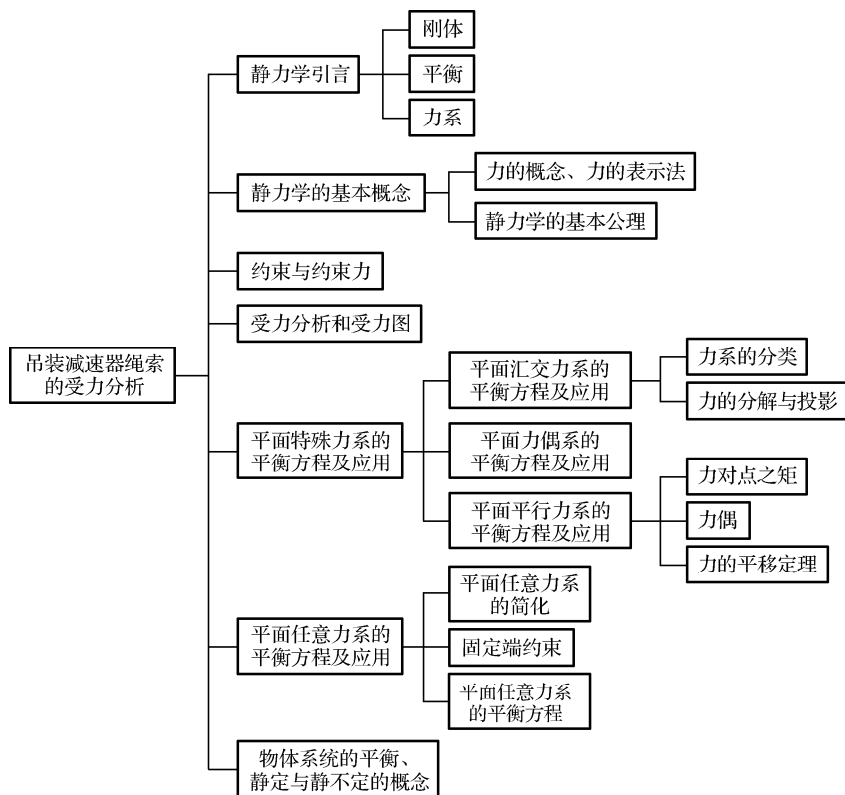


一 基础篇

项目 1 吊装减速器绳索的受力分析

知识分布网络图



学习目标

1. 了解约束的种类及其特点;
2. 掌握受力分析, 会画受力图;
3. 能将简单的工程问题抽象为力学问题进行分析。



学习任务

永进机械厂设计处接到任务, 要对一台减速器的吊装及其关键组件进行检测。根据分工,



设计一室需对图 1-1-1 所示吊装结构的受力情况进行分析检测。

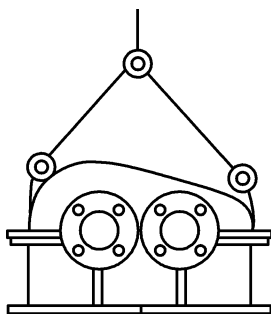


图 1-1-1 减速器的吊装



任务分析

通过对吊装减速器结构的观察可知，起吊减速器使用的是金属链条。起吊后，链条需要承受因减速器重量所产生的力的作用，才能成功实施吊装工作。此工作过程属于静力学范畴。

经研究，工作过程如下：

- (1) 确定该吊装结构的约束形式；
- (2) 对吊装结构进行受力分析并画出受力图；
- (3) 校核此次起吊工作能否完成。

任务 1.1 确定吊装结构的约束形式与受力



学习目标

1. 能区分不同约束形式；
2. 掌握各种约束力的特点；
3. 进行吊装结构的受力分析，给出结论。



学习任务

任务呈现：如图 1-1-1 所示实施起吊减速器工作，试确定吊装结构的约束形式。



任务分析

链条对减速器的约束力作用在链条与箱盖的接触点上，方向沿链条的中心线，其指向背



离受力体。此约束形式属于柔索约束。

1.1.1 静力学引言

工程静力学研究的是刚体在力系作用下的平衡规律。它包括确定研究对象、进行受力分析、简化力系、建立平衡条件及求解未知量等内容。

1. 刚体

所谓刚体，就是在力的作用下大小和形状都不变的物体。刚体是静力学中对物体进行分析简化得到的力学模型，是一种理想化的模型。

2. 平衡

所谓平衡，是指物体保持静止或做匀速直线运动的状态，是物体各种运动状态中的特殊情形，是相对的。

3. 力系

力系是指作用在物体上的一群力。如果力系可使物体处于平衡状态，则称这个力系为平衡力系；两个效应相等的力系称为等效力系；若一个力与一个力系等效，则该力称为力系的合力，力系中的每个力就称为力系的分力。

1.1.2 静力学的基本概念

1. 力的概念

力的概念来自于实践，人们在劳动或日常生活中推、拉、提、举物体时，肌肉有紧张感，逐渐产生了对力的感性认识。大量的感性认识经过科学的抽象，并加以概括，形成了力的概念。力是物体之间的相互机械作用。这种作用对物体产生两种效应，即引起物体机械运动状态的变化或使物体产生变形。前者称为力的外效应或运动效应，是静力学和运动力学研究的内容；后者称为力的内效应或变形效应，属于材料力学的研究范围。

力的作用离不开物体，因此谈到力时，必须指明相互作用的两个物体，并且要根据研究对象的不同来明确受力体和施力体。

实践证明，力对物体的作用效应取决于力的大小、方向和作用点，这三个因素称为力的三要素。当这三个要素中有任何一个改变时，力的作用效应也将改变。

为了表示力的大小，必须确定力的单位。本书采用国际单位制（SI），以“牛顿”作为力的单位，记做“N”；有时也以“千牛顿”作为单位，记做“kN”。

2. 力的表示法

力是一种有大小和方向的量，又满足平行四边形计算法则，所以力是矢量（简称力矢）。如图 1-1-2 所示，力常用一带箭头的线段表示，线段长度 AB 按一定比例表示力的大小；线段的方位和箭头的指向表示力的方向；线段的起点（或终点）表示力的作用点；与线段重合的直线称为力的作用线。本书中，矢量用黑体字母表示，如 \mathbf{F} ；力的大小是标量，用一般字母表示，如 F 。



3. 静力学的基本公理

『公理 1』二力平衡公理

刚体上仅受两力作用而平衡的必要与充分条件: 此两力必须等值、反向、共线, 即 $F_1 = -F_2$, 如图 1-1-3 所示。这一性质揭示了作用于刚体上最简单的力系平衡时所必须满足的条件。工程上常将只受两个力作用而平衡的构件称为二力构件。根据公理 1, 二力构件上的两力必沿两力作用点的连线, 且等值、反向。

