项目二

正弦交流电路的基本分析方法

教学导航

本项目介绍正弦交流电路的稳态分析。正弦信号是一种基本信号，十分广泛地应用于工农业生产和日常生活中。另外，从信号分析的角度看，任何复杂的信号都可以分解为按正弦规律变化的分量。因此，研究复杂信号作用下的电路响应，可以利用叠加原理分别研究每一个正弦分量信号作用下的电路响应，再叠加得到总的响应。故对正弦稳态电路的分析在电路分析中占有十分重要的地位。

所有电压、电流为同一频率的正弦函数的电路称为正弦交流电路。本项目先介绍正弦的三要素，正弦量的相量表示；再介绍正弦交流电路的分析方法和正弦交流电路的功率；最后介绍三相交流电路的电源和负载的连接方式，以及三相交流电路的功率。

任务 2-1　仿真测试 RC 及 RLC 串联电路

1．任务目标

（1）正确理解正弦量的概念，牢记正弦量的三要素。
（2）正确区分瞬时值、最大值、有效值。
（3）学会分析交流电路单一元件参数及 RLC 串联电路。
（4）掌握交流电路仿真的方法。

2．元件清单

（1）四踪示波器 1 台；
（2）万用表 3 台；
（3）单相交流电源 1 台；
（4）可调电阻、电感、电容若干，导线若干。

3．实践操作

1）RC 交流电路的研究

（1）打开 Multisim7，按如图 2-1-1 所示电路图连接试验电路。为了同时观察和方便对比电阻、电容器端电压的变化，将实验电路连接成结构参数完全相同的两个电路。详细的软件使用可以访问网站 www.electronicsworkbench.com 或参考附录 A。

（2）单击仿真开关，调节元件参数为 R_1=1kΩ、R_2=1kΩ、C_1=5μF、C_2=5μF，调整示波器的有关参数后，观察示波器的电压波形及万用表的读数。万用表读数填入表 2-1-1 中。

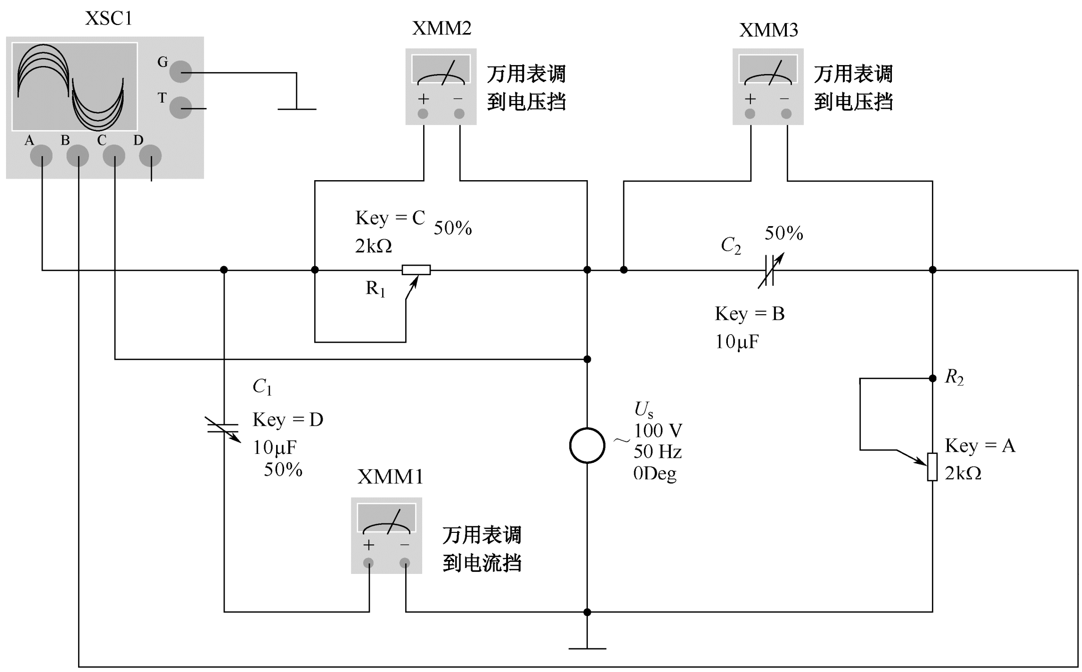


图 2-1-1　RC 交流电路研究

（3）调整电阻 R 或 C 的参数，使 R_1=2kΩ、R_2=1kΩ、C_1=5μF、C_2=5μF，观察各万用表数值及波形的变化情况，并与步骤（2）比较，数据填入表 2-1-1 中。

表 2-1-1　RC 交流电路数据记录表

仪表读数	万用表 1（XMM1）	万用表 2（XMM2）	万用表 3（XMM3）
R_1=1kΩ R_2=1kΩ C_1=5μF C_2=5μF			
R_1=2kΩ R_2=1kΩ C_1=5μF C_2=5μF			
结论	RC 电路可以移相		

