第 1 章　电磁场理论

1.1　麦克斯韦方程

19 世纪 60 年代，英国物理学家麦克斯韦(Maxwell)在前人成就的基础上，提出了涡旋电场和位移电流假设，并凭借他高深的数学造诣，将电磁场理论用简洁、对称、完美的数学形式表示出来，经后人整理和改写，成为完整描述客观电磁场的一套基本方程，称为麦克斯韦方程。根据这组方程，麦克斯韦预言了电磁波的存在，并确认光波的电磁本质。迄今为止，麦克斯韦的经典电磁理论仍然是分析光的传输问题的理论基础。

电磁场可以用电场强度 $\vec{E}$ 、电位移矢量 $\vec{D}$ 、磁场强度 $\vec{H}$ 以及磁感应强度 $\vec{B}$ 四个场矢量描述，它们是位置矢量 $\vec{r}$ 和时间 t 的函数，场矢量随空间和时间的变化规律由如下麦克斯韦方程给出

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{1.1-1a}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{J} \tag{1.1-1b}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho \tag{1.1-1c}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \tag{1.1-1d}$$

式中，$\vec{J}$ 为传导电流密度，ρ 为自由电荷密度。

实际应用中，为完全确定电磁场矢量随时间和空间的变化，除此基本方程外，还必须借助于电磁场与介质的相互作用关系，即物质方程

$$\vec{J}=\gamma\vec{E} \tag{1.1-2a}$$

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} \tag{1.1-2b}$$

$$\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M}) \tag{1.1-2c}$$

式中，γ 为介质的电导率，$\vec{P}$ 为介质的极化强度，$\vec{M}$ 为磁化强度，ε_0 和 μ_0 分别为真空介电常数和真空磁导率。如果是各向同性的线性介质，则其极化强度和磁化强度分别与电场强度和磁场强度成线性关系，即

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi_{\mathrm{e}}\vec{E} \tag{1.1-3a}$$

$$\vec{M}=\chi_{\mathrm{m}}\vec{H} \tag{1.1-3b}$$

式中，χ_{e} 和 χ_{m} 分别是介质的极化率和磁化率，则物质方程可简化为

$$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}\vec{E}=\varepsilon\vec{E} \tag{1.1-4a}$$

$$\vec{B}=\mu_0\mu_{\mathrm{r}}\vec{H}=\mu\vec{H} \tag{1.1-4b}$$

式中，$\varepsilon_{\mathrm{r}}=1+\chi_{\mathrm{e}}$，$\mu_{\mathrm{r}}=1+\chi_{\mathrm{m}}$，分别是介质的相对介电常数和相对磁导率，$\varepsilon$ 和 μ 分别是介质的介电常数和磁导率。介质的折射率 $n=\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}}$ ，对非铁磁性介质，$\mu_{\mathrm{r}}\approx 1$，因此认为一般情况下介质的折射率为 $n=\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}$ 。

在各向异性介质中，介质的极化强度和磁化强度与电磁场的方向有关，即 χ_{e} 和 χ_{m} 不再是

常数，因此ε和μ也不再是常数，它们都要用二阶张量表示。物质方程在直角（笛卡儿）坐标系中需写成

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{1.1-5a}$$

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \tag{1.1-5b}$$

当介质无吸收和无旋光性时，ε_{ij} 是实数，并且介电张量是对称的，即$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$。式(1.1-5a)经主轴变换后，介电张量只有三个对角分量，在主轴坐标系中物质方程可表示为

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{1.1-6}$$

对于非磁性各向异性介质，$\vec{B}$ 和 $\vec{H}$ 的关系与各向同性的介质是一样的，所以通常介质的各向异性主要表现在对电磁波中电场的作用。

1.2　电磁场边界条件

在利用麦克斯韦方程解决有限空间的电磁场问题，或者涉及两种及两种以上介质内的电磁场问题时，除了考虑物质方程外，还必须考虑介电常数不连续处的边界条件。因为物理量在界面上发生跃变，微分形式的麦克斯韦方程不再适用，需利用如下麦克斯韦方程的积分形式

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{L} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{1.2-1a}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{L} = \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{1.2-1b}$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \rho \mathrm{d}V \tag{1.2-1c}$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \tag{1.2-1d}$$

如图 1.1 所示，设两种介质的电磁参数分别为ε_1、μ_1 和ε_2、μ_2，折射率分别为 n_1 和 n_2，分界面法线方向的单位矢量为$\vec{n}$，切向单位矢量为$\vec{\tau}$。在界面附近沿界面的切向取一个小的狭长矩形回路，如图 1.1(a)所示。回路两个长边分别在两种介质内，平行并无限靠近界面，短边趋于零，则回路所围曲面面积趋于零，利用式(1.2-1a)和式(1.2-1b)，可得

