

第3章 控制系统的时域分析

内容提要:本章主要介绍线性定常系统的稳定性、稳定判据及稳态误差,阐述一阶、二阶系统的时域响应,并简要介绍高阶系统的瞬态响应。最后介绍如何用 MATLAB 和 Simulink 进行瞬态响应分析。

知识要点:系统稳定的充分必要条件,Routh 判据,误差与稳态误差的定义,静态误差系数及系统的型号,线性定常一阶、二阶系统的时域响应及动态性能的计算,高阶系统的主导极点、偶极子及高阶系统的降阶。

教学建议:本章的重点是熟练掌握稳定性的定义和稳定判据,熟练计算系统的稳态误差,牢固掌握一阶、二阶系统的数学模型和典型响应特点,熟练计算一阶系统、二阶欠阻尼系统的动态性能,了解附加零极点对动态性能的影响,正确理解主导极点的概念,会估算高阶系统动态特性。建议学时数为 6~8 学时。

工程中的控制系统总是在时域中运行的。当系统输入某些典型信号时,利用拉普拉斯变换中的终值定理就可以了解当时间 $t \rightarrow \infty$ 时系统的输出情况;但更重要的是,需要了解加入输入信号后其输出随时间变化的情况,我们希望系统响应是稳、准、快。另外,我们也希望从动力学的观点来分析研究各类系统随时间变化的运动规律。以上就是控制系统时域分析所要解决的问题。

时域分析法是根据系统的微分方程(或传递函数),以拉普拉斯变换作为数学工具,对给定输入信号求控制系统的时间响应。然后,通过响应来评价系统的性能。在控制理论发展初期,时域分析只限于阶次较低的简单系统。随着计算机技术的不断发展,目前很多复杂系统都可以在时域直接分析,使时域分析法在现代控制理论中得到了广泛应用。

3.1 线性定常系统的时域响应

对单输入单输出 n 阶线性定常系统,可用一个 n 阶常系数线性微分方程来描述。即

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t) \\ = b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dr(t)}{dt} + b_m r(t) \end{aligned} \quad (3-1)$$

式中, $r(t)$ 为输入信号; $c(t)$ 为输出信号; $a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_m$ 是由系统本身结构和参数决定的系数。

系统在输入信号 $r(t)$ 作用下,输出 $c(t)$ 随时间变化的规律,即式(3-1)微分方程的解,就是系统的时域响应。

由线性微分方程理论知,方程式的解由两部分组成,即

$$c(t) = c_1(t) + c_2(t) \quad (3-2)$$

式中, $c_1(t)$ 对应齐次微分方程的通解; $c_2(t)$ 对应非齐次微分方程的一个特解。

齐次微分方程的通解 $c_1(t)$ 由相应的特征方程的特征根决定。特征方程为

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (3-3)$$

如果式(3-3)有 n 个不相等的特征根,即 p_1, p_2, \dots, p_n ,则齐次微分方程的通解为

$$c_1(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_n e^{p_n t} \quad (3-4)$$

式中, k_1, k_2, \dots, k_n 为由系统的结构、参数及初始条件决定的系数。

对于重根或共轭复根,其对应的响应为 $k_i t e^{p_i t}$ 或 $k_i e^{\alpha t} \cos(\omega_i t + \theta)$ 。

齐次微分方程的通解 $c_1(t)$ 与系统结构、参数及初始条件有关,而与输入信号无关,是系统响应的过渡过程分量,称为暂态响应或动态响应或自由分量。而非齐次微分方程的特解通常是系统的稳态解,它是在输入信号作用下系统的强迫分量,取决于系统结构、参数及输入信号的形式,称为稳态分量。

从系统时域响应的两部分看,稳态分量(特解)是系统在时间 $t \rightarrow \infty$ 时系统的输出,衡量其好坏是稳态性能指标——稳态误差。系统响应的暂态分量是指从 $t=0$ 开始到进入稳态之前的这一段过程,采用动态性能指标(瞬态响应指标),如稳定性、快速性、平稳性等来衡量。

3.2 控制系统时域响应的性能指标

评价一个系统的优劣,总是用一定的性能指标来衡量的。性能指标可以在时域里提出,也可以在频域里提出。时域内的指标比较直观,通常采用时域响应曲线上的一些特征点来衡量。显然,只有当控制系统稳定时,研究系统的性能指标才有意义。

3.2.1 稳态性能指标

稳态响应过程是时间 $t \rightarrow \infty$ 时系统的输出状态。采用稳态误差 e_{ss} 来衡量,其定义为:在输入信号作用下,当时间 $t \rightarrow \infty$ 时,系统输出响应的期望值与实际值之差。即

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)] \quad (3-5)$$

稳态误差 e_{ss} 反映控制系统复现或跟踪输入信号的能力或抗干扰能力。

3.2.2 动态性能指标

动态过程是系统从初始状态到接近稳态的响应过程,即过渡过程。为便于分析和比较,通常动态性能指标是以系统对单位阶跃输入的瞬态响应形式给出的,如图 3-1 所示。

(1) 上升时间 t_r : 从零时刻首次到达稳态值的时间,即阶跃响应曲线从 $t=0$ 开始第一次上升到稳态值所需要的时间。有些系统没有超调,理论上到达稳态值的时间需要无穷大,因此,也将上升时间 t_r 定义为响应曲线从稳态值的 10% 上升到稳态值的 90% 所需的时间。

