状态。尽管提出了许多近似方法将其应用推广到弱线性问题，并且尽管数十年专注于其对非线性应用的研究推广，人们依然没有发现针对非线性问题的一般性有效解决方法^①。

实际上，卡尔曼滤波器是数学工程 (Mathematical Engineering) 的伟大发现之一，它采用数学模型来解决工程问题——这与利用数学物理学解决物理问题，或者利用计算数学解决计算机实现中的效率和精度问题的方法是非常类似的。

卡尔曼滤波器的早期应用者认为它是在 20 世纪中实际估计理论的最伟大发现，并且其名声随着时间的发展而越来越响。为了说明它是普遍存在的，在 Google 网站上搜索“卡尔曼滤波器”或者“卡尔曼滤波”会得到超过 100 万的点击率。原因之一在于卡尔曼滤波器使人们能够完成许多离开它做不了的事情，正如硅一样，它也是构造许多电子系统不可缺少的部分。其最直接的应用是用于监视和控制复杂的动态系统，比如连续制造过程、飞行器、舰船或者宇宙飞船。为了控制动态系统，我们必须首先知道它正在做什么。对于这类应用，并不总是可能或者期望对你想控制的每一个变量进行测量，卡尔曼滤波器则提供了一种数学框

^① 然而，人们发现了具有一定局限性的有限维非线性解决方法^[1]。

架,可以从间接的有噪声的测量值中推断出未测量的变量。卡尔曼滤波器还可用来对人们不能控制的动态系统可能的未来行为进行预测,比如洪水暴发期间的水流、天体的轨迹或者商品和有价值证券的价格等。它已经成为了一种将不同传感器和/或数据采集系统综合集成为一个整体的最优解决方案的通用工具。

卡尔曼滤波器模型还有一个额外的用处,它可以用来作为一种工具,对动态系统轨道类的其他传感器系统设计的相对精度进行评估。如果没有这种能力,则不太可能开发出许多复杂的传感器系统(包括全球导航卫星系统)。

从实际立场来讲,本书将提出下列观点:

1. 卡尔曼滤波器仅仅是一种工具。尽管它能够使你更容易解决问题,但是单靠它自身并不能解决任何问题。它不是一种物理工具,而是一种数学工具。正如机械工具使体力劳动效率更高一样,数学工具使脑力劳动效率更高。与任何工具相同,在有效地使用它以前,先理解其作用和功能是非常重要的。本书的目的在于使读者充分熟悉并精通卡尔曼滤波器的使用,以便正确有效地运用它。
2. 卡尔曼滤波器是一种计算机程序。它一直被称为“适用于数字计算机实现的理想工具”^[2],部分原因在于它采用了估计问题的有限表示方法——通过有限数目的变量来表示。然而,该方法确实假设这些变量都是实数——即具有无限精度。在应用中遇到的一些问题来自于有限维度和有限信息之间的区别,以及“有限”和“可处理”问题规模的区别。这些卡尔曼滤波实际方面的问题是必须同卡尔曼滤波理论一起考虑的。
3. 卡尔曼滤波器是估计问题具有一致性的统计描述方法。它不仅仅是一个估计子,因为它会传播动态系统有关知识的当前状态,包括来自于随机动态扰动和传感器噪声的均方不确定性。这些特性对于传感器系统的统计分析和预先设计都是极其有用的。

如果上述回答能够满足你所追求的理解水平,则没有必要阅读本书余下部分了。如果需要充分理解卡尔曼滤波器以便有效利用它,则请继续往下阅读。

1.2.2 为什么被称为滤波器

将“滤波器”这个词用来描述估计子看起来可能有点奇怪。通常而言,一个滤波器是指用于将混合物中不想要的部分去掉的物理设备(单词 felt 来自于相同的中古拉丁文词根,它表示用做液体过滤器的材料)。滤波器最初用于解决将液体-固体混合物中不需要的成分进行分离的问题。在晶体管收音机和真空管的时代,该术语用于对电子信号进行“滤波”的模拟电路。这些信号是不同频率成分的混合物,并且这种物理设备将不需要的频率选择性地衰减掉。

在 20 世纪 30 年代和 40 年代,这个概念被推广用于分离“信号”和“噪声”,两者都用其功率谱密度所表征。在给定信号与噪声混合物的情况下,Kolmogorov(科尔莫戈罗夫)和 Wiener(维纳)采用其概率分布的统计特征,以构造出信号的最优估计。

就卡尔曼滤波而言,这个术语的含义已经远远超出对混合物的成分进行“分离”这一原始思想了。它还用于解决求逆的问题,这种情况下我们知道如何将可测量的变量表示为最感兴趣的变量函数。从本质上讲,它对这个函数关系求逆,并且将非独立(可测量)变量的逆函数作为独立变量的估计。这些感兴趣的变量是允许动态变化的,这种动态性只能是部分可预测的。

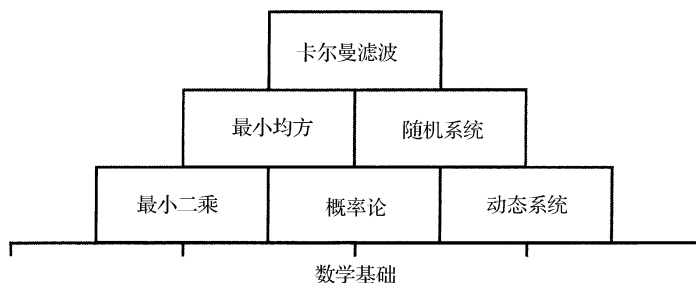


图 1.1 卡尔曼滤波中的基本概念

1.2.3 卡尔曼滤波的数学基础

在图 1.1 中，给出了构成卡尔曼滤波理论基础的基本概念。尽管这里将卡尔曼滤波画为金字塔尖顶图形，其本身仅仅是另一个学科——现代控制理论基础的一个部分，它也是统计决策理论的一个子集。

在本书中，我们将只考虑该金字塔的上面三层，以及少量数学基础知识^①（即 Wiley 网站上的附录 B 中的矩阵理论）。

1.2.4 卡尔曼滤波的应用

卡尔曼滤波的应用包括许多领域，但其作为一种工具而言，几乎只用于两个目的：估计和估计子的性能分析。

1. 估计动态系统的状态。什么是动态系统？如果对这个概念较真的话，它几乎包含了所有的系统。除了少数基本的物理常数，在宇宙中几乎很少有事物是真正恒定不变的。矮行星谷神星的轨道参数不是恒定不变的，甚至“固定”的星星和陆地也在移动。几乎所有的物理系统都在一定程度上是变化的。如果人们希望非常精确地估计其随时间变化的特征，则必须考虑其动态变化因素。问题是人们并不总是能够非常准确地掌握其动态变化。对于部分未知的状态，能够做得最好事情是更加准确地表达出未知——利用概率论。卡尔曼滤波器允许我们利用这种统计信息，根据某种类型的随机行为对动态系统的状态进行估计。表 1.1 中的第二列给出了这类系统的部分例子。

表 1.1 估计问题举例

应用	动态系统	传感器类型
过程控制	化工厂	压力 温度 流速 气体分析仪
洪水预报	水系	水位 雨量计 气象雷达

^① 总之，在本书中最好不要过于仔细地考虑最小面一层的这些数学基础。它们最终依赖于人类的智能，而其基础并没有被完全理解。

(续表)