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \tag{1.2-2a}$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_S \tag{1.2-2b}$$

式中，$\vec{J}_S$ 为面电流密度。

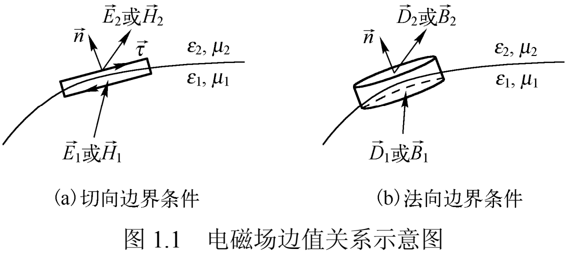

图 1.1　电磁场边值关系示意图

在两种介质的分界面附近取一小的扁平状圆柱，如图 1.1(b)所示。圆柱的两个底面分别在两种介质内，平行并无限靠近界面，柱高趋于零，则侧面面积趋于零，利用式(1.2−1c)和式(1.2−1d)，可得

$$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_S \tag{1.2-2c}$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \tag{1.2-2d}$$

式中，σ_S 为电荷面密度。

对非导电介质，$\sigma_S=0$，$J_S=0$，四个电磁场矢量的边界条件可简化为

$$\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \tag{1.2-3a}$$

$$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0 \tag{1.2-3b}$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=0 \tag{1.2-3c}$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \tag{1.2-3d}$$

该边界条件表明，在界面上，电位移矢量和磁感应强度的法向分量连续，电场强度和磁场强度的切向分量连续，即

$$D_{1n}=D_{2n} \tag{1.2-4a}$$

$$B_{1n}=B_{2n} \tag{1.2-4b}$$

$$E_{1\tau}=E_{2\tau} \tag{1.2-4c}$$

$$H_{1\tau}=H_{2\tau} \tag{1.2-4d}$$

对各向同性的线性介质，式(1.2−4a)也经常写作 $n_1^2E_{1n}=n_2^2E_{2n}$。

1.3　单色平面电磁波

确定频率的电磁波，电磁场对时间的依赖关系是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，所以单色电磁波的基本表示式为

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1.3-1a}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{H}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1.3-1b}$$

因而 $\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}=\mathrm{i}\omega\vec{E}$，$\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}=\mathrm{i}\omega\vec{H}$。对于各向同性的线性光学介质(通常为非导体)，$\rho=0$，$J=0$，$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，$\vec{B}=\mu\vec{H}$，由此，麦克斯韦方程式(1.1−1)可简化为不含时间因子的形式，即

$$\nabla\times\vec{E}=-\mathrm{i}\omega\mu\vec{H} \tag{1.3-2a}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\mathrm{i}\omega\varepsilon\vec{E} \tag{1.3-2b}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=0 \tag{1.3-2c}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \tag{1.3-2d}$$

上式为单色电磁波的基本方程。这组方程只有前两式是独立的，其他两式可以由前两式取散度运算导出。虽然对于非磁性介质，$\mu_\mathrm{r}\approx 1$，$\mu\approx\mu_0$，但为了方程形式上的完美和对称，这里仍用μ表示，只是涉及到具体数值运算时用μ_0代替μ。

按照激发形式的不同和传播介质及其边界条件的限制，电磁波的场强 $\vec{E}(\vec{r})$ 和 $\vec{H}(\vec{r})$ 可以有各种不同的形式。单色平面电磁波是电磁波的最单纯、最基本的理想形式，其特征是等相位面为平面，电磁波有确定的传播方向。场量可表示为

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}\vec{K}\cdot\vec{r}} \tag{1.3-3a}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{H}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}\vec{K}\cdot\vec{r}} \tag{1.3-3b}$$

