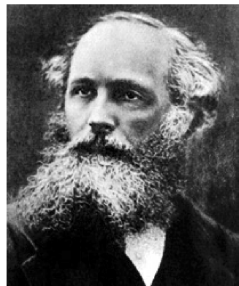


第1章 基本定理与基本辐射元

1864年,英国詹姆斯·麦克斯韦教授(见图1.1-1)集以往电磁学实践与理论研究之大成,创立了适用于一切宏观电磁场的普遍方程组——麦克斯韦方程组。基于该方程组所建立的电磁场理论正是求解天线和其他电磁学问题的理论基础。本章将从复习电磁场基本方程开始,简要地介绍天线研究中的电磁场基本定理,如唯一性定理、坡印廷定理、对偶原理、镜像原理、等效原理和互易定理等。并重点研究在处理天线辐射问题中引入的三种基本辐射元:电流元、磁流元和惠更斯元。



James Clerk Maxwell
(1831—1879)

图1.1-1 詹姆斯·麦克斯韦

1.1 电磁场基本方程

1.1.1 麦克斯韦方程组

描述电磁场及其场源的基本物理量名称^①及单位^②为:

$\vec{E}(t)$ ——电场强度, V/m

$\vec{H}(t)$ ——磁场强度, A/m

$\vec{D}(t)$ ——电通密度, C/m²

$\vec{B}(t)$ ——磁通密度, Wb/m² = V · S/m² = T

$\vec{J}(t)$ ——体电流密度, A/m²

$\rho_v(t)$ ——体电荷密度, C/m³

如上所示,本书中用字母上方加短横线来表示矢量,如 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 等;若在字母上方加“^”,则表示单位矢量,如 $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 等。

适用于一切宏观电磁场的麦克斯韦方程组微分形式如下:

$$\nabla \times \vec{E}(t) = - \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \quad (1.1-1a)$$

$$\nabla \times \vec{H}(t) = \vec{J}(t) + \frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} \quad (1.1-1b)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(t) = \rho_v(t) \quad (1.1-1c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(t) = 0 \quad (1.1-1d)$$

方程(1.1-1a)为法拉第电磁感应定律,方程(1.1-1b)为安培-麦克斯韦全电流定律,方程(1.1-1c)为高斯定理,方程(1.1-1d)为磁通连续性原理。联系电流与电荷的电流连续性方程微分形式为:

$$\nabla \cdot \vec{J}(t) = - \frac{\partial \rho_v(t)}{\partial t} \quad (1.1-1e)$$

① 本书叙述中有时也采用简化的名称,如将“电场强度”简称为“电场”,将“体电流密度”简称为“电流密度”或“电流”等。

② 本书全部采用国际单位制(SI制),基本单位是m(米)、kg(千克)、s(秒)和A(安培)等。其他物理量可参阅书末文献[10°]的附录C。

以上5个方程式中的物理量都既是时间 t 的函数,又是空间观察点坐标 (x, y, z) 的函数。后面主要研究时谐电磁场,其场量都以角频率 ω 随时间按正弦律变化,可表示为(例如):

$$\bar{E}(t) = \text{Re}[\bar{E}e^{j\omega t}] \quad (1.1-2)$$

这样表示时,式中的 $\bar{E}$ 及 $\bar{H}$ 、 $\bar{D}$ 、 $\bar{B}$ 、 $\bar{J}$ 和 ρ_v 等不再是时间 t 的函数,而只是空间观察点坐标 (x, y, z) 的函数,称为复场量或相量(具有模和相角)。利用式(1.1-2)表示后,式(1.1-1)中的时间导数因子 $\partial/\partial t$ 简化为 $j\omega$,各时变量都由其对应的复场量来取代。这样便将四维 (x, y, z, t) 问题简化为三维 (x, y, z) 问题。本书下面都是采用复场量来研究。

对于均匀、线性、各向同性的媒质(称为简单媒质),复场量之间有以下本构关系^①:

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E} \quad (1.1-3a)$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \quad (1.1-3b)$$

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} \quad (1.1-3c)$$

天线工程中求解的是天线周围空气中的场,空气媒质一般可作为真空来近似。对真空有

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m} \\ \mu &= \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \\ \sigma &= 0 \end{aligned} \quad (1.1-4)$$

对时谐电磁场(也称为正弦电磁场),采用复场量表示并利用上述本构关系后,便得到下述限定形式(限于给定媒质)的复麦克斯韦方程组及复连续性方程:

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \quad (1.1-5a)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + j\omega\varepsilon\bar{E} \quad (1.1-5b)$$

$$\nabla \cdot \bar{E} = \rho_v/\varepsilon \quad (1.1-5c)$$

$$\nabla \cdot \bar{H} = 0 \quad (1.1-5d)$$

$$\nabla \cdot \bar{J} = -j\omega\rho_v \quad (1.1-5e)$$

电场强度矢量 $\bar{E}$ 和磁场强度矢量 $\bar{H}$ 都分别由其旋度和散度唯一地确定,因此方程(1.1-5a)~(1.1-5d)是确定电场和磁场的完整方程组。但该方程组中的四个方程并不都是独立的。利用两个旋度方程(a)、(b)加连续性方程(e)可导出两个散度方程(c)、(d)。因而只有旋度方程(a)、(b)是独立方程。同时,连续性方程(e)给出了电流 $\bar{J}$ 与电荷 ρ_v 的关系,二者中也只有一个是独立的。在天线问题中,通常都取 $\bar{J}$ 作为独立场源。

