

第8章 微分方程

【名人名言】没有哪门学科能比数学更为清晰的阐明自然界的和谐性。——卡洛斯

【学习目标】了解微分方程基本概念，会求 $y^{(n)}=f(x)$ 型方程、可分离变量的微分方程、一阶线性微分方程和一、二阶常系数线性微分方程的解析解。知道微分方程在电子技术中的应用，能用 MATLAB 软件解常微分方程及其数学模型。

【教学提示】微分方程在现实生活中有着广泛的应用，微分方程的求解对不定积分的计算有着更深刻的需求，对掌握微积分知识也具有重大意义。本章的重点是求解方法的运用，可采用练习、讨论、归纳、总结、解答等方式。难点是公式的推导，可采用渐进式指导、讨论等方式。

【数学词汇】

①常微分方程 (Ordinary Differential Equation, ODE)，

偏微分方程 (Partial Differential Equation, PDE)。

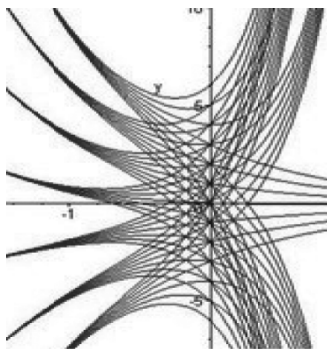
②初始条件 (Initial Condition)，

通解 (General Solution)。

③线性的 (Linear)，

齐次的 (Homogenous)。

【内容提要】



8.1 基本概念

8.2 $y^{(n)}=f(x)$ 型方程的求解

8.3 可分离变量的方程的求解

8.4 线性微分方程的解的结构

8.5 一阶线性微分方程的求解

8.6 常系数线性微分方程的求解

8.7 微分方程在电子技术中的应用

8.8 用 MATLAB 软件解常微分方程(组)

8.9 微分方程建模及其 MATLAB 求解

物质运动和它的变化规律在数学上通常是以函数关系进行描述的，实际问题的处理很难直接给出那样的关系，类似于中学数学里解方程的基本思想，综合考虑问题中的已知条件与未知函数，建立它们关系的方程再求解，也是一种很好的解决问题方式，如果方程中含有未知函数的导数或微分，那么这样的方程就叫作微分方程。

微分方程的研究来源极广，历史久远。

牛顿、莱布尼兹在创建微积分时，指出了微分运算与积分运算的互逆性，实际上解决了最简单的微分方程 $y' = f(x)$ 的求解问题。

微分方程的形成与发展和力学、天文学、物理学，以及其他科学技术的发展密切相关。牛顿利用微分方程



从理论上得到了行星运动的规律,英国天文学家亚当斯使用微分方程发现了海王星的位置。这些都使数学家深信微分方程在认识自然、改造自然方面的巨大力量。

在很长一段时间里,人们都致力于寻找微分方程的解析解。然而,即使是常微分方程,也只有少数简单的常微分方程可以得到解析解,这些微分方程主要有 $y^{(n)}=f(x)$ 型、可分离变量的微分方程、一阶线性微分方程和常系数线性微分方程。

微分方程的应用十分广泛,几乎渗透到自然、社会、生产、生活的每一个学科和领域。

在应用微分方程的过程中,人们发现,不一定非得要得到方程的通解才能解决问题,有时只需找出方程满足定解条件的解,即便无法求得定解条件的解析解,也可以利用数值计算方法,借助计算机寻求微分方程的数值解。

本章先介绍微分方程的基本概念,然后再围绕寻找常微分方程的解析解展开,着重介绍微分方程的基本知识和求解方法。

8.1 基本概念

在中学数学里,曾学习过各种各样的方程,如线性方程、二次方程、高次方程、指数方程、对数方程、三角方程等,当然也学习过方程组。

利用方程或方程组解决实际问题,一般需经过下面的步骤:

①设置未知变量;②建立方程或方程组;③求出未知变量的值。

这样所求得的未知变量的值也叫方程或方程组的解。

在现实生活中,也有许多的问题不仅只限于未知变量,例如,物体在重力作用下自由下落,要寻求下落高度随时间变化的规律;火箭在发动机推动下的空间飞行,要寻求它飞行的轨道;等等。先考察两个简单的例子。

引例 8.1.1(几何问题) 已知曲线在任一点 (x, y) 处的切线的斜率是该点横坐标的倒数,且曲线过点 $(1, 2)$, 求曲线方程。

解 由导数的几何意义知曲线在任意一点 (x, y) 处的切线的斜率是 y' 。再由题设,得

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y|_{x=1} = 2$$

这是一个已知导函数求原函数的问题,根据不定积分的定义,得

$$y = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

再根据 $y|_{x=1} = 2$, 得 $C = 2$, 故所求曲线为 $y = \ln x + 2$ 。

案例 8.1.1(人口问题) 18 世纪末,英国人马尔萨斯(Malthus)在研究了百余年的人口统计资料后认为,人口自然增长的过程中,净相对增长率是常数。

按照 Malthus 的人口理论,设 $N(t)$ 是时刻 t 的人口总数, b 和 d 分别是出生率与死亡率,则人口的净相对增长率 $r = b - d$ 为常数;另一方面, $N'(t)$ 是时刻 t 的增长率, $\frac{N'(t)}{N(t)}$ 是时刻

t 的相对增长率, 因此有

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r, \quad N'(t) = rN(t)$$

这是一个简单的微分方程模型, 常称为 Malthus 模型。

不难验证: 对固定常数 r 和任意常数 C , 有

$$(e^{rt})' = re^{rt}, \quad (Ce^{rt})' = r(Ce^{rt})$$

即 $N(t) = e^{rt}$ 和 $N(t) = Ce^{rt}$ 都满足方程 $N'(t) = rN(t)$ 。

引例 8.1.1 和案例 8.1.1 建立的方程中, 所含的不再是未知变量, 而是未知函数的导数。此外, 不论是引例 8.1.1 的计算, 还是案例 8.1.1 的验证, 所得到的都是确定的函数, 类似于方程及其解的概念, 从而诱导出下面的定义。