R_1=1kΩ、R_2=1kΩ、C_1=5μF、C_2=5μF 时波形如图 2-1-2 所示。

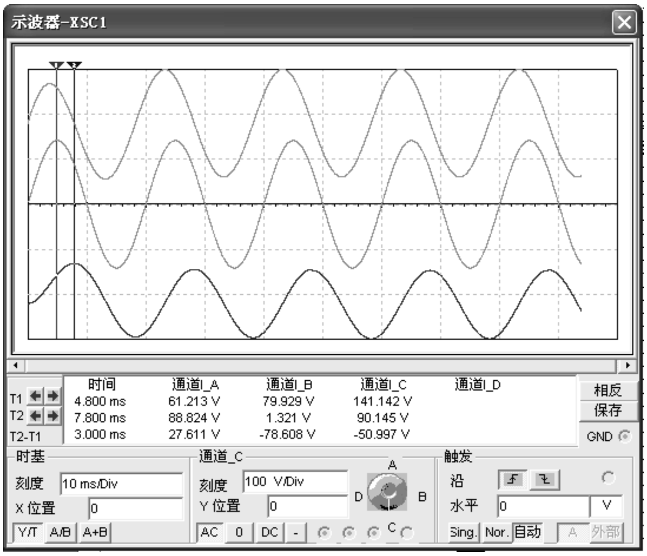


图 2-1-2　RC 移相电路 R_1=1kΩ、R_2=1kΩ、C_1=5μF、C_2=5μF 时波形

R_1=2kΩ、R_2=1kΩ、C_1=5μF、C_2=5μF 时波形如图 2-1-3 所示。

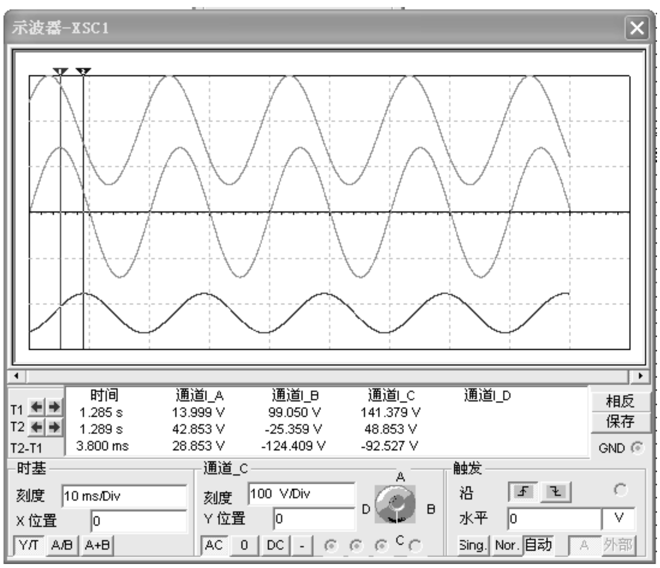


图 2-1-3　RC 移相电路 R_1=2kΩ、R_2=1kΩ、C_1=5μF、C_2=5μF 时波形

图中最上面的是 B 通道波形，中间是 C 通道波形，最下面的是 A 通道波形（RLC 电路波形分析时三个通道的波形位置与 RC 电路一样），比对两图可知，增大电阻，使得从电容两端输出的电压更加滞后于电源输入电压（由示波器可知大约滞后 14°）。

2）RLC 串联电路的研究

（1）按如图 2-1-4 所示电路图连接实验电路。为了同时观察和方便对比电阻、电容器端电压的变化，将实验电路连接成结构参数完全相同的两个电路。

（2）单击仿真开关，调节元件参数为 $R_1=R_2=10\Omega$、$C_1=C_2=1\mu F$、$L_1=L_2=10mH$、$f=50Hz$，调整示波器的有关参数，观察示波器的电压波形及万用表的读数。万用表读数填入表 2-1-2 中。

（3）调节元件参数为 $R_1=R_2=10\Omega$、$C_1=C_2=1\mu F$、$L_1=L_2=10mH$、$f=1.59kHz$，使电路发生谐振，调整示波器的有关参数，观察示波器的电压波形及万用表的读数。万用表读数填入表 2-1-2 中。

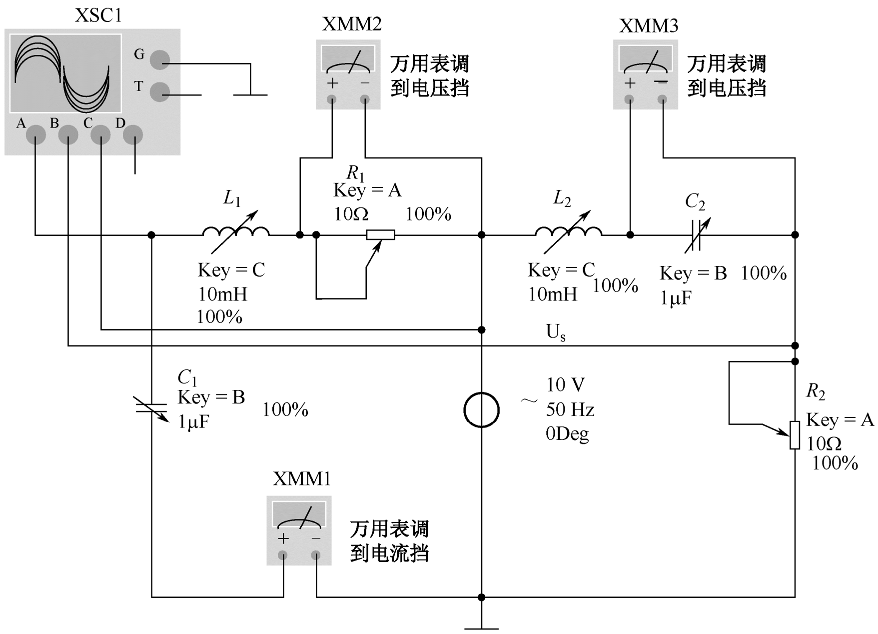


图 2-1-4　RLC 串联电路实验电路图

表 2-1-2　RLC 串联电路数据记录表

仪表读数	万用表 1（XMM1）	万用表 2（XMM2）	万用表 3（XMM3）
$R_1=R_2=10\Omega$ $C_1=C_2=1\mu F$ $L_1=L_2=10mH$ $f=50Hz$			
$R_1=R_2=10\Omega$ $C_1=C_2=1\mu F$ $L_1=L_2=10mH$ $f=1.59kHz$			
结论			

（4）当元件参数为 $R_1=R_2=10\Omega$、$C_1=C_2=1\mu F$、$L_1=L_2=10mH$、$f=50Hz$ 时波形如图 2-1-5 所示，当元件参数为 $R_1=R_2=10\Omega$、$C_1=C_2=1\mu F$、$L_1=L_2=10mH$、$f=1.59kHz$ 时波形如图 2-1-6 所示，比对可以发现，谐振后电容 C 两端峰值电压大约为 141V，之前为 14V，增大了约 10 倍。

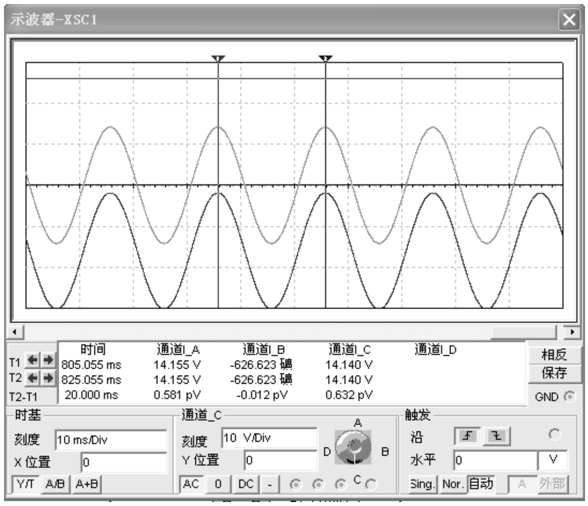


图 2-1-5　RLC 串联电路 R_1=R_2=10Ω、C_1=C_2=1μF、L_1=L_2=10mH、f=50Hz 时波形

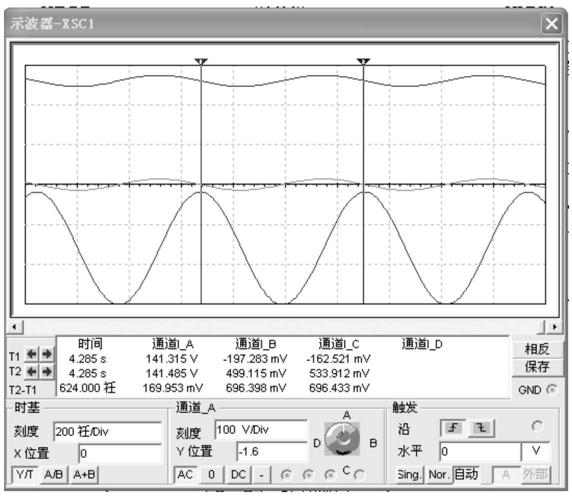


图 2-1-6　RLC 串联电路 R_1=R_2=10Ω、C_1=C_2=1μF、L_1=L_2=10mH、f=1.59kHz 时波形

知识链接

2.1　正弦交流电路

2.1.1　正弦交流电路基本概念

1．正弦量概念

电流、电压的大小和方向都不随时间变化，这种电流、电压统称为直流电（DC），一般

用大写字母表示，例如 I、U 等；大小和方向均随时间作周期性变化，且在一个周期内平均值为零的电流（电压、电动势）称为交流电，一般用小写字母表示，例如 i，u 等。交流电的变化形式是多种多样的，如图 2-1-7 所示。随时间按正弦规律变化的电流（电压、电动势）统称为正弦电量，或称为正弦交流电，有时又简称为交流电（AC）。