1.1.2 边界条件和唯一性定理

电磁场麦克斯韦方程组的定解需利用边界条件才能完成。时谐场中充分的边界条件是:在两种不同媒质①②的分界面上有:

$$\hat{n} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0 \quad (1.1-6a)$$

$$\hat{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_s \quad (1.1-6b)$$

式中 $\hat{n}$ 是分界面的法向单位矢量,由媒质②指向媒质①(即媒质②的外法向); $\bar{J}_s$ 是仅在分界面表面流动的面电流密度,单位为A/m,仅当媒质②或①为理想导体时才有 $\bar{J}_s \neq 0$ 。

当媒质②为理想导体时, $\sigma_2 \rightarrow \infty$,上述边界条件化为

^① 严格地说, ε 和 μ 都是复数,但在大多数天线问题中,它们可近似看成实数。

$$\hat{n} \times \bar{E}_t = 0, \quad \text{即 } E_{t1} = 0 \quad (1.1-7a)$$

$$\hat{n} \times \bar{H}_1 = \bar{J}_s, \quad \text{即 } H_{1t} = J_s \quad (1.1-7b)$$

式中下标 t 表示切向(tangential)分量。二式表示:理想导体表面切向电场为零,而表面切向磁场等于该处的面电流密度。以上边界条件公式中的场量都是指边界上的值,且对边界上所有点都成立。

时谐电磁场的唯一性定理叙述如下:“对于一个有耗区域,区域中的场源,加上边界上的电场切向分量,或边界上的磁场切向分量,或部分边界上的电场切向分量和其余边界上的磁场切向分量,唯一地确定该区域中的场。”可见,应用上述切向场边界条件求得的解,必定是唯一解。无耗媒质中的场可看成是有耗媒质中损耗非常小时的相应场。

1.1.3 坡印廷定理

电磁场是具有能量的。坡印廷定理就是电磁场中的能量守恒定律。时谐电磁场的坡印廷定理表达为:对一个由封闭面 s 所包围的体积 v , 场源供给体积 v 的复功率 P_s 等于流出 s 面的复功率 P_f 、 v 内的时间平均(实)损耗功率 P_σ 和 v 内的时间平均电磁场(虚)储存功率之总和。即

$$P_s = P_f + P_\sigma + j2\omega(W_m^{av} - W_e^{av}) \quad (1.1-8)$$

由 s 面流出的复功率(the complex power flowing out a closed surface)为

$$P_f = \int_s \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* \cdot \bar{ds} \quad (1.1-9)$$

式中 $\bar{ds} = \hat{n}ds$, $\hat{n}$ 是 s 面的外法向单位矢量。积分号内的被积函数称为复坡印廷矢量:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* \quad (1.1-10)$$

它代表观察点处的电磁场复功率密度,其实部即为其功率密度,单位是 W/m^2 (瓦/米²);式中 $\bar{H}^*$ 是 $\bar{H}$ 的共轭复数。由于 $\bar{E}$ 和 $\bar{H}$ 是峰值相量而不是均方根值,因而式中出现 $\frac{1}{2}$ 。 v 内的时间平均损耗功率为

$$P_\sigma = \int_v \frac{1}{2} \sigma E^2 dv \quad (1.1-11)$$

v 内的时间平均存储磁能和电能分别为

$$W_m^{av} = \int_v \frac{1}{4} \mu H^2 dv \quad (1.1-12a)$$

$$W_e^{av} = \int_v \frac{1}{4} \epsilon E^2 dv \quad (1.1-12b)$$

若外加场源的体电流密度为 $\bar{J}_e$, 则场源供给的复功率为

$$P_s = - \int_v \frac{1}{2} \bar{E} \cdot \bar{J}_e^* dv \quad (1.1-13)$$

我们特别关心的是实功率,对式(1.1-8)取实部,得

$$- \int_v \text{Re} \left[\frac{1}{2} \bar{E} \cdot \bar{J}_e^* \right] dv = \int_s \text{Re} \left[\frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* \right] \cdot \bar{ds} + \int_v \frac{1}{2} \sigma E^2 dv \quad (1.1-14)$$

这就是说,对封闭面 s 所包围的体积 v , 场源供给的实功率等于流出 s 面的实功率和 v 内损耗功率之和。

1.1.4 辐射问题中麦克斯韦方程组的求解

辐射研究中的一个基本问题是,给定场源分布如何求解其周围空间的电磁场。在 1.1.1 节中已经提到,我们只需求解麦克斯韦方程组的两个旋度方程:

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \quad (1.1-5a)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + j\omega\varepsilon\bar{E} \quad (1.1-5b)$$

为导出只含 $\bar{E}$ 的方程, 可对式(1.1-5a)两边取旋度, 而将右边所得的 $\nabla \times \bar{H}$ 用式(1.1-5b)代入, 并将左边 $\nabla \times \nabla \times \bar{E}$ 用矢量恒等式展开。按此步骤得

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} = -j\omega\mu(\bar{J} + j\omega\varepsilon\bar{E})$$

上式左边的 $\nabla \cdot \bar{E}$ 可用式(1.1-5c)关系代入, 从而有

$$\nabla^2 \bar{E} = j\omega\mu\bar{J} - \omega^2\mu\varepsilon\bar{E} + \nabla(\rho_v/\varepsilon)$$

$$\text{即} \quad \nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = j\omega\mu\bar{J} - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \bar{J}) \quad (1.1-15)$$

$$\text{同理可得} \quad \nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} = -\nabla \times \bar{J} \quad (1.1-16)$$

