第 1 章　行　列　式

行列式在线性代数中是一个基本工具,研究许多问题时都需要用到它,如线性方程组、矩阵、矩阵的特征值、二次型等.本章在二阶、三阶行列式定义的基础上,归纳出一般的 n 阶行列式的定义,然后讨论行列式的基本性质与计算.为了便于学生能较好地掌握这部分内容,本章介绍了几种常用的计算 n 阶行列式的方法,还介绍了用行列式这一工具求解一类非齐次线性方程组的一种重要方法——克拉默法则,并由此给出了齐次线性方程组有非零解的必要条件.

1.1　行列式的定义

1.1.1　二阶和三阶行列式

行列式这个概念究竟是如何形成的呢? 这就得从求解方程个数和未知量个数相等的一次(线性)方程组入手.

在初等代数中,用加、减消元法求解一个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

的具体步骤是:先从方程组(1.1)里消去 x_2 而求得 x_1,这只要将方程组(1.1)的第 1、第 2 两个式子分别乘以 a_{22} 与 $-a_{12}$,然后再相加,就得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2;$$

同理,也可从方程组(1.1)里消去 x_1 而求得 x_2,这只要将方程组(1.1)的第 1、第 2 两个式子分别乘以 $-a_{21}$ 与 a_{11},然后相加,得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

即

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{cases}$$

如果未知量 x_1,x_2 的系数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,那么,这个线性方程组(1.1)有唯一解:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了便于使用与记忆,我们引入二阶行列式的概念.

如果把线性方程组(1.1)中未知量 x_1,x_2 的系数按原来的位置写成 2 行 2 列的数表,并用两条竖线加以标出,那么,便得到一个二阶行列式,对此除引入字母 Δ 作为记号外,还规定:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.2}$$

式(1.2)最右边的式子称为**二阶行列式 $\boldsymbol{\Delta}$ 的展开式**.

于是,线性方程组(1.1)的解可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

若记

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{21},$$

则线性方程组(1.1)的解可以简洁地表示为

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \tag{1.3}$$

由此可见,二阶行列式的引入与二元一次方程组有关,它表示排成2行、2列的4个数在规定运算下得到的一个数值.

类似地,对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.4}$$

为了简单地表达它的解,我们引入三阶行列式的概念.三阶行列式就是排成3行、3列的9个数的一张数表,其展开式规定为

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

【例 1.1】 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} \times (-1)\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 6\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times 7\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times (0 \times 5 - 9 \times 1) - 6 \times (4 \times 5 - 9 \times 2) + 7 \times (4 \times 1 - 0 \times 2) \\ &= 9 - 12 + 28 = 25. \end{aligned}$$

所以,三阶行列式也是在规定运算下的一个数值,它可转化为二阶行列式进一步计算得到.三阶行列式可以用来表达三元一次方程组(1.4)的解.如果方程组(1.4)系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么方程组有唯一解,其解同样可以简洁地表示为

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},\tag{1.5}$$

其中

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

在方程组(1.4)的解的表达式(1.5)中,$x_i(i=1,2,3)$分母均是方程组(1.4)的系数行列式Δ,x_i的分子是将系数行列式Δ中的第i列换成方程组(1.4)中的常数项,其余列不动所得到的行列式,并简记为$\Delta_i(i=1,2,3)$.

【例1.2】 解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2,\\ -2x_1+x_2-x_3=-1,\\ x_1+3x_2-x_3=-2.\end{cases}$$

解 方程组的系数行列式为

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-11\neq 0,$$

又计算得

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=5,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ -2 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=-2,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=-23.$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{5}{11},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{2}{11},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{23}{11}.$$

显然,对于未知数个数等于方程个数的二元、三元线性方程组,当它们的系数行列式不等于零时,利用行列式这一工具求解十分简便,结果也容易记忆.我们自然联想到:对于未知数个数等于方程个数的n元$(n>3)$线性方程组,是否也有类似的结果?这就需要引入n阶$(n>3)$行列式的定义.

1.1.2 *n* 阶行列式

在上面的讨论中,是将三阶行列式转化为二阶行列式来计算的.下面,根据此思路给出n阶行列式的递归法定义.

定义1.1 将n^2个数$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排列成n行n列(横的称行,竖的称列),并在左、右两边各加一条竖线的算式,即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{n}$ **阶行列式**，它代表一个由确定的运算关系所得到的数值. 例如，当 $n=2$ 时

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

当 $n>2$ 时，定义为

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j},$$

其中，数 a_{1j} 为第 1 行第 j 列的元素；$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$ 称为 a_{1j} 的**代数余子式**；M_{1j} 为由 D_n 划去第 1 行和第 j 列后余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式.

