第1章　函数模型

音乐能激发或抚慰情怀，绘画使人赏心悦目，诗歌能动人心弦，哲学使人获得智慧，科学可改善物质生活，但数学能给予以上的一切。

——克莱因

学习目标

1. 了解数学对人类的影响。
2. 了解学习微积分的作用。
3. 领会函数概念和特性。
4. 领会复合函数及分段函数。
5. 通过生活实例，建立函数模型。

教学提示

数学对人类的影响很多，绝大部分发挥了数学工具性的作用，本章重点讲述数学对人的素质方面的影响。学生在学习微积分时只知道使用微积分，本章让学生知道为什么学习微积分。学生通过学习函数概念，重新温习函数及基本初等函数的特性，应深入领会函数思想、复合函数、分段函数。由于微积分研究的对象就是函数，所以，对函数思想的领会程度直接影响着微积分的学习。

1.1　数学对人的影响

有很多学生高中毕业了，但并不知道为什么从小学到高中世界各地都要学数学，如若问他们，他们会思考一下并回答因为中考、高考要考。数学教育的重要性不仅仅体现在数学知识与方法的广泛应用上，更重要的是它对人的素质的影响，其价值远非一般专业技术教育能比的。

按传统分类，数学隶属于自然科学，与物理、化学等并列。20 世纪 80 年代，兴起了一种新的分类法，认为数学因具有不同于其他自然科学的独立性，而应独立成为一类。新的分类方法同时把思维科学也独立起来，从而把数学看做与自然科学、社会科学、思维科学并列的第四大类。

1. 数学的作用

1）数学是人们认识客观世界数量规律的法宝

数学的抽象性和严谨性为我们在更深的层次上认识世界提供了重要途径。我国数学家华罗庚曾这样描述数学应用的普遍性："宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，日用之繁，无处不用数学。"数学应用的广泛性及其重要性是无可争议的。

2）数学是人们改造客观世界的重要工具

首先，工程技术离不开数学这个重要工具。自古以来，数学就是土地丈量、手工业制作的重要工具。如今高科技开发，更需要数学和计算机，进行周密的理论分析和正确的数值计算。

其次，生产、管理和经济的竞争都需要数学这个重要工具。

3）数学在提高人们的文化素质方面起着十分重要的作用

人们通晓数学，不仅作为工具来用，更重要的是用来训练受教育者的思维能力，培养他们客观地、合乎逻辑地分析问题与解决问题的能力。

下面的两个事实更能说明这个问题。

① 英国大学中律师专业的学生规定要学习许多数学课程。

② 美国西点军校也开设了较多的数学课程。

2. 数学教育对人的素质的影响

1）数学知识的起点——概念的抽象

受过良好数学教育的人，善于抓住事物的本质，做事简练、不拖泥带水，具有统一处理一类问题的能力，具有创新的胆略和勇气。

2）数学理论的形成过程——推理的严密性

数学教育使人具有做事思路开阔、举一反三的类比与创新能力；具有化繁为简、分解困难的归纳能力；具有思维严谨、思考周密、结果清晰、层次分明、有条理、无漏洞的组织管理能力。

3）数学中得到的结论——结论的确定性

数学教育能使人做事严肃认真，做事、做人目标明确，前后一致。

3. 数学教育本质上是素质教育

人的素质可以划分为三个方面：科学素质、文化素质、艺术素质。科学素质的核心是

数学素质。数学除了具有工具性以外，数学教育更重要的价值和目的是培养以思考力为核心的数学素质。

数学教育不可替代，由于数学的抽象性等原因，数学学习是困难的，但纵观目前开设的各种课程，没有一门能替代，即使所学数学知识已经淡忘，这些素质依然不会消失，并始终发挥作用。知识靠记忆、方法靠操练、思想靠领悟。知识是短暂的、方法是长久的、思想是永恒的。知识、方法和思想的关系，犹如鱼、渔和道的关系。给你一条鱼，可以应你一时之需；给你一种打鱼的方法，可以让你长期无虑；然而，给你一种创造打鱼方法的理念，你便可以应对各种不同环境、不同时代、不同品种的鱼，保你一世无忧。数学知识与思想能加强我们的逻辑推理能力，这个好处在离开学校到社会工作后，更能凸显出它的实用性及重要性。

数学能力的培养，不仅表现在对数学知识点的一般理解和良好记忆上，更重要的是依赖对数学思想方法的掌握和运用。若把数学知识点比喻为金子，那么数学思想方法就是“点金术”。数学方法以静识动、以直表曲、以反论正、以点知线，尽显神奇之威。

1.2　微积分对人类的影响

文艺复兴之后，资本主义开始发展并兴盛起来，家庭手工业作坊被工厂手工业生产所替代，并进而发展为机器大工业，贸易的发达及殖民地的出现，使航海业空前发展。这对运动和变化的研究十分必要，并成为自然科学的中心问题，因此，对数学也提出了新的要求：需要研究各种变化过程和各种变化着的量之间的依赖关系。变量数学的里程碑是解析几何的发现，解析几何的基本思想是在平面上引入坐标的概念，这样就对平面上的点和有序实数建立起了一一对应的关系，进而可以将一个代数方程与平面上的一条曲线对应起来，于是，几何问题便转化为代数问题，反过来又可以通过代数方法发现新的几何结论，解析几何是代数和几何相结合的产物，它将变量引入到数学中，使运动和变化的定量表示成为可能，由此产生了变量和函数的概念，变量数学的时期开始了。

变量数学发展的第二个里程碑是英国大科学家牛顿（Newton，Isaac，1642—1727）和德国数学家莱布尼兹（Leibniz，Gottfried Wilhelm，1646—1716），他们在 17 世纪后半叶分别独立地建立了微积分的知识体系。

微积分是微分学和积分学的总称，它的研究对象是函数，通过函数可以用数学方法对运动现象进行准确的描述。微积分学的研究工具是极限，是人类研究不断变化中的运动的重要手段，由于人类生理的原因，人类能够准确认识的对象只能是有限的、静止的、平直的、离散的，但现实中人们又无法避免无限的、运动的、弯曲的、连续的。极限思想为人类提供了一个人通过有限认识无限、通过直线认识曲线、通过常量认识变量的桥梁。微积分的研究内容包括函数的微分、积分、联系微分和积分的桥梁——微积分基本定理，微分

解决的是函数的局部性质，积分解决的是函数的整体性质，反映函数整体与局部关系的就是微积分基本定理。

微积分的发现是科学史上划时代的事件，在整个现代科学技术中的地位都是十分重要的，它也是继欧氏几何后，全部数学中的最大的一个创造。微积分及其中的变量、函数和极限等概念，运动、变化等思想，使辩证法渗入了全部数学，并使数学成为精确地表述自然科学和技术的规律及有效地解决问题的有力工具。微积分学极大地推动了数学的发展，同时也极大地促进了天文学、力学、物理学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学和社会科学各个分支的发展，并在这些学科中有越来越广泛的应用。

