

第 1 章 线性代数基础

1.1 从线性方程组谈起

中国古代重要的数学著作《孙子算经》中记载着一类著名的问题——“鸡兔同笼”。书中是这样叙述的：“今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡、兔各几何？”这四句话的意思是：有若干只鸡和兔同在一个笼子里，从上面数，有 35 个头；从下面数，有 94 只脚，求笼中各有几只鸡和兔？

利用初中学过的知识，通过假设有 x 只鸡， y 只兔，根据题意可以列出下面的一个二元一次方程组：

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases} \quad (1-1)$$

利用消元法，第二行减去第一行乘以 2，我们有

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2y = 24 \end{cases}$$

根据第 2 行可以得到 $y=12$ ，再代入第一个方程中，可得到 $x=23$ ，即笼中有 23 只鸡和 12 只兔。

通过以上例子，我们可以发现，在消元法求解的过程中，变量 x 和 y 没有参与运算，所以我们可以把上面的二元一次方程组写成下面这种简洁的数表形式：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 35 \\ 2 & 4 & 94 \end{pmatrix} \quad (1-2)$$

进一步，上述消元法的求解过程可以仅通过简单的行初等变换加以实现，过程如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 35 \\ 2 & 4 & 94 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行} \times (-2) + \text{第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 35 \\ 0 & 2 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行} \div 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 35 \\ 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行} \times (-1) + \text{第1行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 23 \\ 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

采用式 (1-2) 这种数表的紧凑表达形式，我们同样可以得到该方程组的解，而这个数表就是本书要研究的对象——矩阵。矩阵的正式定义如下：

定义 1.1 数域 F 上的 $m \times n$ 个数构成的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1-3)$$

称为 F 上 m 行、 n 列的矩阵, 记为 $A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$, 其中 $a_{ij} \in F, i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$, 称为 A 的第 i 行、第 j 列元素。这里, $m \times n$ 叫作矩阵 A 的大小或维数。为了方便, 在不引起混淆的情况下, 本书一般省略矩阵的维数下标, 即 $A = A_{m \times n}$ 。

注: ①若数集 F 含有数 1 且对四则运算封闭, 则称 F 为数域, 这里的数域一般是指实数域或复数域; ②数域 F 上的一切 m 行、 n 列的矩阵的集合记为 $F^{m \times n}$ 。

特别地, 当一个矩阵的所有元素全为零时, 称这样的矩阵为零矩阵。当行数和列数相同时, 称这样的矩阵为方阵, 且把行数(或列数)为 n 的方阵称为 n 阶方阵。

对于一个 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 我们称 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 为矩阵 A 的主对角线元素, 同时称 $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ 为矩阵 A 的副对角线元素。由此得到如下常用矩阵。

(1) 形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 即主对角线以下的所有元素都为 0 的矩阵称为上三角矩阵;

进一步, 主对角线上所有元素都是 1 的上三角矩阵称为单位上三角矩阵, 即

$$R = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 即主对角线以上的所有元素都为 0 的矩阵称为下三角

矩阵; 进一步, 主对角线上所有元素都是 1 的下三角矩阵称为单位下三角矩阵, 即

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 除了主对角线元素以外, 其余元素均为 0 的方阵称为对角矩阵(简称对角阵), 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为了方便, 有时把对角矩阵记作: $A = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ 。

(4) 主对角线元素全为 1 的对角阵称为单位阵, 简记为 I , 即 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 。

通过前面的介绍,我们可以直观地看出,引入矩阵的概念,可以更加简练地描述线性方程组的求解过程。当然,矩阵的引入不仅是为了简化线性方程组的求解,下面,我们将从线性空间和线性变换的角度去理解矩阵这一基本概念。

1.2 线性空间、线性变换和矩阵

回顾线性代数知识可以知道,线性空间和线性变换是线性代数中最基本的两个概念。线性空间是某类客观事物从量的方法的一个抽象,而线性变换则是研究线性空间中的元素之间的最基本联系。由于矩阵也是基于线性空间发展而来的,这一节,我们先从线性空间讲起,介绍如何通过线性变换引出矩阵这一基本概念,从而使读者可以更加深刻地理解矩阵的本质。

线性空间具体定义如下。

定义 1.2 设 V 是一个非空集合,其元素用 x, y, z 等表示; F 是一个数域,其元素用 k, l, m 等表示。如果 V 满足以下 8 条性质:

(I) 在 V 中定义一个“加法”运算,即当 $x, y \in V$ 时,有唯一的和 $x + y \in V$ (封闭性),且加法运算满足下列性质:

① 结合律 $x + (y + z) = (x + y) + z$;

② 交换律 $x + y = y + x$;

③ 零元律 存在零元素 $\mathbf{0}$, 使 $x + \mathbf{0} = x$;

④ 负元律 对于任一元素 $x \in V$, 存在一元素 $y \in V$, 使 $x + y = \mathbf{0}$, 且称 y 为 x 的负元素, 记为 $(-x)$, 则有 $x + (-x) = \mathbf{0}$ 。

(II) 在 V 中定义一个“数乘”运算,即当 $x \in V, k \in F$ 时,有唯一的 $kx \in V$ (封闭性),且数乘运算满足下列性质:

⑤ 分配律 $k(x + y) = kx + ky$;

⑥ 分配律 $(k + l)x = kx + lx$;

⑦ 结合律 $k(lx) = (kl)x$;

⑧ 恒等律 $1x = x$; (前面已经提及: 数域中一定有元素 1)

则称 V 为数域 F 上的线性空间或向量空间。

简言之,线性空间是指一个非空集合,在其上定义了两种基本运算:加法运算和数乘运算,对这两种运算各自定义了 4 条性质,共 8 条性质。关于对线性空间这一概念的理解,需要注意以下几点:

(1) 线性空间 V 是关于某一个数域上的非空集合。同一个集合,对于不同数域,可能构成不同的线性空间,甚至对有的数域能构成线性空间,而对其他数域不能构成线性空间。当数域 F 为实数域时, V 就称为实线性空间;当 F 为复数域时, V 就称为复线性空间。

(2) 因为 V 中所定义的加法和数乘运算统称为 V 的线性运算,所以不难理解为什么称 V 为线性空间了。关于线性运算应该注意是否满足唯一性、封闭性。

例 1.1 设 $R^+ = \{\text{全体正实数}\}$, $k \in R$, 其“加法”及“数乘”运算定义为:

$$x \oplus y = xy, \quad k \circ x = x^k$$

证明: R^+ 是实数域 R 上的线性空间。

证明: 首先需要证明两种运算的唯一性和封闭性, 其次再证明满足 8 条性质。

(1) 唯一性是显然的, 对于封闭性, 我们有:

若 $x > 0, y > 0, k \in R$, 则有:

$$x \oplus y = xy \in R^+, \quad k \circ x = x^k \in R^+$$

封闭性得证。

(2) 验证 8 条性质成立。

$$\textcircled{1} x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (yz) = xyz = (xy)z = (x \oplus y) \oplus z;$$

$$\textcircled{2} x \oplus y = xy = yx = y \oplus x;$$

$$\textcircled{3} 1 \text{ 是零元素, 因为 } x \oplus 1 = x \cdot 1 = x;$$

$$\textcircled{4} \frac{1}{x} \text{ 是 } x \text{ 的负元素, 因为 } x \oplus \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1;$$

$$\textcircled{5} k \circ (x \oplus y) = (xy)^k = x^k y^k = (k \circ x) \oplus (k \circ y);$$

$$\textcircled{6} (k+l) \circ x = x^{k+l} = x^k x^l = (k \circ x) \oplus (l \circ x);$$

$$\textcircled{7} k \circ (l \circ x) = (x^l)^k = x^{kl} = (kl) \circ x;$$

$$\textcircled{8} 1 \circ x = x^1 = x.$$

由此可证, R^+ 是实数域 R 上的线性空间。

定理 1.1 线性空间 V 具有如下性质:

(1) 零元素是唯一的, 任一元素的负元素也是唯一的。

(2) 如下恒等式成立: $0x = \mathbf{0}, (-1)x = (-x)$ 。

证明思路: (1) 的证明采用反证法。

(2) 第一个恒等式中需要注意: 等号左边是数字 0, 等号右边是一个零向量。

两个结论的证明非常简单, 具体过程这里留作练习。

空间是现代数学的一个基本概念。引出了线性空间的概念之后, 我们面临一个如何清晰地表述出线性空间的问题。首先, 我们引出线性表示的定义。

定义 1.3 对于 $x \in V$, 一组向量 $x_1, x_2, \dots, x_m \in V$, 且存在数域 F 中的一组数 $c_1, c_2, \dots, c_m$, 使得

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_m x_m \quad (1-4)$$

则称 x 为向量组 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的线性组合, 或称 x 可由向量组 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 线性表示。