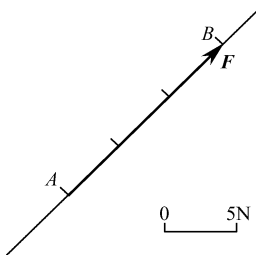


图 1-1-2 力的表示形式

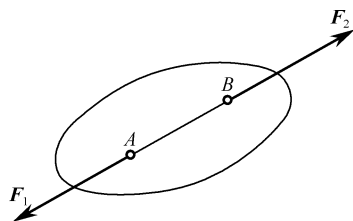


图 1-1-3 二力平衡公理

『公理 2』加减平衡力系公理

在已知力系上, 加上或减去任一平衡力系, 并不改变原力系对刚体的作用效应。

推论 1 力的可传性: 作用在刚体上的某力可沿其作用线移动到该刚体上任一点而不改变此力对刚体的作用效应。

证明: 设力 F 作用于刚体上的 A 点, 如图 1-1-4 (a) 所示, 在其作用线上任取一点 B , 并在 B 点处添加一对平衡力 F_1 和 F_2 , 使 F 、 F_1 、 F_2 共线, 且 $F_2 = -F_1 = F$, 如图 1-1-4 (b) 所示。根据公理 2, 将 F 、 F_1 所组成的平衡力系去掉, 刚体上只剩下 F_2 , 且 $F_2 = F$, 如图 1-1-4 (c) 所示, 由此得证。

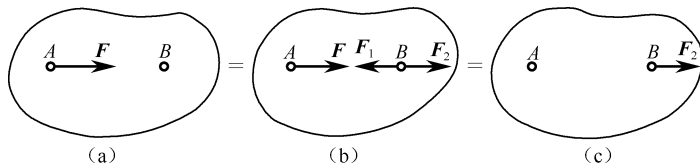


图 1-1-4 力的可传性

力的可传性说明, 对刚体而言, 力是滑移矢量, 它可沿其作用线滑移至刚体上的任一位置。需要指出的是, 此原理只适用于刚体而不适用于变形体。

『公理 3』力的平行四边形法则

作用于物体上同一点的两个力, 可以合成为一个合力。合力的作用点仍在原作用点, 且合力的大小和方向可用这两个力为邻边所作的平行四边形的对角线来确定。

该公理说明, 力矢可按平行四边形法则进行合成与分解, 如图 1-1-5 所示, 合力矢量 F_R 与分力矢量 F_1 、 F_2 间的关系符合矢量运算法则, 为

$$F_R = F_1 + F_2$$

即合力等于两分力的矢量和。

在工程中常利用平行四边形法则将一力沿两个规定方向分解, 使力的作用效应更加突出。例如, 在进行直齿圆柱齿轮的受力分析时, 常将齿面的法向正压力 F_n 分解为沿齿轮分度圆圆



周切线方向的分力 F_t 和指向轴心的压力 F_r ，如图 1-1-6 所示。 F_t 称为圆周力或切向力，作用是推动齿轮绕轴转动； F_r 称为径向力，该力对支承齿轮的轴有影响。

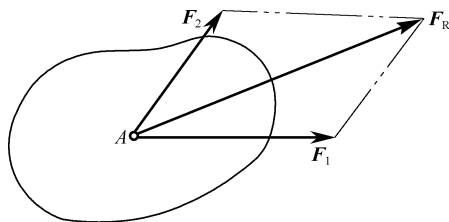


图 1-1-5 力的平行四边形法则

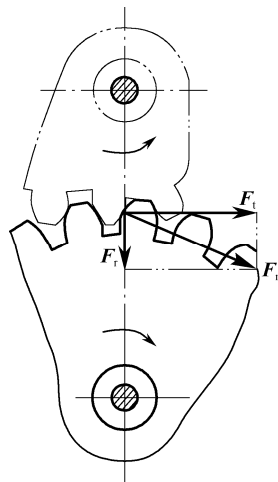


图 1-1-6 直齿圆柱齿轮受力分析

推论 2 三力平衡汇交定理：刚体受三个共面但互不平行的力作用而平衡时，三力必汇交于一点。

证明：设刚体上 A_1 、 A_2 、 A_3 三点受共面且平衡的三力 F_1 、 F_2 、 F_3 作用，如图 1-1-7 所示，根据力的可传性将 F_1 、 F_2 移到其作用线交点 B ，并根据公理 3 将其合成为 F_R ，则刚体上仅有 F_3 和 F_R 作用。根据公理 1， F_3 和 F_R 必在同一直线上，所以 F_3 一定通过点 B ，于是得证 F_1 、 F_2 、 F_3 均通过点 B 。

此推论说明了不平行的三力平衡的必要条件，当两个力的作用线相交时，可用来确定第三个力的作用线的方位。

『公理 4』作用与反作用定律

两物体间相互作用的力总是同时存在的，并且两力等值、反向、共线，分别作用于两个物体。这两个力互为作用与反作用的关系。

此公理概括了自然界中物体间相互作用的关系，表明一切力总是成对出现的，揭示了力的存在形式和力在物体间的传递方式。

1.1.3 约束与约束力

自然界中，运动的物体可分为两类：一类为自由体；一类为非自由体。如空中的飞鸟、水中的游鱼、运行的炮弹等，它们的位置和运动没有受到任何限制，这样的物体称做自由体。如果物体的位置和运动受到某些限制，如火车车轮受到铁轨的限制，它们只能沿铁轨运动；又如电机转子受轴承限制，只能做定轴转动；再如用绳索悬挂的重物，受绳索限制不能下落等。以上这些物体（车轮、电机转子、重物等）均称为非自由体，工程中所遇到的物体，大

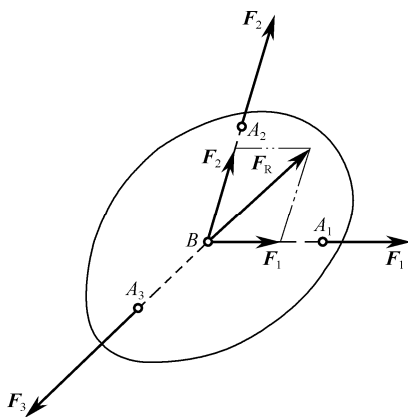


图 1-1-7 三力平衡汇交定理



部分是非自由体。

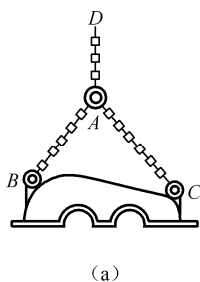
对于非自由体来说,限制物体的位置和运动的条件称做物体所受的约束。实现这些约束条件的物体称为约束体,受到约束条件限制的物体称做被约束体。如火车车轮被限制只能沿铁轨运动,这一限制条件称做车轮所受的约束。实现这种约束的铁轨称为约束体,而受到限制的车轮称为被约束体。按照习惯,今后我们把约束体简称为约束,将被约束体简称为物体。