从定义 1.1 可以知道一个 n 阶行列式代表一个数值，并且这个数值由第 1 行所有元素与其相应的代数余子式乘积之和得到. 我们通常将此定义简称为 n 阶行列式按第 1 行展开.

对于一般情况下，M_{ij} 为由 D_n 划去第 i 行和第 j 列后余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的**余子式**；元素 a_{ij} 的**代数余子式为** $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如，四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 9 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & -6 \\ 1 & -4 & -3 & 7 \\ 8 & 4 & -2 & -9 \end{vmatrix}$$

中，元素 a_{23} 的余子式即为划去第 2 行和第 3 列元素后的三阶行列式

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 8 & 4 & -9 \end{vmatrix},$$

元素 a_{23} 的代数余子式为余子式 M_{23} 前再加一个符号因子，即

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 8 & 4 & -9 \end{vmatrix}.$$

【例 1.3】 计算三阶行列式

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

解 由定义

$$D_3=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}+(-6)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 18 + 54 + 36 = 108.$$

【例 1.4】 计算四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 9 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 10 & -2 & -5 \end{vmatrix}.$$

解 由定义

$$D_4 = 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 10 & -2 & -5 \end{vmatrix} + (-4) \times (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 9 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times \left[(-1) \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} \right] +$$

$$4 \times \left[9 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \right]$$

$$= 2 \times [5 - 22] + 4[9 \times (-22) - 2] = -834.$$

通过本例的计算,可以体会到第 1 行的零元素越多,则由定义按第 1 行展开时计算越简便.以后将会看到,一个行列式可以按任意一行或任意一列展开.

1.1.3 特殊行列式

下面利用行列式的定义来计算几种特殊的 n 阶行列式.

1.对角行列式

只有在对角线上有非零元素的行列式称为**对角行列式**.

【例 1.5】 证明对角行列式:

(1)
$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n; \tag{1.6}$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n. \tag{1.7}$$

其中行列式(1.6)主对角线上的元素是 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$,行列式(1.7)次对角线上的元素是 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$,其他元素都是零.

证 利用 n 阶行列式的定义逐次降阶展开行列式(1.6)得

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1\lambda_2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \cdots = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

对行列式(1.7),注意到降阶展开时,元素 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 依次在第 $n,n-1,\cdots,2,1$ 列,故有

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1(-1)^{1+n}\lambda_2(-1)^{1+n-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_4 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{1+n}(-1)^{1+n-1}\cdots(-1)^{1+2}\times(-1)^{1+1}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$= (-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

用同样的方法可以将式(1.7)的结果加以类推,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}. \tag{1.8}$$

2.下(上)三角行列式

对角线以上(下)的元素都为零的行列式称为**下(上)三角行列式**.

【例 1.6】 试证下三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1.9}$$

证 利用 n 阶行列式的定义,逐次降阶展开,故有

$$D_n=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}(-1)^{1+1}\times a_{22}(-1)^{1+1}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3.一个重要的行列式公式

【例 1.7】 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

证 对等式左边行列式按第 1 行展开,得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ c_{11} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}-a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

所以原式成立.

一般地,可以用数学归纳法证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1s} & b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{t1} & \cdots & c_{ts} & b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix}. \tag{1.10}$$

公式(1.10)在行列式的计算与证明中经常使用.

习题 1.1

参考答案与提示

1. 利用定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

2. 利用三阶行列式解三元一次方程组:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -10. \end{cases}$$

3. 写出下列行列式中元素 a_{23} 的余子式及代数余子式:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & -7 & 9 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 8 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. 写出下列行列式中元素 a_{43} 的余子式及代数余子式:

$$\begin{vmatrix} c & a & -b & d \\ b & -a & 6 & c \\ a & 2 & -8 & b \\ d & -9 & -3 & 9 \end{vmatrix}.$$

5. 利用定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$.

6. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & -5 & 6 \\ 6 & 8 & 7 & -8 \end{vmatrix}$.

1.2 行列式的性质与计算

1.2.1 行列式的性质

从行列式的定义出发直接计算行列式是比较麻烦的. 为了进一步讨论 n 阶行列式,简化 n 阶行列式的计算,下面介绍 n 阶行列式的一些基本性质.