更进一步, 我们有如下定义。

定义 1.4 如果存在一组不全为零的数 $c_1, c_2, \dots, c_m \in F$, 使得对于向量组 $x_1, x_2, \dots, x_m \in V$ 的线性组合满足:

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i = \mathbf{0} \quad (1-5)$$

则称向量组 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ 线性相关, 否则称其线性无关。

定义 1.5 线性空间 V 中线性无关向量组所含向量的最大个数称为 V 的维数。当线性空间 V 的维数为 n 时, 记作 $\dim V = n$ 。

维数为 n 的线性空间 V 称为 n 维线性空间; 当 $n = +\infty$ 时, 称为无限维线性空间。本书仅介绍有限维线性空间。

下面, 我们介绍线性代数中的两个重要概念: 基和坐标。对于线性空间中的任意一个向量都可以在一组基(相当于度量单位)下表示成一组坐标(相当于具体的尺度)。这里, 对于度量标准——基的选取, 不但希望对线性空间中的每一个向量都适用, 同时也希望尽可能简洁, 这就要求基的定义满足以下两个约束: ①基的组成向量线性无关; ②线性空间中的任何一个向量都可以由基线性表示。

定义 1.6 设 V 是数域 F 上的线性空间, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r (r \geq 1)$ 是属于 V 的 r 个任意向量, 如果它满足:

(1) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ 线性无关;

(2) V 中任一元素 $\mathbf{x}$ 均可由 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ 线性表示, 即存在一组数 $c_1, c_2, \dots, c_r \in F$, 使得

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_r \mathbf{x}_r$$

则称 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ 为线性空间 V 的一个基, 并称 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ 为该基的基向量。

根据基的定义可知, 系数 $c_1, c_2, \dots, c_r$ 是被向量 $\mathbf{x}$ 和基 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ 唯一确定的, 称之为向量 $\mathbf{x}$ 在基 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ 下的坐标, 记作 $(c_1, c_2, \dots, c_r)$ 。

关于对线性空间的基这一概念的理解, 需要注意以下几点:

(1) 基是线性空间 V 中的最大线性无关向量组;

(2) 基中所含向量的个数也是线性空间 V 的维数;

(3) 一个线性空间的基是不唯一的, 但不同的基所含向量的个数相等。

由于线性空间中基的选取不具有唯一性, 那么, 两个不同的基之间存在什么关系呢? 为了刻画不同基之间的转换关系, 得到了过渡矩阵的概念。假设 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ 及 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_r$ 都是线性空间 V 的基, 根据基的定义可知, 一组基可以由另一组基线性表示, 即有如下关系:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = c_{11} \mathbf{x}_1 + c_{21} \mathbf{x}_2 + \dots + c_{r1} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{y}_2 = c_{12} \mathbf{x}_1 + c_{22} \mathbf{x}_2 + \dots + c_{r2} \mathbf{x}_r \\ \vdots \\ \mathbf{y}_r = c_{1r} \mathbf{x}_1 + c_{2r} \mathbf{x}_2 + \dots + c_{rr} \mathbf{x}_r \end{cases}$$

写成矩阵形式就有:

$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_r) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r) \cdot \mathbf{A}$$

这里, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rr} \end{bmatrix}$, 则称矩阵 $\mathbf{A}$ 为从基 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ 到基 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_r$ 的过渡矩阵。

通过过渡矩阵可以把同一线性空间中的不同基联系起来, 即不同基之间是可以相互转换的。

我们知道, 线性空间描述的是一个满足某些性质的元素的集合。如果把线性空间理解成一个“静态”概念, 则线性变换描述的是线性空间中一个元素“运动”到另一个元素的“动态”概念。

定义 1.7 设 V 是数域 F 上的一个线性空间, T 是 V 到自身的一个映射, 使得对于 V 中的任意元素 x 均存在唯一的 $y \in V$ 与之对应, 则称 T 为 V 的一个变换或算子, 记为

$$Tx = y$$

称 y 为 x 在变换 T 下的像, x 为 y 的原像。若变换 T 同时还满足如下性质:

$$T(kx + ly) = k(Tx) + l(Ty) \quad \forall x, y \in V, k, l \in F$$

称 T 为线性变换或线性算子。

例 1.2 对于一个二维实向量空间 $R^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mid \xi_i \in R, i=1,2 \right\}$, 我们可以证明如下结论: 将其绕原点旋转 θ 角的操作就是一个线性变换。