1.3 变量

1. 变量

案例 1.1 运行中的高铁的速度 v 。

案例 1.2 2016 年深圳超市某品牌的盐以单价 2 元出售，销售价格记为 P 。

定义 1.1 在某过程中数值保持不变的量称为常量，通常用字母 a、b、c 等表示；而数值变化的量称为变量，用字母 x、y、t 等表示。

案例 1.1 中的速度 v 是变量，案例 1.2 中的销售价格 P 是常量。

2. 区间

我们已经知道，实数与数轴上的点具有一一对应的关系，即任给一个实数，总能在数轴上找到唯一的点与之对应；反之，数轴上的任何一点，也必有唯一的实数与之对应。正是基于这样一一对应的关系，我们把一个实数 a 与数轴上与之对应的点 a 不加区别地看待。

在数学上，常用数轴上的区间表示一个变量的变化范围。设 a、b 是两个实数，且 $a<b$，则有表 1-1 所列的几种情形。

表 1-1

变化范围	区间表示	区间名称
满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 构成的集合	$[a, b]$	闭区间
满足 $a<x<b$ 的一切实数 x 构成的集合	(a, b)	开区间
满足 $a\leqslant x<b$ 的一切实数 x 构成的集合	$[a, b)$	半开半闭区间
满足 $a<x\leqslant b$ 的一切实数 x 构成的集合	$(a, b]$	半开半闭区间
满足 $x\leqslant b$，$x<b$ 的一切实数 x 构成的集合	$(-\infty, b];(-\infty, b)$	无穷区间
满足 $x\geqslant a$，$x>a$ 的一切实数 x 构成的集合	$[a,+\infty);(a,+\infty)$	
全体实数构成的集合 R	$(-\infty,+\infty)$	

注意：这里的“∞”（读作“无穷大”）只是引用的记号，不能作为数对待，+∞和−∞统一记为∞。

【数学文化】集合思想

人类在认识世界、解决实际问题中，总会将在某些方面具有共同特性的事物放在一起，把它们看做一个整体，进而对它们开展各方面的研究，从而得到一类事物的某些结论，这在数学中的体现就是大家熟悉的集合。集合思想贯穿于数学的各部分。

1.4　函数

1.4.1　函数概念

在同一过程中的几个变量常是相互关联的，某些变量之间可能存在着对应关系。

案例 1.3　已知一圆板的半径为 r 米，求其面积。

案例 1.4　深圳的房价多少钱一平方米？

显然，案例 1.3 中半径 r 与圆板面积之间存在着对应关系 $S=\pi r^2$ ，当半径 r 取定某一数值时，圆板面积也对应着一个确定的数值。圆板面积随半径 r 的变化而变化。看到案例 1.4 马上会想到此题有问题，因为大家都知道深圳不同的地区在不同的时期房价是不同的，也就是说，深圳的房价是随着地区不同而变化的，同样也随着时间的不同在变化着。

总结以上两个案例会发现，两个变量之间存在着一种对应关系。我们将这种对应关系称之为**函数**。下面给出函数的确切定义。

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 在允许取值范围内的每一个值，变量 y 按照某一对应法则 f ，都有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为

$$y=f(x)$$

其中， x 为自变量， y 为因变量， f 为对应法则。 x 的取值范围叫做函数的定义域， y 的取值范围叫做函数的值域。

$\boxed{\text{注意：}}$ 理解函数的概念。

函数本质上是描述变量和变量之间的变化规律， $x \xrightarrow{\text{信息输入}} \boxed{f} \xrightarrow{\text{信息输出}} y=f(x)$ ，某种信息输入到函数机器 $\boldsymbol{f}$ 后转变为另外一种信息。

$\boxed{\text{注意：}}$ $\boldsymbol{f}$ 和 $f(x)$ 之间的区别和联系如下。

$\boldsymbol{f}$ 代表函数 $y=f(x)$ 的对应关系， $f(x)$ 代表函数 $y=f(x)$ 的函数值，习惯上 $\boldsymbol{f}$ 和 $f(x)$ 都称为函数，因此，有时也把表示因变量的字母和表示函数的字母写成相同的，如 $y=y(x)$， $s=s(t)$ 。

【思考题】你能否列举出生活中 2 个函数的实例？

1.4.2　函数的两个要素

函数是由定义域与对应法则所决定的，因此，对于两个函数而言，当且仅当它们的定

义域和对应法则都分别相同时，它们才表示同一个函数，而与自变量及因变量用什么字母表示无关，例如，如果没有特别说明，函数$s=t^2$和$y=x^2$表示同一个函数，因为它们的定义域都是（–∞，+∞），而对应法则都表示“函数的因变量等于自变量的平方”。

在实际问题中，函数的定义域是由问题的实际意义来确定的。例如，设x表示正方形的边长，S 表示正方形的面积，则有$S=x^2$，显然，此时函数$S=x^2$的定义域为$[0,+\infty)$。一般情况下，不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，这时函数的定义域就是使算式有意义的自变量的取值范围。例如，函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域为$(-1,1)$。一般情况下可通过以下关系式确定。

（1）分母不为零；

（2）$\sqrt[2n]{f(x)}$（n为正整数）中的函数$f(x)$满足$f(x)\geqslant 0$；

（3）$\ln f(x)$中的函数$f(x)$满足$f(x)>0$；

（4）$\arcsin f(x)$和$\arccos f(x)$中的函数$f(x)$满足$|f(x)|\leqslant 1$。

例 1. 1 求函数$f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}$的定义域。

解 要使函数有意义，必须有$3+2x-x^2\geqslant 0$成立，

解此不等式组得$-1\leqslant x\leqslant 3$，即$[-1,3]$，故所求函数定义域为$[-1,3]$。

例 1. 2 求下列函数定义域。

（1）$y=\dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}$，（2）$y=\arccos\dfrac{x-2}{5}$。

解 （1）要使函数有意义，必须同时满足$1-x>0$和$1-x^2>0$成立，解此不等式组得$-1<x<1$，即$(-1,1)$，故所求函数定义域为$(-1,1)$。

（2）要使函数有意义，必须满足$\left|\dfrac{x-2}{5}\right|\leqslant 1\Rightarrow|x-2|\leqslant 5\Rightarrow -5\leqslant x-2\leqslant 5$成立，解此不等式组得$-3\leqslant x\leqslant 7$，即$[-3,7]$，故所求函数定义域为$[-3,7]$。

例 1. 3 判断函数$y=\ln x^2$与$y=2\ln x$是否相同。

解 由于$y=\ln x^2$的定义域为不为零的一切实数，而$y=2\ln x$的定义域为$x>0$，所以这两个函数不是同一函数。

【思考题】你能总结出判断两个函数是否相同的步骤吗？

1.4.3 函数的表示方法

函数$f(x)$的具体表达方式视实际问题而不同，通常有解析法（又称公式法）、表格法和图示法。

1. 解析法

用一个（或几个）数学式子表示因变量与自变量的函数关系的方法称为解析法。前面

所列举的函数大都是用解析法表示的。解析法是函数的精确描述，便于对函数进行理论分析和研究，但不够直观，而且有些实际问题中的函数关系是难以用解析法来表示的。一个函数的解析法可能不唯一，如绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$ 也可以表示为 $y=\sqrt{x^2}$ 。