式中 $k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$ 。该二式称为电磁场 $\bar{E}$ 和 $\bar{H}$ 的非齐次矢量波动方程或亥姆霍兹(Hermann von Helmholtz, 德, 1821—1894)方程。在无源区域中, 它们化为齐次矢量波动方程:

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = 0 \quad (1.1-17)$$

$$\nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} = 0 \quad (1.1-18)$$

对于源区, 式(1.1-15)和式(1.1-16)中场强与场源电流密度的关系相当复杂, 给求解带来困难。通常都不直接求解这两个方程, 而是引入辅助函数间接地求解 $\bar{E}$ 和 $\bar{H}$ 。常用的辅助函数为磁矢位 $\bar{A}$ 和电标位 ϕ 。实际上只用磁矢位 $\bar{A}$ 即可, 因而将此解法称为矢位法。其公式在一般电磁场教材(例如基本参考书[10°])中已有详细推导, 这里仅简要介绍。

由式(1.1-5d)可知, $\nabla \cdot \bar{H} = 0$; 根据矢量恒等式 $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{A}) = 0$, 令

$$\bar{H} = \nabla \times \bar{A} \quad (1.1-19)$$

将此式代入式(1.1-5a)得

$$\nabla \times (\bar{E} + j\omega\mu\bar{A}) = 0 \quad (1.1-20)$$

根据矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \phi = 0$, 令

$$\bar{E} + j\omega\mu\bar{A} = -\nabla\phi, \quad \text{即} \quad \bar{E} = -j\omega\mu\bar{A} - \nabla\phi \quad (1.1-21)$$

这里 $\nabla\phi$ 前加负号是使 $\omega = 0$ 时上式化为静电场的 $\bar{E} = -\nabla\phi$ 。

将式(1.1-19)和式(1.1-21)代入式(1.1-5b)可得 $\bar{A}$ 的方程:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \bar{J} + j\omega\varepsilon(-j\omega\mu\bar{A} - \nabla\phi)$$

左边用矢量恒等式展开后有

$$\nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} = \bar{J} + \omega^2\mu\varepsilon\bar{A} - j\omega\varepsilon \nabla\phi$$

$$\text{即} \quad \nabla^2 \bar{A} + \omega^2\mu\varepsilon\bar{A} = -\bar{J} + \nabla(D \cdot \bar{A} + j\omega\varepsilon\phi) \quad (1.1-22)$$

通过定义 $\bar{A}$ 的散度可把这个方程简化。因为, 式(1.1-19)只定义了 $\bar{A}$ 的旋度, 这个矢量还不是唯一的。根据亥姆霍兹定理, 一个矢量只有当其旋度和散度都给定时, 才是唯一确定的。为使上式具有最简单的形式, 令 $\bar{A}$ 的散度为

$$\nabla \cdot \bar{A} = -j\omega\varepsilon\phi \quad (1.1-23)$$

上式称为洛伦茨(L. V. Lorenz, 丹麦)规范。可以证明^[10°], 此式给出的 $\bar{A}$ 与 ϕ 的关系正与连续性方程(1.1-5e)相一致, 因而它是自然成立的。在此条件下, 方程(1.1-22)化为

$$\nabla^2 \bar{A} + k^2 \bar{A} = -\bar{J} \quad (1.1-24)$$

这就是磁矢位 $\bar{A}$ 的非齐次矢量波动方程。它的解是

$$\bar{A}(\bar{r}) = \int_v \bar{J}(\bar{r}') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dv, \quad R = |\bar{r} - \bar{r}'| \quad (1.1-25)$$

其几何关系如图 1.1-2 所示。场源 $\bar{J}(\bar{r}')$ 分布于有限体积 v 中, $\bar{r}'$ 是源点 P' 的矢径, $\bar{r}$ 是场点 P

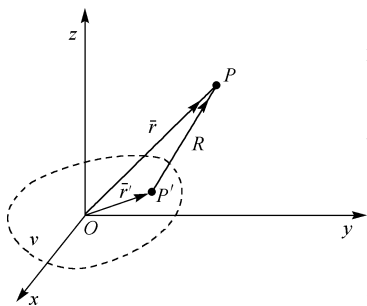


图 1.1-2 辐射问题的几何关系

的矢径。这表明，源点 P' 处的 $\vec{J}(\vec{r}')$ 在场点 P 处产生的位函数要滞后于源点 kR 相位，故称 $\vec{A}$ 为滞后位。

在求得 $\vec{A}$ 后，便可由式(1.1-19)求出 $\vec{H}$ ，并由式(1.1-21)，式(1.1-23)可知， $\vec{E}$ 也可由 $\vec{A}$ 求出：

$$\vec{E} = -j\omega\mu\vec{A} - j\frac{1}{\omega\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) \quad (1.1-26)$$

在求解天线周围空间的电磁场时，场点位于非源区，且空气媒质 $\sigma = 0$ ，因而 $\vec{J} = \sigma\vec{E} = 0$ ，此时用式(1.1-5b)由 $\vec{H}$ 求 $\vec{E}$ 更方便：

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla\times\vec{H} \quad (1.1-27)$$