应用	动态系统	传感器类型
跟踪	航天器	雷达 成像系统
导航	舰船	六分仪 日志 陀螺仪 加速度计 GNSS ^a 接收机

^a 缩写: GNSS, 全球导航卫星系统。

2. 估计系统的性能分析。表 1.1 中的第三列给出了在估计对应动态系统状态时可能用到的一些传感器类型。设计分析的目标是确定出对于某个给定的性能准则, 利用这些传感器类型的好坏程度。这些准则通常与估计精度和系统成本有关。

在确定最优滤波增益时, 卡尔曼滤波器利用其估计误差的概率分布的参数特征, 这些参数可能用于评估其性能, 该性能是估计系统“设计参数”的函数, 比如包括下列参数:

1. 采用的传感器的类型。
2. 各种类型的传感器相对于被估计系统的位置和方向。
3. 传感器允许的噪声特征。
4. 对传感器噪声进行平滑处理的预滤波方法。
5. 各种类型传感器的数据采样率。
6. 为降低实现需求而对模型的简化程度。

卡尔曼滤波器的分析能力还允许系统设计人员可以为一个估计系统的各个子系统分配“误差预算”, 并且对预算分配进行权衡, 以便在实现所需估计精度的条件下, 使代价成本或者其他性能指标达到最优。

1.3 关于最优化估计方法

卡尔曼滤波器是许多世纪以来, 众多富有创造性的思想家的思想不断进化发展的结果。我们在这里给出其中一些基本思想, 在图 1.2 中从历史观点列出了这些思想的发现者。这个列表并不完备, 其中还包括太多的人员以至于不能全部列举出来, 但是该图可以给出其中所涉及的一些时期。该图只包含了 500 年时间, 数学概念的研究和发展则可以追溯到史前。对于最优估计理论的详细历史感兴趣的读者可以参考 Kailath^[8,30], Lainiotis^[3], Mendel 和 Giesecking^[4], Sorenson^[55,56]等人的综述文章, 以及 Battin^[5]和 Schmidt^[6]的个人报告。在第 7 章和第 8 章中, 讨论了上述列表中最后 5 位发现者的最新成果。

1.3.1 最优估计理论的出现

从噪声数据中构造出最优估计的第一个方法是最小二乘方法。通常认为, 它是由 Carl Friedrich Gauss(1777 - 1855)于 1795 年发现的。虽然自从 Galileo(1564 - 1642)时代, 人们就已经认识到测量误差是不可避免的, 但最小二乘方法是处理这种测量误差的第一个正规方法。尽管该方法更普遍地用于线性估计问题, Gauss 却首先将其用于解决数学天文学中的非

线性估计问题，这是天文学历史上令人感兴趣的事件。后面的记录将多个来源综合在一起了，包括 Baker 和 Makemson^[7]所做的记录。

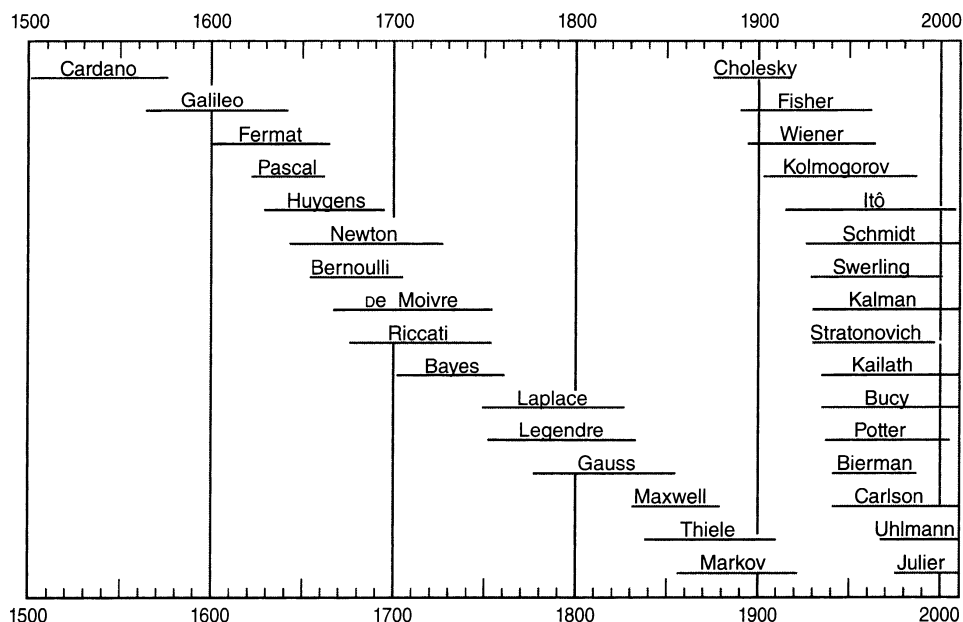


图 1.2 估计技术的一些重要贡献者的生命线

在 1801 年 1 月 1 日，19 世纪的第一天，意大利天文学家 Giuseppe Piazzi 正在检查一个星座记录中的条目。Piazzi 不知道打印机产生了一个错误，当他搜索“丢失”的星座时，却发现了某个在移动的物体。这就是“矮行星”谷神星——在小行星带中的最大天体，并且也是第一个被发现的——但是 Piazzi 却并不知道这些。在谷神星运动到离太阳太近而消失以前的 41 个夜晚期间，Piazzi 能够跟踪并记录其相对于“固定”星座背景的明显运动。

在 1 月 24 日，Piazzi 将其发现写信发给了 Johann Bode。因为提出了 Bode's 定律，Bode 在当时非常著名，他指出行星与太阳的距离可以用天文单位表示为如下序列：

$$d_n = \frac{1}{10}(4 + 3 \times 2^n), \quad n = -\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (1.1)$$

实际上，不是 Bode，而是 Johann Tietz 于 1772 年首先提出这个公式的。当时，只有 6 个已知的行星。在 1781 年，Friedrich Herschel 发现了 Uranus，它与该公式在 $n = 6$ 的情况非常一致。到目前为止，还未发现与 $n = 3$ 的情况一致的行星。受 Bode 启发，一个由欧洲天文学家组成的协会花了近 30 年时间一直在寻找“丢失”的第 8 颗行星。Piazzi 并不是这个协会的成员，但他确实将其无意的发现告知了 Bode。

直到 3 月 20 日，Bode 才收到 Piazzi 的信。Bode 怀疑 Piazzi 的发现可能就是那颗丢失的行星，但根据当时可用的方法，没有足够的数据来确定出其轨道根数 (Orbital Elements)。在非线性方程中这还是一个 (有待解决的) 问题，以至于牛顿自己也声称这属于数学天文学领域中最困难的问题。没有人能够解决它，因此，谷神星再次“消失”在太空中了。

直到 1801 年秋季，Piazzi 的发现才正式发表。一颗新行星可能被发现——以及后续的丢失。随着一个新世纪的开始，成为了激动人心的新闻。它与当时只有 7 个行星的哲学判断相矛盾——这个数字在谷神星被发现以前是众所周知的，并且被受人尊敬的哲学家 Georg Hegel

以及其他人所认同。Hegel(黑格尔)当时刚刚出版了一本书,其中他批评天文学家们寻找第8颗行星是在浪费时间,因为只有7颗行星的判断已经有彻底充分的哲学理由。在几乎所有地方,这个新的天体目标都成为了知识圈内谈论的主题。幸运的是,这个问题引起了Göttingen的一个24岁名叫Carl Friedrich Gauss的数学家的注意。

在几周以前,Gauss正好考虑过轨道确定问题,但由于其他兴趣他又抛在了一边。现在,他把大部分时间都花在这个问题上,在12月估计出了谷神星的轨道,并将其结果寄给了Piazzi。在这一年第一天被观察到的这颗新的“行星”(后来被重新分类为小行星)再次被发现了。