证明: 关于旋转操作, 如图 1-1 所示。

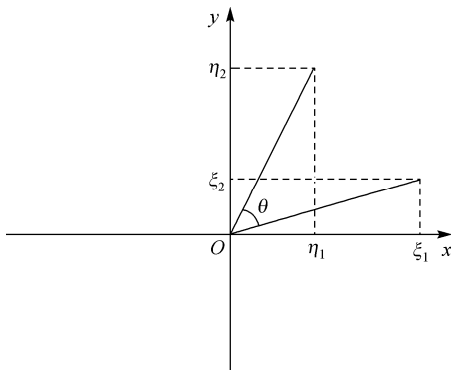


图 1-1 旋转操作

我们取 $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in R^2$, 将其绕原点旋转 θ 角后得到点 $y = Tx = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$, 这里有

$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 \cos \theta - \xi_2 \sin \theta \\ \eta_2 = \xi_1 \sin \theta + \xi_2 \cos \theta \end{cases}$, 写成矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in R^2$$

显然, 这种旋转操作是一种变换, 下面证明其为线性变换。

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in R^2, k, l \in R$$

简单计算可得:

$$\begin{aligned}
 k\mathbf{x} + l\mathbf{z} &= \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} lz_1 \\ lz_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 + lz_1 \\ kx_2 + lz_2 \end{pmatrix} \\
 T(k\mathbf{x} + l\mathbf{z}) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} kx_1 + lz_1 \\ kx_2 + lz_2 \end{pmatrix} \\
 &= k \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\
 &= k(T\mathbf{x}) + l(T\mathbf{z})
 \end{aligned}$$

所以, T 是线性变换。

证毕。

介绍了线性变换的定义之后, 接下来简单介绍线性变换的几个性质。

性质 1: $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $T(-\mathbf{x}) = -T(\mathbf{x})$ 。

性质 2: 如果向量组 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 线性相关, 则 $T\mathbf{x}_1, \dots, T\mathbf{x}_n$ 也线性相关。

性质 3: 如果向量组 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 线性无关, 且 T 是单射, 则 $T\mathbf{x}_1, \dots, T\mathbf{x}_n$ 线性无关。

证明: 反证法, 假设 $T\mathbf{x}_1, \dots, T\mathbf{x}_n$ 线性相关, 根据线性相关的定义, 存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_n$, 使得 $k_1T\mathbf{x}_1 + k_2T\mathbf{x}_2 + \dots + k_nT\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ 。根据线性变换的定义, 可得

$$k_1T\mathbf{x}_1 + k_2T\mathbf{x}_2 + \dots + k_nT\mathbf{x}_n = T(k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \dots + k_n\mathbf{x}_n) = \mathbf{0}$$

因为线性变换 T 是单射, 则有 $k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \dots + k_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$, 这与假设向量组 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 线性无关矛盾。

证毕。

本小节最后, 我们讨论如何将抽象的线性变换转化为具体的矩阵形式, 即线性变换用矩阵表示问题。

设 T 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换, 且 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 是 V 的一个基, $\forall \mathbf{x} \in V$, 根据线性代数的知识, 可知其存在唯一的坐标表示, 即

$$\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{x}_1 + \xi_2\mathbf{x}_2 + \dots + \xi_n\mathbf{x}_n = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

根据线性变换的定义, 对上式两端同时作用线性变换 T , 可以得到

$$\begin{aligned}
 T\mathbf{x} &= T(\xi_1\mathbf{x}_1 + \xi_2\mathbf{x}_2 + \dots + \xi_n\mathbf{x}_n) = T(\xi_1\mathbf{x}_1) + T(\xi_2\mathbf{x}_2) + \dots + T(\xi_n\mathbf{x}_n) \\
 &= \xi_1T\mathbf{x}_1 + \xi_2T\mathbf{x}_2 + \dots + \xi_nT\mathbf{x}_n \\
 &= [T\mathbf{x}_1, T\mathbf{x}_2, \dots, T\mathbf{x}_n] \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = [T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)] \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \tag{1-6}
 \end{aligned}$$

通过式(1-6)可以看出：要想确定线性变换 T ，只需确定基元素在该变换下的像就可以了。

下面，我们假设 $T\mathbf{x}_i = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$ ， $i=1, 2, \dots, n$ ，则写成矩阵的形式为：

$$\begin{aligned} T[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] &= [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] A \end{aligned} \quad (1-7)$$