约束对物体的位置和运动进行限制时产生了力的作用。这里,把约束对物体的作用力称为约束力。除约束力以外,其他如重力、推力等,统称为主动力。约束力的大小往往是未知的,它与主动力的值有关,在静力学中将通过刚体的平衡条件求得。约束力的方向与物体被限制的运动方向相反。

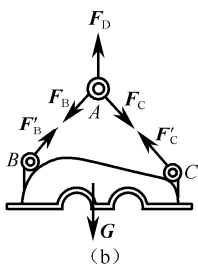
1. 柔索(绳索、链条、带等)约束

属于这类约束的有绳索、链条和带等。柔索本身只能承受拉力,不能承受压力。其约束特点是限制物体沿着柔索伸长方向的运动,因此它只能给物体提供拉力,这类约束的约束力常用符号 F_T 表示。

如图 1-1-8 (a) 所示,起吊一减速箱箱盖,链条对箱盖的约束力作用在链条与箱盖的接触点上,方向沿着链条的中心线,其指向背离受力体,如图 1-1-8 (b) 所示。当链条或皮带绕过轮子时,约束力沿轮缘的切线方向,如图 1-1-9 所示。

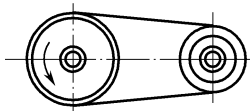


(a)

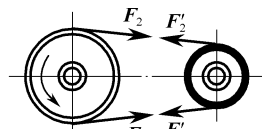


(b)

图 1-1-8 链条受力分析



(a)

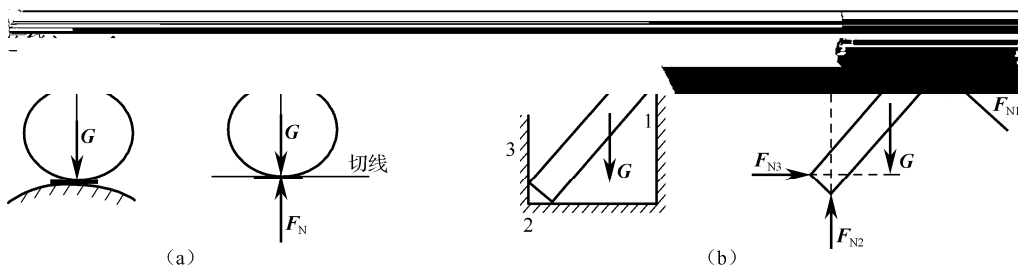


(b)

图 1-1-9 皮带受力分析

2. 光滑接触面约束

当物体之间以点、线、面形式接触时,可以认为是光滑接触面约束(接触处摩擦力很小,可以略去不计)。这种约束不限制物体沿约束面的切向位移,只阻止物体沿接触面公法线向约束体内运动。因此,光滑接触面对物体的约束力,是沿接触点的公法线并指向被约束物体的,这类约束的约束力简称为法向压力,常用 F_N 表示,如图 1-1-10 所示。



(a)

(b)

图 1-1-10 光滑接触面受力分析



3. 圆柱形铰链约束

工程中，常将两个物体用圆柱形销钉连接起来。受约束的两个物体都只能绕销钉轴线转动，销钉对被连接的物体沿垂直于销钉轴线方向的移动形成约束，这类约束称为圆柱形铰链约束。一般根据被连接物体的形状、位置及作用，可分为以下几种形式。

(1) 中间铰约束

如图 1-1-11 (a) 所示，1、2 分别是带圆孔的两个物体，将圆柱销穿入物体 1 和 2 的圆孔中，便构成中间铰，如图 1-1-11 (b) 所示，简图如图 1-1-11 (c) 表示。

由于销与物体的圆孔表面都是光滑的，两者之间总有缝隙，产生局部接触，本质上属于光滑接触面约束，故销对物体的约束力应通过物体圆孔中心。但由于接触点不确定，则中间铰对物体的约束力的特点为作用线通过销钉中心，垂直于销轴线，方向不定，可表示为图 1-1-11 (d) 中单个力 F_R 和未知角 α 或两个正交分力 F_{Rx} 、 F_{Ry} 。 F_R 与 F_{Rx} 、 F_{Ry} 为合力与分力的关系。

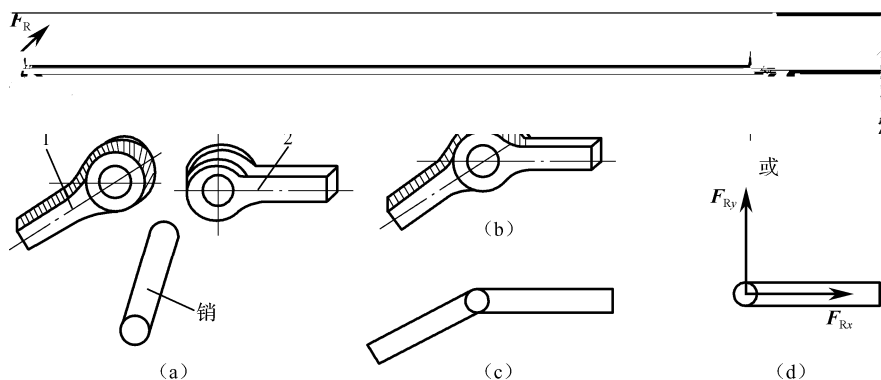


图 1-1-11 中间铰约束形式

(2) 固定铰链支座约束

如图 1-1-12 (a) 所示，将中间铰结构中物体 1 换成支座，且与基础固定在一起，则构成固定铰链支座约束，符号如图 1-1-12 (b) 所示。约束力的特点与中间铰相同，如图 1-1-12 (c) 所示。

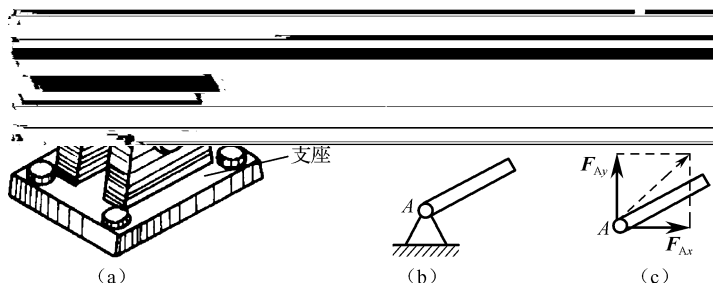


图 1-1-12 固定铰链支座约束

(3) 活动铰链支座约束

将固定铰链支座底部安放若干滚子，并与支承面接触，则构成活动铰链支座，又称辊轴支座，如图 1-1-13 (a) 所示。这类支座常见于桥梁、屋架等结构中，通常用简图 1-1-13 (b)



表示。活动铰链支座只能限制构件沿支承面垂直方向的移动，不能阻止物体沿支承面的运动或绕销钉轴线的转动。因此活动铰链支座的约束力通过销钉中心，垂直于支承面，如图 1-1-13 (c) 所示。