直到1809年,Gauss才正式发表他的轨道确定方法^①。在这篇论文中,他还描述了1795年他18岁时发现的最小二乘方法,并且利用这个方法对谷神星的轨道估计进行了改进。

尽管谷神星在(行星)发现的历史中发挥了重要的作用,并且它也仍然在夜晚的天空中定期不断地重复出现,但作为一个智力方面的兴趣主题,它却逐渐模糊下来,直到2007年发起了针对2015年再次与谷神星会合的科学探索。另一方面,自从被发表以后,最小二乘方法就一直不断地成为感兴趣的主体,并且各个时代的科技人员都受益匪浅。它在科学历史上产生了深远的影响。它是第一个最优化估计方法,它在实验科学和理论科学之间建立了重要的联系:它为实验人员提供了估计理论模型未知参数的一种切实可行的方法。

1.3.2 最小二乘方法

下面的例子是一种最常见的最小二乘问题,尽管最小二乘方法可以应用于更广泛的问题。

例 1.1 (超定线性系统的最小二乘解) Gauss发现,如果将一个方程组用矩阵形式写为

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \cdots & h_{2n} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & h_{m3} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_l \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

或者

$$Hx = z \quad (1.3)$$

于是,可以考虑使“估计的测量误差” \hat{x} 达到最小化的估计值 $H\hat{x} - z$ 的求解问题。可以用欧几里得向量范数 $|H\hat{x} - z|$ 来表征估计误差,或者等价地采用其平方形式

$$\varepsilon^2(\hat{x}) = |H\hat{x} - z|^2 \quad (1.4)$$

$$= \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n h_{ij}\hat{x}_j - z_i \right]^2 \quad (1.5)$$

① 与此同时,最小二乘方法还被法国的Andrien-Marie Legendre(1752-1833)以及美国的Robert Adrian(1775-1855)所独立发现并公开发表^[8]。甚至在Gauss出生以前,德裔瑞士物理学家Johann Heinrich Lambert(1728-1777)就已经发现并使用了这个方法。这种荣誉的同步性(Jungian synchronicity,即多人几乎同时发现某物的现象)在估计理论的其他重要发现上也经常会重复出现——比如Wiener-Kolmogorov滤波器和卡尔曼滤波器。

② 原版书中的数学符号较多且不符合规范,为不产生二次错误,在书中未进行规范——编者注。

上式是 n 个未知量 $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n$ 的连续微分函数。当任意分量 $\varepsilon^2(\hat{x}) \rightarrow \infty$ 时, 该函数 $\hat{x}_k \rightarrow \pm \infty$ 。因此, 在所有关于 \hat{x}_k 的导数都等于零的点, 该函数取得其最小值。存在 n 个这种形式的方程

$$0 = \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \hat{x}_k} \quad (1.6)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^m h_{ik} \left[\sum_{j=1}^n h_{ij} \hat{x}_j - z_i \right] \quad (1.7)$$

其中, $k=1, 2, 3, \dots, n$ 。注意到在上述最后一个方程中, 表达式

$$\sum_{j=1}^n h_{ij} \hat{x}_j - z_i = \{H\hat{x} - z\}_i \quad (1.8)$$

为 $H\hat{x} - z$ 第 i 行, 并且其最外面的求和等效于 H 的第 k 列与 $H\hat{x} - z$ 的点积。因此, 式(1.7)可以重新写为

$$0 = 2H^T[H\hat{x} - z] \quad (1.9)$$

$$= 2H^T H\hat{x} - 2H^T z \quad (1.10)$$

或者

$$H^T H\hat{x} = H^T z$$

其中, 转置矩阵 H^T 定义为

$$H^T = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} & \dots & h_{m1} \\ h_{12} & h_{22} & h_{32} & \dots & h_{m2} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} & \dots & h_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1n} & h_{2n} & h_{3n} & \dots & h_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

方程

$$H^T H\hat{x} = H^T z \quad (1.12)$$

被称为正则方程, 或者称为线性最小二乘问题方程的正则形式。它的等效标量方程的个数与未知数的个数是严格相等的。

线性最小二乘问题的 Gram 矩阵

假设矩阵

$$G = H^T H \quad (1.13)$$

是非奇异矩阵(即可逆的), 则正则方程的解为

$$\hat{x} = (H^T H)^{-1} H^T z$$

上述方程中的矩阵乘积 $G = H^T H$ 被称为 Gram 矩阵(Gram matrix)^①。Gram 矩阵的行列式表征

① 这是根据丹麦数学家 Jorgen Pedersen Gram(1850 - 1916) 的名字来命名的。这个矩阵也与非尺度化 Fisher 信息矩阵相关, 该矩阵是根据英国统计学家 Ronald Aylmer Fisher(1890 - 1962) 的名字来命名的。尽管信息矩阵和 Gram 矩阵具有不同的定义和应用, 它们在这个具体的例子中的含义实际上几乎是相同的。信息矩阵这个术语的正式统计定义表示从已知概率分布的采样值中得到的信息。它与 z 中的测量误差具有联合概率分布时 Gram 矩阵的尺度形式相对应, 其比例因子与测量数据的不确定性有关。信息矩阵(在一定意义上)是对数据 z 中用于估计 x 的“信息”的统计特征的量化。另一方面, Gram 矩阵则用于对解的唯一性的代数特征的量化。

了 H 的列向量是否线性独立。如果其行列式等于零, 则 H 的列向量是线性独立的, 此时不能唯一确定出 \hat{x} 。如果其行列式不等于零, 则解 \hat{x} 可以唯一确定。

例 1.2 (Guier 和 Weiffenbach 的 Gram 矩阵) 在 1957 年 10 月 4 日 (星期五), 前苏联发射世界上第一颗人造卫星 Sputnik I 号以后, 就开始了卫星导航系统的研发。在接下来的周一, 约翰·霍普金斯大学应用物理实验室 (Applied Physics Laboratory, APL) 的两位科学家 William Guier (1926 - 2011) 和 George Weiffenbach (1921 - 2003) 就开始对来自于 Sputnik I 号的 20 MHz 载波信号进行记录和分析了。当卫星经过地平线时, 这些信号呈现出明显的多普勒频移模式。在这段通常只有几分钟的时间内, Weiffenbach 能够利用频谱分析仪对多普勒频移进行跟踪。为了理解卫星轨道如何对观测到的多普勒频移模式产生影响, Guier 和 Weiffenbach 计算出了多普勒频移相对于轨道参数的偏导数。

对于卫星轨道的任意参数 p_k , Guier 和 Weiffenbach 都可以得到在已知接收机位置的可测量多普勒频移 $f_{\text{Dop}}(t)$ 相对于该参数的数值偏导, 生成具有扰动值 $p_k + \delta_{p,k}$ 的轨道, 并且计算出卫星经过期间在采样时刻 t_i 于接收机处得到的多普勒频移扰动 $\delta_{f,k}(t_i)$, 其结果如下:

$$\frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_i)}{\partial p_k} \approx \frac{\delta_{f,k}(t_i)}{\delta_{p,k}}$$