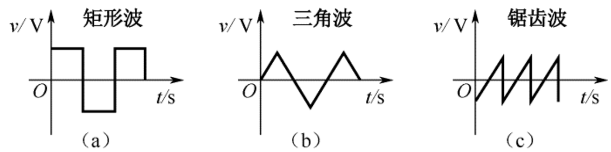


图 2-1-7　常见交流电波形

正弦交流电量的数值和方向随时间按正弦规律周而复始变化。在分析正弦交流电路时，我们首先要写出正弦交流电量的数学表达式，画出它的波形图。为此，必须像直流电路那样，预先设定交流电量的参考方向。如图 2-1-8（b）所示的电路上流过的正弦电流 i，其参考方向如实线箭头所示。当 i 的真实方向与参考方向一致时，是正值，对应波形图的正半周；当 i 的真实方向与参考方向相反时，是负值，对应波形图的负半周。同直流电路一样，我们分析交流电路时，一般习惯将电压和电流选取为关联参考方向。其正弦电流 i 的波形如图 2-1-8（a）所示，在交流电的波形图中，其横轴坐标既可以用时间 t（秒[s]）表示，也可以用电角度 ωt（弧度[rad]）来表示。与波形图相应的正弦电流的数学表达式为：

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) \qquad (2\text{-}1\text{-}1)$$

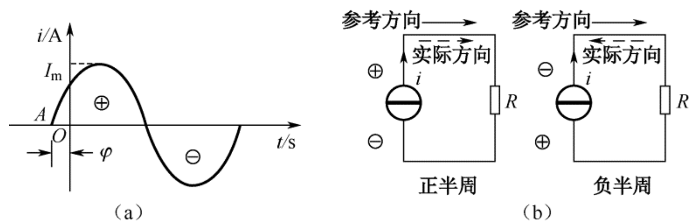


图 2-1-8　正弦交流电的参考方向和波形

式（2-1-1）称为正弦电流的瞬时值表达式。正弦电量在任意瞬间的值称为瞬时值，用小写字母来表示，如用 i、u 和 e 分别来表示正弦电流、正弦电压和正弦电动势瞬时值。利用瞬时值表达式可以计算出任意时刻正弦电量的数值。瞬时值的正或负与假定的参考方向比较，便可确定该时刻电量的真实方向。

式（2-1-1）表明：一个正弦电量的特征表现在变化的最大值（如 I_m），随时间变化的快慢 ω 和起始值（t=0 时的数值，它取决于 t=0 时的角度 ψ）三个值。若将这三个量值代入已选定的正弦函数中就完全确定了这个正弦量。故称振幅（最大值）、角频率、初相位为正弦量的三要素。

2．周期、频率、角频率

式（2-1-1）中 ω 称为角频率，它表示在单位时间内正弦电量变化的弧度数，它是反映正弦电量变化快慢的物理量，其单位是弧度/秒（rad/s）。正弦量变化的快慢还可以用周期 T 和

频率 f 来表示。

周期指正弦电量变化一周所需的时间，用大写字母 T 表示，单位为秒（s）。频率指正弦电量单位时间内重复变化的次数，用小写字母 f 表示，单位为赫兹（Hz），频率和周期互为倒数。由于正弦电量变化一周相当正弦函数变化 2π 弧度，可知：

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2-1-2}$$

$$\omega = 2\pi f \tag{2-1-3}$$

式（2-1-2）和式（2-1-3）表明，周期、频率、角频率三者都反映的是正弦电量变化快慢这一物理实质。三个量中只要知道一个，其他两个物理量就可以求出。例如：我国工业和民用电的频率为 f=50Hz（称为工频），其周期 T=1/50=0.02s，角频率 $\omega = 2\pi f \approx 314\text{rad/s}$ 。

3．相位、初相位、相位差

正弦电量在每一瞬间的状态是不同的，具体表现在每一瞬间的数值（包括正、负号）及变化趋势不同。而正弦电量在任意瞬间的变化状态是由该瞬间的电角度（$\omega t + \psi$）决定的。

把正弦电量在任意瞬间的电角度称为相位。它反映了正弦电量随时间变化的进度，决定正弦电量在每一瞬间的状态。当 t=0 时，相位角为 ψ，称为初相位，简称初相。显然，初相位与所选的计时起点有关，在如图 2-1-8（a）所示波形中，正弦波从负到正的过零点 A 与坐标原点的距离就是初相位，在原点的左侧，初相位 ψ>0。由于正弦波周期性变化，最靠近坐标原点左右两侧各有一个过零点，为了避免混淆，一般规定 ψ 在−π～π 范围内。如图 2-1-9 所示。

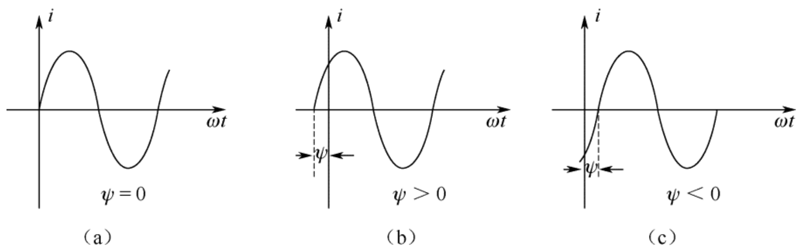


图 2-1-9　正弦量的初相

不同频率（周期）的交流电比较无意义。对于两个同频率的正弦电量而言，虽然都随时间按正弦规律变化，但是它们随时间变化的进度可能不同，为了描述同频率正弦量随时间变化进程的先后，引入了相位差的概念。相位差就是两个同频率的正弦量的相位之差，用字母 φ 表示。例如正弦电压 $u=U_m\sin(\omega t+\psi_u)$，正弦电流 $i=I_m\sin(\omega t+\psi_i)$，则电压与电流相位差为：

$$\varphi = (\omega t + \psi_u) - (\omega t + \psi_i) = \psi_u - \psi_i \tag{2-1-4}$$

可见，两个同频率正弦量的相位差等于它们的初相差，其值为常数，与计时选择起点无关。

如果 φ=0，如图 2-1-10（a）所示，称电压 u 与电流 i 同相。其特点是：两正弦量同时达到零点，同时达到正最大值。

如果 φ=±π，如图 2-1-10（b）所示，称电压 u 与电流 i 反相。其特点是：两正弦量瞬时值的实际方向总是相反。

如果 φ>0，如图 2-1-10（c）所示，称电压 u 超前电流 $i\varphi$ 角度。其特点是：电压 u 比电流

i 先达到正最大值。

如果 $\varphi<0$，如图 2-1-10（d）所示，称电压 u 滞后电流 i $|\varphi|$角度。其特点是：电压 u 比电流 i 后达到正最大值。