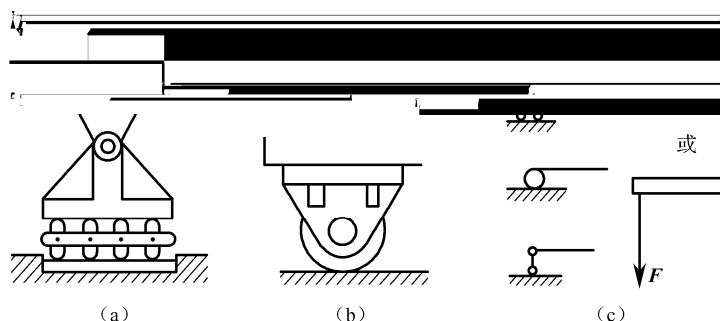


图 1-1-13 活动铰链支座

4. 二力杆约束

不计自重，两端均用铰链的方式与周围物体相连接，且不受其他外力作用的杆件，称为二力构件，简称二力杆。

根据二力平衡条件，二力杆的约束力必沿杆件两端铰链中心的连线，指向不定。如图 1-1-14 (a) 中的构件 CB 、图 1-1-14 (b) 中的杆 DC 均为二力杆。

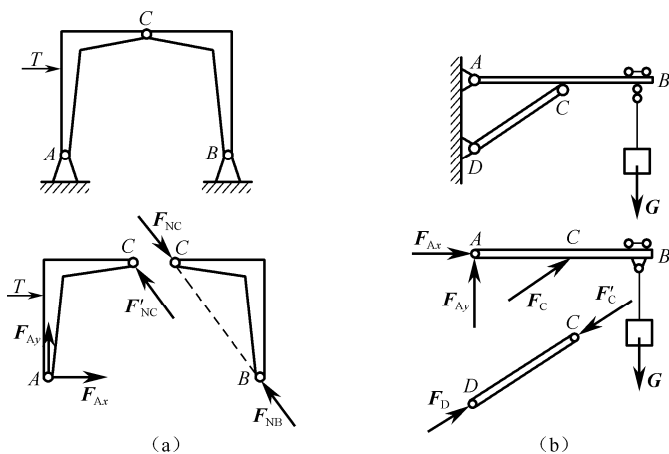


图 1-1-14 二力杆约束

任务 1.2 绘制吊装结构的受力图



学习目标

1. 对单个物体与物系进行受力分析；
2. 会画受力图。



学习任务

设计一室的技术人员按研究决定的工作过程,已经确定该吊装减速度器结构的约束形式为“柔索约束”,为校核最终是否能成功完成起吊任务,还需要对该受力情况绘制具体的受力分析图。



任务分析

根据柔索约束的受力特点,以及作用力与反作用力公理等,绘制吊装柔索及减速度器的受力分析如图 1-1-15 所示。

柔索只能承受拉力,不能承受压力。其约束特点:限制物体沿着柔索伸长方向的运动。力的方向如图 1-1-15 所示,为沿柔索方向背离受力体。

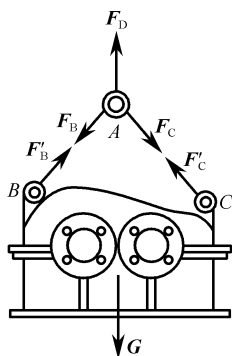


图 1-1-15 吊装减速度器的受力分析图



扫一扫看
绘制受力
图

1.2.1 受力分析与受力图

解决静力学问题时,首先要明确研究对象,再考虑它的受力情况,然后用相应的平衡方程去计算。工程中的结构十分复杂,为了清楚地表达出某个物体的受力情况,必须将它从其相联系的周围物体中分离出来。分离的过程就是解除约束的过程。在解除约束的地方用相应的约束力来代替约束的作用。被解除约束后的物体叫分离体。在分离体上画上物体所受的全部主动力和约束力,此图称为研究对象的受力图。整个过程就是对所研究的对象进行受力分析。

画受力图的基本步骤:

- (1) 确定研究对象,取分离体;
- (2) 在分离体上画出全部主动力;
- (3) 在分离体上画出全部约束力。

如研究对象为几个物体组成的物体系统,还必须区分外力和内力。物体系统以外的周围物体对系统的作用力称为系统的外力。系统内部各物体之间的相互作用力称为系统的内力。随着所取系统的范围不同,某些内力和外力也会相互转化。由于系统的内力总是成对出现的,且等值、共线、反向,在系统内自成平衡力系,不影响系统整体的平衡。因此,当研究对象是物体系统时,只画作用于系统的外力,不画系统的内力。

1.2.2 受力图的画法

下面举例说明受力图的画法。

【例 1-1-1】如图 1-1-16 (a) 所示,绳 AB 悬挂一重为 G 的球。试画出球 C 的受力图(摩擦不计)。

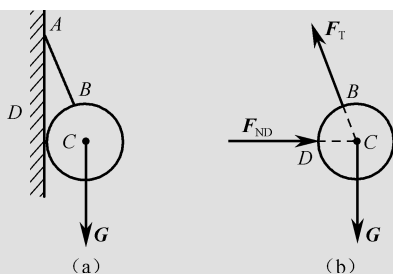


图 1-1-16 球的受力图

解：以球为研究对象，画出球的分离体图。在球心点 C 处标上主动力 G （重力）；在解除约束的点 B 处画上柔性约束力 F_T ，在点 D 处画上光滑接触面约束力 F_{ND} ，如图 1-1-16 (b) 所示。

【例 1-1-2】如图 1-1-17 (a) 所示为三铰拱结构简图。 B 、 C 为固定铰支座， A 为连接左、右半拱的中间铰。若左半拱受到垂直力 F 的作用，拱重不计。试分别画出左、右半拱及整体的受力图。

解：(1) 先取右半拱为研究对象，画出其分离体图。因其本身重量不计，只在 A 、 C 两铰处各受一个力的作用而平衡，所以它是二力杆。因此可以确定约束力 F_A 、 F_C 的作用线必沿连线 AC ，而方向相反，如图 1-1-17 (b) 所示。

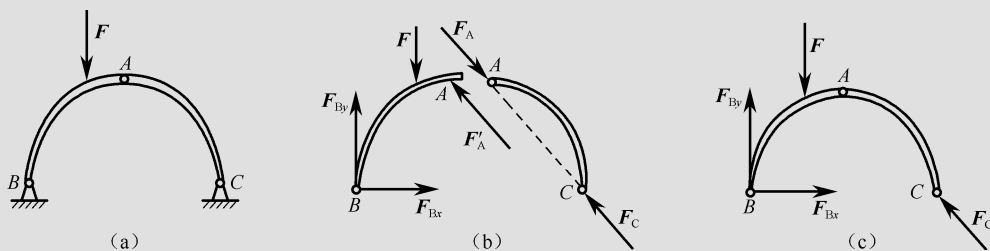


图 1-1-17 三铰拱的受力图

(2) 再取左半拱为研究对象，并画出其分离体图。作用于其上的主动力有垂直推力；此外，右半拱通过铰链 A 对左半拱所作用的力是 F'_A ，力 F'_A 与 F_A 互为作用力与反作用力，因此 F'_A 与 F_A 等值、反向、共线；固定铰链支座 B 处有 F_{Bx} 、 F_{By} 两个正交约束力，指向暂时任意假定，如图 1-1-17 (b) 所示。