式中，$\vec{E}_0$、$\vec{H}_0$ 为振幅矢量，$\vec{K}$ 为波矢，其方向为波的传播方向。将上面二式代入基本方程式(1.3−2a)和式(1.3−2b)，得

$$\vec{K}\times\vec{E}_0=\omega\mu\vec{H}_0 \tag{1.3-4a}$$

$$\vec{K}\times\vec{H}_0=-\omega\varepsilon\vec{E}_0 \tag{1.3-4b}$$

可见平面电磁波的 $\vec{K}$、$\vec{E}$、$\vec{H}$ 三矢量彼此正交，进而说明均匀介质中的平面电磁波是横电磁波（TEM 波）。由上式可得

$$KE_0=\omega\mu H_0 \tag{1.3-5a}$$

$$KH_0=\omega\varepsilon E_0 \tag{1.3-5b}$$

将式(1.3−5a)与式(1.3−5b)相除，得

$$\frac{E_0}{H_0}=\frac{\mu H_0}{\varepsilon E_0} \tag{1.3-6}$$

$$\frac{E_0}{H_0}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{1.3-7}$$

式中，$\sqrt{\mu/\varepsilon}$ 为介质的波阻抗，用 Z 表示，也可以写作 $Z=Z_0/n$，其中 $Z_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}=376.7\Omega$，称作真空波阻抗。

将式(1.3−5a)与式(1.3−5b)相乘，得

$$K^2=\omega^2\mu\varepsilon=\omega^2\mu_0\varepsilon_0 n^2 \tag{1.3-8}$$

或者

$$K=n\frac{\omega}{c}=nK_0 \tag{1.3-9}$$

$$K_0=\omega/c=2\pi/\lambda \tag{1.3-10}$$

λ和 K_0 分别代表电磁波在真空中的波长和波数。

1.4 坡印亭矢量和传输功率

电磁场的瞬态能量密度为

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon E^2(\vec{r},t)+\frac{1}{2}\mu H^2(\vec{r},t) \tag{1.4-1}$$

电磁波传输的能流密度，即单位时间内通过单位面积的能量，由坡印亭(Poynting)矢量表示为

$$\vec{S}=\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t) \tag{1.4-2}$$

对式(1.3−1)表示的单色电磁波，因为含有时间因子项 $e^{i\omega t}$，所以上式表示的是电磁场的瞬态能流密度。为了得到实际能流密度，需要进行适当的时间平均。现有电磁理论中，$\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 除时间因子外，$E(\vec{r})$ 和 $H(\vec{r})$ 也往往用复数形式表示，所以对它们的二次形式的运算必须进行实数化处理，将式(1.4−2)写作

$$\begin{aligned}\vec{S}&=\mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r},t)\right]\times\mathrm{Re}\left[\vec{H}(\vec{r},t)\right]\\&=\frac{1}{2}[\vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}+\vec{E}^*(\vec{r})e^{-i\omega t}]\times\frac{1}{2}[(\vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}+\vec{H}^*(\vec{r})e^{-i\omega t}]\end{aligned} \tag{1.4-3}$$

注意到在式(1.4−3)展开式的 4 项中，$\vec{E}\times\vec{H}$ 和 $\vec{E}^*\times\vec{H}^*$ 两项分别含有 $e^{i2\omega t}$ 和 $e^{-i2\omega t}$ 因子，因而时间平均值为零，所以可得到平均能流密度

$$\bar{\vec{S}}=\frac{1}{4}[\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^*(\vec{r})+\vec{E}^*(\vec{r})\times\vec{H}(\vec{r})]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^*(\vec{r})] \tag{1.4-4}$$

这也是文献中经常引用的公式。单位时间通过某曲面 S 的能流，即通过 S 面的传输功率为

$$P=\iint_S \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^*(\vec{r})]\cdot\vec{n}\mathrm{d}S \tag{1.4-5}$$

在直角坐标系中，当光波沿 z 轴传播时，坡印亭矢量只有 z 分量。光强可表示为

$$I=\left|\bar{S}_z\right|=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[E_x(x,y)H_y^*(x,y)-E_y(x,y)H_x^*(x,y)\right] \tag{1.4-6}$$

传输功率的表达式为

$$P=\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_xH_y^*-E_yH_x^*)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.4-7}$$

对于单色平面波，平均能量密度为

$$\bar{w}=\frac{1}{4}\varepsilon E_0^2+\frac{1}{4}\mu H_0^2=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 \tag{1.4-8}$$

平均能流密度和光强分别为

$$\bar{\vec{S}}=\frac{1}{2}\vec{E}_0\times\vec{H}_0 \tag{1.4-9}$$

$$I=\frac{1}{2}E_0H_0=\frac{\bar{w}c}{n} \tag{1.4-10}$$

1.5 亥姆霍兹方程

在各向同性的线性光学介质中，考虑到非均匀情况，介电常数ε依赖于空间位置，即 $\varepsilon=\varepsilon(\vec{r})$，但磁导率$\mu$总是近似等于真空磁导率$\mu_0$。为得到 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 各自独立的方程，对与时间无关的基本方程式(1.3−2a)：$\nabla\times\vec{E}=-\mathrm{i}\omega\mu\vec{H}$ 和式(1.3−2b)：$\nabla\times\vec{H}=\mathrm{i}\omega\varepsilon\vec{E}$ 进行微分运算，得