这里， $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 。

下面，在相同的基 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 下，对于任意向量 $\mathbf{x}$ ，变换后 $T\mathbf{x}$ 的坐标表示为：

$$T\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \quad (1-8)$$

同时，根据式(1-6)和式(1-7)，我们还有：

$$T\mathbf{x} = [T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)] \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (1-9)$$

上式与式(1-8)对比可知：

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (1-10)$$

即：当 $\mathbf{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ 时， $T\mathbf{x} \leftrightarrow A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ 。

这里，把 A 称为 T 在基 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 下的矩阵。

综上所述，线性空间、线性变换和矩阵三者之间的关系可以简述为：线性空间是包

含一些元素的非空集合,基是刻画这个线性空间的一个“计量基准”;线性变换是把线性空间中的一个元素映射到另一个元素的变换,相当于定义在线性空间上的一种“运算”;矩阵就是这种线性变换在线性空间某一个基准条件下的具体体现。

总结前面介绍的知识,我们可以从以下两个方面来理解矩阵:

(1)从定义的角度来看,矩阵就是一个数表,用它可以更加简洁地处理线性方程组;

(2)基是线性空间的一个本质特征,从线性空间的某一个具体的基的角度来看,矩阵和线性变换是等价的。

1.3 线性子空间基本概念

虽然本书以介绍矩阵理论为主,但是线性子空间的相关知识在实际工程中被广泛应用,所以本节简单介绍线性子空间的相关概念。

定义 1.8 数域 F 上的线性空间 V 的一个非空子集合 W 称为 V 的一个线性子空间(或简称子空间),如果 W 对于 V 中所定义的加法和数乘两种运算也构成数域 F 上的线性空间,即:

(1)如果 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$, 则 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$;

(2)如果 $\mathbf{x} \in W, k \in F$, 则 $k\mathbf{x} \in W$ 。

关于线性子空间的概念,需要指出的是:

(1)因为 W 是 V 的一个子集,且关于线性运算封闭,所以线性子空间也是线性空间。

(2)容易看出,每个非零线性空间至少还有两个子空间,一个是它自身,另一个是仅由零向量构成的子集,称后者为零子空间。这两个特殊子空间有时被称为平凡子空间,而其他线性子空间叫作非平凡子空间。

(3)由于零子空间不含有线性无关的向量,因此没有基,规定其维数等于 0。

(4)任何一个线性子空间 W 的维数都不大于整个线性空间 V 的维数,即 $\dim W \leq \dim V$ 。

例 1.3 在线性空间 R^n 中,齐次线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}\mathbf{x}_1 + a_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{x}_n = 0 \\ a_{21}\mathbf{x}_1 + a_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{x}_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}\mathbf{x}_1 + a_{n2}\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{x}_n = 0 \end{cases}$$

的全部解向量组成一个子空间,这个子空间叫作齐次线性方程组的解空间。解空间的基就是方程组的基础解系。

通过举例说明了线性子空间的存在性以后,介绍线性子空间的生成问题。

定义 1.9 设 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ 是线性空间 V 中的一组向量,这组向量所有可能的线性组合所构成的集合 $\{c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_m\mathbf{x}_m \mid c_i \in F, i=1,2,\dots,m\}$ 是非空的,而且容易验证对线性空间 V 的两种运算封闭,因而是 V 的一个子空间,这个子空间称为由 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ 生成的子

空间, 记作 $L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) = \{c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_m\mathbf{x}_m \mid c_i \in F, i=1, 2, \dots, m\}$ 。有时也把 $L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m)$ 记作 $\text{span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m)$ 。

关于线性子空间有如下几个比较重要的性质。

性质 4: 两个向量组生成相同子空间的充分必要条件是这两个向量组等价。

性质 5: $L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m)$ 的维数等于生成向量组 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ 的极大线性无关向量组的向量个数。

性质 6: 设 W 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的一个 $m(0 \leq m \leq n)$ 维子空间, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ 是 W 的一组基, 那么这组向量必定可扩充为整个线性空间 V 的一组基, 即在 V 中必定可以找到 $n-m$ 个向量 $\mathbf{x}_{m+1}, \mathbf{x}_{m+2}, \dots, \mathbf{x}_n$, 使得 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 是 V 的一组基。

证明: 证明思路是对维数差 $n-m$ 做数学归纳法。设 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ 是 W 的一个基, 当 $n-m=0$ 时, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ 已是 V 的一个基。