于是, 在卫星经过下列线性方程组期间, 轨道参数的微小变化 $\Delta_{p,k}$ 将会与多普勒频移的可观察到的偏差 $\Delta_{\text{Dop}}(t_i)$ 近似相关

$$\begin{bmatrix} \Delta_{\text{Dop}}(t_1) \\ \Delta_{\text{Dop}}(t_2) \\ \Delta_{\text{Dop}}(t_3) \\ \vdots \\ \Delta_{\text{Dop}}(t_N) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_1)}{\partial p_1} & \frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_1)}{\partial p_2} & \frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_1)}{\partial p_3} & \cdots & \frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_1)}{\partial p_n} \\ \frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_2)}{\partial p_1} & \frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_2)}{\partial p_2} & \frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_2)}{\partial p_3} & \cdots & \frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_2)}{\partial p_n} \\ \frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_3)}{\partial p_1} & \frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_3)}{\partial p_2} & \frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_3)}{\partial p_3} & \cdots & \frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_3)}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_N)}{\partial p_1} & \frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_N)}{\partial p_2} & \frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_N)}{\partial p_3} & \cdots & \frac{\partial f_{\text{Dop}}(t_N)}{\partial p_n} \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} \Delta_{p,1} \\ \Delta_{p,2} \\ \Delta_{p,3} \\ \vdots \\ \Delta_{p,n} \end{bmatrix}$$

其中, 矩阵 H 是 $N \times n$ 维的, N 是卫星一次经过期间观察到的多普勒频移数, n 是卫星轨道参数的个数。

于是, 给定 N 个观测值 $\Delta_{\text{Dop}}(t_i)$ 估计 n 个未知轨道参数 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ 的问题就与 Gauss 在 1801 年遇到的求解谷神星的“Keplerian”轨道参数的问题相类似, 即可用的观测值只占全部轨道参数的一小部分。Guier 和 Weiffenbach 也同样做了 Gauss 所做的工作: 他们用 Gauss 的最小二乘方法来试验, 看是否能够得到合理的估计值。这种方法取决于与之相关的 $n \times n$ 维 Gram 矩阵

$$G = H^T H$$

是否可逆。Gauss 花了几个月时间才解决这个问题, 但 Guier 和 Weiffenbach 具有 Gauss 所没有的东西: 利用 Univac 1103A 计算机^①。

首先, 根据 Gauss 的方法, 偏导数是针对 Sputnik I 轨道的 6 个 Keplerian 参数的。然而, 发现在卫星轨道上重力异常的影响比预料的更加严重, 于是在线性化模型中增加了针对主要

^① 这是拥有与 IBM 704 能力大致相同的一种电子管计算机。它有 1~4 组 18 KB 的磁芯随机访问存储器和磁鼓存储器, 36 bit 的数据字, 并且乘法次数在每毫秒数十次的量级。

重力异常的偏导数。另外,还增加了其他针对电离层传播效应和卫星发射频率的偏导数。在所有情况下,都可以发现对应的 Gram 矩阵 G 均为非奇异的。这表明仅仅根据卫星经过具有已知位置的接收机就可以利用多普勒频移模式确定出卫星轨道。作为一项额外的成果,利用这个解也可以估计出在卫星高度的重力场异常。

1958 年 3 月, APL 研究中心主任 Frank McClure (1916 - 1973) 对这些结果进行了综述。McClure 提出, 如果已知多普勒频移的过去值以及卫星星历表(轨道描述), 是否可以利用这种关系反过来确定出接收机的水平位置? Guier 和 Weiffenbach 能够表明, 此时的 2×2 维 Gram 矩阵也是非奇异的。也就是说, 根据单次经过已知轨道的卫星产生的多普勒频移模式, 可以得到接收机天线经度和纬度的最小二乘解。

这一发现导致世界上第一个卫星导航系统——美国海军子午仪导航系统的出现。在 1956 年 12 月, 美国海军负责研发一种新型核动力弹道导弹潜艇, 这种潜艇于 20 世纪 60 年代下水, 但是它在发射其导弹前需要精确的位置信息。子午仪导航系统可以满足这种需求。它在 1960 年代开始运行, 直到 20 世纪 90 年代被全球定位系统(GPS)所逐步取代。

最小二乘解

在 Gram 矩阵可逆(即非奇异)的情况下, 解 \hat{x} 被称为超定线性逆系统的最小二乘解。它是在对未知测量误差的特性未作任何假设的情况下得到的估计值, 尽管 Gauss 在描述这种方法时提到了这种可能性。本书后面章节将会正式讨论估计中的不确定性问题。

在第 2 章中, 这种形式的 Gram 矩阵将用于定义离散时间线性动态系统模型的可观测矩阵。

连续时间最小二乘方法

通过下面的例子可以表明, 最小二乘原理可用于将向量值参数模型与连续时间数据进行拟合。这个例子还表明, 在这种情况下也可以应用 Gram 矩阵来对可确定性问题(即某个问题是否存在唯一解)进行表征。

例 1.3 (连续时间向量值数据的最小二乘拟合) 假设对于间隔 $t_0 \leq t \leq t_f$ 内的每个时刻 t , $z(t)$ 是 l 维信号向量, 它可以用一个未知 n 维向量 x 的函数来建模, 如下式所示:

$$z(t) = H(t)x$$

其中, $H(t)$ 是已知的 $l \times n$ 维矩阵。在每个时刻 t , 上述关系中误差的平方为

$$\varepsilon^2(t) = |z(t) - H(t)x|^2 = x^T [H^T(t)H(t)]x - 2x^T H^T(t)z(t) + |z(t)|^2$$

于是, 在整个时间间隔内总误差的平方为下列积分:

$$\|\varepsilon\|^2 = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon^2(t) dt = x^T \left[\int_{t_0}^{t_f} H^T(t)H(t) dt \right] x - 2x^T \left[\int_{t_0}^{t_f} H^T(t)z(t) dt \right] + \int_{t_0}^{t_f} |z(t)|^2 dt$$

上式中, x 的排列结构与代数最小二乘问题完全相同。与前面一样, 可以通过求 $\|\varepsilon\|^2$ 关于 x 分量的偏导数并令其为零, 以得到 x 的最小二乘解。假设对应的 Gram 矩阵

$$\hat{x} = \left[\int_{t_0}^{t_f} H^T(t)H(t) dt \right]^{-1} \left[\int_{t_0}^{t_f} H^T(t)z(t) dt \right]$$

是非奇异的, 则所得方程的解为

$$G = \int_{t_0}^{t_f} H^T(t)H(t) dt$$

Gram 矩阵与可观测性

对于上述例子而言,可观测性并不取决于观测数据(z)。它只取决于 Gram 矩阵(G)的非奇异性,而该矩阵又只取决于未知量和已知量之间的线性约束矩阵(H)。

一组未知变量的可观测性,是指是否可以根据一组约束条件来唯一确定出其值的问题,这组约束条件通常用包含未知变量函数的方程来表示。如果它们的值可以由给定的约束来唯一确定,则未知变量被称为可观测的;如果它们不能由给定的约束来唯一确定,则被称为是不可观测的。

当约束方程是未知变量的线性关系时, Gram 矩阵的非奇异(或者“满秩”)条件是可观性的代数特征。这也适用于约束方程不准确的情形,这种情况是由于方程中已知参数的值存在误差所导致的。

在第 2 章中,将利用 Gram 矩阵来定义连续时间和离散时间动态系统状态的可观测性。

1.3.3 不确定性的数学模型

概率论通过对不确定性问题提供比“我不知道”更有用的结果,来代表物理现象的知识状态。在科学史上的一个谜是,为什么数学家花了如此长的时间才正式解决这么具有重要实际意义的主题。在期望和风险成为非常有趣的数学概念以前很长时间,罗马人就开始销售保险和养老金了。后来,意大利人在文艺复兴早期也针对商业风险出台了保险政策,在那个时期出现了所知道的第一次概率理论尝试:一种靠碰运气取胜的游戏。意大利人 Girolamo Cardano^①(1501 - 1576)对采用骰子的游戏进行了精确的概率分析。他假设连续扔出骰子是统计独立事件。正如前辈印度数学家 Brahmagupta(589 - 668)一样,Cardano 也在没有给出证明的情况下指出,经验统计量的精度随着试验次数的增加而趋于不断提高。后来把这个结果正式称为大数定律。