将行列式 D 的行、列互换后,得到新的行列式 D^{T},D^{T} 称为 D 的转置行列式. 即,如果

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.1　行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

对于二阶行列式可由定义直接验证:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$D_2^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = D_2.$$

对于 n 阶行列式则可用数学归纳法予以证明,此处从略.

性质 1.1 说明了**行列式中行、列地位的对称性,凡是对行成立的性质对列也成立.**

【例 1.8】　验算下列行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等. 设

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

解　$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 18+3+10 = 31,$

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 18+5+8 = 31.$$

【例 1.9】　证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证　由性质 1.1 得

$$D = D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用下三角行列式公式(1.9)，可得 $D^{T}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，故有 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

这个例子说明：**上、下三角行列式的值都等于主对角线上元素的乘积.**

性质 1.2 互换行列式的两行(列)，行列式的值改变符号.

对于二阶行列式可直接验证.

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

把两行互换得行列式

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11}=-D_2.$$

对于 n 阶行列式也可用数学归纳法证明，此处从略.

【例 1.10】 若已知

$$D=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix}=8,$$

互换第 1 行与第 3 行后，得

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} 196 & 203 & 199 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix},$$

由性质 1.2 一定有：$\overline{D}=-D=-8$.

【例 1.11】 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -7 & 3 & -9 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -6 \\ -7 & 1 & 4 & -6 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -6 \\ 2 & -8 & 0 & -4 & 9 \end{vmatrix}.$$

解 注意到 D 中第 2 行和第 4 行是相同的，因此将这相同的 2 行互换，其结果仍是 D，而由性质 1.2 可知交换 2 行的结果为 $-D$. 因此，$D=-D$，即 $D=0$.

推论 1.1 如果行列式有 2 行(列)的对应元素相同，则这个行列式等于零.

性质 1.3 n 阶行列式等于任意一行(列)所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

性质 1.3 说明了行列式可按任意一行(列)展开.

【例 1.12】 计算下列行列式

$$D=\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 9 & 2 & -6 \\ -2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

解 注意到第 4 列有 4 个零元素,可利用性质 1.3 按第 4 列展开

$$D=2\times(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -3 & -5 \end{vmatrix},$$

对上面的四阶行列式可按第 2 行展开

$$D=-2\times\left[2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix}-4\times(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & -3 \end{vmatrix}\right],$$

上述 2 个三阶行列式都可按第 1 行展开,最后得 $D=-1668$.

从上面可看出,行列式不仅可以按第 1 行展开,它还可以按任意一行(列)展开.只要行列式的某一行(某一列)的零元素多,按该行(该列)来展开,行列式的计算就简单,并且得到的行列式都是相等的.

性质 1.4 n 阶行列式中任意一行(列)的元素与另一行(列)的相应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即当 $i\neq k$ 时,有

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0.$$

证 在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } k \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

中,将第 i 行的元素都换成第 $k(i\neq k)$ 行的元素,得到另一个行列式

$$D_0=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } k \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array},$$

显然,D_0 的第 i 行的代数余子式与 D 的第 i 行的代数余子式是完全一样的.将 D_0 按第 i 行展

开，得

$$D_0 = a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in},$$

因为 D_0 中有两行元素相同，所以 $D_0 = 0$. 因此

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0 \quad (i \neq k),$$

由性质 1.3 和性质 1.4 得到如下结论：

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} D_n, & k = i, \\ 0, & k \neq i; \end{cases} \tag{1.11}$$

或

$$a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \cdots + a_{ns}A_{nj} = \begin{cases} D_n, & s = j, \\ 0, & s \neq j. \end{cases} \tag{1.12}$$

性质 1.5 行列式某一行(列)的公因子可以提出来. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \cdots & \lambda a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 由性质 1.3 将上式左、右两边的行列式分别按第 k 行展开，注意到它们的第 k 行元素的代数余子式是对应相同的，均为 $A_{k1}, A_{k2}, \cdots, A_{kn}$. 于是

$$左边 = \lambda a_{k1}A_{k1} + \lambda a_{k2}A_{k2} + \cdots + \lambda a_{kn}A_{kn} = \lambda(a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}) = 右边.$$

推论 1.2 用一个数乘以行列式的某一行(列)就等于用这个数乘以此行列式.

推论 1.3 行列式中如果有两行(列)元素对应成比例，则此行列式为零.