(3) 取整个三铰拱为研究对象。则整个三铰拱只受到主动力 F ， B 处的约束力 F_{Bx} 、 F_{By} ， C 处的约束力 F_C 的作用，其受力图如图 1-1-17 (c) 所示。而铰 A 处的约束力 F'_A 与 F_A 是系统的内力，它们总是成对出现的，彼此等值、反向、共线，所以相互抵消。

【例 1-1-3】如图 1-1-18 (a) 所示的屋架结构中，已知主动力 F 作用于铰 D 上。杆 AB 上作用有竖向载荷 G ，杆件与杆件之间均为铰链。不计杆件自重，试分析杆 AB 、 BC 及 DE 的受力并画出受力图。

解：根据题意分别取杆 AB 、 BC 、 DE 及整体为研究对象。

(1) 取整体为研究对象。不考虑 AB 、 BC 以及 DE 之间的相互作用力（即全部内力），整体只受外力 G 和外力 F ，以及 A 、 C 两处的反力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 和 F_C 作用，受力图如图 1-1-18 (b) 所示。



(2) 以杆 AB 为研究对象。它受主动力 G 和 F 、杆 DE 的拉力 F_D ，以及 A 、 B 两处铰链的约束力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 和 F_{Bx} 、 F_{By} ，受力图如图 1-1-18 (c) 所示。

(3) 取杆 DE 为研究对象。它在杆的两端铰接，是二力杆，因此受到沿杆件的两个力 F'_D 和 F'_E 作用， F'_D 与 F_D 、 F'_E 与 F_E 分别等值且反向，受力图如图 1-1-18 (d) 所示。

(4) 以杆 BC 为研究对象。它受杆 DE 的拉力 F_E （与 F_D 等值、反向、共线）以及 C 端活动铰支座的约束反力 F_C ， B 处受到杆 AB 的约束反力 F'_{Bx} 、 F'_{By} （分别与 F_{Bx} 、 F_{By} 等值、反向、共线）， BC 的受力图如图 1-1-18 (e) 所示。

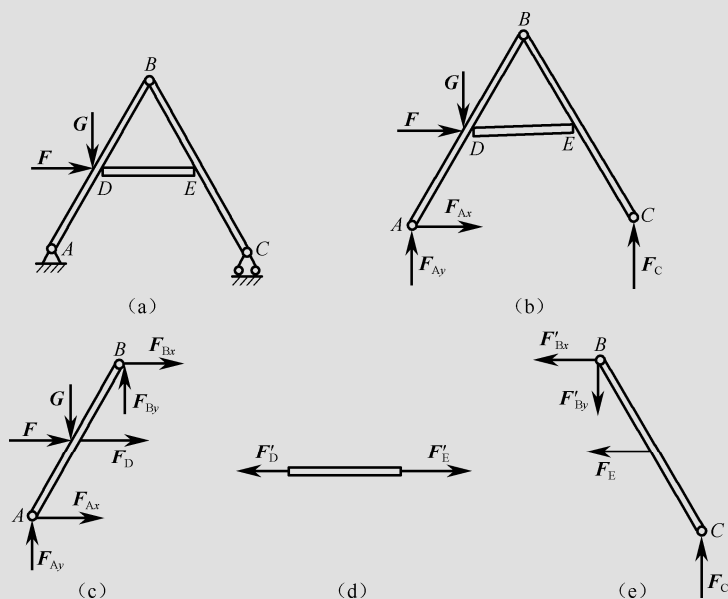


图 1-1-18 屋架结构的受力分析图

任务 1.3 校核吊装结构的受力情况



学习目标

1. 能将工程问题抽象为力学问题进行分析。
2. 能求解平面力系的约束反力。



学习任务

如图 1-1-19 所示，常州永进机械厂装配车间需要起吊一台重为 2.6kN 的减速度器，现有最大能承受 4.0kN 的链条，问能否安全地把减速度器送到指定地点（已知每根链条与水平面的夹角为 60° ）。

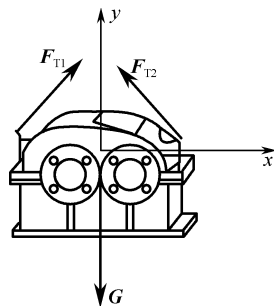


图 1-1-19 减速度器的受力图



任务分析

- (1) 选取减速器为研究对象, 画出分离体的受力图。
- (2) 选坐标轴, 列平衡方程式求解。

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & F_{T1} \cos 60^\circ - F_{T2} \cos 60^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0 & F_{T1} \sin 60^\circ - F_{T2} \sin 60^\circ - G = 0 \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} F_{T1} = 2.6\text{kN} < 4\text{kN} \\ F_{T2} = 2.6\text{kN} < 4\text{kN} \end{cases}$$

因此能安全地把减速器起吊到指定地点。

1.3.1 平面特殊力系的平衡方程及应用

1. 平面汇交力系的平衡方程及应用

1) 力系的分类

若力系中各力的作用线在同一平面内, 该力系称为平面力系。根据平面力系中各力的作用线分布不同可将平面力系分为以下四种:

- (1) 平面汇交力系: 力系中各力的作用线汇交于一点。
- (2) 平面平行力系: 力系中各力的作用线相互平行。
- (3) 平面力偶系: 仅由力偶组成。
- (4) 平面任意力系: 各力的作用线在平面内任意分布。

2) 力的分解与投影

(1) 力的分解

给定两个作用于一点的力, 可以用力的平行四边形法则求两力的合力, 且此合力是唯一确定的。如果给定一个力, 也可以用力的平行四边形法则将其分解为两个分力, 为得到唯一确定的结果, 则需要对分力的大小、方向等给出一定的限制条件。工程上经常用到的一种情况是给定两个分力的作用线方向, 求分力大小。

已知力矢量 $\mathbf{F}_R = \mathbf{AB}$, 给定它的两个分力的作用线与矢量 \mathbf{F}_R 的夹角分别为 α 和 β 。此时, 以 $\mathbf{F}_R = \mathbf{AB}$ 为对角线, 以与 \mathbf{F}_R 的夹角分别为 α 和 β 的边 AC 和 AD 为边作平行四边形 $ADBC$, 得到两个分力 $\mathbf{F}_1 = \mathbf{AD}$ 、 $\mathbf{F}_2 = \mathbf{AC}$, 分力的大小可以从 $\triangle ABC$ 中解出, 如图 1-1-20 所示。