1.2 电流元与短振子

1.2.1 天线的基本分析方法^{[6°][1][2]}

天线理论的基本问题是求解天线周围空间的电磁场分布，进而可求得天线的电参数。求解天线所辐射的电磁场的严格处理，是一个电磁场边值型问题，即根据天线边界条件选取电磁场波动方程的特解。采用矢位法求解时，就是根据边界条件选取磁矢位 $\vec{A}$ 的波动方程的特解。以最常见圆柱对称振子为例，其全长为 $L=2l$ ，半径为 a ，如图 1.2-1 所示。当振子中点有射频振荡源激励时，沿导体圆柱将有 z 向电流。当 $a \ll l$ ， $a \ll \lambda$ (波长) 时，端点 $z = \pm l$ 处的电流可假定为零。设圆柱导体为理想导体，则只存在沿其表面的轴向电流，由于轴对称性，可认为总电流 I_z 集中于圆柱中心轴上。由式(1.1-25)可知，该电流在导体外任意点 $\rho(\rho, \varphi, z)$ 处产生的磁矢位为

$$A_z = \int_{-l}^l I_z \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' \quad (1.2-1)$$

式中

$$R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}, \quad -l \ll z' \leq l$$

该处的电场 $\vec{E}$ 可由式(1.1-26)得出。在导体表面处，该电场的切向分量 E_z 可写成

$$E_z = -j\omega\mu A_z - j\frac{1}{\omega\epsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -j\frac{1}{\omega\epsilon} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right) \quad (1.2-2)$$

根据边界条件式(1.1-6a)，导体表面处 ($\rho = a$) 切向电场为零，从而得

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z = 0 \quad (1.2-3)$$

式中

$$A_z = \int_{-l}^l I_z \frac{e^{-jkR'}}{4\pi R'} dz', \quad R' = \sqrt{a^2 + (z - z')^2} \quad (1.2-4)$$

在得出方程(1.2-3)的解式后将式(1.2-4)代入，便得到含有振子电流 I_z 的积分方程。在后面 2.3.3 节中将介绍该积分方程的求解。求出 I_z 电流分布后，空间任意点的 A_z 就可由式(1.2-1)得出，进而可求得该处的电磁场。

上述例子表明，即使对这种较简单的情形，边值型问题的求解也是相当复杂的。常用的近

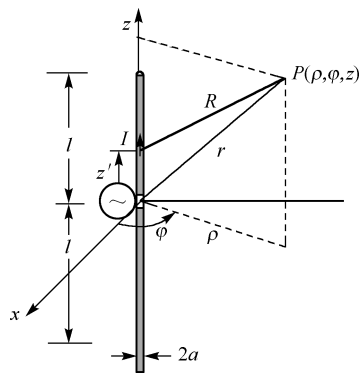


图 1.2-1 对称振子的坐标关系

似解法是,将这一边值型问题处理成一个分布型问题。这是一个两步解法:

第一步,近似确定天线上的场源分布(或包围天线的封闭面上的等效场源分布),称为天线的内问题;

第二步,根据场源分布(或等效场源分布)求空间电磁场(外场),称为天线的外问题。

这里的简化是把内问题和外问题处理成两个相互独立的问题,实际上内场和外场是互相联系的,这个联系就是边界条件。因此,在没有计入外场效应时来求内问题的解,其结果必然是近似的。外问题其实就是1.1.4节的辐射问题,可见其解法本身是严格的。但外问题所依据的场源分布是内问题的近似结果,因此最终结果是近似的。解的精度主要取决于第一步内问题的解(场源或等效场源分布)的近似程度。

内问题的解法对于不同天线一般是不同的,都要根据各天线的特点来选取合适的近似方法。而外问题的求解正是各种天线的共性问题。其经典方法是先求出天线上基本辐射元的外场,然后根据场源分布利用迭加原理得出整个天线的场。这样处理的依据是,对于线性媒质,麦克斯韦方程是线性方程。

从原理上说,所有天线的辐射都来源于天线上电流的辐射,下面就首先来研究电流元的辐射。

1.2.2 电流元的定义与场

所谓电流元是设想从实际的线电流上取出的一段非常短的直线电流。它的长度 L 远小于工作波长 λ , 即 $L \ll \lambda$ (取 $L \leq \lambda/50$), 因而沿线各点的电流可视为相同(均匀分布), 即 I 为常量。它的总强度可用电矩 IL 来表征。实际天线上的电流分布可以看成由很多这样的电流元组成, 因此电流元也称为电基本振子。在实际结构中, 要使电流元端点的电流仍为 I , 根据电流连续性原理, 必须在其两端各加载一个金属球来积存相应的电荷。这样就得出赫兹实验所用的形式, 所以又称为赫兹电偶极子或赫兹振子(Hertzian dipole)。

我们利用矢位法来求解电流元所产生的电磁场。将电流元置于坐标原点, 沿 z 轴方向, 如图1.2-2所示。它在空间任意点产生的磁矢位只有 z 向分量, 由式(1.2-1)可知

$$A_z = \int_{-L/2}^{L/2} I \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} dz' = \frac{IL}{4\pi r} e^{-jkr} \quad (1.2-5)$$

今后场点坐标一般都采用球坐标 (r, θ, φ) 。为将 A_z 转换成球坐标分量, 可利用附录A中表A-2, 得

$$\begin{cases} A_r = A_z \cos \theta = \frac{IL}{4\pi r} \cos \theta e^{-jkr} \\ A_\theta = -A_z \sin \theta = -\frac{IL}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr} \\ A_\varphi = 0 \end{cases} \quad (1.2-6)$$