(2) 峰值时间 t_p : 从零时刻到达峰值的时间,即阶跃响应曲线从 $t=0$ 开始上升到第一个峰值所需要的时间。

(3) 最大超调量 M_p : 阶跃响应曲线的最大峰值与稳态值的差与稳态值之比的百分数,即

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% \quad (3-6)$$

(4) 调整时间 t_s : 阶跃响应曲线进入允许的误差带 Δ (一般取稳态值附近 $\pm 5\%$ 或 $\pm 2\%$ 作为

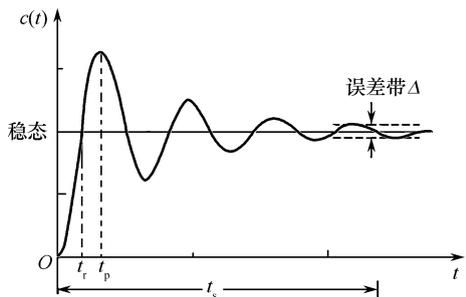


图 3-1 系统瞬态响应指标

误差带)并不再超出该误差带的最小时间,称为调整时间(或过渡过程时间或调节时间)。

(5) 振荡次数 N :在调整时间 t_s 内响应曲线振荡的次数 N 。

以上各性能指标中,上升时间 t_r 、峰值时间 t_p 和调整时间 t_s 反映系统的快速性;而最大超调量 M_p 和振荡次数 N 则反映系统的平稳性。

3.3 线性定常系统的稳定性

稳定性是控制系统的重要性能,是系统正常工作的首要条件。因此,分析系统的稳定性,研究系统稳定的条件,是控制理论的重要组成部分。控制理论对于判别线性定常系统是否稳定提供了多种方法,其中常用的有:求根法、代数判据(Routh 与 Hurwitz 判据)、Nyquist 稳定判据和李雅普诺夫稳定判据等。这些内容对于分析和设计系统都是十分重要的。

3.3.1 稳定性的概念

任何一个系统在受到扰动作用后,会偏离原来的平衡状态,产生初始偏差,而当扰动消除后,经过一段时间,这个系统又能逐渐回到原来的平衡状态,则称系统是稳定的。否则,称这个系统是不稳定的。上述定义表明,系统的稳定性反映在扰动消失后过渡过程的性质上。这样,在扰动消失的时刻,系统与平衡状态的偏差可以看作系统的初始偏差(初始状态)。因此,控制系统的稳定性也可定义为:若控制系统在足够小的初始偏差的作用下,其过渡过程随时间的推移逐渐衰减并趋于零,即具有恢复原平衡状态的能力,则称这个系统稳定。否则,称这个系统不稳定。

需要强调指出的是:

(1) 稳定性是控制系统自身的固有特性,它取决于系统本身的结构和参数,而与输入信号无关;对于纯线性系统来说,系统的稳定性与初始偏差也无关,如果系统是稳定的,就叫做大范围稳定的系统。但这种纯线性系统中并不存在,人们所研究的系统大多是经过“小偏差”线性化处理后得到的线性系统,因此用线性化方程来研究系统的稳定性时,就只限于讨论初始偏差不超过某一范围时的稳定性,称为“小偏差”稳定性。由于实际系统在发生等幅振荡时的幅值一般并不很大,因此,这种“小偏差”稳定性仍有一定的实际意义。以下讨论的问题都是线性定常系统的稳定性问题,这种稳定性当然是指大范围的稳定性,但当考虑其所对应的实际系统时,则要求初始偏差所引起的系统中诸信号的变化均不超出其线性化范围。

(2) 控制理论中所讨论的稳定性都是指自由响应(零输入响应)下的稳定性,即讨论系统输入为零,初始偏差不为零时的稳定性,也就是讨论自由响应是收敛的还是发散的。

3.3.2 线性定常系统稳定的充分必要条件

设线性系统具有一个平衡点。对该平衡点而言,当输入信号为零时,系统的输出信号也为零。当扰动信号作用于系统时,系统的输出就产生了偏差。如果扰动信号消失的时刻为 $t=0^-$,则此系统的输出 $c(0^-)$ 及其各阶导数 $c^{(i)}(0^-)$ ($i=1,2,\dots,n$)便是系统输出 $c(t)$ 的初始偏差(或初始状态),而输出 $c(t)$ 本身就是控制系统在初始偏差影响下的过渡过程。若系统稳定,则输出 $c(t)$ 就能以足够精确的程度恢复到原平衡工作点,即随着时间的推移, $c(t)$ 趋近于零;若系统不稳定,则输出 $c(t)$ 就不可能回到原平衡点。

通过以上的分析,可以求得线性定常系统稳定的充分必要条件。

设 n 阶线性定常系统的微分方程为

$$\begin{aligned}
 & a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t) \\
 & = b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dr(t)}{dt} + b_m r(t) \quad (m \leq n)
 \end{aligned} \tag{3-7}$$

对式(3-7)进行拉普拉斯变换,得

$$C(s) = \frac{M(s)}{D(s)} R(s) + \frac{N(s)}{D(s)} \tag{3-8}$$

式中, $D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$; $M(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m$; $N(s)$ 为与初始状态条件 $c^{(i)}(0^-)$ (其中 $i=0, 1, 2, \dots, n-1$) 有关的多项式。

为了研究系统在输入作用前的初始状态下的时间响应,可在式(3-8)中取 $R(s)=0$,得到在初始状态影响下系统的时间响应(即零输入响应)为

$$C(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

若 p_i 为系统特征方程 $D(s)=0$ 的根(即系统传递函数的极点, $i=1, 2, \dots, n$), p_i 可以为单极点、重极点、实极点或复极点。则系统输出的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}
 C(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^q (s - p_i) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)} \\
 &= \sum_{i=1}^q \frac{A_i}{s - p_i} + \sum_{k=1}^r \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2}
 \end{aligned}$$

式中, $q+2r=n$, A_i, B_k, C_k 为待定系数。

对上式进行拉普拉斯反变换,得系统的零输入响应为

$$c(t) = \sum_{i=1}^q A_i e^{p_i t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) + \sum_{k=1}^r \frac{C_k - B_k \zeta_k \omega_k}{\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}} e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) \tag{3-9}$$