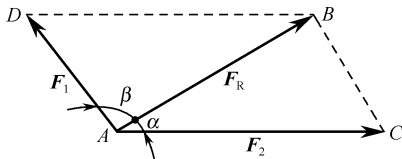


图 1-1-20 力的分解

(2) 力的投影

力 \mathbf{F} 在直角坐标轴 x 、 y 上的投影: 过力矢 \mathbf{F} 两端向两坐标轴引垂线得垂足 ab 和 $a'b'$,



如图 1-1-21 所示。线段 ab 、 $a'b'$ 分别为力 F 在 x 轴和 y 轴上的投影的大小。投影的正负号规定：由起点 a 到终点 b （或由起点 a' 到终点 b' ）的指向与坐标轴正向相同时为正，反之为负。

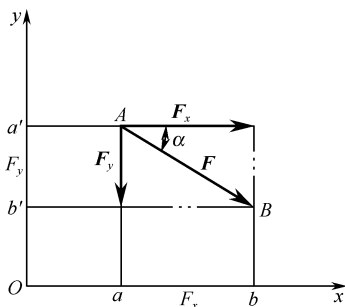


图 1-1-21 力的投影

图 1-1-21 中力 F 在 x 轴和 y 轴上的投影分别为

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha \\ F_y &= -F \sin \alpha \end{aligned} \quad (1-1-1)$$

若已知力的矢量表达式，则力 F 的大小及方向为

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \tan \alpha &= \left| \frac{F_y}{F_x} \right| \end{aligned} \quad (1-1-2)$$

注意：力的分量和力的投影是两个不同的概念。力的分量（分力）是矢量，而力的投影是代数量；分力必须作用在原力的作用点上，而力的投影无作用点。另外，仅在直角坐标系中，力在坐标轴上投影的绝对值和力沿该轴的分量的大小相等。

3) 平面汇交力系的合成

(1) 合力投影定理

在平面直角坐标系中，如果 F_R 的投影为 F_{Rx} 、 F_{Ry} ； F_1 的投影为 F_{1x} 、 F_{1y} ； F_2 的投影为 F_{2x} 、 F_{2y} ，则有

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x}, \quad F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} \quad (1-1-3)$$

由此可推广到 n 个力作用的情况。设一刚体上受力系 F_1 、 F_2 、 \dots 、 F_n 作用，力系中各力的作用线共面且汇交于同一点，可将此力系合成为一个合力 F_R ，且有

$$F_R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F \quad (1-1-4)$$

可见，平面汇交力系的合力矢量等于力系各分力的矢量和。

根据式 (1-1-3) 可得：

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum F_x \\ F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum F_y \end{aligned} \quad (1-1-5)$$

式 (1-1-5) 称为合力投影定理，即力系的合力在某轴上的投影等于力系中各分力在同轴上投影的代数和。

用解析法求平面汇交力系的合成时，首先在其所在平面内选定坐标系 Oxy ，求出力系中各分力在 x 、 y 轴上的投影，再由合力投影定理求得合力。



(2) 平面汇交力系的平衡

平面汇交力系平衡的充分和必要条件是力系的合力为零, 即

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \quad (1-1-6)$$

上式为平面汇交力系的平衡方程, 最多可求解包括力的大小和方向在内的 2 个未知量。

【例 1-1-4】 图 1-1-22 所示三角支架由杆 AB 、 AC 铰接而成, 在 A 处作用有重力 $G=10\text{kN}$, 求出图中 AB 、 AC 所受的力 (不计杆自重)。

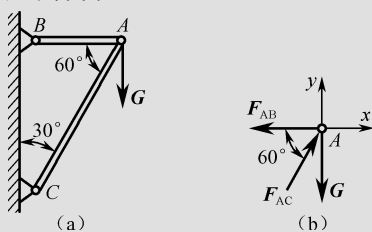


图 1-1-22 三角支架

解: (1) 取研究对象, 画受力图。

取销钉 A 为研究对象。主动力: 重力 G ; 约束力: 由于杆 AB 、 AC 自重不计, 且杆两端均为铰链约束, 故杆 AB 、 AC 均为二力杆, 杆两端受力必沿杆件的轴线, 根据作用力与反作用力的关系, 两杆的 A 端对销钉有反作用力 F_{AB} 、 F_{AC} , 受力图如图 1-1-22 (b) 所示。

(2) 建立直角坐标系 Axy , 列平衡方程并求解。

$$\sum F_x = 0 \quad -F_{AB} + F_{AC} \cos 60^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{AC} \sin 60^\circ - G = 0 \quad (2)$$

(3) 求解未知量。

解方程 (1) 和 (2) 得:

$$F_{AB} = 0.577G = 5.77\text{kN}$$

$$F_{AC} = 1.155G = 11.55\text{kN}$$

根据作用力与反作用力公理, 杆 AB 所受的力为 5.77kN , 且为拉力; AC 杆所受的力为 11.55kN , 且为压力。

【例 1-1-5】 图 1-1-23 所示的圆球重 $G=100\text{N}$, 放在倾斜角为 $\alpha=30^\circ$ 的光滑斜面上, 并用绳子 AB 系住, 绳子 AB 与斜面平行。求绳子 AB 的拉力和斜面对球的约束力。

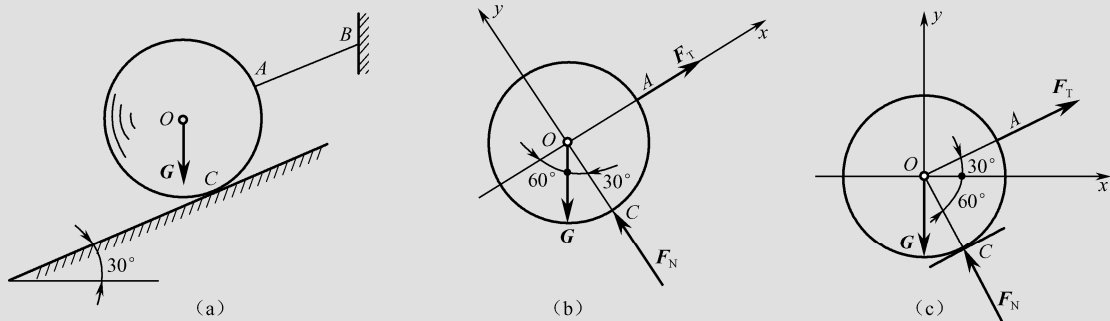


图 1-1-23 圆球



解：(1) 选取圆球为研究对象，取分离体并画受力图。

主动力：重力 G ；约束反力：绳子 AB 的拉力 F_T 、斜面对球的约束力 F_N ，受力图如图 1-1-23 (b) 所示。

(2) 建立直角坐标系 Oxy ，列平衡方程并求解。

$$\sum F_x = 0 \quad F_T - G \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_N - G \cos 30^\circ = 0$$