定义 8.1.1 (1) 含有未知函数的导数(或微分)的方程叫作微分方程。

(2) 使微分方程左右两边成为恒等式的函数叫作微分方程的解。

课堂练习 8.1.1 指出微分方程 $y' = e^{2x}$ 的解:

$$(1) y = e^{2x}; \quad (2) y = \frac{1}{2}e^{2x}; \quad (3) y = \frac{1}{2}e^{2x} + C; \quad (4) y = \frac{1}{2}Ce^{2x}.$$

下面再来考察两个电学的例子。

案例 8.1.2 (RC 电路) 如图 8.1.1 所示是一个 RC 串联电路, 无电源且假设 $u_C(0) = u_0$, 试给出在任意一时刻 t , 电容的电压 $u_C(t)$ 相对于时间 t 的变化规律。

解 根据基尔霍夫电流定律(KCL), 得

$$i_C + i_R = 0.$$

另一方面, 根据电流与电压的关系:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}, \quad i_R = \frac{u_C}{R}$$

得到电压 $u_C(t)$ 所满足的微分方程

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0, \quad u_C(0) = u_0$$

不难验证, $u_C(t) = u_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ 满足:

$$(1) \text{条件: } u_C(0) = u_0; \quad (2) \text{方程: } \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0.$$

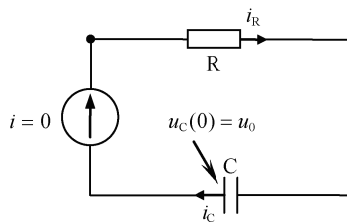


图 8.1.1 RC 串联电路

案例 8.1.3 (RLC 电路) 如图 8.1.2 所示是 RLC 并联电路。在并联电路中, 各支路的电压都是同一值, 设为 $u(t)$, 试建立 $u(t)$ 所满足的微分方程。

解 根据电阻、电感、电容与电流、电压的关系可知

$$i_R = \frac{u(t)}{R}, \quad u(t) = L \frac{di_L}{dt}, \quad i_C = C \frac{du(t)}{dt}$$

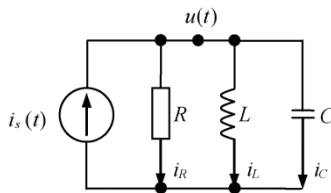


图 8.1.2 RLC 并联电路

另一方面, 由基尔霍夫定律之 KCL, 得

$$i_R + i_L + i_C = i_s$$

两边对 t 求导, 得

$$i'_R + i'_L + i'_C = i'_s,$$

即 $\frac{u'(t)}{R} + \frac{u(t)}{L} + C(\frac{du(t)}{dt})' = i'_s$, 从而得 $u(t)$ 所满足的微分方程为

$$Cu''(t) + \frac{1}{R}u'(t) + \frac{1}{L}u(t) = i'_s$$

不难看出, 引例 8.1.1 和案例 8.1.1、案例 8.1.2 建立的方程:

$$y' = \frac{1}{x}, \quad N'(t) = rN(t), \quad \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0$$

所含未知函数的导数的最高阶数都是 1, 而案例 8.1.3 所建立的方程:

$$Cu''(t) + \frac{1}{R}u'(t) + \frac{1}{L}u(t) = i'_s$$

所含未知函数的导数的最高阶数是 2, 从而引出下面的概念。

定义 8.1.2 微分方程中未知函数的导数(或微分)的最高阶数叫作微分方程的阶。

课堂练习 8.1.2 指出下列微分方程的阶:

$$(1) (y')^3 = x^2 + y^2; \quad (2) y'' - xy' + 3y = \sin 3x; \quad (3) \frac{d^3s}{dt^3} + \frac{ds}{dt} = t^2s^2.$$

上面所讨论的微分方程, 其中的未知函数都只含有一个自变量, 这样的微分方程又叫作常微分方程。未知函数含多个自变量的微分方程叫作偏微分方程。本章只讨论常微分方程。

引例 8.1.1 和案例 8.1.2 中的未知函数

$$y = \ln x + 2 \quad \text{和} \quad u_C(t) = u_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

除满足方程外, 还分别满足条件

$$y|_{x=1} = 2 \quad \text{和} \quad u_C(0) = u_0$$

这样的条件常称为初始条件; 这样的解称为特解。此外, $y = \ln x + C$ 和 $N(t) = Ce^{rt}$ 不仅分别是一阶方程

$$y' = \frac{1}{x} \quad \text{和} \quad N'(t) = rN(t)$$

的解, 而且还含有 1 个任意常数, 这样的解常称为通解。

总结上面讨论, 可诱导出更一般的通解、特解概念。

定义 8.1.3 (1) n 阶微分方程含 n 个独立任意常数的解叫作通解。

(2) 由初始条件确定出通解中的任意常数所得到的解叫作特解。

课堂练习 8.1.3 指出微分方程 $y' - y = 0$ 的通解:

(1) $y = e^x$; (2) $y = Ce^x$; (3) $y = e^x + C$; (D) $y = e^{Cx}$ 。

习 题 8.1

1. 指出下列微分方程的阶:

(1) $y'' - 3y' + 2y = 1$; (2) $xy' + 2y = \cos 2x$; (3) $\frac{d^5 s}{dt^5} + \frac{ds}{dt} = t^2 s^2$ 。

2. 验证 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ 是方程 $y'' - y = 0$ 的通解, 并求其满足 $y(0) = 2$ 、 $y'(0) = 0$ 的特解。

8.2 $y^{(n)} = f(x)$ 型方程的求解

先看一个引例。

引例 8.2.1 讨论方程 $y' = f(x)$ 的解的数学表示。

讨论 前面已经介绍过, 如果 $f(x)$ 已知, 那么

$$y' = f(x)$$

是一个已知导函数求原函数的问题, 也是一个简单的一阶微分方程。

(1) 如果 $f(x)$ 连续, 那么根据不定积分的定义, 得

$$y = \int f(x) dx$$

注意, 积分中含积分常数, 即解中含有一个任意常数, 所以它是一阶方程 $y' = f(x)$ 的通解。

(2) 更进一步, 若 y 满足初始条件 $y|_{x=x_0} = y_0$, 则由牛顿—莱布尼兹公式得解

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

注意, 这个解是由条件 $y|_{x=x_0} = y_0$ 确定的, 所以是方程 $y' = f(x)$ 的特解。

总结上面讨论, 有下面的结论。

方程 $y' = f(x)$ 的

(1) 通解为 $y = \int f(x) dx$;

(2) 满足初始条件 $y|_{x=x_0} = y_0$ 的特解为 $y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$ 。

例 8.2.1 求方程 $y' = 2x - \sin x$ 的通解。

解 方程属 $y' = f(x)$ 型, 由上面的通解公式得通解

$$y = \int (2x - \sin x) dx = x^2 + \cos x + C$$

课堂练习 8.2.1 求方程 $y' = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ 的通解。

例 8.2.2 求方程 $y' = e^x - 3x^2 - 2$ 满足 $y(0) = 1$ 的特解。

解 方程属 $y' = f(x)$ 型, 由上面的特解公式取 $x_0 = 0$ 、 $y_0 = 1$, 从而得特解

$$y = 1 + \int_0^x (e^t - 3t^2 - 2) dt = 1 + (e^t - t^3 - 2t) \Big|_0^x = e^x - x^3 - 2x$$

例 8.2.2 也可先求得通解

$$y = \int (e^x - 3x^2 - 2) dx = e^x - x^3 - 2x + C$$

再代入初始条件 $y(0) = 1$ 解得 $C = 0$ 。从而得特解 $y = e^x - x^3 - 2x$ 。

课堂练习 8.2.2 求方程 $y' = e^x - 2\sin x + 3\cos x$ 满足 $y(0) = 0$ 的特解。

类似于 $y' = f(x)$ 求通解的方式, 将 $y^{(n)} = f(x)$ 恒等变形为

$$(y^{(n-1)})' = f(x)$$

再根据 $y' = f(x)$ 的通解 $y = \int f(x) dx$, 得

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx$$

递推上述过程, 在进行 n 次积分后, 便可得到方程 $y^{(n)} = f(x)$ 的通解。

注意, n 次积分过程中, 每次积分的积分常数不能用相同的字母, 而是要在不同次的积分中加不同的积分常数。如第 k 次积分加积分常数 C_k ($k = 1, \dots, n$), 这样所求得通解中才会含有 n 个独立的任意常数。

例 8.2.3 求方程 $y'' = 12x^2 - 6x$ 的通解。

解 方程恒等变形为 $(y')' = 12x^2 - 6x$, 从而

$$y' = \int (12x^2 - 6x) dx = 4x^3 - 3x^2 + C_1$$

故所求通解

$$y = \int (4x^3 - 3x^2 + C_1) dx = x^4 - x^3 + C_1x + C_2$$

课堂练习 8.2.3 求方程 $y'' = 12x + 6$ 的通解。

例 8.2.4 求方程 $y^{(3)} = e^x + 24$ 满足 $y(0) = 0$, $y'(0) = y''(0) = 1$ 的特解。

解 方程恒等变形为 $(y'')' = e^x + 24$, 从而

$$y'' = \int (e^x + 24) dx = e^x + 24x + C_1$$

由 $y''(0) = 1$ 得 $C_1 = 0$, 于是有 $(y')' = e^x + 24x$, 从而

$$y' = \int (e^x + 24x) dx = e^x + 12x^2 + C_2$$

由 $y'(0) = 1$ 得 $C_2 = 0$, 于是有

$$y' = e^x + 12x^2, \quad y = \int (e^x + 12x^2) dx = e^x + 4x^3 + C$$

最后由 $y(0) = 0$ 得 $C = -1$, 即所求特解为 $y = e^x + 4x^3 - 1$

课堂练习 8.2.4 求方程 $y^{(3)} = e^x - \cos x$ 满足 $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$ 的特解。

习 题 8.2

1. 求下列方程的通解:

$$(1) y'' = 3 \sin x - 6;$$

$$(2) y^{(3)} = 2e^x + \cos x.$$

2. 求方程 $y'' = 12x - 4$ 满足 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ 的特解。