如果 $\varphi=\pm\pi/2$，如图 2-1-10（c）（d）所示，称电压 u 与电流 i 正交。其特点是：当一正弦量达到最大值时，另一正弦量正好是零。

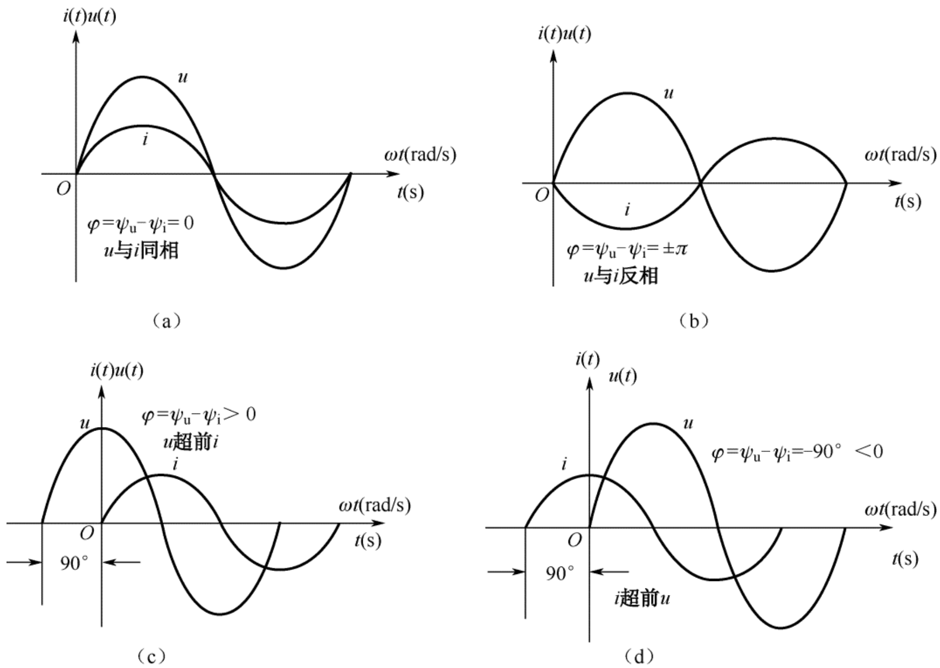


图 2-1-10　正弦交流电的相位差

【例 2-1-1】两个同频率的正弦电压和电流分别为：$u=8\sin(\omega t+60^{\circ})\text{V}$，$i=6\sin(\omega t+20^{\circ})\text{A}$，求它们之间的相位差，并说明哪个超前。

解：求相位差要求两个正弦量的函数形式应一致。故首先将电流 i 改写成用正弦形式表示：

$$i=6\sin(\omega t+20^{\circ}+90^{\circ})=6\sin(\omega t+110^{\circ})(\text{A})$$

因此，相位差为：$\phi=\psi_{\text{u}}-\psi_{\text{i}}=60^{\circ}-110^{\circ}=-50^{\circ}$

所以电流超前电压 50°。

4．瞬时值、最大值、有效值

正弦电量的瞬时值是随时间变化的量，正弦电量瞬时值中的最大值称为正弦量的最大值或幅值，它是正弦电量在整个变化过程中所能达到的极大值。正弦电量的振幅用带有下标 m 的大写字母表示，如用 I_{m}、U_{m}、E_{m} 分别表示正弦电流、正弦电压、正弦电动势的振幅。而在实际应用中，经常需要了解正弦电量在电路中所产生的效果，为了反映正弦电量的实际作用效果，我们通常使用“有效值”来表示正弦电量的大小。

正弦电量的有效值是按电流的热效应来确定的，它根据热效应相等原理，把正弦电量算

成直流电的数值，即正弦电量的有效值是热效应与它相等的直流电的数值。当正弦电流 i 和直流电流 I 分别流过阻值相等的电阻 R 时（如图 2-1-11 所示），若在相同的时间内，交流电流 i 通过电阻 R 所消耗的能量与直流 I 通过 R 所消耗的能量相等，则 I 称为 i 的有效值。正弦电量的有效值用大写字母表示。

图 2-1-11　电流有效值等效电路

由图 2-1-11（a）可知：正弦电流在一个周期 T 内 R 上消耗的电能为：

$$W_{AC}=\int_0^T p\mathrm{d}t=\int_0^T i^2R\mathrm{d}t$$

由图 2-1-11（b）可知：直流电流在一个周期 T 内 R 上消耗的电能为：

$$W_{DC}=I^2RT$$

若 $W_{AC}=W_{DC}$，则 $I^2RT=\int_0^T i^2R\mathrm{d}t$

解得正弦电流的有效值为：$I=\sqrt{\dfrac{1}{T}\int_0^T i^2\mathrm{d}t}$　　（2-1-5）

可以看出正弦电流的有效值 I 是正弦电流 i 的平方在一个周期内的平均值再取平方根，因此正弦电量的有效值又称为均方根值。还应指出，式（2-1-5）不仅使用于正弦量，而且使用于任何波形的周期性电流和电压。

类似地，可以得到正弦电压的有效值为：$U=\sqrt{\dfrac{1}{T}\int_0^T u^2\mathrm{d}t}$　　（2-1-6）

若正弦电流 $i=I_m\sin(\omega t+\psi_i)$，则根据式（2-1-5）可得正弦电流的有效值和最大值之间的关系为：

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [I_m\sin(\omega t+\psi_i)]^2\mathrm{d}t}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}\approx 0.707I_m \tag{2-1-7}$$

同理可得正弦电压的有效值和最大值之间的关系为：$U=\dfrac{U_m}{\sqrt{2}}\approx 0.707U_m$　　（2-1-8）

在实际应用中，通常所说的交流电的电压或电流的数值均指的是有效值。交流电压表、电流表测量指示的电压、电流读数的数值均指的是有效值。一般只有在分析电气设备（如电路元件）的绝缘耐压能力时，才用到最大值。

引入有效值后，正弦电压和电流的表达式也可写成：

$$u=U_m\sin(\omega t+\psi_u)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\psi_u)$$
$$i=I_m\sin(\omega t+\psi_i)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi_i)$$

5．正弦量数学表达式注意事项

综上所述，如果知道了一个正弦量的振幅、角频率（频率）和初相位，就可以完全确定该正弦电量，即可以用数学表达式或波形图将它表示出来。

在写正弦量的数学表达式时有如下几个注意事项：

（1）振幅不能为负；
（2）必须为正弦函数；
（3）初相在±180° 以内。

【例 2-1-2】利用数学诱导公式把以下正弦量的数学表达式表示成标准正弦量数学表达式。

① $i=-5\sin(\omega t-30^\circ)\text{A}$ ② $i=5\cos(\omega t-30^\circ)\text{A}$ ③ $i=5\sin(\omega t-240^\circ)\text{A}$

解：① $i=-5\sin(\omega t-30^\circ)=5\sin(\omega t-30^\circ+180^\circ)=5\sin(\omega t+150^\circ)(\text{A})$