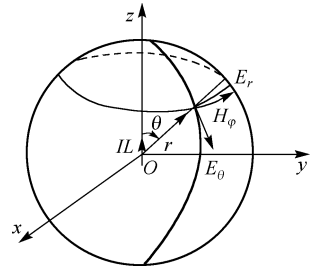


图 1.2-2 电流元的电磁场分量

基于上式, 磁场强度 $\vec{H}$ 可由式(1.1-19)得出。利用附录A中式(A-35), 考虑到轴对称性, $\partial/\partial\varphi = 0$ 和 $A_\varphi = 0$, 有

$$\begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = 0 \\ H_\varphi = j \frac{kIL}{4\pi r} \sin \theta \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) e^{-jkr} \end{cases} \quad (1.2-7)$$

根据上式所得 $\vec{H} = \hat{\varphi} H_\varphi$, 由式(1.1-27)和式(A-35)可得出电场强度 $\vec{E} = \hat{r} E_r + \hat{\theta} E_\theta$:

$$\begin{cases} E_r = \eta \frac{IL}{2\pi r^2} \cos \theta \left(1 + \frac{1}{jkr}\right) e^{-jkr} \\ E_\theta = j\eta \frac{kIL}{4\pi r} \sin \theta \left(1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{k^2 r^2}\right) e^{-jkr} \\ E_\varphi = 0 \end{cases} \quad (1.2-8)$$

以上式中,对空气媒质有

$$\begin{cases} k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad c = 2.997\,925 \times 10^8 \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} \\ \eta = \eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 376.7304 \approx 377 \approx 120\pi (\Omega) \end{cases} \quad (1.2-9)$$

可见,电流元的电场有两个分量 E_r 和 E_θ , 而磁场只有一个分量 H_φ 。这样,其复坡印廷矢量只有两个分量:

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* = \frac{1}{2} (\hat{r} E_r + \hat{\theta} E_\theta) \times \hat{\varphi} H_\varphi^* = \hat{r} \frac{1}{2} E_\theta H_\varphi^* - \hat{\theta} E_r H_\varphi^* = \hat{r} S_r + \hat{\theta} S_\theta \\ \begin{cases} S_r = \frac{1}{2} E_\theta H_\varphi^* = \frac{1}{2} \eta \left(\frac{kIL}{4\pi r} \sin \theta \right)^2 \left(1 - j \frac{1}{k^3 r^3} \right) \\ S_\theta = -\frac{1}{2} E_r H_\varphi^* = \frac{1}{2} j\eta \frac{k(IL)^2}{8\pi^2 r^3} \sin \theta \cos \theta \left(1 + \frac{1}{k^2 r^2} \right) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2-10)$$

我们看到,电流元沿 r 方向有实功率辐射,并在近区 ($kr \ll 1$) 有容性的虚径向功率;同时,在近区还有沿 θ 方向的虚功率。

1.2.3 远区场和方向图

1.2.3.1 远区场

我们主要关心的是天线的远区场,因为,无论是通信对象或雷达目标(如飞机),都距天线较远,因而远区是应用中最常用的区域。对于电流元,远区条件是 $kr \gg 1$, 即 $r \gg \lambda/2\pi$ 。此时有

$$1 \gg \frac{1}{kr} \gg \frac{1}{k^2 r^2}$$

在式(1.2-8)和式(1.2-7)中仅保留最大的项,并用 $\eta = \eta_0 = 120\pi (\Omega)$ 代入,得

$$\begin{cases} E_\theta = j\eta \frac{kIL}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr} = j \frac{60\pi IL}{\lambda r} \sin \theta e^{-jkr} \\ H_\varphi = j \frac{kIL}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr} = j \frac{IL}{2\lambda r} \sin \theta e^{-jkr} = \frac{E_\theta}{120\pi} \end{cases} \quad (1.2-11)$$

可见,电场只有 E_θ 分量,磁场只有 H_φ 分量。其坡印廷矢量只有 S_r 分量:

$$S_r = \frac{1}{2} E_\theta H_\varphi^* = \frac{1}{2} \frac{E_\theta E_\theta^*}{120\pi} = \frac{1}{2} \frac{|E_\theta|^2}{120\pi} = 15\pi \left(\frac{IL}{\lambda r} \sin \theta \right)^2 \quad (1.2-12)$$

此 S_r 为实数,因而它也就是时间平均功率密度: $S_r^{\text{av}} = \text{Re}[S_r] = S_r$ 。上式表明,电流元沿 r 方向辐射实功率。这种辐射实功率的场称为辐射场。 $\bar{E}$ 、 $\bar{H}$ 和 $\bar{S}$ 三矢量方向互相垂直,这是横电磁波(TEM波)。图1.2-3所示为电流元周围电力线(实线)和磁力线(虚线)的瞬时分布,可见其 $\bar{S}$ 矢量都是沿 r 方向。

无论 E_θ 或 H_φ , 其空间相位因子都是 $-kr$, 使其相位随离源点的距离 r 增大而滞后。等 r 的球面为其等相面,所以这是球面波。这种波相当于是从球心一点发出的,称这种波源为点源,球心称为相位中心。由相位中心至场点的距离 r 便称为波程。