8.3 可分离变量的方程的求解

先看一个引例。

引例 8.3.1 考察方程

$$y' = 2x, \quad y' = 2xy, \quad y' = 2x + y$$

(1) $y' = 2x$ 是已知导函数求原函数的问题, 其通解为

$$y = \int 2x dx = x^2 + C$$

(2) $y' = 2xy$ 和 $y' = 2x + y$, 因为等式右边包含有未知函数 y , 不能用

$$y = \int 2xy dx, \quad y = \int (2x + y) dx$$

得到通解。

(3) 用 $\frac{dy}{dx}$ 替换 y' , 三个方程可恒等变形为

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad \frac{dy}{dx} = 2xy, \quad \frac{dy}{dx} = 2x + y$$

$$\text{或 } dy = 2x dx, \quad \frac{dy}{y} = 2x dx, \quad dy = (2x + y) dx$$

其中前两个方程可以将变量 x 和变量 y 分离到等号两边, 而第 3 个方程则不行。

(4) 对能分离变量的等式两边积分, 得

$$\int dy = \int 2x dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$$

$$\text{即 } y + C_1 = x^2 + C_2, \quad \ln y + C_1 = x^2 + C_2$$

分别令 $C = C_2 - C_1$ 、 $e^{C_2 - C_1}$, 得

$$y = x^2 + C, \quad y = Ce^{x^2}$$

显然, $y = x^2 + C$ 是 $y' = 2x$ 的解, $y = Ce^{x^2}$ 是 $y' = 2xy$ 的解, 它们又都含有一个任意常数, 因此是相应的一阶方程的通解。

引例 8.3.1 (4) 启发了我们, 能将变量 x 和变量 y 分离到等号两边的微分方程是可以求得解析解的。我们将这样的微分方程称为可分离变量的微分方程, 这样求通解的方法称为分

离变量法。

不难看出, 方程 $y' = 2x$ 采用直接积分法和分离变量法都能得到同样的通解

$$y = x^2 + C$$

而分离变量法中等式两边积分分别加积分常数的作法则显得多余。因此, 此后采用分离变量法在等式两边积分时, 可采用等效办法, 即只在自变量 x 所在的一边加积分常数。

此外, 由 $\ln y + C_1 = x^2 + C_2$ 和 $C = e^{C_2 - C_1}$ 得到的通解 $y = Ce^{x^2}$ 中的 $C > 0$, 事实上, 对全体实数 C , $y = Ce^{x^2}$ 都满足方程 $y' = 2xy$ 。为了规避这一矛盾, 就必须对采用分离变量法进行积分时的积分常数扩充至复数范围, 并且也不必刻意追求形如 $y = Ce^{x^2}$ 的显式通解, 而改用隐函数形式的通解, 即形如

$$\ln y = x^2 + C$$

的通解, 并称之为隐式通解。

一般形如

$$y' = f(x)g(y)$$

的微分方程, 采用下面的步骤。

- (1) 替换—用 $\frac{dy}{dx}$ 替换方程中的 y' 。
- (2) 分离变量— $\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$ 。
- (3) 两边积分— $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$ 。

即可得到其隐式通解。因此,

$$y' = f(x)g(y)$$

是可分离变量的微分方程的一般形式, 上述步骤 (1)、(2)、(3) 是分离变量法的一般步骤。

下面通过具体的例子来体验上述求解过程。

例 8.3.1 求下面方程的通解:

$$(1) y' = (3x^2 - 2x + 1)y^2; \quad (2) xy' = (1 - 2x)\sqrt{1 - y^2}.$$

解 用 $\frac{dy}{dx}$ 替换 y' , 得

$$(1) \frac{dy}{dx} = (3x^2 - 2x + 1)y^2; \quad (2) x \frac{dy}{dx} = (1 - 2x)\sqrt{1 - y^2}.$$

分离变量, 得

$$(1) \frac{1}{y^2} dy = (3x^2 - 2x + 1) dx; \quad (2) \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy = \left(\frac{1}{x} - 2 \right) dx.$$

两边积分, 得

$$(1) \int y^{-2} dy = \int (3x^2 - 2x + 1) dx; \quad (2) \int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy = \int \left(\frac{1}{x} - 2 \right) dx.$$

即得其隐式通解:

$$(1) -\frac{1}{y} = x^3 - x^2 + x + C;$$

$$(2) \arcsin y = \ln x - 2x + C.$$

其中 C 为任意常数。

课堂练习 8.3.1 求下列方程的通解:

$$(1) y' = (2x - 3)y;$$

$$(2) xy' = (1 - 2x)y^2;$$

$$(3) y' = (2x + 1)\sqrt{1 - y^2};$$

$$(4) xy' = (2x^2 - 1)(1 + y^2).$$

例 8.3.2 求下面方程的通解:

$$(1) y \cos 2x dx + (\sin x + \cos x) dy = 0; \quad (2) x dy + 2y dx = 0.$$

解 两个方程都是以微分形式出现的微分方程, 直接将含 x 和含 y 的式子分离到等式两边, 得

$$(1) \frac{1}{y} dy = \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx = (\cos x - \sin x) dx, \quad (2) \frac{1}{y} dy = -\frac{2}{x} dx.$$

再两边积分, 得

$$(1) \int \frac{1}{y} dy = \int (\cos x - \sin x) dx; \quad (2) \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{2}{x} dx.$$