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=-\mathrm{i}\omega\mu\nabla\times\vec{H} \tag{1.5-1a}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{H}=\mathrm{i}\omega\nabla\times\varepsilon\vec{E} \tag{1.5-1b}$$

再利用矢量微分公式：$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$，将上面二式化为

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=K^2\vec{E} \tag{1.5-2a}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{H})-\nabla^2\vec{H}=\mathrm{i}\omega\varepsilon\nabla\times\vec{E}+\mathrm{i}\omega\nabla\varepsilon\times\vec{E} \tag{1.5-2b}$$

同时注意到$\nabla\cdot\vec{B}=0$，则有$\nabla\cdot\vec{H}=0$。再由$\nabla\cdot\vec{D}=0$，可得

$$\nabla\cdot\varepsilon\vec{E}=\nabla\varepsilon\cdot\vec{E}+\varepsilon\nabla\cdot\vec{E}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=-\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\vec{E}=-\frac{\nabla\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\cdot\vec{E} \tag{1.5-3}$$

由此得到非均匀介质中关于电场和磁场的独立的微分方程，即亥姆霍兹(Helmholtz)方程

$$\nabla^2\vec{E}+n^2K_0^2\vec{E}+\nabla\left(\frac{\nabla\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\cdot\vec{E}\right)=0 \tag{1.5-4a}$$

$$\nabla^2\vec{H}+n^2K_0^2\vec{H}+\frac{\nabla\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\times(\nabla\times\vec{H})=0 \tag{1.5-4b}$$

对于非均匀介质，上面两方程中含$\nabla\varepsilon_{\mathrm{r}}/\varepsilon_{\mathrm{r}}$的附加项不能随意舍弃，由于方程的复杂性，求解是很困难的。但在研究光波导中的光传输特性时，所涉及的介质要么分区均匀，要么介质折射率或相对介电常数随空间位置变化缓慢。当介质均匀时，$\nabla\varepsilon_{\mathrm{r}}=0$，式(1.5−4)简化为

$$\nabla^2 \vec{E} + n^2 K_0^2 \vec{E} = 0 \tag{1.5-5a}$$

$$\nabla^2 \vec{H} + n^2 K_0^2 \vec{H} = 0 \tag{1.5-5b}$$

这是标准的常系数亥姆霍兹方程。当介质缓慢变化时，如在电磁场的波长λ范围内，满足条件$|\nabla \varepsilon_{\mathrm{r}} / \varepsilon_{\mathrm{r}}| \lambda \ll 1$，这种介质称作缓变介质。以方程(1.5-4b)为例，比较第三项与第二项的大小，因为一般空间矢量算符∇作用于某一场量时，形式上可等效于$\mathrm{i}\vec{K}$对场量作用，由此，两项大小之比为

$$\frac{|\nabla \varepsilon_{\mathrm{r}} \times (\nabla \times \vec{H}) / \varepsilon_{\mathrm{r}}|}{n^2 K_0^2 H} \leqslant \frac{|\nabla \varepsilon_{\mathrm{r}} K / \varepsilon_{\mathrm{r}}|}{n^2 K_0^2} = \frac{|\nabla \varepsilon_{\mathrm{r}}|}{\varepsilon_{\mathrm{r}} n K_0} = \frac{|\nabla \varepsilon_{\mathrm{r}}| \lambda}{\varepsilon_{\mathrm{r}}} \frac{1}{2\pi n}$$

方程(1.5-4a)的第三项与第二项大小之比也有同样的结果。对缓变介质，这一比值一般小于10^{-2}。实际波导和光纤，介质的非均匀性通常满足缓变条件，所以，忽略式(1.5-4)两个方程中的最后一项，仍可保持较高精度的近似。从而得到变系数的亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \vec{E} + n^2(\vec{r}) K_0^2 \vec{E} = 0 \tag{1.5-6a}$$

$$\nabla^2 \vec{H} + n^2(\vec{r}) K_0^2 \vec{H} = 0 \tag{1.5-6b}$$

1.6　平面电磁波的反射和折射

电磁波入射到介质分界面时，将发生反射和折射现象。如图 1.2 所示，设电磁波以入射角α从介质 1 射向介质 2，$x=0$ 平面为分界面，反射角为α'，折射角为γ。入射波、反射波和折射波三个平面波分别表示为