解方程求得 $F_T=50\text{N}$ ， $F_N=86.6\text{N}$ ，两个力的方向如图 1-1-23 (b) 所示。

(3) 若选如图 1-1-23 (c) 所示的直角坐标系，列平衡方程得：

$$\sum F_x = 0 \quad F_T \cos 30^\circ - F_N \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_T \sin 30^\circ + F_N \sin 60^\circ - G = 0$$

联立方程求解得 $F_T=50\text{N}$ ， $F_N=86.6\text{N}$ ，两个力的方向如图 1-1-23 (c) 所示。

从上述例题可知：建立如图 1-1-23 (b) 所示的坐标系可以简化计算。

2. 平面力偶系的平衡方程及应用

1) 力对点之矩

(1) 力矩的概念

力不仅能使刚体产生移动效应，还能使刚体产生转动效应。如图 1-1-24 所示，用扳手转动螺母时，作用于扳手 A 点的力 F 可使扳手与螺母一起绕螺母中心点 O 转动。力的这种转动作用不仅与力的大小、方向有关，还与转动中心至力的作用线的垂直距离 d 有关。因此，定义 Fd 的乘积为力使物体对点 O 产生转动效应的度量，称为力 F 对点 O 之矩，用 $M_O(F)$ 表示，即

$$M_O(F) = \pm Fd \quad (1-1-7)$$

式中，点 O 称为力矩中心，简称矩心； d 称为力臂；乘积 Fd 称为力矩的大小；“ \pm ”表示力矩的转向，规定在平面问题中，逆时针转向取正号，顺时针转向取负号，故平面上力对点之矩为代数量。力矩的单位为 $\text{N}\cdot\text{m}$ 或 $\text{kN}\cdot\text{m}$ 。

注意：一般来说，同一个力对不同点产生的力矩是不同的，因此不指明矩心而求力矩是无任何意义的。在表示力矩时，必须标明矩心。

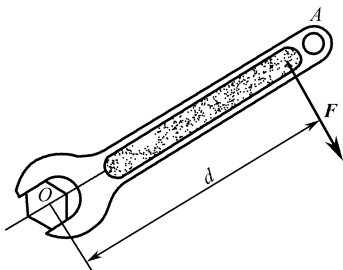


图 1-1-24 扳手转动螺母

(2) 力矩的性质

- ① 力 F 对点 O 之矩不仅取决于 F 的大小，同时还与矩心的位置即力臂 d 有关。
- ② 力 F 对于任一点之矩，不因该力的作用点沿其作用线移动而改变。
- ③ 力的大小等于零或者力的作用线通过矩心时，力矩等于零。



显然, 互成平衡的两个力对同一点之矩的代数和等于零。

(3) 合力矩定理

若力 F_R 是平面汇交力系 F_1, F_2, \dots, F_n 的合力, 由于力 F_R 与力系等效, 则合力对任一点 O 之矩等于力系各分力对同一点之矩的代数和, 即

$$M_O(F_R) = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \dots + M_O(F_n) = \sum M_O(F) \quad (1-1-8)$$

式 (1-1-8) 称为合力矩定理。

【例 1-1-6】 如图 1-1-25 所示, 数值相同的三个力按不同方式分别施加在同一扳手的 A 端。若 $F=200\text{N}$, 试求三种情况下力对点 O 之矩。

解: 图示三种情况下, 虽然力的大小、作用点和矩心均相同, 但力的作用线各异, 致使力臂均不相同, 因而三种情况下, 力对点 O 之矩不同。根据式 (1-1-7) 可求出力对点 O 之矩分别如下。

① 图 1-1-25 (a) 中:

$$M_O(F) = -Fd = -200\text{N} \times 200\text{m} \times 10^{-3} \times \cos 30^\circ = -34.64\text{N} \cdot \text{m}$$

② 图 1-1-25 (b) 中:

$$M_O(F) = -Fd = 200\text{N} \times 200\text{m} \times 10^{-3} \times \sin 30^\circ = 20.00\text{N} \cdot \text{m}$$

③ 图 1-1-25 (c) 中:

$$M_O(F) = -Fd = -200\text{N} \times 200\text{m} \times 10^{-3} = -40.00\text{N} \cdot \text{m}$$

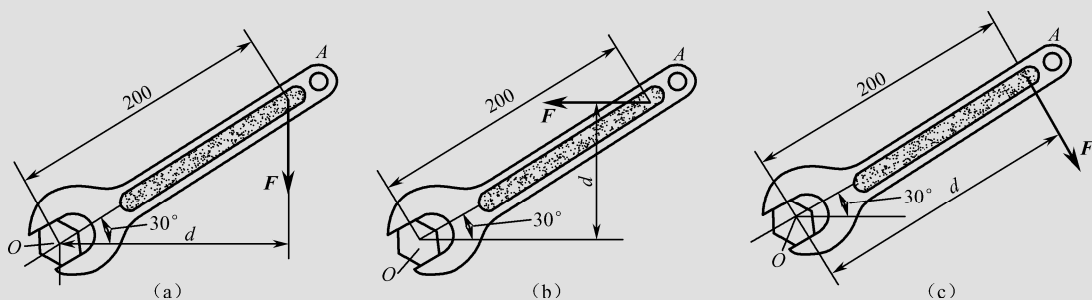


图 1-1-25 扳手的受力分析

【例 1-1-7】 作用于齿轮上的啮合力 $F_n=1000\text{N}$, 齿轮节圆直径 $D=160\text{mm}$, 压力角 (啮合力与齿轮节圆切线的夹角) $\alpha=20^\circ$, 如图 1-1-26 (a) 所示。求啮合力 F_n 对轮心点 O 之矩。

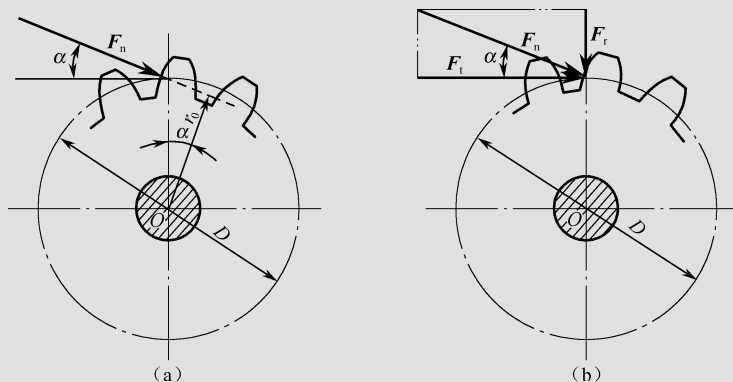


图 1-1-26 齿轮的受力分析



解法一：用式 (1-1-7) 计算 F_n 对点 O 之矩。

$$M_O(\mathbf{F}_n) = -F_n \frac{D}{2} \cos \alpha = -1000 \times \frac{160 \times 10^{-3}}{2} \cos 20^\circ = -75.2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