由上式表明,若系统所有特征根 p_i 的实部均为负值,即

$$\operatorname{Re}[p_i] < 0$$

则零输入响应(暂态响应)最终将衰减到零,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$$

此时系统就是稳定的。反之,若特征根中有一个或多个根具有正实部时,则暂态响应将随时间的推移而发散,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \infty$$

这样的系统就是不稳定的。

若特征根中有一个或一个以上零实部根,而其余特征根具有负实部,则暂态响应趋于常数或趋于等幅振荡,系统为临界稳定。

上述结论对于任何初始状态(只要不超出系统的线性工作范围)都是成立的,而且当系统的特征根具有相同值时,也是成立的。可以看出,式(3-7)右端各项参数不影响系统的稳定性,因为它只反映了系统与外界作用的关系,而不影响系统本身固有的特性——稳定性。

综上所述,系统稳定的充分必要条件是系统特征根的实部均小于零,或系统的特征根均在根平面的左半平面。

根据稳定的充分必要条件判别系统的稳定性,要求出系统的全部特征根,但当系统阶数较

高时,求解特征方程将会遇到较大困难,计算工作将相当难。于是人们希望寻求一种不必直接求解出特征根,而间接判断系统稳定与否的方法,这样就产生了一系列稳定性判据,其中最主要的一个判据就是1884年由E. J. Routh提出的判据,称之为劳斯判据。1895年,A. Hurwitz又提出了根据特征方程系数来判别系统稳定性的另一方法,称为赫尔维茨判据。

3.3.3 劳斯判据(Routh 判据)

劳斯判据是一种代数判据,它不但能提供线性定常系统稳定性的信息,而且还能指出在 s 平面虚轴上和右半平面特征根的个数。

劳斯判据是基于系统特征方程式的根与系数的关系而建立的。设 n 阶系统的特征方程为

$$\begin{aligned} D(s) &= a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \\ &= a_0 (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) = 0 \end{aligned} \quad (3-10)$$

式中, p_1, p_2, \dots, p_n 为系统的特征根。

由根与系数的关系可求得

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_1}{a_0} &= -(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \\ \frac{a_2}{a_0} &= (p_1 p_2 + p_1 p_3 + \dots + p_{n-1} p_n) \\ \frac{a_3}{a_0} &= -(p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_4 + \dots + p_{n-2} p_{n-1} p_n) \\ &\vdots \\ \frac{a_n}{a_0} &= (-1)^n (p_1 p_2 \dots p_n) \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

从式(3-11)可知,欲使全部特征根 p_1, p_2, \dots, p_n 均具有负实部(即系统稳定),首先必须满足以下两个条件。

(1) 特征方程的各项系数 a_0, a_1, \dots, a_n 均不为零。因为若有一个系数为零,则必然出现实部为零或实部有正有负的特征根才能满足式(3-11),此时系统对应为临界稳定(根在虚轴上)或不稳定(根的实部为正)。

(2) 特征方程的各项系数的符号都相同,才能满足式(3-11)。

换言之,系统稳定的必要条件是特征方程的所有系数 a_0, a_1, \dots, a_n 均大于零,或同号且不缺项。

上述两个条件可归结为系统稳定的必要条件,所有系数均大于零,即 $a_i > 0$ 。

将式(3-10)的系数排成下面的行和列,即为劳斯阵列(劳斯表)

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	\dots
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	\dots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	\dots
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
s^2	f_1	f_2	\dots	\dots	\dots
s^1	g_1	\dots	\dots	\dots	\dots
s^0	h_1	\dots	\dots	\dots	\dots

表中各元素根据下列公式计算

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{-a_1}, \quad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{-a_1}, \quad b_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{-a_1}, \dots$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1}, \quad c_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{-b_1}, \dots$$

系数 b 的计算,一直进行到其余的 b 值都等于零时为止,用同样的方法计算 c, d, \dots, f, g, h 等各行的系数。这种过程一直进行到第 $n+1$ 行被算完为止。需要指出,在展开的阵列中,为了简化其后的数值计算,可用一个正数去除或乘某一整行,不会改变稳定性结论。

线性系统稳定的充分且必要条件是劳斯表中第一列所有元素均大于零。若劳斯表中第一列元素有正有负,则系统不稳定,且特征方程式(3-10)中实部为正的实根个数等于劳斯表中第一列的元素符号改变的次数。

【例 3-1】 已知三阶系统特征方程为

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

列劳斯表为

$$\begin{array}{cccc} s^3 & a_0 & a_2 & 0 \\ s^2 & a_1 & a_3 & 0 \\ s^1 & \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & 0 & \\ s^0 & a_3 & 0 & \end{array}$$

故得出三阶系统稳定的充分必要条件为各系数大于零,且 $a_1 a_2 > a_0 a_3$ 。

【例 3-2】 已知系统特征方程

$$s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 11s + 6 = 0$$

方程无缺项,且系数大于零,满足系统稳定的必要条件。

列劳斯表为

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 12 & 6 \\ s^3 & 6 & 11 & \\ s^2 & \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 11 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{61}{6} & 6 & \\ s^1 & \frac{455}{61} & & \\ s^0 & 6 & & \end{array}$$

劳斯表中第一列元素大于零,系统是稳定的,即所有特征根均在 s 平面的左半平面。

【例 3-3】 系统特征方程为

$$s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 5s + 6 = 0$$

各项系数均大于零。

列劳斯表为

$$\begin{array}{r}
 s^5 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \\
 s^4 \quad 3 \quad 1 \quad 6 \\
 s^3 \quad \frac{5}{3} \quad 3 \\
 s^2 \quad -\frac{22}{5} \quad 6 \quad (\text{改变符号一次}) \\
 s^2 \quad -11 \quad 15 \quad (\text{该行乘}\frac{5}{2}) \\
 s^1 \quad \frac{58}{11} \quad (\text{改变符号一次}) \\
 s^0 \quad 15
 \end{array}$$