2. 表格法

将自变量的取值与对应的函数值列成表格表示函数的方法称为表格法，如大家熟悉的平方表、平方根表、三角函数表、对数表等就是用表格的形式表示的函数。这种方法简单明了，便于应用，但表中所列的数值不一定完全，一般不能完整地表示函数，也不够直观，不便于进行理论分析。

3. 图示法

用图形来表示自变量与因变量的对应关系的方法称为图示法，如图 1-1 所示，用图像来研究函数不仅直观性强，还便于观察函数的变化趋势。但由图形往往得不到准确的函数值和不便于进行精确地理论分析。

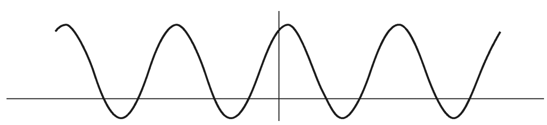


图 1-1

1.4.4　函数的特性

1. 奇偶性

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对定义域内的任何 x 值，总有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；而对于定义域内的 x 值，总有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数。

偶函数的图形关于 y 轴对称（图 1-2），奇函数的图形关于原点对称（图 1-3）。

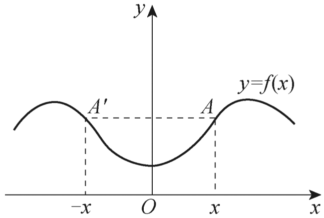


图 1-2

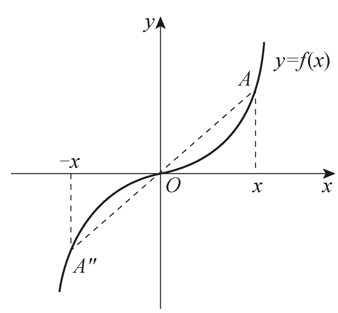


图 1-3

2. 周期性

定义 1.4 如果存在一个不为零的常数 l，对于函数 $f(x)$ 的定义域内的一切 x 值，总有 $f(x+l)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，l 称为函数 $f(x)$ 的一个周期。对于周期函数 $f(x)$，这样的 l 不是唯一的，如果 $f(x)$ 存在最小正周期，通常也把最小正周期简称为周期。

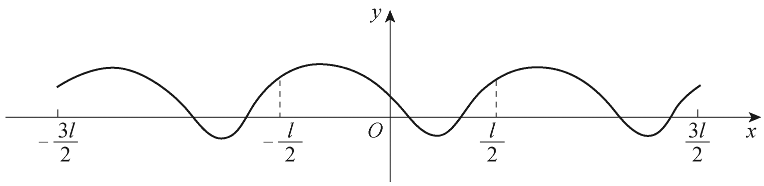


图 1-4

如图 1-4 所示，周期为 l 的周期函数在定义域内的每个长度为 l 的区间上，函数图形有相同的形状。

3. 单调性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 与 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加（或递增），这时，区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调增加区间；而如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 与 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内单调减少（或递减），这时，区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调减少区间。函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加或单调减少，则统称为函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调，区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调区间；如果这里所说的区间 I 恰好是函数的定义域，则称函数 $f(x)$ 为单调函数。

从几何上看，函数单调增加就是当自变量 x 从左向右变化时，函数图形是上升的曲线（图 1-5），而函数单调减少就是当自变量 x 从左向右变化时，函数图形是下降的曲线（图 1-6）。

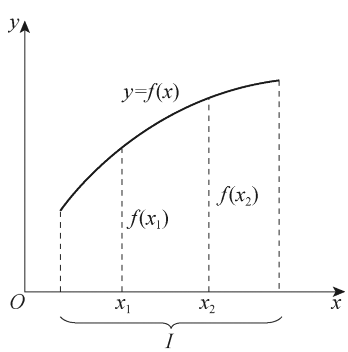


图 1-5

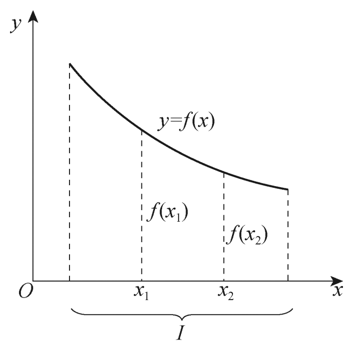


图 1-6

4. 有界性

定义 1.6 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在一个正数 M，当对于区间 I 上的任

意x值，总有$|f(x)| \leqslant M$时，则称函数$f(x)$在区间I上有界，如果这样的正数M不存在，则称$f(x)$在区间I上无界。

值得注意的是，有的函数在定义域的某一部分有界，而在另一部分无界。例如，$y=x^3$在区间[–1，1]上是有界的，但在定义域（–∞，+∞）上是无界的。如果函数在其整个定义域上有界，则称其为有界函数，如$y=\sin x$，$y=\cos x$。

【思考题】你能举出 1 个函数，使其同时具有函数的 4 个特性吗？

【能力训练 1. 1】

1. 求下列函数的定义域。

（1）$f(x)=\sqrt{4-x^2}$；　（2）$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$；　（3）$f(x)=x-\sqrt{x^2-1}$；

（4）$f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$；　（5）$f(x)=\sqrt{\ln(x-1)}$；　（6）$f(x)=\dfrac{\ln(x+5)}{x^2-1}$。

2. 已知　$f(x-1)=x^2-1$，求$f(x)=$（　　）。

3. 判断下列各对函数是否表示同一函数，为什么？

（1）$f(x)=\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}$，$g(x)=x+3$

（2）$f(x)=\sqrt{x^2}$，　$g(x)=|x|$；

（3）$f(x)=\ln(x+2)^2$，$g(x)=2\ln(x+2)$。

4. 若$f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求函数$f(x)$。

5. 设$f(x)=x^2+ax+b$且$f(-3)=f(2)=0$，求$f(x)$。

【数学文化】类分思想（并集思想）

生活中经常会遇到很复杂的问题，可将问题所涉及的对象的全体划分成若干两两不相交的部分，对每一小部分进行研究和论证，最终得到整体复杂问题的解决方案，这就是类分思想，也称为逻辑划分思想。从集合论的观点看，类分思想就是将问题所研究的对象的整体记为一个集合，将该集合划分为若干子集，对每个子集进行研究和论证，从而该集合的问题得以解决，因此，又称为并集思想。常用的分类讨论、穷举法等均是这种思想的具体体现，解决问题的思想就是大化小、整体化部分、一般化特殊。

1.5　基本初等函数

1.5.1　基本初等函数

我们将下面五类函数称为基本初等函数。

（1）幂函数：$y = x^{\alpha}$（α 为实数）.

（2）指数函数：$y = a^{x}$（$a > 0, a \neq 1$）；特别，$y = \mathrm{e}^{x}$.