假定 $n-m=k$ 时定理成立, 考虑 $n-m=k+1$ 的情形。因为 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m \in V$ 且线性无关, 但又不是 V 的基, 故有 $\mathbf{x}_{m+1} \in V$ 且 $\mathbf{x}_{m+1}$ 不能由 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ 线性表示, 因而 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1}$ 是线性无关的。由于 $L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1})$ 是 V 的 $m+1$ 维子空间, 且 $n-(m+1)=k$, 由归纳假设知 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1}$ 可以扩充成 V 的基, 故 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ 可以扩充成 V 的基。

证毕。

下面介绍子空间的交、和、直和等重要概念。

定义 1.10 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个子空间, 称

$$W_1 \cap W_2 = \{\alpha \mid \alpha \in W_1, \text{ 且 } \alpha \in W_2\}$$

为 W_1, W_2 的交。

两个子空间的交具有以下性质。

性质 7: 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个子空间, 那么它们的交 $W_1 \cap W_2$ 也是 V 的子空间。

性质 8: 交换律, 即 $W_1 \cap W_2 = W_2 \cap W_1$ 。

性质 9: 结合律, 即 $(W_1 \cap W_2) \cap W_3 = W_1 \cap (W_2 \cap W_3)$ 。

以上性质的证明仅根据子空间的交的定义即可完成, 具体证明留作练习。这里需要指出的是, 以上 3 条性质可以推广到多个子空间的交。

定义 1.11 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个子空间, 称

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in W_1, \mathbf{y} \in W_2\}$$

为 W_1, W_2 的和。

两个子空间的和具有以下性质。

性质 10: 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个子空间, 那么它们的和 $W_1 + W_2$ 也是 V 的子空间。

性质 11: 交换律, 即 $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$ 。

性质 12: 结合律, 即 $(W_1 + W_2) + W_3 = W_1 + (W_2 + W_3)$ 。

以上性质的证明仅根据子空间的和的定义即可完成, 具体证明留作练习。以上性质同样可以推广到多个子空间的和。

关于子空间的交与和, 其实可以看作子空间的两种运算。这里需要强调的是, 两个

子空间的并集不一定是子空间。例如, 在线性空间 R^2 中, 分别取两个子空间 $W_1 = L((1,0))$, $W_2 = L((0,1))$, 则两个子空间的并集:

$$W_1 \cup W_2 = \{(c_1, c_2) | c_1 \cdot c_2 = 0, c_1, c_2 \in R\}$$

显然, 对于二维向量 $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $e_1 + e_2 = (1,1) \notin W_1 \cup W_2$, 即在 $W_1 \cup W_2$ 中加法运算不封闭。

关于子空间的交与和的维数, 不加证明地介绍以下定理。

定理 1.2 (维数公式) 设 W_1 、 W_2 是线性空间 V 的两个子空间, 则:

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) \quad (1-11)$$

通过一个例子来说明维数公式是成立的。例如, 在三维几何空间中, 两个通过原点的不同的平面之和是整个三维空间, 而其维数之和却等于 4, 从而说明这两张平面的交是一维的直线。另外, 维数公式还表明了和空间的维数通常比两个子空间维数的和要小。

例 1.4 设 R^4 的两个子空间为 $V_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) | a_1 = a_2 = a_3, a_i \in R, i=1,2,3,4\}$, $V_2 = L(x_1, x_2)$, $x_1 = (1,0,1,0)$, $x_2 = (0,1,0,1)$, 求: (1) $V_1 + V_2$ 的基与维数; (2) $V_1 \cap V_2$ 的基与维数。

解: (1) 对于子空间 V_1 中的任意一个向量 (a_1, a_2, a_3, a_4) , 都可以表示成:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, a_1, a_1, a_4) = a_1(1,1,1,0) + a_4(0,0,0,1)$$

设 $y_1 = (1,1,1,0)$, $y_2 = (0,0,0,1)$, 则有 $V_1 = L(y_1, y_2)$, 故 $V_1 + V_2 = L(y_1, y_2; x_1, x_2)$ 。因为 y_1, y_2, x_1 是向量组 y_1, y_2, x_1, x_2 的极大无关组, 所以 $\dim(V_1 + V_2) = 3$, y_1, y_2, x_1 是 $V_1 + V_2$ 的一个基。