对概率更一般性的研究工作是由 Blaise Pascal(1622 - 1662)、Pierre de Fermat(1601 - 1655)和 Christiaan Huygens(1629 - 1695)完成的。Fermat 对组合的研究成果被 Jakob(或 James)Bernoulli(1654 - 1705)所接受,Bernoulli 被一些历史学家认为是概率论的奠基人。他第一个对重复独立试验(现在称为 Bernoulli 试验)情况下的大数定律给出了严格证明。在 Bernoulli 以后,Thomas Bayes(1702 - 1761)推导得出了其关于统计推理的著名准则。Abraham de Moivre(1667 - 1754)、Pierre Simon Marquis de Laplace(1749 - 1827)、Adrien Marie Legendre(1752 - 1833)和 Carl Friedrich Gauss(1777 - 1855)等人继续将这些研究工作发展到 19 世纪。

在 19 世纪早期到 20 世纪中期之间,概率自身开始具有更重要的物理意义。自然法则包含随机现象并且这种现象可以用概率模型来解决的思想在 19 世纪开始出现。概率模型的发展及其在物理世界中的应用在这个时期迅速推广,它甚至成为了社会学的重要部分。James Clerk Maxwell(1831 - 1879)在统计力学中的工作将自然现象的概率处理建立成为一门系统的(并且成功的)学科。Andrei Andreyevich Markov(1856 - 1922)发展了今天称之为马尔可夫过

^① Cardano 是在米兰执业的一位内科医生,他也出版了一些数学著作。他对靠碰运气取胜的游戏(主要是掷骰子游戏)进行数学分析的著作 *De Ludo Hleae*,在他去世几乎一个世纪以后才得以公开出版。Cardano 还是汽车里最常用的万向转接头的发明人,它们有时也被称为 Cardan 转接头或 Caudan 轴。

程(连续时间)或者马尔可夫链(离散时间)的大部分理论,这种随机过程的性质是,它的概率分布随时间的演进可以作为一个初值问题来对待。也就是说,这种随机过程可能的状态概率分布随时间的瞬时变化是由其当前分布决定的,当前分布包括了该过程所有过去历史的影响。

在 20 世纪,在概率论和随机过程理论中的一个重要人物是俄罗斯院士 Andrei Nikolayevich Kolmogorov(1903 – 1987)。大概从 1925 年开始,他与 Aleksandr Yakovlevich Khinchin 及其他研究人员一起,重新建立了关于测度论(Measure theory)的概率论基础,测度论是积分理论基础的起源,也是概率和随机过程公认的数学基础。他还和 Norbert Wiener 一起,被认为是马尔可夫过程的预测、平滑和滤波理论,以及遍历过程的一般理论的主要奠基人之一。他的理论是涉及随机过程的系统最优估计的第一个正式理论。

1.3.4 Wiener-Kolmogorov 滤波器

Norbert Wiener(1894 – 1964)是 20 世纪早期更著名的天才之一。他从小是由其父亲教育的,直到 9 岁时进入中学。他在 11 岁时中学毕业,并在 Tufts 大学用 3 年时间获得了数学本科学位。然后在 14 岁时进入哈佛大学研究院,并且在 18 岁时获得了数学哲学博士学位。毕业以后他出国研究,并且在 6 年多时间里尝试了多个工作。然后,在 1919 年得到了麻省理工学院(MIT)的教学职位,他的后半生一直都是 MIT 的教员。

在流行的科学出版物里面,Wiener 之所以著名可能更是因为他命名并促进了控制论(Cybernetics)的发展,而不是发展了 Wiener-Kolmogoriv 滤波器。他的一些最重要的数学成就包括广义谐波分析,其中他把傅里叶变换推广到了有限功率(power)函数。以前的结果局限于有限能量(energy)函数,这对于现实生活中的信号是一个不太合理的约束。他在广义傅里叶变换中的众多成就之一,是证明了白噪声的变换也是白噪声^①。

Wiener-Kolmogorov 滤波器发展

在第二次世界大战前几年,Wiener 参与了一个军方项目,需要利用雷达信息设计一个自动控制来引导防空火力。因为飞机的速度与子弹速度相比是不能忽略的,因此要求这个系统“射向未来”。也就是说,控制器必须能够利用有噪声的雷达跟踪数据,对其目标的未来航线进行预测。

在推导最优估计器时,Wiener 利用在函数空间上的概率测度来表示不确定的动态行为。他根据信号和噪声的自相关函数,推导出了最小均方预测误差解。这个解的形式是一个积分算子,如果对自相关函数或者等效的傅里叶变换的规律性方面施加某些约束,则它可以用模拟电路来合成。他的方法利用功率谱密度代表了随机现象的概率特性。

Kolmogorov 于 1941 年针对离散时间系统的最优线性预测器也发表了类似的推导结果,此时 Wiener 正好完成了他对连续时间预测器的推导工作。

直到 20 世纪 40 年代晚期,Wiener 的工作才在一个题目为“平稳时间序列的外插、内插和平滑”的研究报告中被解密,这个题目后来被缩写为“时间序列”。该报告的早期版本有一个黄色的封面,因此被称为黄祸(the yellow peril)。这个报告中充满了很多数学细节,这些内

^① 他还被认为发现了信号的功率谱密度(PSD)等于其自协方差函数的傅里叶变换,尽管后来发现 Albert Einstein 在他以前就已经发现了这个结论。

容超出了大多数工程本科生的能力范围,但是却被专注于电子工程学科的一代研究生们所吸引和采用。

1.3.5 卡尔曼滤波器

Rudolf Emil Kalman 于 1930 年 5 月 19 日出生于布达佩斯,他是 Otto 和 Ursula Kalman 的儿子。他们全家在第二次世界大战期间从匈牙利移民到了美国。在 1943 年,当地中海的战争基本停止的时候,他们随着大多数人穿过了土耳其和非洲,最后于 1944 年到达俄亥俄州的扬斯敦市(Youngstown)。Kalman 加入了扬斯敦学院,并且在进入 MIT 以前在那里学习了 3 年。

Kalman 分别于 1953 年和 1954 年在 MIT 获得了电子工程专业的学士学位和硕士学位。他的研究生导师是 Ernst Adolph Guillemin, 论文题目是关于二阶差分方程解的行为^[9]。当他在从事这项研究工作时,人们怀疑二阶差分方程应该采用与二阶微分方程类似的某种描述函数来建模。Kalman 发现它的解与微分方程的解完全不同。事实上,他发现二阶差分方程的解表现出了混沌行为。

1955 年秋天,在花了一年时间为 E. I. Du Pont 公司建立一个大型模拟控制系统以后, Kalman 得到了哥伦比亚大学的讲师职位并且成为了该大学的研究生。当时,哥伦比亚大学因为 John R. Ragazzini, Lotfi A. Zadeh^① 及其他人员在控制论方面的研究工作而闻名。直到 1957 年 Kalman 在哥伦比亚大学获得科学博士学位以前,他一直在那里教学。

第二年, Kalman 在 Poughkeepsie 的 IBM(International Business Machines Corporation, 国际商用机器公司)的研究实验室工作,6 年以后他又到位于 Baltimore 的 Glenn L. Martin 公司的研究中心工作,这是一家从事高级研究的研究所(Research Institute for Advanced Studies, RIAS)。