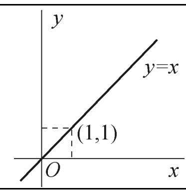
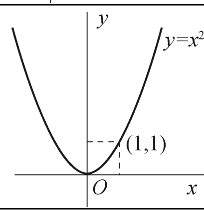
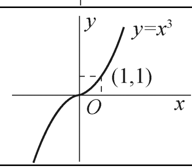
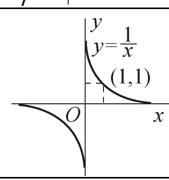
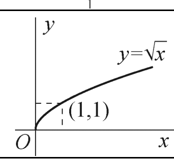
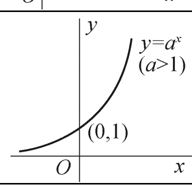
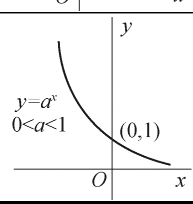
（3）对数函数：$y = \log_{a} x$（$a > 0, a \neq 1$）；特别的，$y = \ln x$.

（4）三角函数：$y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$，$y = \sec x$，$y = \csc x$.

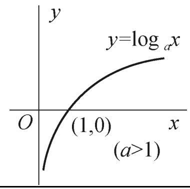
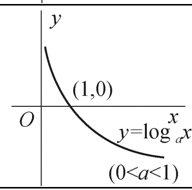
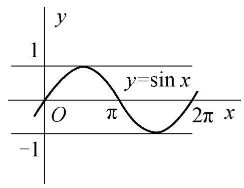
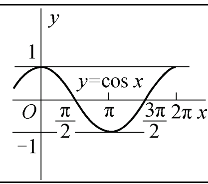
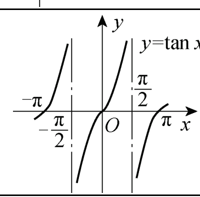
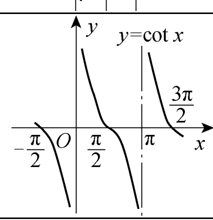
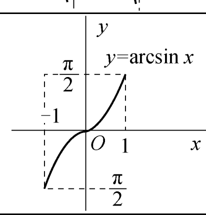
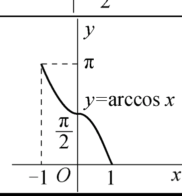
（5）反三角函数：$y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$，$y = \operatorname{arc}\cot x$.

表 1-2 中列举了中学数学课程中所学到的一些基本初等函数及其图形和基本性态。

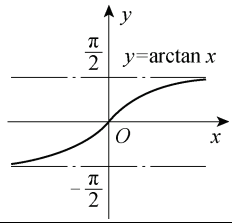
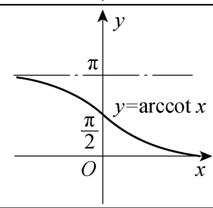
表 1-2

函　数		定义域与值域	图　像	特　性
幂函数 $y = x^{\alpha}$	$y = x$ （α=1）	$x \in$（$-\infty$，$+\infty$） $y \in$（$-\infty$，$+\infty$）		奇函数 单调增加
	$y = x^{2}$ （α=2）	$x \in$（$-\infty$，$+\infty$） $y \in [0$，$+\infty$）		偶函数 在（$-\infty$，0）内单调减少 在（0，$+\infty$）内单调增加
	$y = x^{3}$ （α=3）	$x \in$（$-\infty$，$+\infty$） $y \in$（$-\infty$，$+\infty$）		奇函数 单调增加
	$y = x^{-1}$ （α=−1）	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty$ $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty$		奇函数 单调减少
	$y = x^{\frac{1}{2}}$ （α=$\frac{1}{2}$）	$x \in [0$，$+\infty$） $y \in [0$，$+\infty$）		单调增加
指数函数 $y = a^{x}$ （$a > 0$，$a \neq 1$）		$x \in$（$-\infty$，$+\infty$） $y \in$（0，$+\infty$）		单调增加
				单调减少

（续表）

函　数		定义域与值域	图　像	特　性
对数函数 $y = \log_a \log_a x$ （$a > 0$，$a \neq 1$）		$x\in$（0，$+\infty$） $y\in$（$-\infty$，$+\infty$）		7 单调增加
				单调减少
三角函数	$y = \sin x$	$x\in$（$-\infty$，$+\infty$） $y\in[-1,\ 1]$		奇函数，周期 2π，有界； 在（$2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$2k\pi+\frac{\pi}{2}$）内单调增加， 在（$2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$2k\pi+\frac{3\pi}{2}$）内单调减少。 其中，$k\in\boldsymbol{Z}$
	$y = \cos x$	$x\in$（$-\infty$，$+\infty$） $y\in[-1,\ 1]$		偶函数，周期 2π， 有界； 在（$2k\pi$，$2k\pi+\pi$）内单调减少， 在（$2k\pi+\pi$，$2k\pi+2\pi$）内单调增加其中，$k\in\boldsymbol{Z}$
	$y = \tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in\boldsymbol{Z}$） $y\in$（$-\infty$，$+\infty$）		奇函数，周期 π， 在（$k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\pi+\frac{\pi}{2}$）内单调增加（$k\in\boldsymbol{Z}$）
	$y = \cot x$	$x\neq k\pi$（$k\in$Z） $y\in$（$-\infty$，$+\infty$）		奇函数，周期 π， 在（$k\pi$，$k\pi+\pi$）内单调减少（$k\in\boldsymbol{Z}$）
反三角函数	$y = \arcsin x$	$x\in[-1,\ 1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数 单调增加 有界
	$y = \arccos x$	$x\in[-1,\ 1]$ $y\in[0,\ \pi]$		单调减少 有界

（续表）

函　数		定义域与值域	图　像	特　性
反三角函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数 单调增加 有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in(0, \pi)$		单调减少 有界

在以后的高等数学学习中还会涉及以下两个三角函数，由于生活中不常用，在此仅做简单介绍。

正割函数：$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$。

余割函数：$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$。

【思考题】查找资料，画出正割和余割函数的图像，分析它们的函数特性。

基本初等函数有一些关系式，常用的关系如表 1-3 所示。

表 1-3

函数类	关系式
幂函数	$a^2-b^2=(a+b)(a-b),(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$
指数函数	$a^x\cdot a^y=a^{x+y},\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y},(a^x)^y=a^{xy},(ab)^y=a^y b^y,(a/b)^y=a^y/b^y$
对数函数	$\ln(xy)=\ln x+\ln y,\ln(x/y)=\ln x-\ln y,\ln\left(x^y\right)=y\ln x,\ \mathrm{e}^{\ln x}=x$
三角函数	$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\tan x=\sin x/\cos x,\cot x=\cos x/\sin x$ $\sin 2x=2\sin x\cos x,\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x,\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}$ $\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2},\sec x=\dfrac{1}{\cos x},\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$

1.5.2　反函数

定义 1.7　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 V，如果对于 V 中的每一个数 y，在 D 中只能找到唯一的数 x，使 $f(x)=y$，这样建立了一个以 y 为自变量，而以 x 为因变量的函数，记 $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$，则称这个函数为函数 $y=f(x)$ 的反函数。