② $i=5\cos(\omega t-30^\circ)=5\sin(\omega t-30^\circ+90^\circ)=5\sin(\omega t+60^\circ)(\text{A})$

③ $i=5\sin(\omega t-240^\circ)=5\sin(\omega t-240^\circ+360^\circ)=5\sin(\omega t+120^\circ)(\text{A})$

2.1.2 正弦量相量表示法

正弦电量可以用多种形式表示，但就其特征而言，必须能准确地描述正弦量的最大值、角频率和初相位这三个要素。正弦量用解析式表示特点是简单准确，用波形图表示的特点是直观明了。但对于同频率的正弦交流电路用解析式或波形图来分析计算，将是十分烦琐和困难的。工程计算中通常采用复数表示正弦量，把对正弦量的各种运算转化为复数的代数运算，从而大大简化；正弦交流电路的分析计算过程。这种方法称为相量法。

复数运算是相量法的数学基础，因此先复习一下复数的运算。

1．复数概念与运算

一个复数是由实部和虚部组成的。复数有多种表示形式，常见的有代数形式、指数形式、三角函数形式和极坐标形式。设 A 为一个复数，a、b 分别为实部和虚部，则：

$$A=a+\text{j}b \qquad \text{复数的代数形式（2-1-9）}$$

$$A=r\,\text{e}^{\text{j}\psi} \qquad \text{复数的指数形式（2-1-10）}$$

$$A=r(\cos\psi+\text{j}\sin\psi) \qquad \text{复数的三角形式（2-1-11）}$$

$$A=r\angle\psi \qquad \text{复数的极坐标形式（2-1-12）}$$

其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 称为复数 A 的模，ψ=arctan(b/a)称为幅角。

复数也可以用由实轴与虚轴组成的复平面上的有向线段来表示。用直角坐标系的横轴表示实轴，以 1 为单位；纵轴表示虚轴，以 j=$\sqrt{-1}$ 为单位，由于电路中用 i 表示电流了，所以用 j 代替 i 表示虚部单位。实轴和虚轴构成复坐标平面，简称复平面。于是任何一个复数就与复平面上的一个确定点相对应。例如，式（2-1-9）所示的复数与 A（a，b）点相对应，如图 2-1-12 所示。

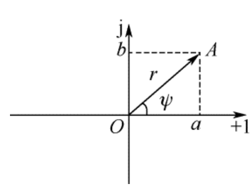


图 2-1-12 复平面

设有两个复数：

$$A_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1 = r_1 e^{\mathrm{j}\psi_1} = r_1\angle\psi_1$$

$$A_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2 = r_2 e^{\mathrm{j}\psi_2} = r_2\angle\psi_2$$

复数的加减运算应用代数形式较为方便：$A_1 + A_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{j}(b_1 + b_2)$；

复数的乘除运算应用指数或极坐标形式较为方便：

$$A_1 A_2 = r_1 r_2 e^{\mathrm{j}(\psi_1+\psi_2)} = r_1 r_2\angle(\psi_1 + \psi_2)$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{\mathrm{j}(\psi_1-\psi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\psi_1 - \psi_2)$$

【例 2-1-3】已知复数 $A = 3 + \mathrm{j}4 = 5\angle 53.1^\circ$，$B = 8 - \mathrm{j}6 = 10\angle -36.9^\circ$，求复数运算：$A+B$，$A-B$，$A \cdot B$，$\dfrac{A}{B}$。

解：$A + B = 3 + \mathrm{j}4 + 8 - \mathrm{j}6 = 11 - \mathrm{j}2 = 11.18\angle -10.3^\circ$；

$A - B = 3 + \mathrm{j}4 - (8 - \mathrm{j}6) = -5 + \mathrm{j}10 = 11.18\angle 116.57^\circ$；

$A \cdot B = 5\angle 53.1^\circ \cdot 10\angle -36.9^\circ = 50\angle 16.2^\circ$；

$\dfrac{A}{B} = \dfrac{5\angle 53.1^\circ}{10\angle -36.9^\circ} = 0.5\angle 90^\circ = \mathrm{j}0.5$。

2．相量、相量图

1）正弦量的相量表示

复数 $e^{\mathrm{j}\theta} = 1\angle\theta$ 是一个模等于 1 而幅角等于 θ 的复数。任意复数 $A = re^{\mathrm{j}\psi}$ 乘以 $e^{\mathrm{j}\theta}$ 等于：

$$re^{\mathrm{j}\psi} \cdot e^{\mathrm{j}\theta} = re^{\mathrm{j}(\psi+\theta)} = r\angle(\psi + \theta)$$

复数的模仍为 r，幅角变为（$\psi+\theta$），即将复数 A 由原来的位置 ψ，逆时针旋转了 θ，旋至幅角（$\psi+\theta$），所以称 $e^{\mathrm{j}\theta} = 1\angle\theta$ 为旋转因子。

例如：$+\mathrm{j}=1\angle 90^\circ$，$-\mathrm{j}=1\angle -90^\circ$，所以+j 可以看成是一个模为 1、幅角为+90°的复数，−j 可以看成是一个模为 1、幅角为−90°的复数。因此，若复数 A 乘以+j 或−j，则为：

$$\mathrm{j}A = r\angle(\psi + 90^\circ)$$

$$-\mathrm{j}A = r\angle(\psi - 90^\circ)$$

上式表明，任意一个复数乘以 j，其模值不变，幅角增加 90°，相当于在复平面上把复数矢量逆时针旋转 90°；任意一个复数乘以−j，其模值不变，幅角减少 90°，相当于在复平面上把复数矢量顺时针旋转 90°，如图 2-1-13 所示。

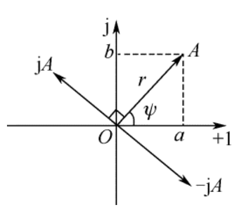


图 2-1-13　复数矢量旋转 90°

在线性交流电路中，可以证明，如果电源的频率为 f，则电路中各处电压与电流的响应频

率均为f，即求解正弦交流电路各处的电压与电流响应的正弦量时，只需确定最大值（或有效值）和初相位，而频率采用电源的频率f，这样就可以将函数式的复杂计算简化为复数计算。

设一正弦量$i = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \psi)$，在复平面上对应一矢量，如图 2-1-14 所示。矢量长度 OA 按比例等于振幅 I_{m}，即复数的模；矢量与横轴夹角等于初相 ψ，即复数的幅角。上述矢量在起始位置时，可用复数$I_{\mathrm{m}}e^{\mathrm{j}\psi}$表示，再乘以旋转因子$e^{\mathrm{j}\omega t}$得复数：

$$I_{\mathrm{m}}e^{\mathrm{j}\omega t} \bullet e^{\mathrm{j}\psi} = I_{\mathrm{m}}e^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)} = I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi) + \mathrm{j}I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi)$$

表示复平面上一个长度为I_{m}，起始位置与横轴夹角等于初相ψ，以角速度ω逆时针旋转的矢量。其复数的虚部为一个正弦函数，复数本身并不等于正弦函数。复数只是对应地表示一个正弦量。