劳斯表中第一列各元素符号不完全一致,系统不稳定。第一列元素符号改变两次,因此系统有两个右半平面的根。

【例 3-4】 系统特征方程

$$s^3 - 4s^2 + 6 = 0$$

它有一个系数为负的,由劳斯判据知系统不稳定。但究竟有几个右半平面的根,仍需列劳斯表为

$$\begin{array}{r}
 s^3 \quad 1 \quad 0 \\
 s^2 \quad -4 \quad 6 \\
 s^1 \quad 1.5 \\
 s^0 \quad 6
 \end{array}$$

劳斯表中第一列元素符号改变两次,系统有两个右半平面的根。

有两种特殊情况需要说明。

(1) 劳斯表中某一行的第一个元素为零,而该行其他元素并不为零,则在计算下一行的元素时,该元素必将趋于无穷大,以致劳斯表的计算无法进行。为了克服这一困难,可用一个无穷小正数 ϵ 来代替第一列的零元素,使劳斯表可继续下去。当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,若 ϵ 上面的元素和 ϵ 下面的元素符号相反,则表示第一列元素的符号改变了一次。

【例 3-5】 系统的特征方程为

$$s^4 + 3s^3 + s^2 + 3s + 1 = 0$$

所有系数均大于零,列劳斯表为

$$\begin{array}{r}
 s^4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\
 s^3 \quad 3 \quad 3 \\
 s^2 \quad 0 \approx \epsilon \quad 1 \\
 s^1 \quad 3 - \frac{3}{\epsilon} \\
 s^0 \quad 1
 \end{array}$$

考察劳斯表中第一列的元素, $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $3 - \frac{3}{\epsilon}$ 为一负数,因此,劳斯表中第一列元素的符号改变了两次,系统是不稳定的,且有两个右半平面的根。

(2) 劳斯表中某一行的元素全为零,则表示在 s 平面内存在一些大小相等、符号相反的实根或共轭虚根,系统是不稳定的。

为了将劳斯表继续列下去,则可用该零行的上一行的各元素构成辅助多项式 $P(s)$,并利用这个多项式的导数的各项系数来代替全零一行的各元素,使劳斯表可继续下去。

大小相等、符号相反的实根或共轭虚根可以由辅助方程 $P(s)=0$ 求出。

【例 3-6】 系统特征方程

$$s^3 + 10s^2 + 16s + 160 = 0$$

列劳斯表为

s^3	1	16	
s^2	10	160	辅助多项式 $P(s)=10s^2+160$
s^1	0	0	$P'(s)=20s+0$
s^1	20	0	
s^0	160		

劳斯表中第一列元素符号没有改变,系统没有右半平面的根,但由 $P(s)=0$ 求得

$$10s^2 + 160 = 0$$

$$s_{1,2} = \pm j4$$

即系统有一对共轭虚根,系统处于临界稳定,从工程角度来看,临界稳定属于不稳定系统。

【例 3-7】 系统的特征方程为

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 - 4s - 8 = 0$$

列劳斯表为

s^5	1	3	-4	
s^4	2	6	-8	$P(s)=2s^4+6s^2-8$
s^3	0	0	0	$P'(s)=8s^3+12s$
s^3	8	12	0	
s^2	3	-8		
s^1	33.3			
s^0	-8			

劳斯表中第一列元素符号改变一次,系统不稳定,且有一个右半平面的根,由 $P(s)=0$ 得

$$2s^4 + 6s^2 - 8 = 0$$

$$s_{1,2} = \pm 1, s_{3,4} = \pm j2$$

3.3.4 赫尔维茨判据(Hurwitz 判据)

该判据也是根据特征方程的系数来判别系统的稳定性。设系统的特征方程式为

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \tag{3-12}$$

以特征方程式的各项系数组成如下赫尔维茨行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots \\ & & & & & & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & a_n \end{vmatrix}$$

赫尔维茨判据指出,系统稳定的充分必要条件是在 $a_0 > 0$ 的情况下,上述行列式的各阶主子式 Δ_i 均大于零,即

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n = \Delta > 0$$

【例 3-8】系统的特征方程为

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0 \quad (a_0 > 0)$$

列出赫尔维茨行列式 Δ 为

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}$$

由赫尔维茨判据,该系统稳定的充分必要条件是

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$\Delta_3 = \Delta = a_3 \Delta_2 > 0$$

或写成系统稳定的充分必要条件为

$$a_0 > 0 \quad a_1 > 0 \quad a_2 > 0 \quad a_3 > 0$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

【例 3-9】二阶系统的特征方程为

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$

列出赫尔维茨行列式 Δ 为

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix}$$

由 Hurwitz 判据,系统稳定的充分必要条件为

$$a_0 > 0 \quad a_1 > 0 \quad a_1 a_2 > 0$$

即二阶系统稳定的充分必要条件是特征方程式的所有系数均大于零。

3.3.5 系统参数对稳定性的影响

应用代数判据不仅可以判断系统的稳定性,还可以用来分析系统参数对系统稳定性的影响。

【例 3-10】系统结构图如图 3-2 所示,试确定系统稳定时 K 的取值范围。

【解】系统的闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^3 + 6s^2 + 5s + K}$$

其特征方程式为

$$D(s) = s^3 + 6s^2 + 5s + K = 0$$

列劳斯表为

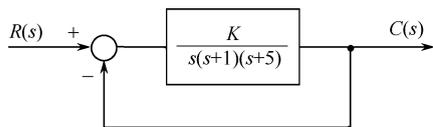


图 3-2 系统结构图

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 6 & K \\ s^1 & \frac{30-K}{6} & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

按劳斯判据,要使系统稳定,应有 $K > 0$,且 $30 - K > 0$,故系统稳定 K 的取值范围为 $0 < K < 30$ 。

【例 3-11】 系统结构图如图 3-3 所示,试分析参数 K_1, K_2, K_3 和 T 对系统稳定性的影响。

【解】 系统的闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_1 K_2 K_3}{T s^3 + s^2 + K_1 K_2 K_3}$$