在几何上，函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$ 的图形是相同的。但习惯上，自变量常用 x 表示，因变量用 y 表示。因此，通常函数 $y=\varphi(x)=f^{-1}(x)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，此时，二者的图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-7 所示。

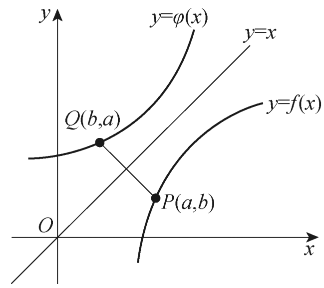


图 1-7

例 1.4　求函数 $y=3x-5$ 的反函数。

解　由 $y=3x-5$ 解出 x 得

$$x=\frac{1}{3}(y+5),$$

将 x，y 对换得 $y=\frac{1}{3}(x+5)$。

所以 $y=3x-5$ 的反函数为 $y=\frac{1}{3}(x+5)$。

还有许多反函数的例子。例如，$y=\log_a x$ 与 $y=a^x$ 互为反函数，而 $y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$ 在 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的反函数。

【能力训练 1.2】

1. 函数 $y=2x+\sqrt[3]{x}$ 的奇偶性是（　　）。

A. 奇函数　　　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　　　　D. 既是奇函数又是偶函数

2. 下列函数中偶函数是（　　）。

A. xe^{-x^2}　　　　B. $\dfrac{2\sin x}{x^2}$

C. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$　　　　D. $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

3. 函数 $f(x)=x\cos x$ 的图形是关于（　　）的。

A. 原点对称　　　　B. y 轴对称

C. x 轴对称　　　　D. 直线 $y=x$ 对称

4. 下列函数中为偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 内递减的是（　　）。

A. $y=x^2$　　　　B. $y=\dfrac{1}{x^2}$

C. $y=x^3$　　　　D. $y=\dfrac{1}{x}$

5. 在实数范围内，下列函数中有界函数是（　　）。

A. e^x　　　　B. $\ln x$

C. $1+\sin x$　　　　D. $\tan x$

【数学文化】求同思想（交集思想）

在生活中我们经常会采用从问题所涉及的双方或多方事物之间探求它们的共同特性、共同点，促使该问题在某个范围里得以解决的数学思想，这种思想就是求同思想。从集合的观点来看，集合 A 具有性质 1，集合 B 具有性质 2，则集合 A 与 B 的交集同时具有性质 1 和 2，因此，交集思想也称为求同思想，文字表述中经常会用“和”、“且”等词反映交集思想。

1.6 复合函数

案例 1.5 一圆形金属薄板，对它加热时，半径随时间发生变化，求此圆板面积。

仔细分析案例 1.5，要求的圆板的面积应由 $y=\pi r^2$ 得到，假设半径随时间发生变化的关系式为 $r=1+t^2$，这样就很容易想到将半径与时间的关系式代入圆板面积中的半径，可得表达式 $y=\pi(1+t^2)^2$，这个表达式显示了圆板面积与时间的关系，这种迭代函数称为复合函数。

定义 1.8 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，如果 $\varphi(x)$ 的值域包含在 $y=f(u)$ 的定义域内，则 y 是 x 的函数，记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

我们称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数。其中，u 称为中间变量。

例 1.5 求由下列函数所组成的复合函数，并确定复合函数的定义域。

（1）$y=u^8$，$u=3x+2$；　　（2）$y=\ln u$，$u=x^2-4$。

解 （1）$y=(3x+2)^8$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

（2）$y=\ln(x^2-4)$，$x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　。

例 1.6 设 $f(x)=2x^2+1$，$g(x)=\sin x$，求复合函数 $f\left[g(x)\right]$，$g[f(x)]$。

解 $f\left[g(x)\right]=2(\sin x)^2+1=2\sin^2 x+1$，$g\left[f(x)\right]=\sin(2x^2+1)$。

对于复合函数，我们不但要知道复合的过程，也要掌握复合函数的分解，因为人类对基本初等函数的研究很深，基本初等函数的各种运算人类都已掌握，而复合函数是由函数迭代而成的复杂函数，因此，若复合函数能分解成若干个基本初等函数或基本初等函数的四则运算，那么对复合函数的各种运算也能进行。

复合函数 $y=f\left[g(x)\right]$ 的分解步骤如下。

第一步：由外向里观察，把里面的整体用新变量 u 替代，确定外层函数 $y=f(u)$（y 是 u 的函数）。

第二步：确定内层函数 $u=g(x)$（u 是 x 的函数）。

第三步：复合函数 $y=f\left[g(x)\right]$ 分解为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$。

注意：分解原则：$y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 均为基本初等函数或基本初等函数的四则运算，若里层函数 $u=g(x)$ 不是基本初等函数，将继续分解。

例 1.7　分解下列复合函数。

（1）$y=\mathrm{e}^{-x^2+1}$；　（2）$y=\ln^2(1-x^2)$；　（3）$y=\arcsin\sqrt{x}$；

（4）$y=\sin^4 x$；　（5）$y=\ln(1+\sqrt{1+x^3})$；　（6）$y=\dfrac{1}{4x-5}$。

解　（1）函数 $y=\mathrm{e}^{-x^2+1}$ 可分解为 $y=\mathrm{e}^u, u=-x^2+1$；

（2）函数 $y=\ln^2(1-x^2)$ 可分解为 $y=u^2, u=\ln v, v=1-x^2$；

（3）函数 $y=\arcsin\sqrt{x}$ 可分解为 $y=\arcsin u$，$u=\sqrt{x}$；

（4）函数 $y=\sin^4 x=(\sin x)^4$ 可分解为 $y=u^4$，$u=\sin x$；

（5）函数 $y=\ln(1+\sqrt{1+x^3})$ 可分解为 $y=\ln u$，$u=1+\sqrt{v}$，$v=1+x^3$；

（6）函数 $y=\dfrac{1}{4x-5}$ 可分解为 $y=\dfrac{1}{u}$，$u=4x-5$。

【思考题】函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 能复合成函数 $y=f\left[g\left(x\right)\right]$ 的条件是什么？

1.7　初等函数

由基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除运算和复合运算得到的能用一个式子表示的函数，称为初等函数。

例如，$y=x+\sqrt{1-\sin x}$、$y=\mathrm{e}^{-x^2+1}$、$y=\dfrac{x+1}{\sin x^2}$ 都是初等函数。

【能力训练 1.3】

1. 下列各对函数中，互为反函数的是（　　）。

A. $y=\sin x, y=\cos x$　　B. $y=\mathrm{e}^x, y=\mathrm{e}^{-x}$

C. $y=\tan x$，$y=\cot x$　　D. $y=2x, y=\dfrac{1}{2}x$

2. 函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数是（　　）。

A. $y=x^2+1\ \ (-\infty,+\infty)$　　B. $y=x^2+1\ (x\geqslant 0)$

C. $y=x^2+1\ \ (x\leqslant 0)$　　D. 不存在

3. 下列函数中为基本初等函数的是（　　）。

A. $y=\begin{cases}4x, & x>0\\ -4x+1, & x<0\end{cases}$　　B. $y=x^2+\sin x$

C. $y=x$　　D. $y=\cos\sqrt{x}-\sin x$

4. 下列函数不是初等函数的是（　　）。

A. $y=\mathrm{e}^{x+1}-1$　　B. $y=\dfrac{x^2-1}{1-x}+2$

C. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$　　　　D. $y=\begin{cases} x^2 , & x\geqslant 0 \\ ax+b, & x<0 \end{cases}$

5. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}\quad(x\neq 0,1)$，则 $f[f(x)]=$________，$f[\dfrac{1}{f(x)}]=$________。

6. 设 $f(x)=3x^2+2x$，$\varphi(t)=\ln(1+t)$，则 $f[\varphi(t)]=$________，$\varphi[f(x)]=$________。

7. 指出下列函数是怎样复合而成的，即分解下列复合函数。

（1）$F(x)=(x-9)^5$；　（2）$F(x)=\sin\sqrt{x}$；　（3）$F(x)=\ln(x^2+1)$；

（4）$F(x)=\dfrac{1}{x+3}$；　（5）$F(x)=\cos x^4$；　（6）$F(x)=\ln^2 x$。

8. 将下列函数表示为 x 的函数。

（1）$y=\arcsin u$，$u=\mathrm{e}^v$，$v=-\sqrt{x}$；　（2）$y=\sqrt{1+u^2}$，$u=\sin v$，$v=\log_2 x$。

【数学文化】函数思想

函数思想反映的是变量与变量之间的变化规律，为人类研究运动和变化的现象打开了通向成功的大门。

早在 1692 年德国数学家莱布尼兹（G. W. Leibniz，1646—1716）就使用了“函数（Function）”一词。

到了 1734 年，瑞士数学家欧拉（L. Euler，1707—1783）较为模糊地提出了函数的概念，引入了函数符号 c，并认为函数是由一个公式确定的数量关系。

直到 1837 年，经过人类对事物的认识，德国数学家狄利克雷（P. G. L. Dirichlet，1805～1859）在权威刊物上提出了函数的定义，这个定义清晰地说明了函数是变量和变量之间的一种对应关系。

我国清代数学家李善兰（1811—1882）于 1859 年第一次将 function 引入中国，并翻译为函数。

到了 19 世纪 70 年代以后，随着集合理论的产生，函数的定义又有了更为严谨的描述。

在运用函数思维策略去解决问题时，科学家们经过总结发现这些问题都有着共同的属性，那就是定量和变量之间的联系。科学家们用简洁的公式描述了它的性质：“已知+未知+规定思想”。其中，“已知”代表着“定量”；“未知”代表着“变量”；“规定思想”代表着人们根据事物的规律，人为地构造的一种客观函数关系去解决问题的一种策略。

函数思想体现了“联系和变化”的辩证唯物主义观点。函数思想是构造一种“规定思想”——函数，进而利用“已知+未知+规定思想”的函数性质去解决问题，也就是说，函数思想就是运用运动变化的观点进行变换的思想。

人类在长期运用函数思想去解决问题的过程中发展，用函数解决问题后都有一个共同特点——函数总是用短小而有限的表达式去描述一个有着无限数据的事物。客观地讲，宇宙间的各种规律变化都离不开函数思想。

在解题过程中，善于挖掘题目中的隐含条件，构造出函数的解析式，并巧妙利用函数的性质，是很好地应用函数思想的关键。应对所给的问题进行观察、分析和判断，深入、充分、全面地研究量和量之间的联系，构造出函数模型。

有很多人有各种各样的密码需要设置，若只用一个密码，安全性又不高，现有一学生需设多个密码，他利用函数思想轻松地解决了这个问题。

第一步，他自己构造了函数——密码公式。为了便于记忆，密码公式是“521baobeiX”，意思是“我爱你，宝贝，还有 X”，其中“521baobei”是定量，“X”是变量，他主动去构造这个函数，通过这种“规定思想”创造出具有其个性的多个密码的设定。

第二部，应用。他的第一个账号密码是“521baobeiQQ”，记忆为“我爱你，宝贝 QQ”，他依次设置了很多不同的密码。

1.8　分段函数

案例 1.6　某市出租车起步价为 12 元（3km 以内），3km 以外按每千米 2.5 元的计算方式，试建立出租车费与行车距离之间的函数关系式。

解　设行车距离为 x km 时，其出租车费为 y 元，等待红灯时间不计费，根据题意可得

$$y=\begin{cases}12, & 0<x\leqslant 3\\ 12+2.5(x-3), & x>3\end{cases}$$

案例 1.7　税法规定，对适用照顾税率的企业，当月（或季末）应纳税所得额适用税率按下列方法确定：计税所得额在 10 万元（不含）以上的，所得税率为 33%；计税所得额在 10 万元（含）以下、3 万元（不含）以上的，所得税率减为 27%；计税所得额在 3 万元（含）以下的，所得税率减为 18%。试列出企业应纳税额与计税所得额间的函数关系式。

解　设企业计税所得额为 x，应纳税额为 y，则其函数关系为

$$y=\begin{cases}0.18x, & 0\leqslant x\leqslant 3\\ 0.27x, & 3<x\leqslant 10\\ 0.33x, & x>10\end{cases}$$

在生活中，经常会遇到因变量与自变量的对应关系不一定总是用一个数学式来表示，而在自变量的不同的取值范围，用不同的数学式来表示的情况，如案例 1.6 和案例 1.7，这类函数称为分段函数。一般来说，分段函数不是初等函数。很明显，在案例 1.6 和案例 1.7 中，y 与 x 间的函数关系均为分段函数关系。

例 1.8　$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$ 称为符号函数，作出其图像，并求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(5)$。

解　在绘制分段函数的图形时，先分区间画，每个区间都绘制完，整个分段函数的图像就完成了。

符号函数图形如图 1-8 所示，$f(-1)=-1$，$f(0)=0$，$f(5)=1$。

例 1.9 做出分段函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0\\ x^2-1, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的图像，并求 $f(-2)$，$f(5)$。

解 先画 $x>0$ 的图，是一条直线；再画 $x\leqslant 0$ 的部分，是一条抛物线，所以，函数图形如图 1-9 所示，$f(-2)=(-2)^2-1=3$，$f(5)=2\times5-1=9$。

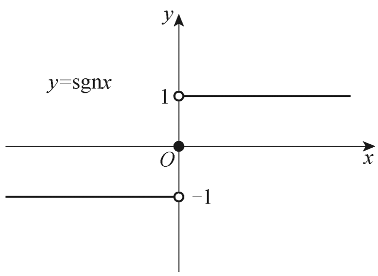


图 1-8

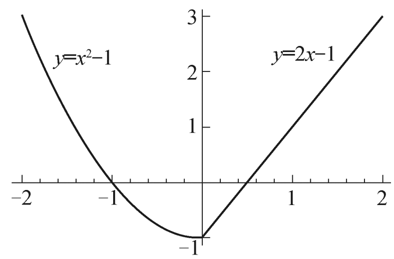


图 1-9

【思考题】分段函数的定义域如何确定？

【能力训练 1.4】

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0\\ 2x+5, & x>0\end{cases}$；求 $f(0),f(-2),f(2)$。