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{K}_1 \cdot \vec{r}}, \qquad \vec{E}_2 = \vec{E}_{20} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{K}_2 \cdot \vec{r}}, \qquad \vec{E}_3 = \vec{E}_{30} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{K}_3 \cdot \vec{r}}$$

根据边界条件式(1.2-3a)，有

$$\vec{n} \times (\vec{E}_{10} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{K}_1 \cdot \vec{r}} + \vec{E}_{20} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{K}_2 \cdot \vec{r}}) = \vec{n} \times \vec{E}_{30} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{K}_3 \cdot \vec{r}} \tag{1.6-1}$$

由于$\vec{K} \cdot \vec{r} = K_x x + K_y y + K_z z$，特别地，在 $x=0$ 界面上，$\vec{K} \cdot \vec{r} = K_y y + K_z z$。若要求在 $x=0$ 平面上满足式(1.6-1)，即电场强度$\vec{E}$的切向分量在$x=0$平面上处处保持连续，必有

$$K_{1y} = K_{2y} = K_{3y} \tag{1.6-2}$$

$$K_{1z} = K_{2z} = K_{3z} \tag{1.6-3}$$

如入射波矢在 xOz 平面内，则$K_{1y} = K_{2y} = K_{3y} = 0$，说明入射波、反射波和折射波在同一平面内。

由式(1.6-3)很容易得出$\alpha = \alpha'$，$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\gamma$，即所熟知的反射定律和折射定律。

由上述结果，简化式(1.6-1)，得

$$\vec{n} \times \vec{E}_{10} + \vec{n} \times \vec{E}_{20} = \vec{n} \times \vec{E}_{30} \tag{1.6-4}$$

同样，根据磁场强度$\vec{H}$的切向分量处处保持连续的边界条件式(1.2-3b)，有

$$\vec{n} \times \vec{H}_{10} + \vec{n} \times \vec{H}_{20} = \vec{n} \times \vec{H}_{30} \tag{1.6-5}$$

由于每一束平面电磁波都有两个独立的偏振态，下面按两种偏振状态分别处理。如图 1.2 所示，一种为电场振动方向垂直于入射面，称 TE 偏振；一种为磁场振动方向垂直于入射面，称 TM 偏振。

- 当电磁波呈 TE 偏振态时，$\vec{E}$矢量垂直于入射面，电场切向分量 E_y 和磁场切向分量 H_z 连续，因此

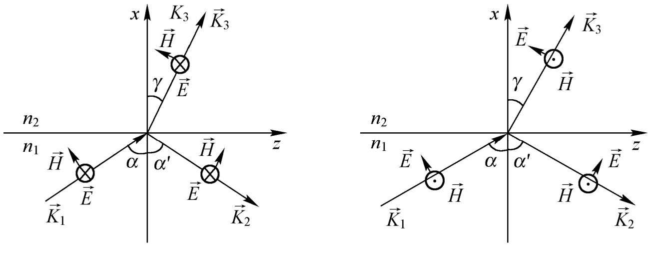

图 1.2　电磁波在介质界面上的反射与折射

$$E_{10} + E_{20} = E_{30} \qquad (E_y \text{连续}) \tag{1.6-6}$$

$$H_{10}\cos\alpha - H_{20}\cos\alpha = H_{30}\cos\gamma \qquad (H_z \text{连续}) \tag{1.6-7}$$

根据式(1.3-7)，$E_0 / H_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$，且 $\mu = \mu_0$，式(1.6-7)可写成

$$n_1 E_{10}\cos\alpha - n_1 E_{20}\cos\alpha = n_2 E_{30}\cos\gamma \tag{1.6-8}$$

由式(1.6-6)和式(1.6-8)可得 TE 偏振下的反射系数和折射系数，分别为

$$r_{\mathrm{TE}} = \frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{n_1\cos\alpha - n_2\cos\gamma}{n_1\cos\alpha + n_2\cos\gamma} = -\frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)} \tag{1.6-9}$$

$$t_{\mathrm{TE}} = \frac{E_{30}}{E_{10}} = \frac{2n_1\cos\alpha}{n_1\cos\alpha + n_2\cos\gamma} = \frac{2\cos\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} \tag{1.6-10}$$

- 当电磁波呈 TM 偏振态时，$\vec{H}$ 矢量垂直于入射面，磁场切向分量 H_y 和电场切向分量 E_z 连续，因此

$$H_{10} + H_{20} = H_{30} \qquad (H_y \text{连续}) \tag{1.6-11}$$

$$E_{10}\cos\alpha - E_{20}\cos\alpha = E_{30}\cos\gamma \qquad (E_z \text{连续}) \tag{1.6-12}$$