在正弦交流电路中所有激励和响应都是同频率的正弦量，其共同的旋转因子$e^{\mathrm{j}\omega t}$可省略不计，只用起始位置矢量来表示正弦量。这就是正弦量的相量表示法。正弦量$i = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \psi)$的相量，可以写为：

$$\dot{I}_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}}e^{\mathrm{j}\psi} = I_{\mathrm{m}}\angle\psi \tag{2-1-13}$$

式（2-1-13）中，相量$\dot{I}_{\mathrm{m}}$的模是正弦量的振幅，故称振幅相量，此处使用广泛的是有效值的相量，写成：

$$\dot{I} = Ie^{\mathrm{j}\psi} = I\angle\psi \tag{2-1-14}$$

相量$\dot{I}$的模是正弦量的有效值。本书所用相量表示的正弦量，如未加特殊说明，则为有效值相量。

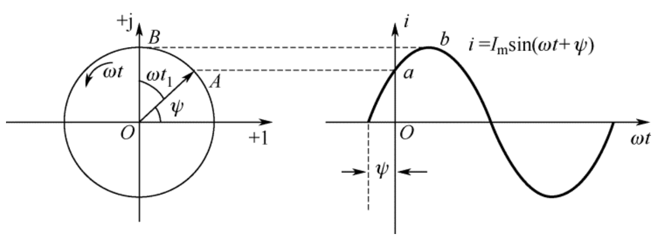


图 2-1-14　正弦量的复数表示法

注意事项：

① 相量只是表示正弦量，而不等于正弦量。

② 只有正弦量才能用相量表示，非正弦量不能用相量表示。

2）相量图和相量运算

只有同频率的正弦量之间的相位差等于初相之差，其相量才能画在同一复平面上，称为相量图。只有同频率的正弦量才能相互运算。用相量运算的方法称为相量法。其相角的参考方向规定为：取箭头逆时针方向为正角度值；箭头顺时针方向为负角度值。

相量的加减运算仍然满足数学上的矢量的平行四边形法则，应注意的是减可以看成加一个相量的反相相量。如图 2-1-15 所示。

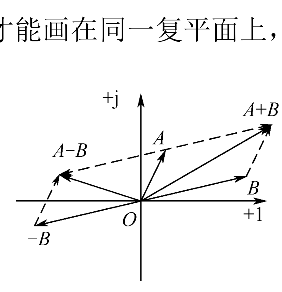


图 2-1-15　相量运算的平行四边形法则

【例 2-1-4】写出下列正弦量的相量形式：

$$i_1(t)=5\sqrt{2}\sin(\omega t+53.1°)(\text{A})$$
$$i_2(t)=10\sqrt{2}\sin(\omega t-36.9°)(\text{A})$$

解：$\dot{I}_1=5\angle 53.1°$

$\dot{I}_2=10\angle -36.9°$

【例 2-1-5】写出下列正弦量的函数表达式：

$$\dot{U}_1=-5+\text{j}10(V)=11.18\angle 116.57°(\text{V})$$
$$\dot{U}_2=110-\text{j}150(V)=186\angle -53.75°(\text{V})$$

解：$u_1=11.18\sqrt{2}\sin(\omega t+116.57°)(\text{V})$

$u_2=186\sqrt{2}\sin(\omega t-53.75°)(\text{V})$

2.1.3　单一参数的交流电路

1．纯电阻元件的交流电路

1）电压与电流关系

在交流电路中，通过电阻元件的电流和它两端的电压在任何瞬间都遵守欧姆定律。如图 2-1-16（a）所示的只含有电阻元件 R 的电路中，电压、电流采用关联参考方向。

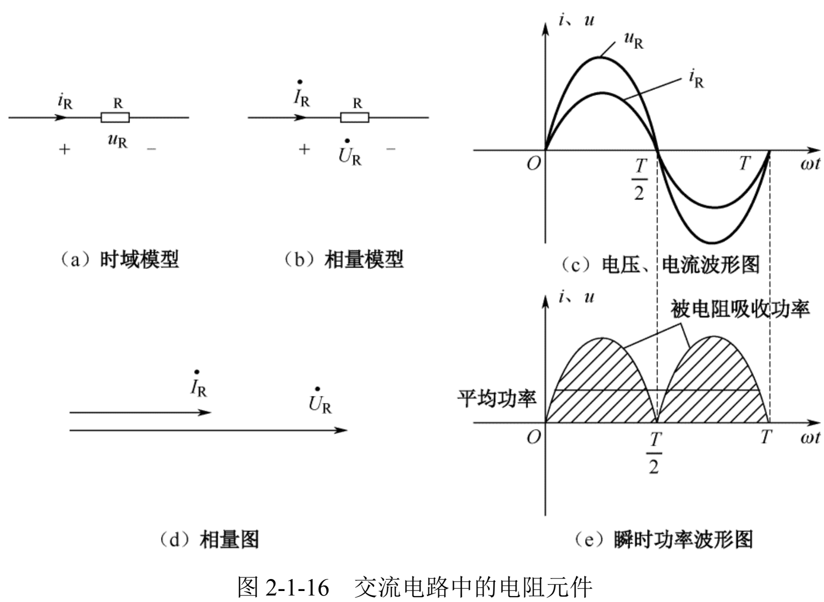


图 2-1-16　交流电路中的电阻元件

设在电阻元件两端加上的正弦交流电压为：

$$u=U_m\sin\omega t=\sqrt{2}U\sin\omega t$$（为分析电路方便性，假设初相为 0）

按照如图 2-1-16 所示电压与电流的参考方向，根据欧姆定律，电路的电流为：

$$i=\frac{u}{R}=\frac{U_m}{R}\sin\omega t=\sqrt{2}\frac{U}{R}\sin\omega t=I_m\sin\omega t$$

上式表明：流过电阻元件的电流和其两端的电压是同频率的正弦量。比较电压和电流的数学表达式，它们的关系如下：

（1）数值关系

电压和电流最大值关系为：$I_{\mathrm{m}}=\dfrac{U_{\mathrm{m}}}{R}$（2-1-15）

两边同除以$\sqrt{2}$，可得有效值关系为：$I=\dfrac{U}{R}$（2-1-16）

即电压与电流的最大值和有效值均服从欧姆定律关系。

（2）相位关系

电压和电流同相位，即 $\psi_{\mathrm{u}}=\psi_{\mathrm{i}}$，相位差 $\varphi=0$，电压与电流波形如图 2-1-16（c）所示。综上所述，可得电阻元件电压和电流的相量关系式：

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R} \tag{2-1-17}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{m}}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{m}}}{R} \tag{2-1-18}$$

式（2-1-17）和式（2-1-18）同时表示了电压和电流之间的数值与相位关系，称为欧姆定律的相量形式，相应的相量图如图 2-1-16（d）所示。根据式（2-1-18），如图 2-1-16（a）所示的时域模型可用如图 2-1-16（b）所示的相量模型来代替，即电压、电流用相量表示，而电阻不变。