为了带领它的数学部门发展, RIAS 从普林斯顿大学招来了数学家 Solomon Lefschetz (1884 - 1972), Lefschetz 在 Clark 大学曾经是火箭先驱 Robert H. Goddard(1882 - 1845) 的同学,并且在普林斯顿大学是 Richard E. Bellman(1920 - 1984) 的导师。Lefschetz 在 Robert W. Bass 的推荐下聘请了 Kalman, Bass 在 1956 年进入 RIAS 以前在普林斯顿大学曾经是 Lefschetz 的博士后。Kalman 推荐了 Richard S. Bucy, 他在 RIAS 与 Kalman 一起工作。

发现

1958 年,美国空军科研办公室(Air Force Office of Scientific Research, AFOSR)资助 Kalman 和 Bucy 在 RIAS 开展估计与控制的高级研究工作。

1958 年 11 月底,在加入 RIAS 以后不久, Kalman 访问完普林斯顿大学以后乘火车返回 Baltimore。大约在下午 11 点钟左右,火车正好在 Baltimore 外面停留约一个小时。天已经很晚了, Kalman 非常疲惫,还伴随着头痛。在他被困在火车上的这个小时内,突然萌发了一个想法:为什么不把状态变量^②的概念应用到 Wiener-Kolmogorov 滤波问题中呢?这天晚上他实在太累了,并没有对这个问题想得更多,但这标志着一项伟大实践的开始。剩下的就是历史了。

① Zadeh 或许是被称为“模糊系统理论之父”和在插值推理方面的研究而更加著名。

② 尽管当时更倾向于采用频域方法来解决滤波问题,人们也已经针对时变系统提出了采用时域状态空间模型的方法(如 Laning 和 Battin^[10]在 1956 年提出的方法)。

卡尔曼滤波器是动态过程模型和相关最优估计方法发展的巅峰。

1. Wiener-Kolmogorov 模型采用频域 PSD 来表征动态过程的动态和统计特性。最优 Wiener-Kolmogorov 估计子是可以从 PSD 中导出出来的, 而 PSD 可以利用测量系统的输出估计出来。这要求假设动态过程模型是时不变的。
2. 控制论学者采用线性微分方程作为动态系统的模型。这就导致发展了混合模型, 其中动态系统起到了由白噪声作为激励的“成型滤波器”的作用。线性微分方程的系数决定了输出 PSD 的形状, PSD 的形状定义了 Wiener-Kolmogorov 估计子。这种方法允许动态系统模型是时变的。这些线性微分方程的模型可以通过所谓的状态空间表示为一阶微分方程组。

在此发展过程中, 下一步是根据时变状态空间模型得到等效的估计方法, 这正是 Kalman 所完成的工作。

在这一时期, Robert W. Bass(1930 – 2013) 也在 RIAS 工作, 按照他^[11]的说法, 是 Richard S. Bucy 首先认识到(如果假设有限维状态空间模型)在推导 Wiener-Kolmogorov 滤波器时采用的 Wiener-Hopf 方程可以等效为一个非线性矩阵值微分方程。Bucy 还认识到这里所讨论的非线性微分方程与两个多世纪以前 Jacopo Francesco Riccati(1676 – 1754) 所研究的方程是同一类型的, 现在它被称为 Riccati 方程。大约在这个时候, 积分方程和微分方程之间的这种关系的一般性质第一次变得显而易见了。在此期间, Kalman 和 Bucy 的更加卓越的成就之一, 是证明了即使动态系统是不稳定的, Riccati 方程也具有稳定的(稳态)解——只要该系统是可观测的和可控的。

再加上有限维这个假设以后, Kalman 能够推导出 Wiener-Kolmogorov 滤波器就是现在我们所称的卡尔曼滤波器(Kalman Filter)。在对状态空间形式进行改变以后, 推导过程中所需的数学基础就变得简单多了, 其证明也在许多本科生的数学知识范围内。

更早的结果

丹麦天文学家 Thorvald Nicolai Thiele(1838 – 1910) 曾经推导出实质上是标量过程的卡尔曼滤波器, 并且卡尔曼滤波器中的一些基本的(萌芽)思想也曾经在 1959 年^[12]由 Peter Swerling(1929 – 2001) 发表, 以及在 1960 年^[35]由 Ruslan Leont'evich Stratonovich(1930 – 1997) 发表。

卡尔曼滤波器介绍

Kalman 的思想受到了他同事的怀疑, 于是他选择了一个机械工程杂志(而不是电子工程杂志)来发表, 因为“当你害怕以根深蒂固的兴趣踏上神圣的土地时, 最好的办法是走小道绕行。”^①他的第二篇与 Bucy 合作的关于连续时间情形的论文曾经被拒绝发表, 因为(一个评阅人给的拒稿意见)在证明中有一个步骤“可能不是正确的”(它实际上是正确的)。他坚持介绍他的滤波器, 并且在其他地方立即得到了更多的支持。卡尔曼滤波器很快成为了许多大学研究题目的基础, 并且在接下来的十多年中成为了很多电子工程专业博士论文的选题。

^① 这段话中引用的两句话来自 Kalman 关于“系统理论: 过去与现在”的谈话内容, 这是他在 1991 年 4 月 17 日在加州大学洛杉矶分校(University of California at Los Angeles, UCLA)参加一个学术研讨会谈到的。这个学术研讨会是由 UCLA 的 A. V. Balakrishnan 组织和主办的, 并且由 UCLA 和美国航空与航天管理局(National Aeronautics and Space Administration, NASA, 简称美国宇航局)的 Dryden 实验室联合发起的。

早期应用：Stanley F. Schmidt 的影响

1960 年秋天，Kalman 访问 NASA 的 Ames 研究中心的 Stanley F. Schmidt 时，遇到了一个对他的滤波器感兴趣的听众，这个研究中心位于加州的 Mountain View 市^[13]。Schmidt 曾经在一次技术会议上听说过 Kalman，然后邀请他到 Ames 研究中心进一步对他的方法进行解释。Schmidt 意识到这种方法可以应用到当时在 Ames 研究的一个问题——阿波罗计划中的轨迹估计和控制问题，这个计划是载人登上月球并返回的任务。Schmidt 立即开始着手可能是第一个完整实现卡尔曼滤波器的工作。他很快发现了现在被称为扩展卡尔曼滤波(Extended Kalman Filtering, EKF)的方法，从此以后这种方法在许多卡尔曼滤波的实时非线性应用中被采用。由于受到本人对卡尔曼滤波器成功应用的鼓舞，他开始鼓励其他人员开展类似的工作。在 1961 年初，Schmidt 把他的成果向 MIT 仪表实验室(后来更名为 Charles Stark Draper 实验室，然后又简称为 Draper 实验室)的 Richard H. Battin 进行了介绍。Battin 已经在利用状态空间方法设计和实现太空航行制导系统，并且他还将卡尔曼滤波器作为阿波罗太空船上制导的一部分，这是在 MIT 仪表实验室设计和研发的。在 20 世纪 60 年代中期，通过 Schmidt 的影响，卡尔曼滤波器成为了 C5A 航空运输的 Northrup-built 导航系统的一部分，然后由 Lockheed 飞机公司设计出来了。卡尔曼滤波器解决了将雷达数据与惯性传感器数据结合起来得到飞机轨迹的整体估计的数据融合问题(data fusion problem)，还解决了对测量数据中外部引起的误差进行检测的数据拒绝问题(data rejection problem)。从此以后，卡尔曼滤波器就成为了几乎每个机载轨迹估计和控制系统设计的重要组成部分。