故得其隐式通解:

$$(1) \ln y = \sin x + \cos x + C;$$

$$(2) \ln y = -2 \ln x + C.$$

其中 C 为任意常数。

课堂练习 8.3.2 求下面方程的通解:

$$(1) x dy = (x - 2)y dx;$$

$$(2) x dy + (1 - 2x)y^2 dx = 0.$$

例 8.3.3 求下列方程满足初始条件的特解:

$$(1) xy' = (2x^2 - x + 3)y^2, \quad y(1) = 1; \quad (2) e^{2x} dy + y dx = 0, \quad y(0) = 1.$$

解 用 $\frac{dy}{dx}$ 替换 y' , 得

$$(1) x \frac{dy}{dx} = (2x^2 - x + 3)y^2;$$

$$(2) e^{2x} dy + y dx = 0.$$

分离变量, 得

$$(1) \frac{1}{y^2} dy = \left(2x - 1 + \frac{3}{x} \right) dx; \quad (2) \frac{1}{y} dy = -e^{-2x} dx.$$

两边积分, 得

$$(1) \int \frac{1}{y^2} dy = \int \left(2x - 1 + \frac{3}{x} \right) dx; \quad (2) \int \frac{1}{y} dy = -\int e^{-2x} dx.$$

故得其隐式通解:

$$(1) -\frac{1}{y} = x^2 - x + 3 \ln x + C;$$

$$(2) \ln y = \frac{e^{-2x}}{2} + C.$$

将 $y(1)=1$ 、 $y(0)=1$ 代入通解, 得

$$(1) C = -1; \quad (2) C = -\frac{1}{2}.$$

故所求特解: (1) $-\frac{1}{y} = x^2 - x + 3\ln x - 1$; (2) $\ln y = \frac{e^{-2x} - 1}{2}$ 。

课堂练习 8.3.3 求下面方程满足初始条件的特解:

$$(1) y' = 2xy^3, \quad y(1) = 1; \quad (2) y' = e^{2x-y}, \quad y(0) = 0.$$

习 题 8.3

1. 求下面方程的通解:

$$(1) y' = (5x^4 - 4x + 3)y^3; \quad (2) xy' = (4x^4 - 3x^3 + 2x)y;$$

$$(3) x^2 y' = (3x^4 - 2x + 2x + 1)e^y; \quad (4) (1 + x^2)y' = x^2 y.$$

2. 求下面方程满足给定初始条件的特解:

$$(1) y' = (4x - 3)y, \quad y(1) = 1; \quad (2) xy' = (x + 1)y^2, \quad y(1) = e.$$

8.4 线性微分方程的解的结构

在中学数学里, 一次函数 $y = ax + b$ 称为线性函数, 三元一次方程

$$ax + by + cz = d$$

称为三元线性方程。不难看出, 线性即一次, 线性方程也就是未知变量都是一次的方程。

借助代数方程中的“线性”概念, 如果微分方程中的未知函数及其各阶导数都是一次幂, 那么该微分方程就称为线性微分方程。用数学语言描述即为下面定义。

定义 8.4.1 形如

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (n \geq 1)$$

的微分方程称为线性微分方程。其中

- (1) $f(x) \equiv 0$ 时, 称为齐次线性微分方程;
- (2) $f(x)$ 不恒为 0 时, 称为非齐次线性微分方程;
- (3) $a_n(x)$ 不恒为 0 时, 称为 n 阶线性微分方程。

下面考察线性微分方程的解的结构。

假设 $y = y^*$ 是线性微分方程

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

的一个解, $y = \bar{y}$ 是其对应的齐次方程

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

的解, 那么根据微分方程解的定义, 有

$$a_n(x)(y^*)^{(n)} + \cdots + a_1(x)(y^*)' + a_0(x)y^* = f(x),$$

$$a_n(x)(\bar{y})^{(n)} + \cdots + a_1(x)(\bar{y})' + a_0(x)\bar{y} = 0$$

两式相加, 注意导数的加法遵循线性规则: $(u+v)^{(k)} = u^{(k)} + v^{(k)}$, 于是有

$$a_n(x)(y^* + \bar{y})^{(n)} + \cdots + a_1(x)(y^* + \bar{y})' + a_0(x)(y^* + \bar{y}) = f(x)$$

此即说明 $y = y^* + \bar{y}$ 是方程

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

的解。于是, 若 $y = \bar{y}$ 是 n 阶线性微分方程

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

的通解, 那么根据通解的定义, $\bar{y}$ 应含有 n 个独立的任意常数, 从而

$$y = y^* + \bar{y}$$

也含有 n 个独立的任意常数。因此, $y = y^* + \bar{y}$ 是 n 阶非齐次线性微分方程的通解。

总结上面讨论, 可得线性微分方程的解的结构如下。

定理 8.4.1 若 $y = y^*$ 是微分方程

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

的一个解, $y = \bar{y}$ 是其对应齐次方程的通解, 则

$$y = y^* + \bar{y}$$

是方程 $a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ 的通解。

例 8.4.1 验证 $y = -1$ 是方程 $y' - y = 1$ 的解, $y = Ce^x$ (C 为任意常数) 是其对应齐次方程

$$y' - y = 0$$

的解, 并写出方程 $y' - y = 1$ 的通解。

解 将 $y = -1$ 代入方程 $y' - y = 1$, 得

$$\text{左边} = (-1)' - (-1) = 1 = \text{右边}$$

即 $y = -1$ 是方程 $y' - y = 1$ 的解。将 $y = Ce^x$ 代入方程 $y' - y = 0$, 得

$$\text{左边} = (Ce^x)' - Ce^x = Ce^x - Ce^x = 0 = \text{右边}$$

即 $y = Ce^x$ 是方程 $y' - y = 0$ 的解。再由定理 8.4.1 可知, 方程 $y' - y = 1$ 的通解为

$$y = -1 + Ce^x$$

课堂练习 8.4.1 若 $y = x$ 是 $y' - y = 1 - x$ 的一个解, $y = Ce^x$ 是其对应齐次方程 $y' - y = 0$ 的解, 试写出方程 $y' - y = 1 - x$ 的通解。