2. 已知 $f(x)=\begin{cases}-1, & x\leqslant -1\\ 2x+1, & -1<x<1\\ 6-x, & x\geqslant 1\end{cases}$；求 $f(-3),f(0),f(1)$，并作其图。

【数学文化】数形结合思想

“数”是抽象思维范畴，是人类的左半脑思维的产物，“形”则是形象思维范畴，是人类的右半脑思维的产物。自从笛卡儿把坐标和变量引入数学，数与形的结合与转化变得容易了，几何目标可以通过代数形式表达，反过来，抽象的代数语言通过直观的几何加以解释，是抽象问题生活化，这种数与形相互结合的思想就是数形结合思想。

数形结合思想是通过数与形间的对应与互助来研究和解决问题的，如函数就其表达式是抽象的、难以理解的，但有了其对应的图像，函数的各种性质一目了然。运用好数形结合思想能提高人类的逻辑思维与形象思维双向发展，不仅能有效地解决问题，还能够认识到问题的本质。

1.9 建立函数模型

1.9.1 数学建模

数学建模（Mathematical Modeling）就是运用数学知识去解决实际问题，即用数学的语

言、方法去近似地刻画实际问题。这种刻画的数学表述就是一个数学模型（Mathematical Model），它可以是数学公式、图形或算法等。建立数学模型的过程就是数学建模。

数学建模实质：数学模型是对现实世界的特定对象，为了一个特定的目的，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到一个数学结构。

1.9.2　数学建模步骤

建立数学模型没有固定的模式，通常与实际问题的性质和建模目的相关，一般情况下可通过以下几步完成。

第一步：模型准备。

为了对问题的实际背景和内在机理有更深的了解，应在建模前对问题进行深入调查和研究，掌握与问题相关的资料，并明确所解决问题的目的，搞清实际对象的特征，按解决问题的目的和要求合理地收集数据。

都是解决实际问题，有很多同学会问：数学建模与我们高中前所学的解应用题有什么不同呢？以前我们在解应用题时，问题的条件和要解决问题的目的都已明确，而且正好是我们当时所学知识的应用；而数学建模所解决的问题中条件和解决的目的没有，由于影响因素较多，所以会多种多样。此外，数学建模使用的方法多样，无论以前学的知识还是现在学的知识，只要是正确的方法即可，由于问题的条件和解决目的的差异，所以数学建模没有唯一正确的答案，也就是说，数学建模是开放地解应用题。

第二步：模型假设。

以前在解应用题时，经常会说“在理想状态下”，也就是很多与解题无关的因素是不考虑的。数学建模所解决的问题都是现实问题，现实问题错综复杂，若不经过适当地简化假设，就很难转化为数学问题，因此要建立一个数学模型没有必要对现实问题面面俱到，简化掉那些与建立模型无关或关系不大的因素，当然，对问题的抽象、简化也不是无条件的，假设条件要符合情理。

第三步：模型建立。

根据所做的假设，首先明确问题的常量、变量、已知量、未知量，搞清各种量之间的关系，按照解决问题的目的，建立相应的数学结构。

第四步：模型求解。

第五步：模型检验。

结果能否解释实际问题，或用历史数据、实验数据、现场实测数据来检验结果是否正确，误差越小，建立的模型越成功，成功的模型可以广泛地推广应用，若误差较大，则需重新假设。

第六步：模型应用。

总体而言，数学建模的步骤如图 1-10 所示。

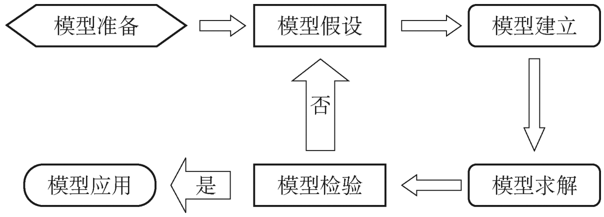


图 1-10

1.9.3　函数模型

函数关系是一种变量之间相互依存关系的数学模型，函数是解决很多实际问题的最关键一步，函数解决了一些简单的实际问题，通过建立函数模型可以初步了解建立数学建模的过程和方法，从而更好地解决实际问题。

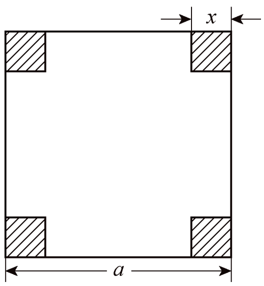


图 1-11

对实际问题建立函数关系的步骤如下。

第一步：变量说明——明确题中的常量与变量。

第二步：模型假设——确立实际问题中已知条件。

第三步：模型建立——确定要求的问题，即常量与变量之间的关系，建立函数模型。

例 1.10　在一块边长为 a 的正方形铁板的四个角上各截去一个边长为 x 的小正方形，如图 1-11 所示，然后把四边折起来做成一个无盖的水箱，试把水箱的容积表示成 x 的函数，并求其定义域。

解　假设在制作水箱过程中环境没有发生突变，设水箱的容积为 V，由题意知水箱底边长为 a–$2x$，高为 x，则容积为

$$V=(a-2x)^2\times x,$$

由实际意义知，截去的小正方形边长 x 必须满足 $0<x<\dfrac{a}{2}$，

所以所求函数的定义域为（0，$\dfrac{a}{2}$）。

例 1.11　欲造一个底半径和高相等的无盖的圆柱形水池，若侧壁的造价为 50 元/米 ^{2}，底面的造价为 30 元/米 ^{2}，试建立总造价与底半径的关系。

解　假设建造水池时在理想状态下，设水池的总造价为 R，由题意知水池底半径和高均为 r，则水池总造价为

$$R=30\pi r^2+50\times 2\pi r\times r=130\pi r^2$$

由实际意义知，水池底半径 r 满足 $r>0$ 即可。

例 1.12　小王需寄两篇稿件。按照邮局的规定，对国内的外埠平信，按邮件重量，每 20g 应付邮资 0.80 元，不足 20g 以 20g 计算；当信件的重量在 40g 以内，并超过 20g 时，应付邮资 1.60 元。现小王有重量 18g、32g 共两封信，他应付多少邮资？

解　假设小王选择题中邮局规定的形式邮寄信件，不选择各种快递形式。设邮资为 y 元，邮件重量 x g，则邮资和邮件重量之间的函数关系为

$$y=\begin{cases}0.8, & 0<x\leqslant 20\\ 1.6, & 20<x\leqslant 40\end{cases}$$

$$y(18)=0.8,\ y(32)=1.6\text{。}$$

因此，小王应向邮局支付 2.4 元。

例 1.13　旅客乘火车时，随身可免费携带的物品不超过 20kg，超过 20kg 而不超过 50kg 的部分，每千克收费 0.4 元，超过 50kg 的部分，每千克再加收 50%的费用，试建立旅客随身携带物品的重量和费用之间的函数关系。