性质 1.6 如果行列式中某一行(列)的元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式的和，而且这两个行列式除这一行(列)外，其余的元素与原来行列式的对应元素相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 将上述 3 个行列式分别按第 k 行展开，且注意到它们的第 k 行元素的代数余子式都是相同的. 于是有

$$\begin{aligned} 左边 &= (b_{k1}+c_{k1})A_{k1} + (b_{k2}+c_{k2})A_{k2} + \cdots + (b_{kn}+c_{kn})A_{kn} = \\ &\quad (b_{k1}A_{k1} + b_{k2}A_{k2} + \cdots + b_{kn}A_{kn}) + (c_{k1}A_{k1} + c_{k2}A_{k2} + \cdots + c_{kn}A_{kn}) = 右边. \end{aligned}$$

【例 1.13】 计算下列行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & -2 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 利用性质 1.6 将行列式 D 分解为两个行列式的和

$$D=\begin{vmatrix}3&-1&4&6\\0&2&7&8\\6+0&-2+0&8-6&12+1\\0&0&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&4&6\\0&2&7&8\\6&-2&8&12\\0&0&-2&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&-1&4&6\\0&2&7&8\\0&0&-6&1\\0&0&-2&0\end{vmatrix}.$$

从上式分解成两个行列式的和的右端可知，第 1 个行列式的第 1 行与第 3 行成比例，所以第 1 个行列式为零，再把第 2 个行列式的第 3 列与第 4 列进行交换，得

$$D=0+(-1)\begin{vmatrix}3&-1&6&4\\0&2&8&7\\0&0&1&-6\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=12.$$

性质 1.7 将行列式的某一行(列)的各元素都乘以同一个常数后，再加到另一行(列)的对应元素上，则行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}+\lambda a_{i1}&a_{k2}+\lambda a_{i2}&\cdots&a_{kn}+\lambda a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

证 由性质 1.6 得

$$\text{右边}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda a_{i1}&\lambda a_{i2}&\cdots&\lambda a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

又由性质 1.5 可得上述第 2 个行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda a_{i1}&\lambda a_{i2}&\cdots&\lambda a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=0,$$

所以，右边 = 左边.

上述性质对于简化行列式的计算有很大的作用，在计算 n 阶行列式时常常用到，其中，性质 1.7 使用最为频繁.

为方便起见，今后使用下列记号："$\lambda\times ⓘ$ "表示将第 i 行(列)乘以 λ；"(ⓘ ，ⓙ)"表示将第

i 行(列)与第 j 行(列)交换;"$ⓚ + ⓘ \times \lambda$"表示将第 i 行(列)乘以 λ 后加到第 k 行(列)上.并把对行的变换写在等号上方,把对列的变换写在等号下方.

由性质 1.2,1.5,1.7,可将行列式经行变换时发生的变化情况汇总如下:

(1) 若 $D \xrightarrow{(ⓘ,ⓙ)} \overline{D}$,则 $\overline{D} = -D$;

(2) 若 $D \xrightarrow{\lambda \times ⓘ} \overline{D}$,则 $\overline{D} = \lambda D(\lambda \neq 0)$;

(3) 若 $D \xrightarrow{ⓚ + ⓘ \times \lambda} \overline{D}$,则 $\overline{D} = D$;

这三个性质最重要也最常用.对行列式的列变换来说,当然有相同的结论.

【例 1.14】 计算下列行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 $$D \overset{}{\underset{(①,②)}{=\!=\!=}} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{②+①\times(-1) \\ ③+①\times(-2)}}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{③+②\times 3 \\ ④+②\times(-5)}}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -11 & -6 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \end{vmatrix} \overset{④+③\times(16/11)}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -11 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -8/11 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times 1 \times (-11) \times \left(-\frac{8}{11}\right) = -8.$$

1.2.2 行列式的计算

一般来说,计算行列式的方法比较灵活,技巧性较强,计算较复杂,但,还是可以总结一些方法.主要方法有:利用行列式的性质;利用行列式的展开式;利用递推公式和加"边"等方法.一般地,综合运用这些方法来计算行列式.下面举例说明.

计算数字行列式的基本方法是:利用行列式的性质,把行列式化为上(下)三角行列式,利用前面的公式(1.9),可知这时行列式的值就是主对角线上元素的乘积.