习题 8.4

1. 验证 $y = -2$ 是方程 $xy' - y = 2$ 的解, $y = Cx$ 是其对应齐次方程 $xy' - y = 0$ 的解, 并写出方程 $xy' - y = 2$ 的通解。

2. 验证 $y = 1$ 是方程 $y'' - 3y' + 2y = 2$ 的解, $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ 是其对应齐次方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的解, 并写出 $y'' - 3y' + 2y = 2$ 的通解。

8.5 一阶线性微分方程的求解

微分方程

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

如果是一阶的, 那么 $a_1(x)$ 就不能恒为零, 方程两边同除以 $a_1(x)$ 便可恒等变形为

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

此即为一阶线性微分方程的标准形式。

8.5.1 齐次形式

当 $Q(x) \equiv 0$ 时, 方程

$$y' + P(x)y = 0$$

可视为可分离变量的方程, 采用分离变量法。

(1) 用 $\frac{dy}{dx}$ 替换方程中的 y' : $\frac{dy}{dx} = -P(x)y$ 。

(2) 分离变量: $\frac{1}{y}dy = -P(x)dx$ 。

(3) 两边积分: $\int \frac{1}{y}dy = -\int P(x)dx$ 。

从而得隐式通解:

$$\ln y = -\int P(x)dx + C_1$$

注意, 此时 $\int P(x)dx$ 已不含积分常数, 其积分常数已含于 C_1 之中。

令 $C = e^{C_1}$, 则得显式解 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ (此时在实数范围内的 $C > 0$)。

不难验证, 对任意实数 C ,

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

都适合一阶方程 $y' + P(x)y = 0$, 且含有一个任意常数, 所以是通解。

综上所述, 有下面的结论:

$$y' + P(x)y = 0 \text{ 的通解为 } y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

(注意: 积分常数不要带入通解公式)。

例 8.5.1 求下列方程的通解:

$$(1) xy' + y = 0;$$

$$(2) (1+x^2)y' - x^2y = 0。$$

解 方程化成标准形式:

$$(1) y' + \frac{1}{x}y = 0;$$

$$(2) y' + \left(-\frac{x^2}{1+x^2}\right)y = 0。$$

与 $y' + P(x)y = 0$ 比较, 得

$$(1) P(x) = \frac{1}{x};$$

$$(2) P(x) = -\frac{x^2}{1+x^2}。$$

代入通解公式 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ 得通解

$$(1) y = Ce^{-\int \frac{1}{x}dx} = Ce^{-\ln x} = Ce^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{C}{x};$$

$$(2) y = Ce^{-\int \frac{x^2}{1+x^2}dx} = Ce^{\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx} = Ce^{\int (1-\frac{1}{1+x^2})dx} = Ce^{x-\arctan x}。$$

课堂练习 8.5.1 求下列方程的通解:

$$(1) xy' + (1-x+2x^2)y = 0;$$

$$(2) (1+x^2)y' = x^4y。$$

8.5.2 非齐次形式

在了解了如何求一阶齐次线性微分方程的通解 $\bar{y}$ 之后, 根据线性微分方程的解的结构之定理 8.4.1, 如果能找到非齐次线性微分方程的某个解 y^* , 那么便能得到其非齐次线性微分方程的通解

$$y = y^* + \bar{y}$$

1. 观察得出 y^* 情形

例 8.5.2 求方程 $y' - 2y = 2$ 的通解。

解 对应的齐次方程:

$$y' - 2y = 0, \quad P(x) = -2$$

齐次方程的通解

$$\bar{y} = Ce^{-\int P(x)dx} = Ce^{-\int -2dx} = Ce^{2x}$$

另一方面, 注意方程 $y' - 2y = 2$ 的右边是常数, 而常数的导数为 0, 若取

$$y = k \quad (k \text{ 为常数})$$

代入方程, 即得 $k = -1$ 。通过这样的观察分析可知: $y^* = -1$ 是 $y' - 2y = 2$ 的一个解。

故方程 $y' - 2y = 2$ 的通解为 $y = y^* + \bar{y} = -1 + Ce^{2x}$ 。

例 8.5.3 求方程 $y' + y = e^x$ 的通解。

解 对应的齐次方程:

$$y' + y = 0, \quad P(x) = 1$$

齐次方程的通解

$$\bar{y} = Ce^{-\int P(x)dx} = Ce^{-\int 1dx} = Ce^{-x}$$

另一方面, 注意方程 $y' + y = e^x$ 的右边是 e^x , 其任意阶导数也都为 e^x , 若取

$$y = ke^x \quad (k \text{ 为常数})$$

代入方程, 得 $k = \frac{1}{2}$ 。即 $y^* = \frac{1}{2}e^x$ 是 $y' + y = e^x$ 的一个解。

故方程 $y' + y = e^x$ 的通解 $y = y^* + \bar{y} = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$ 。