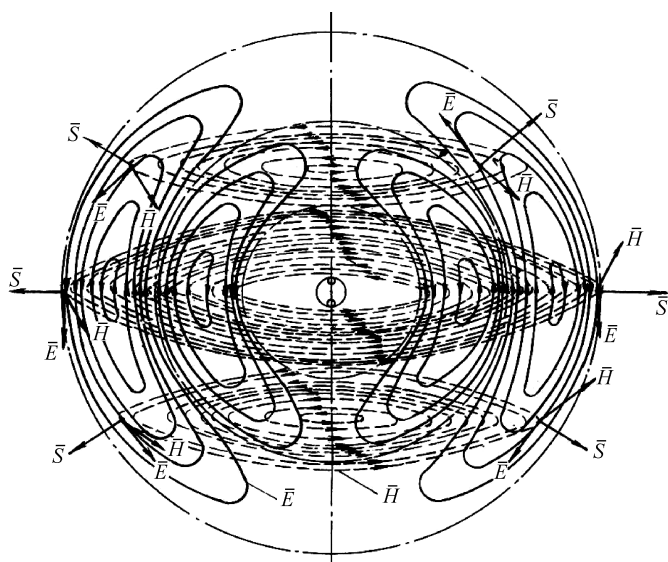


图 1.2-3 电流元周围电磁力线的瞬时分布

E_θ 和 H_φ 的振幅都与 r 成反比。这是由于随 r 的增大, 功率渐渐扩散所致。这是球面波的振幅特点, 并将 e^{-jkr}/r 称为球面波因子。

同时, 场的振幅与 I 成正比, 也与其电长度 L/λ 成正比(当 $L \ll \lambda$)。此外, 场振幅还正比于 $\sin \theta$ 。当 $\theta = 90^\circ$, 即在垂直振子轴方向, 场最大; 而当 $\theta = 0^\circ$ (轴向), 场为零。这说明电流元的辐射是有方向性的。它辐射的是非均匀球面波。

1.2.3.2 方向图

为了描述天线的方向性, 一个直观的方法就是把辐射场强与方向的关系用曲线表示出来, 这样得到的就是(辐射)方向图(radiation pattern)。由于天线辐射的场强与距离远近有关, 因此要取相同距离的球面上各点来比较。这样, 天线方向图就是以天线为中心的远区球面上, 辐射场振幅与方向的关系曲线。

令远区球面上任意方向 (θ, φ) 某点处的场强振幅为 $|E(\theta, \varphi)|$, 其最大值为 E_M , 则描述方向图的函数可表示为(r 为常量)

$$F(\theta, \varphi) = \frac{|E(\theta, \varphi)|}{E_M} \quad (1.2-13)$$

该函数称为归一化方向图函数(简称为方向函数)。对电流元有

$$F(\theta, \varphi) = F(\theta) = \sin \theta \quad (1.2-14)$$

这是一个立体图形, 如图 1.2-4 所示(已剖开)。自然, 更方便的是平面图形, 通常取两个相互垂直的主平面来画, 有了这两个主平面上的方向图, 整个三维的方向图一般也可以设想了。主平面一般指最大方向分别与电场矢量 $\vec{E}$ 和磁场矢量 $\vec{H}$ 所形成的平面, 分别称为 E 面和 H 面。对于电流元, 其含振子面就是 E 面, 其垂直振子面就是 H 面。用极坐标画的电流元 E 面方向图如图 1.2-5(a)所示。这里矢径长度就表示 $F(\theta) = |E(\theta)|/E_M = \sin \theta$ 值, 它在 $\theta = 90^\circ$ 方向最大,

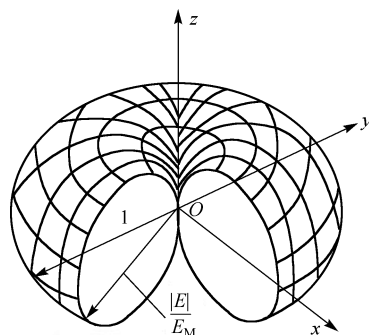


图 1.2-4 电流元的立体方向图

值为1, 其他方向为 $\sin \theta$ 值, 轴向($\theta = 0$ 和 180°)该值为零。可见, 呈轴对称的 ∞ 形。其 H 面向图如图 1.2-5(b)所示, 为一圆, 这是因为 $\theta = 90^\circ$, 对不同的 φ 方向, 均有 $|E(\theta)|/E_M = 1$, 说明这是轴对称的方向图。