【例 1.15】 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 & -7/3 \\ 2 & 5 & 8 & -4/3 \\ 1 & 3 & 6 & -1/3 \\ -3 & -2 & -2 & 5/3 \end{vmatrix}.$$

解 为了避免比较麻烦的分数运算,先对第 4 列提取公因子 1/3,并设法将 D 化为上三角行列式.同样,为了计算简便,最好把第 1 行第 1 列的元素变成 1(或 -1),这个想法可利用行列式的性质,即将第 1 行与第 3 行互换实现.若第 1 行第 1 列的元素为零元素,则可通过行(或列)的变换使之成为非零元素.

$$D \xlongequal{(①,③)} -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 5 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & 0 & -7 \\ -3 & -2 & -2 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[④+①\times 3]{②+①\times(-2),\ ③+①\times(-3)} -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -18 & -4 \\ 0 & 7 & 16 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{③+②\times(-3),\ ④+②\times 7} -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \end{vmatrix} \xlongequal{④+③\times(-2)} -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\times 1\times(-1)\times(-6)\times(-16) = 32.$$

由【例 1.12】可以看出，为使行列式便于计算，可选择零元素最多的行或列，然后按这行或列展开.当然在展开之前也可利用性质把某一行或列的元素尽量化为零，然后展开.

【例 1.16】 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解 注意到 D 的第 3 行零元素有 1 个，在按第 3 行展开之前还可化简 D. 即

$$D \xlongequal[①+③\times(-2),\ ④+③]{} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第3行展开}} 1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{②+①} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{按第3列展开}]{} 1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

【例 1.17】 计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 根据 D_4 中元素的规律，可将第 4 列加至第 3 列，然后将第 3 列加至第 2 列，再将第 2 列加至第 1 列，目的是使 D_4 中的零元素增多.

$$D_4 \xlongequal[③+④]{} \begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[②+③]{} \begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[①+②]{} \begin{vmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \end{vmatrix} = 4a_1a_2a_3.$$

通过上述四阶行列式的计算规律，一般地，可以归纳得到：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}=(1+n)a_1a_2\cdots a_n.$$

【例 1.18】 计算

$$D_4=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

解 这个行列式的特点是各列元素的和是相同的，都是 $a+3$. 故可把第 2，3，4 列同时加到第 1 列，提出公因子 $(a+3)$，然后各行减去第 1 行，得

$$D_4 \xlongequal[\substack{①+② \\ ①+③ \\ ①+④}]{} \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{②+①\times(-1) \\ ③+①\times(-1) \\ ④+①\times(-1)}} (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}=(a+3)(a-1)^3.$$

通过上述四阶行列式的计算规律，一般地，可以归纳得到：

$$D_n=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}=(a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

【例 1.19】 计算

$$D_4=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4 \end{vmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0(i=1,2,3,4)$.

解 把 D_4 增加 1 行与 1 列，变成五阶行列式，且使其值不变，这种方法称为加“边”法，然后利用行列式的性质进行计算.

$$
D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&1+a_1&1&1&1\\0&1&1+a_2&1&1\\0&1&1&1+a_3&1\\0&1&1&1&1+a_4\end{vmatrix}\xlongequal[\text{⑤+①×(−1)}]{\substack{\text{②+①×(−1)}\\\text{③+①×(−1)}\\\text{④+①×(−1)}}}\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\-1&a_1&0&0&0\\-1&0&a_2&0&0\\-1&0&0&a_3&0\\-1&0&0&0&a_4\end{vmatrix},
$$

再将上述第 2 个行列式中第 2,3,4,5 列分别乘以 $a_1^{-1},a_2^{-1},a_3^{-1},a_4^{-1}$ 加到第 1 列,则有

$$
D_4=\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{4}a_i^{-1}&1&1&1&1\\0&a_1&0&0&0\\0&0&a_2&0&0\\0&0&0&a_3&0\\0&0&0&0&a_4\end{vmatrix}=a_1a_2a_3a_4\left(1+\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{a_i}\right).
$$

通过上述四阶行列式的计算规律,一般地,可以归纳得到:

$$
D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&\cdots&1\\1&1+a_2&1&\cdots&1\\1&1&1+a_3&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).
$$

对某些有规律的行列式,有时可用递推公式来计算.