同样根据 $E_0 / H_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$，式(1.6-11)可写成

$$n_1 E_{10} + n_1 E_{20} = n_2 E_{30} \tag{1.6-13}$$

由式(1.6-12)和式(1.6-13)可得 TM 偏振下的反射系数和折射系数，分别为

$$r_{\mathrm{TM}} = \frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{n_2\cos\alpha - n_1\cos\gamma}{n_2\cos\alpha + n_1\cos\gamma} = \frac{\tan(\alpha-\gamma)}{\tan(\alpha+\gamma)} \tag{1.6-14}$$

$$t_{\mathrm{TM}} = \frac{E_{30}}{E_{10}} = \frac{2n_1\cos\alpha}{n_2\cos\alpha + n_1\cos\gamma} = \frac{2\cos\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma)} \tag{1.6-15}$$

上述表示入射波、反射波及折射波的振幅关系的公式称为菲涅耳(Fresnel)公式，两种偏振状态下的反射率和透射率分别为

$$R_{\mathrm{TE}} = \left|r_{\mathrm{TE}}\right|^2 \tag{1.6-16}$$

$$T_{\mathrm{TE}} = \frac{n_2\cos\gamma}{n_1\cos\alpha}\left|t_{\mathrm{TE}}\right|^2 \tag{1.6-17}$$

$$R_{\mathrm{TM}} = \left|r_{\mathrm{TM}}\right|^2 \tag{1.6-18}$$

$$T_{\mathrm{TM}} = \frac{n_2\cos\gamma}{n_1\cos\alpha}\left|t_{\mathrm{TM}}\right|^2 \tag{1.6-19}$$

并且对 TE 和 TM 偏振，均有

$$R + T = 1 \tag{1.6-20}$$

1.7　光的全反射与倏逝波

设两种介质的折射率分别为 n_1 和 n_2，光波由介质 1 向介质 2 入射时，若 $n_1 > n_2$，根据折射定律，折射角 γ 将大于入射角 α。当 $\gamma = 90°$ 时，入射角

$$\alpha_{\mathrm{c}} = \arcsin\frac{n_2}{n_1} \tag{1.7-1}$$

若入射角再增大，折射角将失去实数意义，折射光波会表现出不同于一般折射光波的物理特性。这时反射率 $R=1$，所以称作全反射。α_{c} 为全反射临界角，产生全反射的条件是 $\alpha > \alpha_{\mathrm{c}}$。

入射光、反射光、折射光三个光束的相应波数分别是 $K_1 = n_1 K_0$、$K_2 = n_1 K_0$、$K_3 = n_2 K_0$。发生全反射时，介质分界面两侧电磁场的边值关系仍然成立，这里分析折射光波的波矢分量，由式(1.6−3)得

$$K_{3z} = K_{1z} = n_1 K_0 \sin\alpha \tag{1.7-2}$$

$$K_{3x} = \sqrt{K_3^2 - K_{3z}^2} = K_0\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\alpha} \tag{1.7-3}$$

当发生全反射时，$\sin\alpha > n_2/n_1$，所以 K_{3x} 为虚数，即

$$K_{3x} = \pm \mathrm{i} K_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2\alpha - n_2^2} = \pm \mathrm{i} K_0 \delta \tag{1.7-4}$$

其中

$$\delta = \sqrt{n_1^2 \sin^2\alpha - n_2^2} \tag{1.7-5}$$

此时折射光可表示为

$$\vec{E}_3(\vec{r}) = \vec{E}_{30} \mathrm{e}^{-K_0 \delta x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i} K_{3z} z} \tag{1.7-6}$$

注意，这里为保证场沿 x 轴正向不为无穷大，式(1.7−4)取负号。所以，当 $\sin\alpha > n_2/n_1$ 时，折射光沿表面传播(z 方向)，并在垂直表面方向(x 方向)迅速衰减，该折射光波被称作“倏逝波(Evanescent wave)”，或“消逝波”、“隐逝波”、“表面波”，这时正常的折射光消失。

倏逝波在第二种介质中的透射深度，定义为在垂直表面方向振幅减小为表面处振幅的 1/e 的距离，即

$$d = \frac{1}{K_0 \delta} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{n_1^2 \sin^2\alpha - n_2^2}} \tag{1.7-7}$$