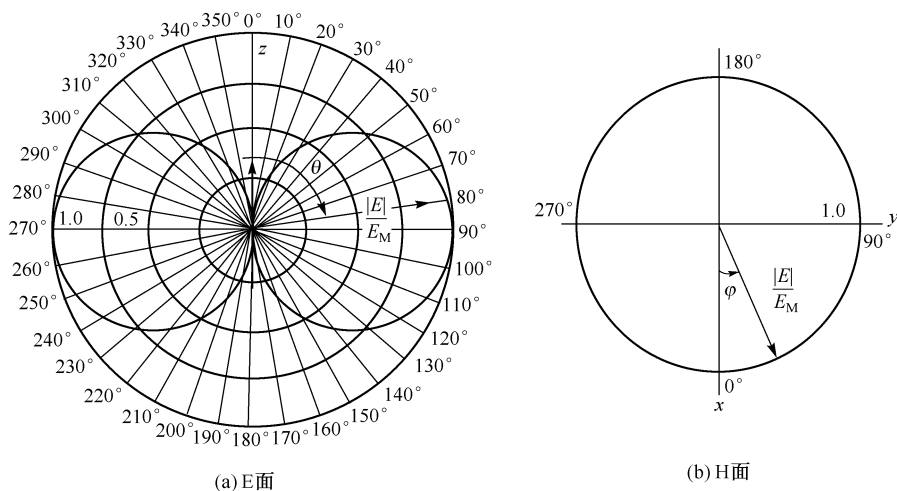


图 1.2-5 电流元的主面方向图

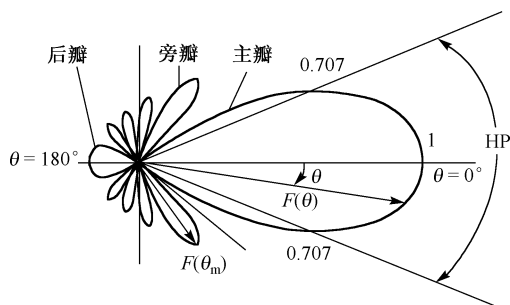


图 1.2-6 典型的主面方向图

实际天线典型的极坐标主面方向图如图 1.2-6 所示。它有一主瓣(或称主波束), 是包含最大值方向的瓣。并有一些旁瓣与后瓣, 这些瓣也称为副瓣(指主瓣以外的瓣)。因此通常也通俗地把方向图称为波瓣图。作为定量描述, 主波束的宽度由半功率波束宽度 HP(Half Power Beamwidth)来描述, 它是最大方向两侧半功率点方向 $\theta_{0.5}$ 之间的夹角。注意, 在场强方向图中, $F(\theta_{0.5}) = 1/\sqrt{2} = 0.707$ 。对电流元, 由 $\sin \theta_{0.5} = 0.707$ 可知, 半功率点方向 $\theta_{0.5}$ 为 45° 和 135° , 故 $HP = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ 。一般来说, 半功率宽度愈窄, 表示天线方向性愈强。

旁瓣的最大值 E_m 与主瓣最大值 E_M 之比, 用分贝表示为

$$SLL = 20 \lg \frac{E_m}{E_M} \quad \text{dB} \quad (1.2-15)$$

该值称为旁瓣电平(Side-Lobe Level, SLL)。一般希望旁瓣电平低些, 如低于 -20 dB ($E_m/E_M \leq 0.1$, 即旁瓣的最大值只是主瓣最大值的 $1/10$ 或更小), 以减小外来干扰和噪声的影响。通常将旁瓣电平低至 $-30 \sim -40$ dB 的天线称为低旁瓣天线, 而把旁瓣电平低于 -40 dB 的天线称为超低旁瓣天线。现代预警机上方所背负的天线正是超低旁瓣天线, 以求抑制地面干扰的影响。

1.2.4 辐射功率和辐射电阻

将式(1.2-12)所表示的实功率密度在包围电流元的球面上做面积分, 便得到电流元所辐射的实功率:

$$P_r = \oint_s S_r^{\text{av}} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} \frac{|E_\theta|^2}{120\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad (1.2-16)$$

$$\text{得} \quad P_r = 15\pi \left(\frac{IL}{\lambda}\right)^2 2\pi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = 30\pi^2 \left(\frac{IL}{\lambda}\right)^2 \frac{4}{3} = 40\pi^2 \left(\frac{IL}{\lambda}\right)^2 \quad (1.2-17)$$

可见, 电流元的辐射功率仅由其电流强度 I 和电长度 L/λ 决定, 而与距离 r 无关。这里假定空间媒质是无耗的。

仿照电路中的处理, 设想辐射功率是由一电阻吸收的, 即令

$$P_r = \frac{1}{2} I^2 R_r \quad (1.2-18)$$

$$\text{得} \quad R_r = \frac{P_r}{I^2/2} = 80\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \quad (1.2-19)$$

R_r 称为电流元的辐射电阻。若已知天线的辐射电阻, 便可由式(1.2-18)求得其辐射功率。

1.2.5 短振子与辐射效率

与前面讨论的电流元不同, 实际的短振子其电流不是均匀分布的。细短振子 ($\lambda/50 \leq L \leq \lambda/10$, $a \ll L$) 的电流分布很近似于两端为零、中点最大的三角形分布, 如图 1.2-7(a) 所示, 其坐标系如图 1.2-7(b) 所示。短振子的电流分布可表示为

$$I = I_0 \left(1 - \frac{|z'|}{L/2}\right) \quad (1.2-20)$$

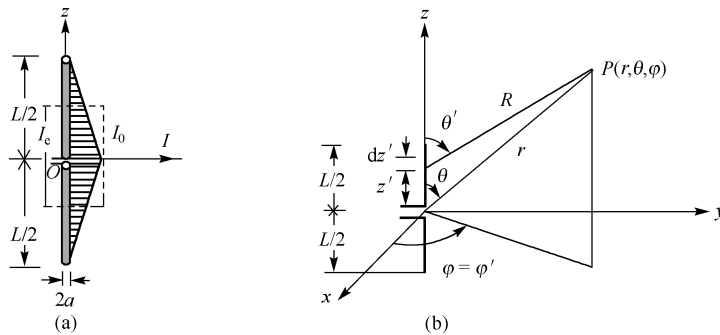


图 1.2-7 短振子的电流分布与坐标系

现用矢位法求其远区场。由于振子的全长很短, 沿线不同 z' 处的 R 与 r 相近, 此时式(1.2-1)可写为

$$A_z = \int_{-L/2}^{L/2} I \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} dz' = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} 2 \int_0^{L/2} I_0 \left(1 - \frac{z'}{L/2}\right) dz' = \frac{I_0 L}{2} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (1.2-21)$$