特征方程为

$$D(s) = T s^3 + s^2 + K_1 K_2 K_3 = 0$$

由于特征方程缺项,由劳斯判据知,不论 K_1, K_2, K_3 和 T 取何值系统总是不稳定的,称为结构不稳定系统。欲使系统稳定,必须改变系统的结构。如在原系统的前向通道中引入一比例微分环节,如图 3-4 所示。变结构后系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_1 K_2 K_3 (\tau s + 1)}{s^2 (T s + 1) + K_1 K_2 K_3 (\tau s + 1)}$$

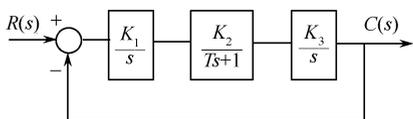


图 3-3 系统结构图

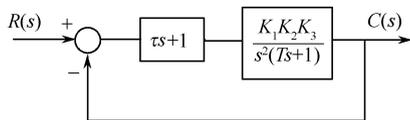


图 3-4 引入比例微分环节

特征方程为

$$D(s_1) = T s_1^3 + s_1^2 + K_1 K_2 K_3 \tau s_1 + K_1 K_2 K_3 = 0$$

列劳斯表为

$$\begin{array}{ccc} s^3 & T & K_1 K_2 K_3 \tau \\ s^2 & 1 & K_1 K_2 K_3 \\ s^1 & K_1 K_2 K_3 \tau - K_1 K_2 K_3 T & \\ s^0 & K_1 K_2 K_3 & \end{array}$$

系统稳定的充分必要条件为

$$T > 0, \tau > 0, K_1 K_2 K_3 > 0 \text{ 及 } \tau > T$$

即对于结构不稳定系统,改变系统结构后,只要适当选配参数就可使系统稳定。

3.3.6 相对稳定性和稳定裕量

劳斯判据或赫尔维茨判据可以判定系统稳定与不稳定,即判定系统的绝对稳定性。如果一个系统负实部的特征根非常靠近虚轴,尽管系统满足稳定条件,但动态过程将具有过大的超调量或过于缓慢的响应,甚至会由于系统内部参数变化,使特征根转移到 s 平面的右半平面,导致系统不稳定。为此,需研究系统的相对稳定性,即系统的特征根在 s 平面的左半平面且与虚轴有一定的距离,称之为稳定裕量。

为了能应用上述的代数判据,通常将 s 平面的虚轴左移一个距离 δ ,得新的复平面 s_1 ,即令 $s_1 = s + \delta$ 或 $s = s_1 - \delta$,得到以 s_1 为变量的新特征方程式 $D(s_1) = 0$,再利用代数判据判别新特征方

程式的稳定性,若新特征方程式的所有根均在 s_1 平面的左半平面,则说明原系统不但稳定,而且所有特征根均位于 $s=-\delta$ 直线的左侧, δ 称为系统的稳定裕量。

【例 3-12】 检验特征方程式

$$2s^3 + 10s^2 + 13s + 4 = 0$$

是否有根在 s 右半平面,以及有几个根在 $s=-1$ 直线的右边。

【解】 列劳斯表为

s^3	2	13
s^2	10	4
s^1	12.2	
s^0	4	

由劳斯判据知系统稳定,所有特征根均在 s 的左半平面。令 $s=s_1-1$ 代入 $D(s)$,得 s_1 的特征方程式为

$$D(s_1) = 2s_1^3 + 4s_1^2 - s_1 - 1 = 0$$

列劳斯表为

s_1^3	2	-1
s_1^2	4	-1
s_1^1	$-\frac{1}{2}$	
s_1^0	-1	

劳斯表中第一列元素符号改变一次,表示系统有一个根在 s_1 右半平面,也就是有一个根在 $s=-1$ 直线的右边(虚轴的左边),系统的稳定裕量不到 1。

3.4 系统的稳态误差

3.4.1 误差及稳态误差的定义

控制系统的稳态误差,是系统控制精度的一种度量,称为稳态性能指标。一个控制系统,只有在满足要求的控制精度前提下,才有实际工程意义。

系统的误差 $e(t)$ 一般定义为被控量的希望值与实际值之差。即

$$\text{误差 } e(t) = \text{被控量的希望值} - \text{被控量的实际值}$$

对于如图 3-5 所示的反馈控制系统,常用的误差定义有两种。

1. 输入端定义

把系统的输入信号 $r(t)$ 作为被控量的希望值,而把主反馈信号 $b(t)$ (通常是被控量的测量值)作为被控量的实际值,定义误差为

$$e(t) = r(t) - b(t) \tag{3-13}$$

这种定义下的误差在实际系统中是可以测量的,且具有一定的物理含义。通常该误差信号也称为控制系统的偏差信号。

2. 输出端定义

设被控量的希望值为 $c_r(t)$ (与给定信号 $r(t)$ 具有一定关系),被控量的实际值为 $c(t)$,定义误差

$$e'(t) = c_r(t) - c(t) \tag{3-14}$$

这种定义在性能指标中经常使用,但实际中有时无法测量,因而一般只有数学意义。

当图 3-5 中反馈为单位反馈时,即 $H(s)=1$ 时,上述两种定义可统一为

$$e(t) = e'(t) = r(t) - b(t) \quad (3-15)$$

对于非单位反馈系统,可等效变换为如图 3-6 所示的单位反馈控制系统。其中, $r'(t)$ 表示等效单位反馈系统的输入信号,也就是输出量的希望值 $c_r(t)$,从输出端定义的误差为

$$e'(t) = r'(t) - b(t) \quad (3-16)$$

而从输入端定义的误差为

$$e(t) = r(t) - b(t)$$

误差的拉普拉斯表达式为

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s) \quad (3-17)$$

则

$$\begin{aligned} \frac{1}{H(s)}E(s) &= \frac{1}{H(s)}R(s) - C(s) \\ &= R'(s) - C(s) = E'(s) \end{aligned}$$