1.8 全反射相移与古斯−汉森位移

全反射条件下，菲涅耳公式不成立，$\cos\gamma$ 失去实数意义，因此反射光束和入射光束之间的关系也必须重新确定。仍采用图 1.2 的坐标系，设入射面为 xOz 平面，下面分别讨论两种偏振状态。

TE 偏振下，电磁波的场分量只有 E_y、H_x、H_z，其余分量均为零。根据切向分量连续的边界条件，有

$$E_{1y} + E_{2y} = E_{3y} \tag{1.8-1}$$

$$H_{1z} + H_{2z} = H_{3z} \tag{1.8-2}$$

由平面波方程式(1.3−4a)：$\vec{K} \times \vec{E} = \omega\mu\vec{H}$，得

$$K_x E_y = \omega\mu H_z \tag{1.8-3}$$

将该式代入式(1.8−2)，得

$$K_{1x} E_{1y} + K_{2x} E_{2y} = K_{3x} E_{3y} \tag{1.8-4}$$

其中 $K_{1x} = n_1 K_0 \cos\alpha$，$K_{2x} = -n_1 K_0 \cos\alpha$，并且

$$K_{3x} = -\mathrm{i} K_0 \delta \tag{1.8-5}$$

由此可得

$$n_1 K_0 \cos\alpha (E_{1y} - E_{2y}) = -\mathrm{i} K_0 \delta (E_{1y} + E_{2y})$$

所以，全反射条件下的反射系数为

$$\frac{E_{2y}}{E_{1y}}=\frac{n_1\cos\alpha+\mathrm{i}\delta}{n_1\cos\alpha-\mathrm{i}\delta}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi_{\mathrm{TE}}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi_{\mathrm{TE}}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\Phi_{\mathrm{TE}}} \tag{1.8-6}$$

其中
$$\Phi_{\mathrm{TE}}=\arctan\frac{\delta}{n_1\cos\alpha} \tag{1.8-7}$$

即
$$\Phi_{\mathrm{TE}}=\arctan\frac{\sqrt{\sin^2\alpha-n_2^2/n_1^2}}{\cos\alpha} \tag{1.8-8}$$

上述推导表明反射波与入射波振幅相等，相位差为$2\Phi_{\mathrm{TE}}$。所以 TE 偏振下全反射相移为

$$\Gamma=2\Phi_{\mathrm{TE}} \tag{1.8-9}$$

TM 偏振下，电磁波的场分量只有H_y、E_x、E_z，其余分量均为零。同样根据切向分量连续的边界条件，有

$$H_{1y}+H_{2y}=H_{3y} \tag{1.8-10}$$

$$E_{1z}+E_{2z}=E_{3z} \tag{1.8-11}$$

由平面波方程式(1.3-4b)：$\vec{K}\times\vec{H}=-\omega\varepsilon\vec{E}$，得

$$K_xH_y=-\omega\varepsilon_0n^2E_z \tag{1.8-12}$$

将该式代入式(1.8-11)，得

$$\frac{1}{n_1^2}K_{1x}H_{1y}+\frac{1}{n_1^2}K_{2x}H_{2y}=\frac{1}{n_2^2}K_{3x}H_{3y} \tag{1.8-13}$$

结合式(1.8-10)，有
$$n_1K_0\cos\alpha(H_{1y}-H_{2y})=-\mathrm{i}K_0\delta\frac{n_1^2}{n_2^2}(H_{1y}+H_{2y}) \tag{1.8-14}$$

从而得到 TM 偏振波在全反射条件下的反射系数

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{H_{2y}}{H_{1y}}=\frac{n_1\cos\alpha+\mathrm{i}\delta n_1^2/n_2^2}{n_1\cos\alpha-\mathrm{i}\delta n_1^2/n_2^2}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi_{\mathrm{TM}}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi_{\mathrm{TM}}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\Phi_{\mathrm{TM}}} \tag{1.8-15}$$

其中
$$\Phi_{\mathrm{TM}}=\arctan\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{\delta}{n_1\cos\alpha} \tag{1.8-16}$$

即
$$\Phi_{\mathrm{TM}}=\arctan\left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{\sqrt{\sin^2\alpha-n_2^2/n_1^2}}{\cos\alpha}\right) \tag{1.8-17}$$

同样表明反射波与入射波振幅相等，相位差为$2\Phi_{\mathrm{TM}}$。所以 TM 偏振下全反射相移为

$$\Gamma=2\Phi_{\mathrm{TM}} \tag{1.8-18}$$

全反射相移Γ与入射角α有关，图 1.3 示出了在几种确定折射率比的情况下，两种偏振状态Γ对α的依赖关系：入射角从全反射临界角增至 90°，全反射相移从 0 增至π。