Kalman 的其他成就

大约在 1960 年，Kalman 发现动态系统的可观性概念与可控性概念之间具有一种代数对偶关系。更确切地说，通过适当地交换系统参数，一个问题就可以转化为另一个问题，反之亦然。

Kalman 在实现理论(Realization theory)的发展中也发挥了引导作用，这个理论也大概在 1962 年开始形成体系。它讨论的问题是寻找一个系统模型来解释观测到的系统输入/输出行为。这种研究方法导致将准确的(即没有噪声的)数据映射到线性系统模型的唯一性原理(uniqueness principle)。

由于 Kalman 在数学工程中的许多贡献，他于 1974 年获得 IEEE 荣誉勋章(IEEE Medal of Honor)，1984 年获得 IEEE 一百周年纪念奖章(IEEE Centennial Medal)，1987 年获得美国数学学会 Steele 奖，1997 年获得美国自动控制协会 Bellman 奖。

在 1985 年，这是 Inamori 基金授予其 Kyoto 奖的第一年，Kalman 获得了先进技术 Kyoto 奖。在他访问日本接受颁奖时，向媒体提到了他于 1962 年在科罗拉多一家小酒馆第一次读到的一首短诗，这一直给他留下深刻印象。这首诗写道：

小人物讨论其他人。
普通人讨论事情。
大人物讨论思想。

他感觉自己的工作一直都在关注着思想。

Kalman 是美国国家科学院院士、美国国家工程院院士、美国艺术与科学院院士，他还是法国、匈牙利和俄罗斯科学院外籍院士。

在 1990 年 Kalman 六十岁生日之际，为了纪念他在被称为数学系统理论 (Mathematical system theory) 的领域中所取得的开创性的成就，专门召集了一次国际学术研讨会，其后不久便出版了以数学系统理论名字命名的纪念文集^[14]。

2008 年 2 月 19 日，美国国家工程院在华盛顿的晚会典礼上授予 Kalman Draper 奖，这是在工程领域的国家最高荣誉奖。

2009 年 10 月 7 日，Kalman 在白宫的典礼上被美国总统 Barak Obama 授予了国家科学奖章 (National Medal of Science)。

卡尔曼滤波对技术的影响

至少从估计与控制问题的观点来看，卡尔曼滤波器被认为是 20 世纪估计理论中最伟大的成就。如果没有卡尔曼滤波器，则其以后的许多成就都将是不可能的。特别地，它是太空时代的启动技术之一。如果没有它，则宇宙飞船穿过太阳系的精确而有效的导航就不能实现。

卡尔曼滤波的主要应用是在“现代”控制系统领域，在所有运载工具的跟踪和导航领域，以及在对估计和控制系统进行预先设计的领域。通过引入卡尔曼滤波器，这些技术活动才变得有可能。

卡尔曼滤波和 Wiener-Kolmogorov 滤波的相对优点

1. 用模拟电子器件实现的 Wiener-Kolmogorov 滤波器与 (数字) 卡尔曼滤波器相比，能够以更高的、更有效的吞吐率工作。
2. 卡尔曼滤波器能够以算法的形式用数字计算机实现，在卡尔曼滤波器提出来的时候，这种技术正在代替估计和控制系统中的模拟电路。这种实现可能更慢，但是它能够达到的精度比模拟滤波器要高得多。
3. Wiener-Kolmogorov 滤波器不需要信号和噪声的有限维随机过程模型。
4. 卡尔曼滤波器不要求确定性动态模型，也不要求随机过程具有平稳特性，许多重要应用都包括非平稳随机过程。
5. 卡尔曼滤波器能够与动态系统的最优控制器的状态空间公式兼容，并且 Kalman 能够证明这些系统的估计和控制具有有益的对偶性质。
6. 对于现代控制工程的学生而言，卡尔曼滤波器比 Wiener-Kolmogorov 滤波器需要学习和应用的额外的数学预备知识更少。因此，卡尔曼滤波器可以在本科层次的工程课程中开展教学。
7. 卡尔曼滤波器能够提供一些必要信息，可以发展在数学上合理的、基于统计的决策方法来检测和拒绝异常测量值。

1.3.6 实现方法

数值稳定性问题

卡尔曼滤波的巨大成功并不是没有它自己的问题，最大的问题是相关 Riccati 方程的数值解的边缘稳定性。在某些应用中，很小的舍入误差也会累积起来，最终使滤波器的

性能下降。在卡尔曼滤波器提出以后的十几年中,出现了几种对原始卡尔曼公式更好的数值实现方法。许多这些方法都是在以前针对最小二乘问题得到的方法基础上修改而成的。

早期临时的应急方法

在刚开始的时候,人们发现^①强迫使矩阵 Riccati 方程的解具有对称性可以明显提高其数值稳定性,这种现象后来由 Verhaegen 和 Van Dooren^[15]给出了更具有理论基础的解释。人们还发现,舍入误差的影响可以通过人为增加 Riccati 方程中过程噪声的协方差来得到改善。然而,这种方法很容易被滥用来掩盖模型误差。

离散时间 Riccati 方程的对称形式是由 Joseph^[16]发现的,并且在 1964 年被 Honeywell 的 R. C. K. Lee 所采用。这种对卡尔曼滤波器方程的“结构化”改造在某些应用中提高了对舍入误差的鲁棒性,尽管后来提出的方法在某些问题上表现得更好^[17]。

James E. Potter (1937 – 2005) 和平方根滤波

提高卡尔曼滤波数值稳定性的第一次重大突破发生在 MIT 的仪表实验室,这是阿波罗登月计划的制导和控制的总设计单位。用于阿波罗导航的卡尔曼滤波器可以在 IBM 7000 系列大型计算机上用 36 位浮点算法实现,但是它最终必须在飞行计算机上用 15 位定点算法运行。主要问题在于实现 Riccati 方程的解。James Potter 当时是在实验室做兼职工作的 MIT 研究生。他周五把这个问题带回家,下周一他就带着解决方法回到了实验室。

Potter 提出的思想是将协方差矩阵分解为

$$P = GG^T \quad (1.14)$$

并且用 G 而不是 P 来表示观测更新方程。其结果是滤波器实现具有更好的数值稳定性。一种甚至更加有效的实现方法(利用三角因子)是由 Bennet 于 1967 年^[18]发表的,并且 Andrews 于 1968 年^[19]将这种解决方法推广到了向量值测量情形。

Cholesky 因子 Andre-Louis Cholesky^②(1875 – 1918)导出了一种求解最小二乘问题的算法,它将对称正定矩阵 P 分解为对角元素为正的三角矩阵 C 与其转置的对称乘积,即

$$P = CC^T \quad (1.15)$$

上式被称为 P 的 Cholesky 分解。三角因子 C 被称为 P 的 Cholesky 因子。

广义 Cholesky 因子 按照惯例,只有对角元素为正的三角矩阵才能被考虑作为 Cholesky 因子。否则,式(1.14)的解就不是唯一的。如果 C 是 P 的 Cholesky 因子,并且 M 是任意的正交矩阵(使得 $MM^T = I$),则矩阵

$$G = CM \quad (1.16)$$

也满足下列方程

$$GG^T = (CM)(CM)^T \quad (1.17)$$

① 这些应急方法明显是由多个研究人员独立发现的。Schmidt^[13]和他在 NASA 的同事发现采用强迫对称的方法和“伪噪声”可以克服舍入效应,并且在 Honeywell 的 R. C. K. Lee 也独立发现了这种对称效果。