【例 1.20】 计算

$$
D_5=\begin{vmatrix}3&2&0&0&0\\1&3&2&0&0\\0&1&3&2&0\\0&0&1&3&2\\0&0&0&1&3\end{vmatrix}.
$$

解 观察 D_5 中的元素可知 D_5 具有某种“规律性”. 若将 D_5 按第 1 行展开可得

$$
D_5=3\begin{vmatrix}3&2&0&0\\1&3&2&0\\0&1&3&2\\0&0&1&3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&2&0&0\\0&3&2&0\\0&1&3&2\\0&0&1&3\end{vmatrix},
$$

上述右边第 2 项即为

$$
2\begin{vmatrix}3&2&0\\1&3&2\\0&1&3\end{vmatrix},
$$

由此得到递推公式

$$D_5 = 3D_4 - 2D_3,$$

反复运用上式可得

$$\begin{aligned} D_5 &= 3(3D_3 - 2D_2) - 2D_3 = 7D_3 - 6D_2 = 7(3D_2 - 2D_1) - 6D_2 \\ &= 15D_2 - 14D_1 = 15\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 14 \times 3 = 63 = 2^{5+1} - 1. \end{aligned}$$

通过上述五阶行列式的计算规律，一般地，可以归纳得到：

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2^{n+1} - 1.$$

【例 1.21】 证明 n 阶范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j). \tag{1.13}$$

证 对其行列式的阶数 n 用数学归纳法.

第 1 步，$n = 2$ 时，计算二阶范德蒙行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1,$$

可见 $n = 2$ 时，结论成立.

第 2 步，假设对于 $n-1$ 阶范德蒙行列式结论成立. 我们对 n 阶范德蒙行列式进行如下计算：把第 $n-1$ 行的$(-x_1)$倍加到第 n 行，再把第 $n-2$ 行的$(-x_1)$倍加到第 $n-1$ 行，按照此方式继续进行，最后把第 1 行的$(-x_1)$倍加到第 2 行，得到

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_3^2 - x_1 x_3 & \cdots & x_n^2 - x_1 x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2} - x_1 x_2^{n-3} & x_3^{n-2} - x_1 x_3^{n-3} & \cdots & x_n^{n-2} - x_1 x_n^{n-3} \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)D_{n-1},$$

D_{n-1} 是一个 $n-1$ 阶范德蒙行列式，由归纳假设得

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2 \leqslant j < i \leqslant n}(x_i - x_j),$$

于是上述 n 阶范德蒙行列式

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{2 \leqslant j < i \leqslant n}(x_i - x_j) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n}(x_i - x_j),$$

根据数学归纳法，对于一切 $n \geqslant 2$，式(1.13) 成立.

上面简要地介绍了常见的计算行列式的方法，在具体计算之前，应注意观察所给的行列式是否具有某些特点，然后考虑能否利用这些特点采取相应的方法，以达到简化计算的目的. 在计算以字母做元素的行列式时，更要注意简化.

综上所述，对于 n 阶行列式的计算，主要归纳为如下 5 种方法.

(1) 对二阶、三阶行列式按定义展开，直接计算.

(2) 对特殊的行列式，如上(下) 三角行列式，其值为主对角线元素的乘积.

(3) 利用 n 阶行列式定义，按某一行(或列) 的展开式展开，即

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}\,(i = 1, 2, \cdots, n),$$

或

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\,(j = 1, 2, \cdots, n),$$

将行列式化成低一阶行列式，反复使用，直至降到三阶或二阶行列式，然后直接计算.

(4) 利用性质 1.7 使行列式中产生足够多的零或化成上三角行列式，或降阶展开，这些是计算 n 阶数字行列式常用的"化零降阶" 法.

(5) 观察 n 阶行列式所具有的特点，首先计算四阶、五阶行列式，根据情况利用行列式的性质、行列式的展开式、递推公式，以及加"边" 等方法，或者综合运用上述方法来进行计算，然后利用归纳法进行推广，来计算其 n 阶行列式. 这是计算一般 n 阶行列式常用的最佳方法.

习题 1.2

参考答案与提示

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 99 & 201 & 298 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 234 & 420 & 186 \\ 97 & 220 & 104 \\ -40 & 20 & 21 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$；　(5) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 1 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$.

2. 证明下列等式：

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2a & a+b & 2b \end{vmatrix} = (b-a)^3$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)$；

(上述行列式称为四阶范德蒙行列式)

(4) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$.

3. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1/3 & -5/2 & 2/5 & 3/2 \\ 3 & -12 & 21/5 & 15 \\ 2/3 & -9/2 & 4/5 & 5/2 \\ -1/7 & 2/7 & -1/7 & 3/7 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$，　其中 $ab \neq 0$；

(3) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$；　(4) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}$.

1.3　克拉默法则及其应用

1.3.1　克拉默法则

n 阶行列式的概念是二阶、三阶行列式的推广，而二阶、三阶行列式来源于解线性方程组，