解　假设任何情形都按题中规定收费，设 x 为旅客随身携带物品的重量，y 为旅客为携带物品所要花的费用，由实际意义知，该函数的定义域为[0，+∞)。

当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时，$y=0$；

当 $20<x\leqslant 50$ 时，$y=0.4（x-20）$；

当 $x>50$ 时，$y=0.4（50-20）+0.4（x-50）（1+50\%）$。

综合起来，这个函数关系可以用下式表示

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ 0.4x-8, & 20<x\leqslant 50\\ 0.6x-18, & x>50\end{cases}\text{。}$$

【思考题】总结函数思想的本质是描述什么。

【能力训练 1.5】

1. 靠墙围一个面积为 $128\,\text{m}^2$ 的矩形，建立所用材料长与矩形长或宽的函数关系。

2. 用 20m 长的材料倚墙围一个矩形，建立所围矩形面积与矩形的长或宽的函数关系。

3. 制作一个底面为正方形体、积为 $125\,\text{m}^3$ 的立方体容器（无盖）。已知底面单位造价是周围单位造价的 2 倍，建立总造价与底面正方形边长的函数关系。

4. A、B 两厂与码头均位于一东西向直线河流的同一侧，河岸边的 A 厂离码头 10km，B 厂在码头的正北方，离码头 4km，现两厂欲在 A 厂与码头间的河岸边建造一公用变电站。如果沿河架设电线，费用为 3 千元/千米，不沿河岸架设费用为 5 千元/千米。建立由变电站通往 A、B 两厂的架设电线的总费用与 A 厂到变电站之间距离的函数关系。

5. 设某企业在生产一种商品 x 件时的总收益为 $R(x)=100x-x^2$，总成本函数 $C(x)=200+50x+x^2$，在全部销售出去的情况下，建立企业获得利润与生产商品数量的函数关系。

6. 制作一个体积为 $54\pi\text{m}^3$ 封口的圆柱体容器，建立容器表面积与底面半径的函数关系。

【数学文化】模型思想

数学模型是实际问题的简化和抽象。模型思想则借助数学模型来解决和处理各种各样

的问题。模型思想的学习、掌握及运用一般按：模型的模仿——模型的转换——模型的构建三步实现，构建数学模型是一项既富有意义又富有挑战的工作，构建一个好的模型如同证明定理一样意义重大。

【综合能力训练 1】

1. 求下列函数的定义域。

（1） $f(x)=5x^2+\ln(4-x)$； （2） $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$； （3） $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$。

2. 在下列函数中，哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数？

（1） $y=x^3-x$； （2） $y=2^x+x^2$；

（3） $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$； （4） $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$。

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}x+2, & 0\leqslant x<1\\ 3^x, & 1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$；求 $f(0), f(1), f(2)$。

4. 设函数 $\varphi(x)=\begin{cases}3+x^4, & x\leqslant 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$，求 $\varphi(2)=$______，$\varphi(-2)=$______。

5. 求由下列函数复合而成的函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$。

（1） $f(x)=e^x, g(x)=x^2$； （2） $f(x)=2^x$， $g(x)=x^2$。

6. 指出下列复合函数的构成，即把下列函数分解成几个简单函数。

（1） $y=\ln(1-x^2)$； （2） $y=(5-4x)^7$； （3） $y=2^{1-3x}$；

（4） $y=\cos^2(1-2x)$； （5） $y=\sqrt{1+e^{4x}}$

7. 有一长为 a、宽为 b 的长方形铁片，从它的四个角截去相等的小方块，然后折起四边做成一个无盖的盒子（见图 1-12)，求它的容积与截去的小方块边长之间的函数关系。

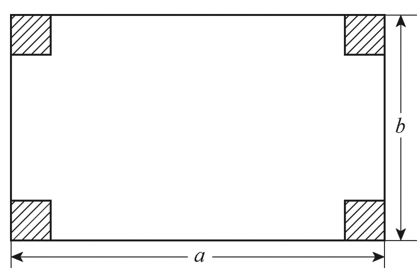


图 1-12

8. 某房地产公司有 50 套公寓要出租，当租金定为每月 180 元时，公寓会全部租出去。当租金每月增加 10 元时，就有一套公寓租不出去，而租出去的房子每月需花费 20 元的整修维护费。试建立出租公寓的收入与租金的函数关系。

能力训练与综合能力训练参考答案

【能力训练 1. 1】

1. （1）$[-2,2]$；（2）$(-\infty,-1)\cup(-\infty,-1)$；（3）$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$；（4）$x\neq 2$；（5）$[2,+\infty)$；（6）$[-5,+\infty)$且$x\neq\pm 1$。

2. x^2+2x。

3. （1）不同，定义域不同；（2）相同；（3）不同，定义域不同。

4. x^2-2。

5. x^2+x-6。

【能力训练 1. 2】

1. A；2. D；3. A；4. B；5. C。

【能力训练 1. 3】

1. D；2. C；3. C；4. D。

5. $\dfrac{x-1}{x}$，$\dfrac{1}{x}$。

6. $3\ln^2(1+t)+2\ln(1+t)$，$\ln(1+3x^2+2x)$。

7. （1）$y=u^5,u=x-9$；　（2）$y=\sin u,u=\sqrt{x}$；　（3）$y=\ln u,u=x^2+1$；
（4）$y=\dfrac{1}{u},u=x+3$；　（5）$y=\cos u,u=x^4$；　（6）$y=u^2,u=\ln x$。

8. （1）$y=\arcsin \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$；　（2）$y=\sqrt{1+\sin^2(\log_2 x)}$。

【能力训练 1. 4】

1. $f(0)=1$；$f(-2)=\mathrm{e}^{-2}$；$f(2)=9$。

2. $f(-3)=-1;f(0)=1;f(1)=5$。

【能力训练 1. 5】

1. $C=\dfrac{256}{x}+x=2y+\dfrac{128}{y}$。

2. $S=(20-2y)y=\dfrac{x(20-x)}{2}$。

3. $R=2x^2+\dfrac{500}{x}$。

4. $y=3x+5\sqrt{16+(10-x)^2}$。

5. $R(x)-C(x)=-2x^2+50x-200$。

6. $S=2\pi r^2+\dfrac{108}{r}$。

【综合能力训练 1】

1. （1）$[-\infty,4]$；　（2）$[2,+\infty)$且$x\neq 3$；　（3）$[-1,3]$。

2. 奇函数有（1）；偶函数有（3）；非奇非偶函数有（2）、（4）。

3. $f(2)=9$；$f(0)=2$；$f(1)=3$。

4. 4 ；19。

5.（1） $e^{x^2}, (e^x)^2$；（2） $2^{x^2}, (2^x)^2$。

6. （1） $y=\ln u, u=1-x^2$；　（2） $y=u^7, u=5-4x$；

（3） $y=2^u, u=1-3x$；　（4） $y=u^2, u=\cos v, v=1-2x$；

（5） $y=\sqrt{u}, u=1+e^v, v=4x$。

7. $V=(a-2x)(b-2x)x$。

8. $R=(x-20)\left(50-\dfrac{x-180}{10}\right)$。