解法二：用合力矩定理式 (1-1-8) 计算 F_n 对点 O 之矩。

如图 1-1-26 (b) 所示，将啮合力 F_n 在齿轮啮合点处分解为圆周力 F_t 和径向力 F_r ，则 $F_t = F_n \cos \alpha$ ， $F_r = F_n \sin \alpha$ ，由合力矩定理可得：

$$\begin{aligned} M_O(\mathbf{F}_n) &= M_O(\mathbf{F}_t) + M_O(\mathbf{F}_r) \\ &= -F_t \frac{D}{2} + 0 = -F_n \cos \alpha \frac{D}{2} = -1000 \times \cos 20^\circ \times \frac{160 \times 10^{-3}}{2} = -72.5 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

2) 力偶

(1) 力偶的概念

在生活和生产实践中，常见到某些物体同时受到大小相等、方向相反、作用线互相平行的两个力作用的情况。例如：司机用双手搬动方向盘（如图 1-1-27 (a) 所示）及钳工对丝锥的操作（如图 1-1-27 (b) 所示）。

一对等值、反向、不共线的平行力组成的特殊力系，称为力偶，记做 $(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$ 。物体上有两个或两个以上力偶作用时，这些力偶组成力偶系。

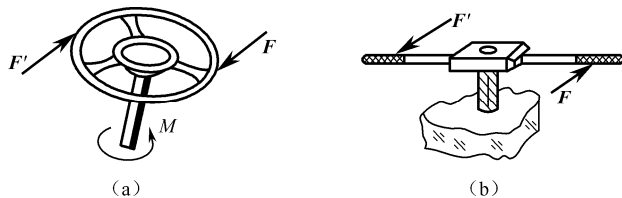


图 1-1-27 力偶

力对刚体的运动效应应有两种：移动和转动。但力偶对刚体的作用效应仅仅是使其产生转动。力偶的两力作用线所决定的平面称为力偶的作用面，两力作用线间的垂直距离称为力偶臂。力学中，用力偶的任一力的大小 F 与力偶臂 d 的乘积再冠以相应的正负号，作为力偶在作用面内使物体产生转动效应的度量，称为力偶矩，记做 $M(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$ 或 M ，即

$$M(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = M = \pm Fd \quad (1-1-9)$$

式中，符号“ \pm ”表示力偶的转向，一般规定：力偶逆时针转向取正号，顺时针转向取负号，与力矩的“ \pm ”规定相同。力偶矩的单位与力矩的单位相同，为 $\text{N} \cdot \text{m}$ 或 $\text{kN} \cdot \text{m}$ 。

力偶对刚体作用的转动效应取决于力偶的三要素：力偶矩的大小、力偶的转向、力偶作用面的方位。凡三要素相同的力偶彼此等效。对于同一平面内的两个力偶，由于力偶作用面的方位相同，力偶的效应只取决于力偶矩的大小和力偶的转向。因此，只要保证这两个要素不变，两个力偶就彼此等效。

(2) 力偶的性质

① 性质 1。力偶对其作用面内任意点的力矩恒等于此力偶的力偶矩，而与矩心的位置无关。

证明：如图 1-1-28 所示，在刚体某平面上作用一力偶 $(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$ ，其 $M = Fd$ ，现求此力偶对任意点 O 的力矩。若 x 表示矩心 O 到 \mathbf{F}' 之垂直距离，按力矩定义， \mathbf{F} 与 \mathbf{F}' 对点 O 的力矩和为



$$M_o(\mathbf{F}) + M_o(\mathbf{F}') = F(d+x) - F'x = Fd$$

$$M_o(\mathbf{F}) + M_o(\mathbf{F}') = M(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$$

不论点 O 选在何处, 力偶对该点的矩恒等于它的力偶矩, 而与力偶对矩心的相对位置无关。

② 性质 2。由图 1-1-29 可见, 力偶在任意坐标轴上的投影之和为零, 故力偶无合力, 力偶不能与一个力等效, 也不能用一个力来平衡。

力偶无合力, 故力偶对物体的平移运动不会产生任何影响, 力与力偶相互不能代替, 不能构成平衡。因此, 力与力偶是力系的两个基本元素。

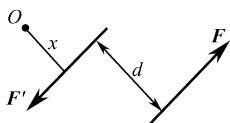


图 1-1-28 力偶对点 O 之矩

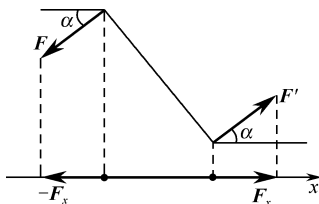


图 1-1-29 力偶在坐标轴上的投影

基于上述性质, 可对力偶做如下处理:

① 力偶在它的作用面内, 可以任意转移位置。其作用效应和原力偶相同, 即力偶对于刚体上任意点的力偶矩值不因移位而改变。

② 力偶在不改变力偶矩大小和转向的条件下, 可以同时改变力偶中两反向平行力的大小、方向以及力偶臂的大小, 而力偶的作用效应保持不变。

图 1-1-30 中各力偶的作用效应都相同。力偶的力偶臂、力及其方向既然都可改变, 就可简明地以一条带箭头的弧线并标出值来表示力偶, 如图 1-1-30 (d) 所示。

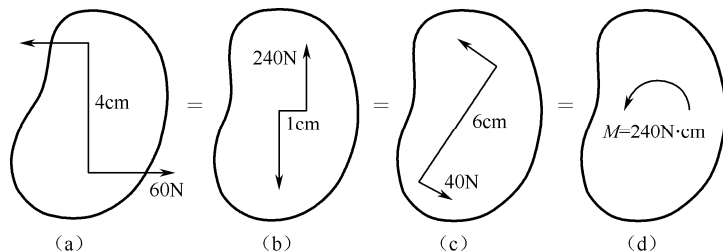


图 1-1-30 等效力偶

3) 平面力偶系的合成

平面力偶系合成的结果为一合力偶, 合力偶矩等于各力偶矩的代数和。即

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum M_i \quad (1-1-10)$$

证明: 如图 1-1-31 所示, 设在刚体某平面上作用力偶系 M_1, M_2, \dots, M_n , 在力偶系作用面内任选两点 A, B , 连接 AB , 以 $AB=d$ 作为公共力偶臂, 保持各力偶的力偶矩不变, 将各力偶分别表示成作用在 A, B 两点的反向平行力, 如图 1-1-31 (b) 所示, 则有

$$F_1 = M_1 / d, F_2 = M_2 / d, F_n = M_n / d$$

于是在 A, B 两点处各得一组共线力系, 其合力分别为 \mathbf{F}_R 和 \mathbf{F}'_R , 如图 1-1-31 (c) 所示, 且有

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}'_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F}$$