(2) 设 $x \in V_1 \cap V_2$, 则有一组系数 k_1, k_2, l_1, l_2 使得:

$$x = k_1 y_1 + k_2 y_2 = l_1 x_1 + l_2 x_2$$

把 $x_1 = (1,0,1,0)$, $x_2 = (0,1,0,1)$, $y_1 = (1,1,1,0)$, $y_2 = (0,0,0,1)$ 代入上式, 得到如下线性方程组:

$$\begin{cases} k_1 - l_1 = 0 \\ k_1 - l_2 = 0 \\ k_1 - l_1 = 0 \\ k_2 - l_2 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} k_1 = l_2 \\ k_2 = l_2 \\ l_1 = l_2 \end{cases}$$

代入 x 的表达式中, 得 $x = l_2(1,1,1,1)$, 所以 $(1,1,1,1)$ 为 $V_1 \cap V_2$ 的一个基, 即 $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$ 。

通过例 1.4 验证了维数公式。根据定义 1.11 可以看出, 和空间的向量表示不一定是唯一的。为了解决这个问题, 引入了直和的定义。

定义 1.12 设 W_1 、 W_2 是线性空间 V 的两个子空间, 如果和空间 $W_1 + W_2$ 中每个向量 x 的分解式

$$x = x_1 + x_2 \quad x_1 \in W_1, \quad x_2 \in W_2$$

是唯一的, 这个和就称为直和, 记为 $W_1 \oplus W_2$ 。

子空间的直和是子空间和的一个重要特殊情形, 在实际中有着较多的应用。下面, 给出一个判断直和的充要条件。

定理 1.3 和空间 W_1+W_2 是直和 $\Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = L(\mathbf{0}) \Leftrightarrow$ 零向量的分解式是唯一的。

证明: 这里仅就第一个充要条件进行证明, 第二个充要条件的证明留作练习。

(1) 充分性: 因为 $W_1 \cap W_2 = L(\mathbf{0})$ 成立, 任取一个向量 $\mathbf{z} \in W_1+W_2$, 根据子空间和的定义, 如果有:

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &= \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, & \mathbf{w}_1 &\in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2 \\ \mathbf{z} &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, & \mathbf{v}_1 &\in W_1, \mathbf{v}_2 \in W_2\end{aligned}$$

两式相减, 得到

$$(\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1) + (\mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_2 \in W_2$$

即

$$(\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1) = -(\mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_2) \in W_2$$

根据 $W_1 \cap W_2 = L(\mathbf{0})$, 所以 $\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$; 同理, $\mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, 所以向量 $\mathbf{z}$ 的分解式是唯一的, 得到 W_1+W_2 是直和。

(2) 必要性: 假设 W_1+W_2 是直和, 采用反证法证明 $W_1 \cap W_2 = L(\mathbf{0})$ 成立。如果 $W_1 \cap W_2$ 不是零空间, 则存在一个非零向量 $\mathbf{x} \in W_1 \cap W_2$ 。因为 $W_1 \cap W_2$ 是线性空间, 所以 $(-\mathbf{x}) \in W_1 \cap W_2$, 那么, 对于零向量而言, 存在两种表达式:

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}; \quad \mathbf{0} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x})$$

这与假设 W_1+W_2 是直和矛盾。

证毕。

定理 1.4 设 W 是线性空间 V 的一个子空间, 那么一定存在一个子空间 U , 使得 $V = U \oplus W$ 。

这时 U 叫作 W 的补空间, 或者 U 与 W 是互补子空间。利用前述性质, 具体的证明过程较简单, 留作练习。

1.4 特殊的线性子空间

本节介绍几种特殊的线性子空间。

定义 1.13 设 $A = (a_{ij})_{m \times n} \in R^{m \times n}$, 以 $\mathbf{a}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) 表示矩阵 A 的第 i 个列向量, 称子空间 $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ 为矩阵 A 的值域 (列空间), 记作

$$R(A) = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (1-12)$$

关于值域还有另一个重要的表达式: $R(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in R^n\}$ 。

定义 1.14 设 $A = (a_{ij})_{m \times n} \in R^{m \times n}$, 称集合 $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ 为矩阵 A 的核空间 (零空间), 记作 $N(A)$, 即

$$N(A) = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \quad (1-13)$$

显然, 核空间 $N(A)$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间, 也是线性空间 R^n 的一个子空间。

定义 1.15 矩阵 A 的核空间 $N(A)$ 的维数称为 A 的零度, 记作 $n(A)$ 。

第 1.2 节分析了线性变换和矩阵之间的关系, 显然, 对于线性变换也有如上一些概念。

定义 1.16 设 T 是线性空间 V 的线性变换, V 中所有向量的像构成的集合称为 T 的值域, 记作 $R(T)$, 即

$$R(T) = \{Tx \mid x \in V\}$$

而 V 中所有被 T 变为零向量的原像构成的集合称为 T 的核, 记作 $N(T)$, 即 $N(T) = \{x \mid Tx = 0, x \in V\}$ 。