2）功率

在交流电路中，通过电阻元件的电流及其两端电压都是交变的，电阻吸收的功率也必然是随时间变化的。把电阻在任意瞬间所吸收的功率称为瞬时功率，用小写字母 p 表示，设 u、i 为参考方向关系，则瞬时功率等于同一瞬时电压和电流瞬时值的乘积，即：

$$p=ui=U_{\mathrm{m}}\sin\omega t\bullet I_{\mathrm{m}}\sin\omega t=U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\sin 2\omega t=UI(1-\cos 2\omega t) \tag{2-1-19}$$

上式表明：瞬时功率是随时间变化的，并且由两部分组成：第一部分是恒定值 UI，第二部分是幅值为 UI，并以 2ω 角频率随时间变化的交变量 $UI\cos2\omega t$。瞬时功率的波形图如图 2-1-16（e）所示。瞬时功率 $p\geqslant0$，所以电阻元件是耗能元件。

由于瞬时功率是随时间变化的，使用时不方便，因而工程上所说的功率指的是瞬时功率在一个周期内的平均值，称为平均功率，用大写字母 P 表示，平均功率又称有功功率，它的单位为瓦特（W）或千瓦（kW）。

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T UI(1-\cos 2\omega t)\mathrm{d}t=UI=I^2R=\frac{U^2}{R} \tag{2-1-20}$$

式（2-1-20）与直流电路的功率计算公式在形式上完全相同，但式中 U、I 是电压、电流的有效值。

注意：通常电器铭牌数据或测量的功率均指有功功率。

【例 2-1-6】有一个阻值 R=2kΩ 的电阻丝，通过电阻丝的电流为 $i_{\mathrm{R}}=2\sqrt{2}\sin(\omega t-45^{\circ})$，求电阻丝两端的电压 u_{R}、U_{R} 及其消耗的功率 P_{R}。

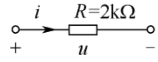


图 2-1-17 【例 2-1-6】图

解： $u_R = R \times i_R = 2000 \times 2\sqrt{2}\sin(\omega t - 45^\circ)$

$= 4000\sqrt{2}\sin(\omega t - 45^\circ)(\text{V})$

电压有效值：$U_R = \dfrac{U_{Rm}}{\sqrt{2}} = \dfrac{4000\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4000(\text{V})$；

电流有效值：$I_R = \dfrac{I_{Rm}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2(\text{A})$；

有功功率：$P_R = U_R I_R = 4000 \times 2 = 8000(\text{W})$。

2．纯电感元件的交流电路

1）电压与电流关系

如图 2-1-18（a）所示只含有电感元件的电路中，电压和电流采用关联方向。设通过电感元件的正弦交流电流为：

$$i = I_m \sin\omega t = \sqrt{2}I\sin\omega t \tag{2-1-21}$$

则电感元件的端电压为：

$$u = L\frac{di}{dt} = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = U_m \sin(\omega t + 90^\circ) \tag{2-1-22}$$

上式表明：电感元件中电流与其两端的电压都是同频率的正弦量。比较电压和电流的数学表达式，它们的关系如下。

（1）数值关系

电压和电流最大值关系为：

$$U_m = \omega L I_m \text{ 或 } I_m = \frac{U_m}{\omega L} \tag{2-1-23}$$

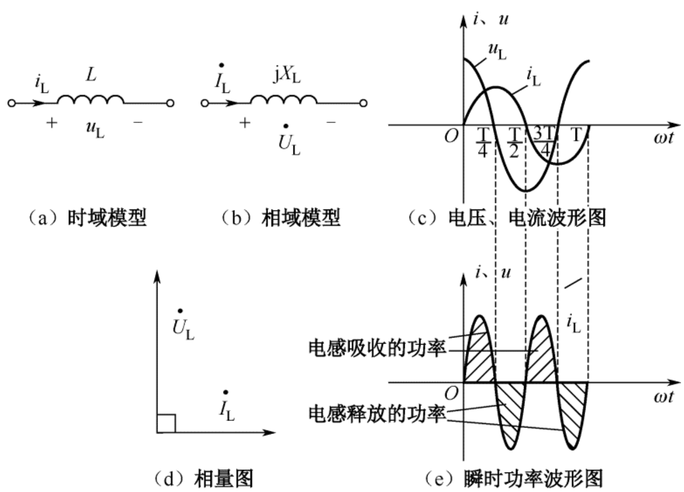


图 2-1-18　交流电路中的电感元件

两边同除以 $\sqrt{2}$，可得电流与电压的有效值关系为：

$$I = \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{X_L} \tag{2-1-24}$$

式（2-1-24）称为电感元件的欧姆定律，式中 $X_L = \omega L = 2\pi fL$，定义为感抗，其单位为欧姆（Ω）。感抗是表示电感对电流阻碍作用大小的一个物理量，它与 L 和 ω 成正比。对于一定的电感 L，频率越高，它呈现的感抗越大，反之越小。

特别指出，对于电感元件而言，电压和电流的瞬时值之间并不具有欧姆定律的形式，即不存在正比关系，感抗也不能代表电压、电流瞬时值的比值。电感元件的欧姆定律只适用于电压和电流的最大值或有效值之比。

（2）相位关系

比较式（2-1-21）和式（2-1-22）可知，电感电压超前电流 90°，或者说电感电流滞后电压 90°，即 $\psi_u = \psi_i + 90^\circ$。电压与电流波形图如图 2-1-18（c）所示。

综上所述，电感元件欧姆定律的相量形式为：

$$\dot{U} = \omega L\dot{I}\angle 90^\circ = \mathrm{j}X_L\dot{I} \tag{2-1-25}$$

即

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \mathrm{j}X_L \tag{2-1-26}$$

式中，$\mathrm{j}X_L$ 称为感抗的计算形式。

式（2-1-25）与式（2-1-26）表示了电感上电压和电流之间的数值与相位关系，相应的相量图如图 2-1-18（d）所示。如图 2-1-18（b）所示为电感元件的相量模型。

2）功率

（1）有功功率

在电压、电流取关联参考方向下，电感元件吸收的瞬时功率为：

$$p = ui = U_m \sin(\omega t + 90^\circ) \cdot I_m \sin\omega t = U_m I_m \cos\omega t \sin\omega t = \frac{U_m I_m}{2}\sin 2\omega t = UI\sin 2\omega t \tag{2-1-27}$$

瞬时功率的波形图如图 2-1-18（e）所示。

电感元件瞬时功率的平均值，即为平均功率：

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T UI\sin 2\omega t\mathrm{d}t = 0 \tag{2-1-28}$$

从瞬时功率的数学表达式可知，瞬时功率是随时间变化的正弦函数，其幅值为 $U \cdot I$，以 2ω 角频率随时间变化。在一个周期内，瞬时功率的平均值为零，说明电感元件不消耗能量。从瞬时功率的波形如图 2-1-18（e）所示可以看出，在第一和第三个 1/4 周期内，u 和 i 同为正值或同为负值，瞬时功率 p 大于零，这一过程实际是电感将电能转换为磁场能储存起来，从电源吸取能量。在第二和第四个 1/4 周期内，u 和 i 一个正值，另一个则为负值，故瞬时功率 p 小于零，这一过程实际是电感将磁场能转换为电能释放出来。电感不断地与电源交换能量，在一个周期内吸收和释放的能量相等，因此平均值为零，这说明电感不消耗能量，是一个储能元件。