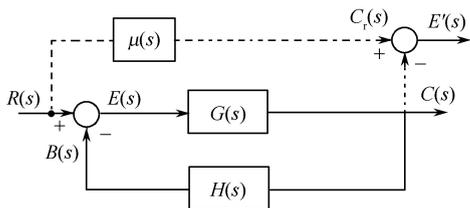


图 3-5 反馈控制系统

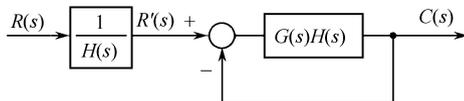


图 3-6 等效单位反馈控制系统

由此可见,对于非单位反馈控制系统,输入端定义的误差 $e(t)$ 可以直接 ($H(s)=1$) 或间接地表示输出端定义的误差 $e'(t)$ 。本书无特殊说明,均采用误差的输入端定义式。

误差响应 $e(t)$ 与系统输出响应 $c(t)$ 一样,也包含暂态分量和稳态分量两部分,对于一个稳定系统,暂态分量随着时间的推移逐渐消失,而我们主要关心的是控制系统平稳以后的误差,即系统误差响应的稳态分量——稳态误差,记为 e_{ss} 。

定义 系统的稳态误差为稳定系统误差响应 $e(t)$ 的终值。当时间 t 趋于无穷时, $e(t)$ 的极限存在,则稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (3-18)$$

3.4.2 稳态误差分析

根据误差和稳态误差的定义,系统误差 $e(t)$ 的像函数

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - G(s)H(s)E(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (3-19)$$

定义
$$\Phi_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad (3-20)$$

为系统对输入信号的误差传递函数。

由拉普拉斯变换的终值定理,系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (3-21)$$

代入 $E(s)$ 表达式得

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+G(s)H(s)} R(s) \quad (3-22)$$

从式(3-22)得出两点结论:

- (1) 稳态误差与系统输入信号 $r(t)$ 的形式有关;
- (2) 稳态误差与系统的结构及参数有关。

3.4.3 稳态误差的计算

对于线性系统,响应具有叠加性,不同输入信号作用于系统产生的误差等于每一个输入信号单独作用时产生的误差的叠加。对于如图 3-7 所示的系统,给定信号 $r(t)$ 和扰动信号 $n(t)$ 同时作用于系统。

- (1) 给定信号 $r(t)$ 单独作用下,误差 $e_r(t) = r(t) - b(t)$, 则

$$E_r(s) = R(s) - B(s) = R(s) - G_1(s)G_2(s)H(s)E_r(s)$$

$$E_r(s) = \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s) \quad (3-23)$$

稳态误差 e_{ssr} 为

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} E_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s) \quad (3-24)$$

- (2) 扰动信号单独作用下,误差 $e_n(t) = -b(t)$, 则

$$E_n(s) = -B(s) = -H(s)C(s)$$

$$= -H(s) \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

$$= -\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s) \quad (3-25)$$

稳态误差

$$e_{ssn}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} E_n(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s) \quad (3-26)$$

定义

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E_n(s)}{N(s)} = -\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

为系统对扰动信号的误差传递函数。

控制系统在给定信号 $r(t)$ 和扰动信号 $n(t)$ 同时作用下的稳态误差 e_{ss} 为

$$\begin{aligned} e_{ss} &= e_{ssr} + e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} E_r(s) + \lim_{s \rightarrow 0} E_n(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} [\Phi_{er} R(s) + \Phi_{en}(s) N(s)] \end{aligned} \quad (3-27)$$

【例 3-13】 系统结构图如图 3-8 所示,当输入 $r(t) = 4t$ 时,求系统的稳态误差 e_{ss} 。

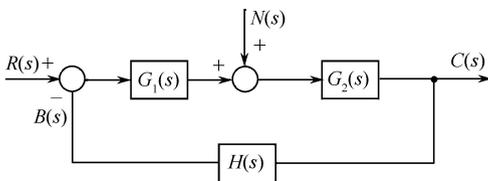


图 3-7 控制系统结构图

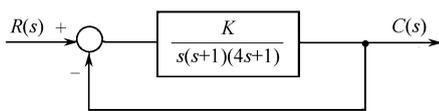


图 3-8 例 3-13 图

【解】 系统只有在稳定的条件下计算稳态误差才有意义,所以应先判别系统的稳定性。

系统的特征方程为

$$D(s) = 4s^3 + 5s^2 + s + K = 0$$

列劳斯表为

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 4 & 1 \\ s^2 & 5 & K \\ s^1 & \frac{5-4K}{5} & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

由劳斯判据知,系统稳定条件为 $0 < K < \frac{5}{4}$ 。

系统的误差函数为

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) = \frac{s(s+1)(4s+1)}{4s^3+5s^2+s+K} \cdot \frac{4}{s^2}$$

由终值定理求得稳态误差

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+1)(4s+1)}{4s^3+5s^2+s+K} \cdot \frac{4}{s^2} = \frac{4}{K}$$

计算表明,稳态误差的大小与系统的放大倍数 K 有关,即 K 越大,稳态误差 e_{ss} 越小。要减小稳态误差,则应增大倍数 K ,而从稳定性分析却得出,使系统稳定的 K 不能大于 $5/4$,表明系统的稳态精度和稳定性对放大倍数的要求常常是矛盾的。

3.4.4 应用静态误差系数计算给定信号作用下的稳态误差

从稳态误差的表达式可知,系统的稳态误差不仅与输入信号 $r(t)$ 的形式有关,而且与系统开环传递函数 $G(s)H(s)$ 有关。

1. 系统的类型

系统的开环传递函数 $G(s)H(s)$ 可表示为

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)\cdots(\tau_ms+1)}{s^\nu(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ns+1)} \quad (3-28)$$