定理 1.5 线性空间 V 的线性变换 T 的值域和核都是 V 的线性子空间。

证明: 因为根据线性空间的定义可知 V 非空, 所以 $R(T)$ 也非空。根据线性变换的定义可知, 对于任意两个向量 x, y 和一个数 k , 有:

$$Tx + Ty = T(x + y), \quad k \cdot (Tx) = T(kx)$$

由此可知, $R(T)$ 关于线性运算是封闭的, 从而是 V 的线性子空间。

又若 $Tx = 0, Ty = 0$, 由上式可知

$$T(x + y) = Tx + Ty = 0, \quad T(kx) = k \cdot (Tx) = 0$$

由此可知, $N(T)$ 关于线性运算是封闭的, 且因为 $T(0) = 0$, 所以 $0 \in N(T)$, 从而 $N(T)$ 也是 V 的线性子空间。

根据定理 1.5, $R(T)$ 也称为线性变换 T 的像子空间; $N(T)$ 也称为线性变换 T 的核子空间。

定义 1.17 像子空间 $R(T)$ 的维数称为线性变换 T 的秩; 核子空间 $N(T)$ 的维数称为线性变换 T 的亏(或零度)。

基于以上基本概念, 这里介绍几个重要的性质。设 T 是 n 维线性空间 V 的线性变换, A 是 V 的线性变换 T 的矩阵, 则有以下性质。

性质 13: $\dim R(T) + \dim N(T) = n$ 。

性质 14: $\dim R(T) = \dim R(A)$ 。

性质 15: $\dim N(T) = \dim N(A)$ 。

本节的最后介绍一类重要的线性子空间。

定义 1.18 设 T 是数域 F 上线性空间 V 的线性变换, W 是 V 的一个子空间, 如果对于任意一个向量 $x \in W$ 都有 $Tx \in W$, 称 W 是 T 的不变子空间。

不变子空间具有以下几个基本性质。

性质 16: 整个线性空间 V 和零子空间 $L(0)$, 对于每个线性变换 T 来说都是不变子空间。

性质 17: 线性变换 T 的值域与核都是 T 的不变子空间。

性质 18: 若线性变换 T_1 与 T_2 是可交换的, 则 T_2 的核与值域都是 T_1 的不变子空间。

性质 19: 线性变换 T 的不变子空间的交与和仍为线性变换 T 的不变子空间。

习 题

1. 思考题：有没有一个向量的线性空间？有没有两个向量的线性空间？有没有 m 个向量的线性空间？

2. 齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

的全部解是否构成一个线性空间？

3. 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间的维数与基。

4. 已知 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 3 维线性空间 V 的一组基， η_1, η_2, η_3 满足：

$$\eta_1 + \eta_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\eta_1 + \eta_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\eta_2 + \eta_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$$

(1) 证明 η_1, η_2, η_3 也是 V 的一组基，并求出从基 η_1, η_2, η_3 到 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的过渡矩阵；

(2) 求向量 $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$ 在基 η_1, η_2, η_3 下的坐标。

5. 设线性变换 T 在 3 维线性空间 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求 T 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵，其中：

$$\eta_1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3$$

$$\eta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$$

$$\eta_3 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

(2) 求 T 的值域和核；

(3) 在 T 的核中选一组基，把它扩充成 V 的一组基，并求 T 在这组基下的矩阵；

(4) 在 T 的值域中选一组基，把它扩充成 V 的一组基，并求 T 在这组基下的矩阵。

6. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ ，求 A 的秩和零度。

7. 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, T 是 V 上的线性变换, T 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 证明: 如果 ε_n 属于 T 的不变子空间 W , 那么 $W = V$ 。

(2) 证明: ε_1 属于 T 的任意一个非零不变子空间。

(3) 证明: V 不能分解成 T 的两个非平凡不变子空间的直和。

(4) 求 T 的所有不变子空间。

8. 设 T_1 和 T_2 是 R^3 上的线性变换, 分别定义为:

$$T_1[(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)] = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, 0, 0), \quad T_2[(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)] = (\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1)$$

试证: $T_1 + T_2$ 的像子空间(值域)是 R^3 , 即 $(T_1 + T_2)(R^3) = R^3$ 。