（2）无功功率

电感不消耗能量，只是将能量不停地吸收和回送。互换功率的大小通常用瞬时功率的最大值来衡量。由于这部分功率没有消耗掉，所以称为无功功率，用 Q_L 表示：

$$Q_L = UI = X_L I^2 = \frac{U^2}{X_L}$$

为了和有功功率区别，电感元件的无功功率的单位用乏[尔]（var）表示。

注意：无功功率中“无功”的含义是“交换”而不是“消耗”，它是相对于“有功”而言的。绝不可把“无功”理解为“无用”。

【例 2-1-7】把一个电阻可以忽略的线圈，接到$u = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t + 60^\circ)\text{V}$的电源上，线圈的电感为$0.4\text{H}$，试求：（1）线圈的感抗$X_\text{L}$；（2）电流$i_\text{L}$及$I_\text{L}$；（3）电路的无功功率。

解：（1）感抗为$X_\text{L} = \omega L = 100\pi \times 0.4 = 125.6(\Omega)$

（2）电压的有效值为：$U = 220\text{V}$；

流过线圈的电流有效值为：$I_\text{L} = \dfrac{U}{X_\text{L}} = \dfrac{220}{125.6} = 1.75(\text{A})$；

电压超前电流90°，则电流瞬时值为：$i_\text{L} = 1.75\sqrt{2}\sin(100\pi t - 30^\circ)(\text{A})$；

（3）无功功率为：$Q_\text{L} = UI_\text{L} = 220 \times 1.75 = 385(\text{var})$。

3．纯电容元件的交流电路

1）电压与电流关系

如图 2-1-19（a）所示只含有电容元件的电路中，电压和电流采用关联方向。设通过电容元件的正弦交流电压为：

$$u = U_\text{m}\sin\omega t = \sqrt{2}U\sin\omega t \qquad (2\text{-}1\text{-}29)$$

则流过电容元件的电流为：

$$i = C\frac{\text{d}u}{\text{d}t} = \omega CU_\text{m}\cos\omega t = \omega CU_\text{m}\sin(\omega t + 90^\circ) = I_\text{m}\sin(\omega t + 90^\circ) \qquad (2\text{-}1\text{-}30)$$

比较电压和电流的数学表达式，它们的关系如下。

（1）数值关系

电压和电流最大值关系为：

$$I_\text{m} = \omega CU_\text{m} \qquad (2\text{-}1\text{-}31)$$

两边同除以$\sqrt{2}$，可得电流与电压的有效值关系为：

$$I = \omega CU = \frac{U}{X_\text{C}} \qquad (2\text{-}1\text{-}32)$$

式（2-1-32）称为电容元件的欧姆定律，式中$X_\text{C} = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{2\pi fC}$，定义为容抗，其单位为欧姆（Ω）。容抗是表示电容对电流阻碍作用大小的一个物理量，它与C和ω成反比。对于一定的电感C，频率越高，它呈现的容抗越小，反之越大。

特别指出，对于电容元件而言，电压和电流的瞬时值之间并不具有欧姆定律的形式，即不存在正比关系，容抗也不能代表电压、电流瞬时值的比值。电容元件的欧姆定律只适用于电压和电流的最大值或有效值之比。

（2）相位关系

比较式（2-1-29）和式（2-1-30）可知，电容电压滞后电流 90°，或者说电容电流超前电压 90°，即$\psi_\text{u} = \psi_\text{i} - 90^\circ$。电压与电流波形图如图 2-1-19（c）所示。

综上所述，电容元件欧姆定律的相量形式为：

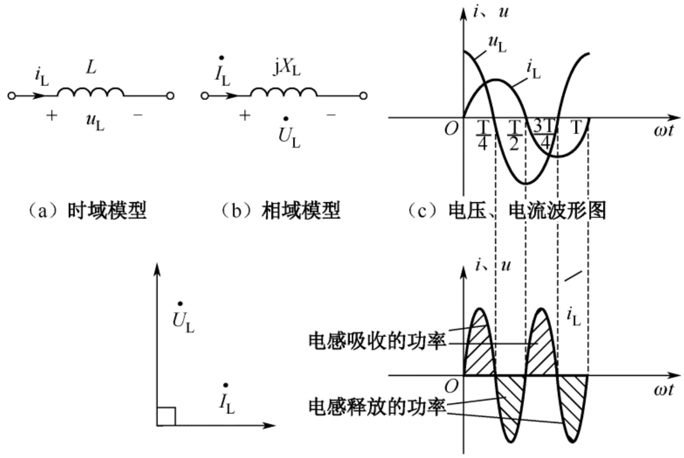
$$\dot{U} = -\frac{\dot{I}}{\omega C}\angle -90^{\circ} = -\mathrm{j}X_{\mathrm{C}}\dot{I} \tag{2-1-33}$$

即

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = jX_{\mathrm{C}} \tag{2-1-34}$$

式中，$\mathrm{j}X_{\mathrm{C}}$称为容抗的计算形式。

式（2-1-33）与式（2-1-34）表示了电容上电压和电流之间的数值与相位关系，相应的相量图如图 2-1-19（d）所示。如图 2-1-19（b）所示为电感元件的相量模型。



（a）时域模型　（b）相域模型　（c）电压、电流波形图

（d）相量图　（e）瞬时功率波形图

图 2-1-19　交流电路中的电容元件

2）功率

（1）有功功率

在电压、电流取关联参考方向下，电容元件吸收的瞬时功率为：

$$p = ui = U_{\mathrm{m}}\sin\omega t \bullet I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + 90^{\circ}) = U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos\omega t\sin\omega t = \frac{U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}}{2}\sin 2\omega t = UI\sin 2\omega t \tag{2-1-35}$$

瞬时功率的波形图如图 2-1-19（e）所示。

电容元件瞬时功率的平均值，即为平均功率：

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T UI\sin 2\omega t\mathrm{d}t = 0 \tag{2-1-36}$$

从瞬时功率的数学表达式可知，瞬时功率是随时间变化的正弦函数，其幅值为 UI，以 2ω 角频率随时间变化。在一个周期内，瞬时功率的平均值为零，说明电容元件不消耗能量。从瞬时功率的波形如图 2-1-19（e）所示可以看出，在第一和第三个 1/4 周期内，u 和 i 同为正值或同为负值，瞬时功率 p 大于零，这一过程实际是电容将电能转换为电场能储存起来，从电源吸取能量。在第二和第四个 1/4 周期内，u 和 i 一个正值，另一个则为负值，故瞬时功率 p 小于零，这一过程实际是电容将电场能转换为电能释放出来。电容不断地与电源交换能量，在一个周期内吸收和释放的能量相等，因此平均值为零，这说明电容不消耗能量，是一个储能元件。

（2）无功功率

电容不消耗能量，只是将能量不停地吸收和回送。互换功率的大小通常用瞬时功率的最大值来衡量。由于这部分功率没有消耗掉，所以称为无功功率，用 Q_{C} 表示。如果流过电容和