式中, K 为开环增益(开环放大倍数); τ_j ($j=1, 2, \dots, m$) 和 T_i ($i=1, 2, \dots, n$) 为时间常数; ν 为积分环节个数(开环系统在坐标原点的重极点数)。

系统常按开环传递函数中所含有的积分环节个数 ν 来分类。把 $\nu=0, 1, 2, \dots$ 的系统,分别称为 0 型、I 型、II 型等系统。开环传递函数中的其他零、极点,对系统的类型没有影响。

典型输入信号作用下,系统的稳态误差可用误差系数表示。

2. 静态位置误差系数 K_p

当系统的输入为单位阶跃信号 $r(t)=1(t)$ 时,由式(3-22)得

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1+\lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} = \frac{1}{1+K_p}$$

式中, $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$, 定义为系统静态位置误差系数。

对于 0 型系统

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)\cdots(\tau_ms+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ns+1)} = K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+K}$$

对于 I 型或高于 I 型以上系统有

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^v (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} = \infty$$

$$e_{ss} = 0$$

由上面分析可以看出:

(1) K_p 的大小反映了系统在阶跃输入下消除误差的能力, K_p 越大, 稳态误差越小;

(2) 0 型系统对阶跃输入引起的稳态误差为一常值, 其大小与 K 有关, K 越大, e_{ss} 越小, 但总有差, 所以把 0 型系统常称为有差系统;

(3) 在阶跃输入时, 若要求系统稳态误差为零, 则系统至少为 I 型或高于 I 型的系统。

3. 静态速度误差系数 K_v

当系统的输入为单位斜坡信号时, $r(t) = t \cdot 1(t)$, 即 $R(s) = \frac{1}{s^2}$, 则由式(3-22)得

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} = \frac{1}{K_v}$$

式中, $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$, 定义为系统静态速度误差系数。

对于 0 型系统

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty$$

对于 I 型系统

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} = K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}$$

对于 II 型或 II 型以上系统

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^v (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} = \infty$$

$$e_{ss} = 0$$

由上述结果可得:

(1) K_v 的大小反映了系统跟踪斜坡输入信号的能力, K_v 越大, 系统稳态误差越小;

(2) 0 型系统在稳态时, 无法跟踪斜坡输入信号;

(3) I 型系统在稳态时, 输出与输入在速度上相等, 但有一个与 K 成反比的常值位置误差;

(4) II 型或 II 型以上系统在稳态时, 可完全跟踪斜坡信号。

4. 静态加速度误差系数 K_a

当系统输入为单位加速度信号时, 即 $r(t) = \frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$, $R(s) = \frac{1}{s^3}$, 则系统稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)} = \frac{1}{K_a}$$

式中, $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$, 定义为系统静态加速度误差系数。

对于 0 型系统, $K_a = 0, e_{ss} = \infty$;

对于 I 型系统, $K_a = 0, e_{ss} = \infty$;

对于 II 型系统, $K_a = K$, $e_{ss} = \frac{1}{K}$;

对于 III 型或 III 型以上系统, $K_a = \infty$, $e_{ss} = 0$ 。

上述分析表明:

- (1) K_a 的大小反映了系统跟踪加速度输入信号的能力, K_a 越大, 系统跟踪精度越高;
- (2) II 型以下的系统输出不能跟踪加速度输入信号, 在跟踪过程中误差越来越大, 稳态时达到无限大;
- (3) II 型系统能跟踪加速度输入, 但有一常值误差, 其大小与 K 成反比;
- (4) 要想准确跟踪加速度输入, 系统应为 III 型或高于 III 型的系统。

表 3-1 概括了 0 型、I 型和 II 型系统在各种输入作用下的稳态误差。在对角线以上, 稳态误差为 0; 在对角线以下, 稳态误差则为无穷大。

表 3-1 各种输入下各种类型系统的稳态误差

输入形式	稳态误差		
	0 型系统	I 型系统	II 型系统
单位阶跃	$\frac{1}{1+K_p}$	0	0
单位斜坡	∞	$\frac{1}{K_v}$	0
单位加速度	∞	∞	$\frac{1}{K_a}$

静态误差系数 K_p, K_v, K_a 反映了系统消除稳态误差的能力, 系统型号越高, 消除稳态误差的能力越强, 但仅通过增加积分环节提高型号, 易导致系统结构不稳定。

注意, 稳态误差系数法仅适用于给定信号 $1(t), t \cdot 1(t), \frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t), \dots, \frac{1}{n}t^n \cdot 1(t)$ 作用下求稳态误差。另外, 上述稳态误差中的 K 必须是系统的开环增益(或开环放大倍数)。

当系统输入信号为几种典型输入信号的线性组合时, 即

$$r(t) = R_0 \cdot 1(t) + R_1 \cdot t + \frac{1}{2}R_2 \cdot t^2$$

可利用叠加原理求出系统的总稳态误差, 得

$$e_{ss} = \frac{R_0}{1+K_p} + \frac{R_1}{K_v} + \frac{R_2}{K_a}$$

【例 3-14】 系统结构如图 3-9 所示, 求当输入信号 $r(t) = 2t + t^2$ 时系统的稳态误差 e_{ss} 。

【解】 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{20(s+1)}{s^2(0.1s+1)}$$