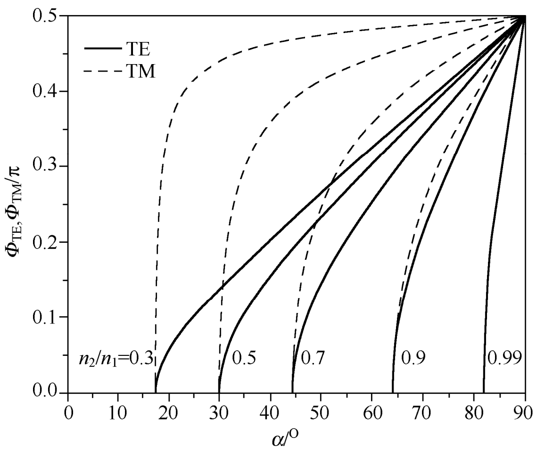

图 1.3　全反射相移与入射角的关系

前面的分析，都是认为光束的反射点与入射点在同一位置，然而 Goos 和 Hänchen 通过实验精确测出全反射光线的位置，发现并不像通常认为的那样，而是沿表面产生了一个位移Δz，从而使反射光线产生一侧向位移 D，如图 1.4 所示，这一位移 D 称作古斯–汉森(Goos-Hänchen)位移。位移的大小与入射角和偏振状态有关，是波长的量级。

上面已经给出了全反射相移Γ，进一步应用电磁波理论可以证明

$$\Delta z=\frac{\partial \Gamma}{\partial \beta} \tag{1.8-19}$$

式中，$\beta=n_1 k_0 \sin\alpha$。设 $n_{21}=n_2/n_1$，那么 TE 和 TM 偏振的 Goos-Hänchen 位移分别为

$$D_{\mathrm{TE}}=\frac{\lambda_1}{\pi}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha-n_{21}^2}} \tag{1.8-20}$$

$$D_{\mathrm{TM}}=\frac{n_{21}^2}{\left(1+n_{21}^2\right)\sin^2\alpha-n_{21}^2}D_{\mathrm{TE}} \tag{1.8-21}$$

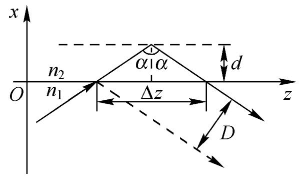

图 1.4　Goos-Hänchen 位移

在入射角接近全反射临界角时，Goos-Hänchen 位移最大，随入射角的增大而快速减小，如图 1.5 所示。可以这样理解全反射时的光线传播：入射光线穿过界面一定深度，在第二种介质中的某虚平面上进行无相移的全反射，导致实际界面上的反射点与入射点有一距离。从中还可以得出光线的入射深度

$$d=\frac{1}{2}\Delta z\cdot\cot\alpha=\frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{n_1^2\sin^2\alpha-n_2^2}} \tag{1.8-22}$$

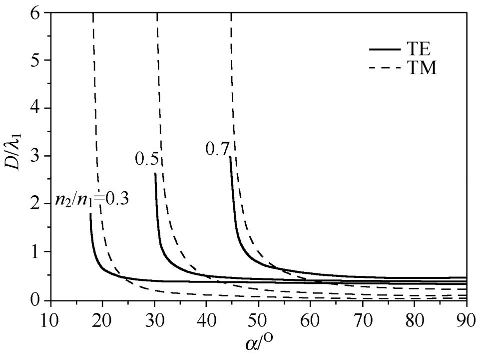

图 1.5　Goos-Hänchen 位移与入射角的关系

这和倏逝波的穿透深度[式(1.7-7)]刚好是一致的。实际上，全反射相移和 Goos-Hänchen 位移以及倏逝波是紧密相关的，在波导和光纤理论、金属表面波、近场光学中均有广泛的应用。

习题

1-1　基本概念：波矢，波数，波阻抗，缓变介质，坡印亭矢量，电磁波能量密度，能流密度，光强，倏逝波，穿透深度，全反射相移，古斯–汉森位移。

1-2　设单色电磁波的场为 $\vec{E}=\vec{E}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，$\vec{H}=\vec{H}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，写出关于 $\vec{E}(\vec{r})$ 和 $\vec{H}(\vec{r})$ 的 Maxwell 方程的矢量形式和分量形式。

1-3　推导菲涅耳公式。

1-4　分别推导 TE 偏振波和 TM 偏振波的全反射相移。

1-5　讨论全反射相移与古斯–汉森位移之间的关系。