课堂练习 8.5.2 求下列方程的通解:

$$(1) y' + 2y = 4;$$

$$(2) 2y' - y = e^x.$$

2. 常数变易求 y^* 情形

观察得出非齐次线性微分方程的特解 y^* 的方法并不总是可行的。下面介绍一种通过计算找出特解 y^* 的方法——常数变易法。

注意, 一阶线性微分方程

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

对应的齐次方程为 $y' + P(x)y = 0$, 通解为

$$\bar{y} = Ce^{-\int P(x)dx}$$

让 $\bar{y}$ 中的常数 C 变易为 $C(x)$, 并假设

$$y^* = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

是 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的解, 代入方程, 得

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}(-\int P(x)dx)' + P(x) \cdot C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \quad C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

故 $y^* = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$ 。

总结上述过程和结论, 得常数变易法求 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解的步骤:

(1) 求对应齐次方程 $y' + P(x)y = 0$ 的通解 $\bar{y}$;

(2) 将 $\bar{y}$ 中的积分常数 C 变易为 $C(x)$ 后代入非齐次方程, 建立 $C(x)$ 的微分方程并求出 $C(x)$;

(3) 得出 y^* 及非齐次方程的通解 $y = y^* + \bar{y}$ 。

例 8.5.4 求方程 $xy' - y = x^2e^x$ 的通解。

解 对应的齐次方程为 $xy' - y = 0$, 其标准形式:

$$y' + \left(-\frac{1}{x}\right)y = 0, \quad P(x) = -\frac{1}{x}$$

齐次方程的通解 $\bar{y} = Ce^{-\int P(x)dx} = Ce^{\int \frac{1}{x}dx} = Ce^{\ln x} = Cx$ 。

另一方面, 让常数 C 变易为 $C(x)$, 并假设

$$y^* = C(x) \cdot x$$

是非齐次方程的解, 代入方程, 得

$$x(C'(x) \cdot x + C(x) \cdot 1) - C(x) \cdot x = x^2 e^x,$$

$$C'(x) = e^x, \quad C(x) = e^x$$

即 $y^* = xe^x$ 。故方程的通解 $y = y^* + \bar{y} = xe^x + Cx$ 。

课堂练习 8.5.3 用常数变易法求方程 $xy' - y = x^2 \cos x$ 的通解。

*3. 公式求通解情形

由常数变易法的讨论过程不难看出, $C(x)$ 满足方程:

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

这是一个已知导函数求原函数的问题, 两边积分即得

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$$

其中所有积分都不带积分常数, 其积分常数都已含于 C 中。注意

$$y^* = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

是一阶方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的解, 它又含有 1 个任意常数 C , 所以是通解。于是有

方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解为

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right)。$$

***例 8.5.5** 求方程 $xy' + y = e^x$ 满足 $y(1) = 0$ 的特解。

解 方程的标准形式:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}, \quad P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = \frac{e^x}{x}$$

代入通解公式, 得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x}dx} \left(\int \frac{e^x}{x} e^{\int \frac{1}{x}dx} dx + C \right) = e^{-\ln x} \left(\int \frac{e^x}{x} e^{\ln x} dx + C \right) \\ &= e^{\frac{\ln 1}{x}} \left(\int \frac{e^x}{x} \cdot x dx + C \right) = \frac{1}{x} \left(\int e^x dx + C \right) = \frac{1}{x} (e^x + C) \end{aligned}$$

再由 $y(1) = 0$, 得 $C = -e$, 故所求特解为 $\bar{y} = \frac{e^x - e}{x}$ 。

***课堂练习 8.5.4** 用公式法求方程 $xy' + y = \cos x$ 满足 $y(\pi) = 0$ 的特解。

习题 8.5

1. 求下列方程的通解:

$$(1) y' = (1 - 2x + 3x^2)y; \quad (2) xy' = (1 - 3x + 2x^2)y.$$

2. 求方程 $x^2 y' = (1 + x^2)y$ 满足 $y(1) = 0$ 的特解。

3. 求下列方程的通解:

$$(1) y' - 2y = 4; \quad (2) 2y' + y = 3e^x.$$

4. 求方程 $y' + 2y = 2$ 满足 $y(0) = 0$ 的特解。

8.6 常系数线性微分方程的求解

n 阶线性微分方程

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

如果所有系数 $a_k(x)$ 都为常数, 那么就称为 n 阶常系数线性微分方程。

本节仅介绍 $n=1$ 或 2 的情形。

8.6.1 齐次形式

1. 一阶齐次的通解

一阶常系数齐次线性微分方程的一般形式为

$$ay' + by = 0 \quad (a, b \text{ 为实常数, } a \neq 0)$$

其标准形式为 $y' + \frac{b}{a}y = 0$, 由 $P(x) = \frac{b}{a}$ 及通解公式 $\bar{y} = Ce^{-\int P(x)dx}$ 得通解

$$\bar{y} = Ce^{-\int \frac{b}{a} dx} = Ce^{-\frac{b}{a}x}$$

不难看出, 通解中与方程有关的元素仅有 $-\frac{b}{a}$, 它正好是方程

$$ar + b = 0$$

的根, 如果将 $ar + b = 0$ 称为 $ay' + by = 0$ 的特征方程, 那么便可简单地由特征方程的特征根确定出 $ay' + by = 0$ 的通解。