首先判别系统的稳定性。由开环传递函数知, 闭环特征方程为

$$D(s) = 0.1s^3 + s^2 + 20s + 20 = 0$$

根据劳斯判据知闭环系统稳定。

其次, 求稳态误差 e_{ss} , 因为系统为 II 型系统, 根据线性系统的齐次性和叠加性, 有

$$r_1(t) = 2t \text{ 时, } K_v = \infty \quad e_{ss1} = \frac{2}{K_v} = 0$$

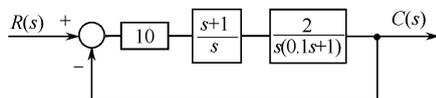


图 3-9 例 3-14 图

$$r_2(t) = t^2 \text{ 时, } K_a = 20 \quad e_{ss2} = \frac{2}{K_a} = 0.1$$

故系统的稳态误差 $e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2} = 0.1$ 。

3.4.5 扰动信号作用下的稳态误差与系统结构的关系

扰动信号 $n(t)$ 作用下的系统结构图如图 3-10 所示。扰动信号 $n(t)$ 作用下的误差函数为

$$E_n(s) = -\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

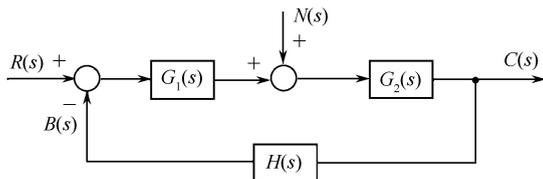


图 3-10 系统结构图

稳态误差为

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} E_n(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

若 $\lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)G_2(s)H(s) \gg 1$, 则上式可近似为

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-1}{G_1(s)}N(s)$$

由以上可得, 扰动信号作用下产生的稳态误差 e_{ssn} 除了与扰动信号的形式有关外, 还与扰动作用点之前(扰动点与误差点之间)的传递函数的结构及参数有关, 但与扰动作用点之后的传递函数无关。

例如, 若 $G_1(s) = K_1$, $G_2(s) = \frac{K_2}{s(Ts+1)}$, $H(s) = 1$, $N(s) = \frac{1}{s}$, 则稳态误差

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s) = -\frac{1}{K_1}$$

扰动作用点之前的增益 K_1 越大, 扰动产生的稳态误差越小, 而稳态误差与扰动作用点之后的增益 K_2 无关。

若 $G_1(s) = \frac{K_1}{s}$, $G_2(s) = \frac{K_2}{Ts+1}$, $H(s) = 1$, $N(s) = \frac{1}{s}$, 则扰动信号产生的稳态误差

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s) = 0$$

比较上述两例可以看出, 扰动信号作用下的稳态误差 e_{ssn} 与扰动信号作用点之后的积分环节无关, 而与误差信号到扰动点之间的前向通道中的积分环节有关, 要想消除稳态误差, 应在误差信号到扰动点之间的前向通道中增加积分环节。

3.4.6 改善系统稳态精度的途径

从上面稳态误差分析可知, 采用以下途径来改善系统的稳态精度。

(1) 提高系统的型号或增大系统的开环增益, 可以保证系统对给定信号的跟踪能力。但同时会带来系统稳定性变差, 甚至导致系统不稳定。

(2) 增大误差信号与扰动作用点之间前向通道的开环增益或积分环节的个数,可以降低扰动信号引起的稳态误差。但同样也有稳定性问题。

(3) 采用复合控制,即将反馈控制与扰动信号的前馈或与给定信号的顺馈相结合。关于这部分内容将在系统校正部分中介绍。

3.4.7 系统的动态误差系数

静态误差系数 K_p, K_v, K_a , 表示系统在阶跃信号、斜坡信号和加速度信号作用下,系统消除稳态误差的能力,但稳态误差相同的系统其误差随时间的变化常常不同。例如

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

$$G_2(s)H_2(s) = \frac{10}{s(10s+1)}$$

从静态误差系数来看,上述两系统均相同,稳态的角度看不出差异,但两个系统的时间常数相差较大、阻尼比有较大差别,系统的响应肯定不同,系统的误差响应也不同。另外,当输入信号为其他形式函数,静态误差系数也无法使用。为此,需要研究误差随时间变化的信息,即系统的动态误差系数。

对于误差传递函数 $\Phi_e(s)$, 在 $s=0$ 的邻域内展开成泰勒级数得

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

$$= \Phi_e(0) + \dot{\Phi}_e(0)s + \frac{1}{2!}\ddot{\Phi}_e(0)s^2 + \dots + \frac{1}{l!}\Phi_e^{(l)}(0)s^l + \dots \quad (3-29)$$

具体求法为将分子、分母按升幂排列,然后按多项式长除。

误差信号可表示为

$$E(s) = \Phi_e(0)R(s) + \dot{\Phi}_e(0)sR(s) + \frac{1}{2!}\ddot{\Phi}_e(0)s^2R(s) + \dots + \frac{1}{l!}\Phi_e^{(l)}(0)s^lR(s) + \dots \quad (3-30)$$

将式(3-30)进行拉普拉斯反变换,得

$$e(t) = \Phi_e(0)r(t) + \dot{\Phi}_e(0)\dot{r}(t) + \frac{1}{2!}\ddot{\Phi}_e(0)\ddot{r}(t) + \dots + \frac{1}{l!}\Phi_e^{(l)}(0)r^{(l)}(t) + \dots$$

$$= \frac{1}{K_0}r(t) + \frac{1}{K_1}\dot{r}(t) + \frac{1}{K_2}\ddot{r}(t) + \dots + \frac{1}{K_l}r^{(l)}(t) + \dots \quad (3-31)$$

$r(t)$ 看成广义位置信号,则 $\dot{r}(t)$ 为广义速度信号, $\ddot{r}(t)$ 为广义加速度信号……,于是可定义式(3-31)中的 K_0 为动态位置误差系数; K_1 为动态速度误差系数; K_2 为动态加速度误差系数等。它们可以完整描述系统稳态误差 $e_{ss}(t)$ 随时间变化的规律,动态误差系数越大,系统动态误差越小。

【例 3-15】 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(2s+1)}$$

试求:(1) 输入为 $r(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ 时系统的动态误差;

(2) 输入为 $r(t) = \sin 2t$ 时的稳态误差。

【解】 系统的误差传递函数为

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{10+s+2s^2} = 0.1s + 0.19s^2 - 0.039s^3 + \dots$$

则动态误差系数为