② 因为 Cholesky 是法国人,他的姓或许应该发音为“show-less-KEY”,即把重音放在最后一个音节上面。Cholesky 是一名法国炮兵军官,他在第一次世界大战的一次战斗中牺牲了,此后由其指挥官 Benoit^[20]发表了算法。Cholesky 可能不是第一个推导出这种分解算法的人,但是出于尊敬的原因,他的名字很快就与这种算法联系在一起。

$$= CMM^T C^T \quad (1.18)$$

$$= C C^T \quad (1.19)$$

$$= C C^T \quad (1.20)$$

$$= P \quad (1.21)$$

但是, 由于 G 并不一定是对角元素为正的三角矩阵, 因此我们把 $GG^T = P$ 的任意解 G 称为 P 的广义 Cholesky 因子。

矩阵平方根 矩阵 P 的平方根 S 满足方程 $P = SS$ (即第二个因子没有转置)。

平方根滤波 Potter 的推导过程利用了一种特殊类型的对称矩阵, 它被称为初等矩阵 (elementary matrix), 这个概念是由 Householder^[21] 提出来的。Potter 将一个初等矩阵分解为另一个初等矩阵的平方。在这种情况下, 矩阵因子完全是被分解矩阵的平方根。

Potter 当时正在研究的应用是关于太空的动态行为, 其中没有明显的动态扰动噪声。在这种情况下, 导航的协方差矩阵 P 在离散时间间隔内的传播可以用双矩阵乘积 $\Phi P \Phi^T$ 来实现, 其中 Φ 是关于太空中轨迹已知的状态转移矩阵 (state transition matrix)。于是, Potter 可以利用单个矩阵乘积 ΦG , 沿着时间前向传播 P 的广义 Cholesky 因子 G 。这样做以后, G 将不再保持为一个平方根或者是 P 的 Cholesky 因子 (除非它仍然是对称的)。然而, 这种“平方根”名称一直伴随着 Potter 方法的推广, 即使涉及的因子不是矩阵的平方根, 而是广义 Cholesky 因子。

改进型平方根和 UD 滤波器

在 20 世纪 60 年代晚期, Dyer 和 McReynolds^[22] 在 NASA/JPL (当时被称为加州理工学院的喷气推进实验室, Jet Propulsion Laboratory) 对 Cholesky 因子的时间更新方法进行了研究, 根据他们的工作, 平方根滤波的快速算法在 20 世纪 70 年代取得了非常迅速的发展。1971 年, 在斯坦福大学的 Kaminski 的毕业论文^[23] 中, 提出了平方根协方差的推广形式和信息滤波器。用于观测更新的第一个三角分解算法是由 Agee 和 Turner^[24] 在 1972 年的发行量非常有限的一篇报告中提出来的。这些算法与传统卡尔曼滤波器的计算复杂度大致相同, 但是具有更好的数值稳定性。Carlson 在 1973 年发表了“快速三角”算法^[25], 后来 Bierman 在 1974 年^[26] 发表了“无平方根”算法, Thornton^[27] 也提出了相关的时间更新方法。此后不久, Morf 和 Kailath^[28] 大大简化了时不变系统的平方根滤波器的计算复杂度。在接下来的十年中, Jover 和 Kailath^[29] 及其他研究人员发展了专用并行处理结构, 以便快速求解平方根滤波器方程, Kailath^[30] 还发现了这些方法及更早的平方根实现方法的更简单的推导方法。

矩阵分解、因式分解和三角化

这几个术语在平方根滤波中随意使用, 它们通常是可以互换的。然而, 它们相互之间还是存在一些区别的。

矩阵分解 (Matrix Decomposition) 分解 (Decomposition) 这个词或许是使用最广泛的。它通常是指将一个矩阵分解表示为由具有某些有用性质的不同部分所组成。比如, 对称正定 $n \times n$ 维矩阵 P 的“奇异值分解” (Singular Value Decomposition, SVD) 可以得到 P 的乘积分解式 $P = EDE^T$, 其中正交矩阵 E 的列向量是 P 的特征向量, 对角矩阵 D 的对角线上具有相应的特征值, 这样可以得到 $P = EDE^T$ 的另外一种表示, 即 P 的“特征值 - 特征向量分解” (Eigenvalue - eigenvector Decomposition)

$$P = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i e_i^T$$

其中, λ_i 是 P 的 (正) 特征值, e_i 是相应的特征向量^①。正如“平方根”滤波中所用的许多其他分解方法一样, SVD 也被用于解决最小二乘问题^[31]。所谓的矩阵的“QR 分解”是解决最小二乘问题的另外一种分解方法。它将一个矩阵分解为正交矩阵 (Q) 和“三角”^②矩阵 R (即在主对角线上面或者下面的元素为零) 的乘积。Cholesky 分解也能产生三角形因子, 但是术语“Decomposition”自身并不意味着矩阵的因式分解。比如, 对于任意方阵 S , 下面的对称 - 反对称分解 (Symmetric - antisymmetric Decomposition):

$$S = \underbrace{\frac{1}{2}(S + S^T)}_{\text{对称}} + \underbrace{\frac{1}{2}(S - S^T)}_{\text{反对称}}$$

将 S 分解为它的对称部分与反对称部分之和。

矩阵因式分解 (Matrix Factorization) 因式分解 (Factorization) 这个词是 Gerald Bierman (1941 - 1987) 用来表示将一个矩阵分解为多个矩阵乘积的方法, 这些矩阵具有某些便于卡尔曼滤波实现的更有用的性质^[32]。比如, Bierman 采用的所谓“UD 分解” (UD Decomposition) 将一个对称正定矩阵 P 分解为

$$P = UDU^T$$

其中, D 是对角元素为正的对角矩阵, U 是“单位三角矩阵” (即其主对角线元素为 1 的三角矩阵)。属于“Factorization”通常是指用来得到结果的算法方法, 一般 (但不一定) 以“替代方式” (in-place) 实现 [即在存储器中用矩阵因子重写 (覆盖) 输入矩阵]。比如, UD 因式分解 (UD Factorization) 可以用 D 来重写输入矩阵的对角线元素, 并且用 U 的非对角线元素来重写输入矩阵的非对角线项 (因为已知 U 的对角线只包含 1)。

矩阵三角化 (Matrix Triangularization) 三角化 (Triangularization) 这个词是指所得因子是三角矩阵的因式分解。它被用来表示以替代方式实现的“QR 分解”, 破坏了原始矩阵并且用其三角因子 (R) 来代替。没有保存正交变换 Q , 但是用来得到 Q 的操作一般具有良好的数值条件。以替代方式完成的一系列操作被称为原始矩阵的三角化。Givens^[33]、Householder^[21] 和 Gentleman^[33] 得到的三角化方法被用来提高卡尔曼滤波实现对舍入误差的鲁棒性。

在第 7 章中, 对卡尔曼滤波利用的一些更有用的因式分解方法和三角化方法进行了描述。

推广

线性估计理论已经被推广到了非二次误差准则的情形。关于“sup 范数”或者 H_∞ 范数的最优化能够使最大误差达到最小化, 这种方法在可以确定相关风险为非二次型的应用中是具有优势的。卡尔曼滤波的第一个重要应用 (用于“阿波罗计划”中往返月球的导航) 对返回地球时进入大气层具有非常苛刻的约束条件。如果进入角度出现大的偏离则可能导致宇宙飞船烧毁或者逃逸。在这种环境下, 采用 H_∞ 估计子可能会更加合适, 但是到目前为止它还没有被研制出来。

① 特征值 - 特征向量分解是所有“正规”矩阵 (“Normal” Matrix) 具有的性质, 正规矩阵定义为使 $S^T = S^{-1}$ 成立的方阵。

② 关于三角形的进一步讨论, 可以参见第 7 章和附录 B (在 Wiley 网站上)。