总结上面讨论, 有一阶常系数齐次线性微分方程

$$ay' + by = 0 \quad (a, b \text{ 为实常数, } a \neq 0)$$

的通解的求法如下。

(1) 将 y' 替换为 r 、 y 替换为 1 , 建立特征方程: $ar + b = 0$ 。

(2) 解方程求得特征根: $r = r_1 = -\frac{b}{a}$ 。

(3) 由特征根即得齐次方程 $ay' + by = 0$ 的通解 $\bar{y} = Ce^{r_1 x}$ 。

例 8.6.1 求下列方程的通解:

(1) $y' + 2y = 0$;

(2) $2y' - y = 0$ 。

解 特征方程为

(1) $r + 2 = 0$;

(2) $2r - 1 = 0$ 。

特征根: (1) $r = -2$, (2) $r = \frac{1}{2}$; 对应齐次方程的通解:

(1) $\bar{y} = Ce^{-2x}$, (2) $\bar{y} = Ce^{\frac{1}{2}x}$ 。

课堂练习 8.6.1 求下列方程的通解:

(1) $2y' + y = 0$;

(2) $3y' - 2y = 0$ 。

2. 二阶齐次的通解

二阶常系数齐次线性微分方程的一般形式为

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (a, b, c \text{ 为实常数, } a \neq 0)$$

和一阶类似, 二阶常系数齐次线性微分方程也可由特征根得到其通解, 方法如下:

(1) 将 y'' 替换为 r^2 、 y' 替换为 r 、 y 替换为 1, 建立特征方程

$$ar^2 + br + c = 0$$

(2) 解特征方程求得特征根。

(3) 由特征根得到齐次方程的通解(其关系见表 8.6.1)。

表 8.6.1 特征根与通解的关系

特征方程 $ar^2 + br + c = 0$ 的根的分布	微分方程 $ay'' + by' + cy = 0$ 的通解
有两个不相等的实根 r_1 和 r_2	$\bar{y} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
有两个相等的实根 $r_1 = r_2 = r$	$\bar{y} = (C_1 x + C_2) e^{rx}$
有共轭复根 $r = \alpha \pm \beta i$	$\bar{y} = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x)$
备注: 其中 C_1 、 C_2 是独立的任意实常数, α 、 β 为实数	

下面利用通解的定义, 仅证明不相等特征根情形, 其他情形类推。

【证明】 将 $\bar{y} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ 代入方程 $ay'' + by' + cy = 0$, 得

$$\begin{aligned}
 \text{左边} &= a(\bar{y})'' + b(\bar{y})' + c\bar{y} \\
 &= a(C_1 r_1^2 e^{r_1 x} + C_2 r_2^2 e^{r_2 x}) + b(C_1 r_1 e^{r_1 x} + C_2 r_2 e^{r_2 x}) + c(C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}) \\
 &= C_1 e^{r_1 x} (a \cdot r_1^2 + b \cdot r_1 + c) + C_2 e^{r_2 x} (a \cdot r_2^2 + b \cdot r_2 + c)
 \end{aligned}$$

注意 r_1 和 r_2 是特征根, 即

$$ar_1^2 + br_1 + c = 0, \quad ar_2^2 + br_2 + c = 0$$

从而 左边 $= C_1 e^{r_1 x} \cdot 0 + C_2 e^{r_2 x} \cdot 0 = 0 =$ 右边

此即说明 $\bar{y} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ 是方程 $ay'' + by' + cy = 0$ 的解。

另一方面, $\bar{y}$ 显然包含有两个独立的任意常数, 根据通解的定义可知

$$\bar{y} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

是二阶微分方程 $ay'' + by' + cy = 0$ 的通解。

利用表 8.6.1, 便可由代数方程确定出二阶常系数齐次线性微分方程的通解。

例 8.6.2 求下列方程的通解:

$$(1) y'' - 3y' + 2y = 0;$$

$$(2) y'' - 6y' + 9y = 0。$$

解 特征方程为

$$(1) r^2 - 3r + 2 = 0;$$

$$(2) r^2 - 6r + 9 = 0。$$

解方程求得特征根:

$$(1) r_1 = 1, r_2 = 2;$$

$$(2) r_1 = r_2 = 3。$$

由表 8.6.1, 得方程的通解:

$$(1) \bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x};$$

$$(2) \bar{y} = (C_1 x + C_2) e^{3x}。$$

课堂练习 8.6.2 求下列微分方程的通解:

$$(1) y'' + y' - 2y = 0;$$

$$(2) 4y'' + 4y' + y = 0。$$

***例 8.6.3** 求方程 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 的通解。

解 特征方程为

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

由求根公式及 $i = \sqrt{-1}$ 得特征根 $r = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$, 属共轭复根 $\alpha = 1$ 、 $\beta = 1$ 的情形, 由表 8-1 得方程的通解:

$$\bar{y} = e^x (C_1 \sin x + C_2 \cos x)$$

***课堂练习 8.6.3** 求方程 $y'' + 2y' + 2y = 0$ 的通解。

8.6.2 非齐次形式

由上面的讨论不难看出, 常系数齐次线性微分方程的求解可转变为对代数特征方程的求解, 这样不仅避开了繁杂的积分计算, 也使求解过程变得更加简单和直接。

根据线性微分方程解的结构, 如果能用观察、常数变易等方法求得非齐次的一个解 y^* , 那么便能简便地得到非齐次的通解

$$y = y^* + \bar{y}$$

例 8.6.4 求下列方程的通解:

$$(1) y' + y = 2;$$

$$(2) y' - y = e^{2x}。$$