此结果正好是相同长度(相同电矩)的电流元的式(1.2-5)之一半, 因而其远区场也将是同长(同电矩)电流元结果之一半, 即当 $kr \gg 1$, 有

$$\begin{cases} E_\theta = j \frac{30\pi I_0 L}{\lambda r} \sin\theta e^{-jkr} \\ H_\varphi = j \frac{I_0 L}{4\lambda r} \sin\theta e^{-jkr} = \frac{E_\theta}{120\pi} \end{cases} \quad (1.2-22)$$

可见, 其方向图函数仍为 $\sin\theta$, 因而其方向图与电流元完全相同, 如图 1.2-3 所示。但是, 虽然短振子的电矩 $I_0 L$ 与电流元的电矩 IL 相同且 λ 相同, 然而二者辐射功率并不相同。短振子时

间平均功率密度为

$$S_r^{\text{av}} = \text{Re}[S_r] = \text{Re}\left[\frac{1}{2}E_\theta H_\varphi^*\right] = \frac{1}{2} \frac{|E_\theta|^2}{120\pi} = \frac{15\pi}{4} \left(\frac{I_0 L}{\lambda \gamma} \sin \theta\right)^2 \quad (1.2-23)$$

得辐射功率

$$P_r = \oint S_r^{\text{av}} ds = 10\pi^2 \left(\frac{I_0 L}{\lambda}\right)^2 \quad (1.2-24)$$

可见,其辐射功率 P_r 只是电流元式(1.2-17)的 $1/4$ 。这意味着,如短振子的输入端电流与电流元上的电流相等,则短振子的辐射功率只有相同长度的电流元的 $1/4$ 。显然,这是由于其电流呈三角形分布之故。该功率可用归于其输入端电流 I_0 的辐射电阻 R_{r0} 来表示:

$$P_r = \frac{1}{2} I_0^2 R_{r0} \quad (1.2-25)$$

得

$$R_{r0} = \frac{P_r}{I_0^2/2} = 20\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \quad (1.2-26)$$

这是式(1.2-19)的 $1/4$, 即短振子的辐射电阻只是相同长度电流元的 $1/4$ 。

在线天线计算中,有时引入“有效长度”(对地面上的直立天线,也称为“有效高度”)的定义。有效长度是指一个等效的均匀电流分布天线的长度 L_e , 该天线上的等幅电流等于原天线的输入端电流 I_0 , 而在其最大辐射方向产生与原天线相同的场强。对短振子,由式(1.2-22)可知,其最大场强为

$$E_M = \frac{30\pi I_0 L}{\lambda r}$$

而若电流均匀分布,如同电基本振子,则由式(1.2-11)可知,

$$E_{eM} = \frac{60\pi I_0 L_e}{\lambda r}$$

比较上面两式得 $L_e = L/2$, 可见短振子的有效长度为其全长的一半,如图1.2-7(a)中虚线所示。

实际天线中都存在导体和介质的欧姆损耗,使天线辐射功率 P_r 小于其输入功率 P_{in} 。天线的欧姆损耗功率也可用归于天线上电流 I_0 的损耗电阻(也称欧姆电阻) R_σ 来表示:

$$P_\sigma = \frac{1}{2} I_0^2 R_{\sigma 0} \quad (1.2-27)$$

定义天线辐射效率(Radiation efficiency)为

$$e_r = \frac{P_r}{P_{in}} = \frac{P_r}{P_r + P_\sigma} = \frac{R_{r0}}{R_{r0} + R_{\sigma 0}} \leq 1 \quad (1.2-28)$$

短振子的损耗功率来自其导体损耗。除低频外,导体的集肤深度 $\delta = \sqrt{1/\pi\mu\sigma f}$ 都远小于其半径,因而长 L 半径为 a 的导线的损耗电阻可表示为

$$R_{\sigma 0} = \frac{R_s}{2\pi a} L, \quad R_s = \sqrt{\frac{\pi\mu f}{\sigma}} \quad (1.2-29)$$

短振子上电流按式(1.2-20)所示呈三角形分布,故其导体损耗功率为

$$P_\sigma = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} I_0^2 \left(1 - \frac{|z'|}{L/2}\right)^2 \frac{R_s}{2\pi a} dz' = I_0^2 \frac{R_s}{2\pi a} \left(\frac{L}{2}\right) \frac{1}{3} \quad (1.2-30)$$

比较式(1.2-27)与式(1.2-30)可知,短振子的损耗电阻为

$$R_{\sigma 0} = \frac{R_s}{2\pi a} \frac{L}{3} \quad (1.2-31)$$

例 1.2-1 一短振子工作于 2 MHz ($\lambda = 150$ m), 全长 $L = 1.5$ m, 半径 $a_0 = 1.5$ mm, 用电导率 $\sigma = 1.57 \times 10^7$ S/m 的黄铜制成。求其辐射电阻和辐射效率。 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m。

$$[\text{解}] \quad R_{r0} = 20\pi^2 \left(\frac{1.5}{150} \right)^2 = 0.0197 \, \Omega$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi \times 4\pi \times 10^{-7} \times 2 \times 10^6}{1.57 \times 10^7}} = 7.09 \times 10^{-4} \, \Omega$$

$$R_{\sigma 0} = \frac{R_s}{2\pi a} \frac{L}{3} = \frac{7.09 \times 10^{-4}}{2\pi \times 1.5 \times 10^{-3}} \frac{1.5}{3} = 0.0376 \, \Omega$$

$$\text{故} \quad e_r = \frac{R_{r0}}{R_{r0} + R_{\sigma 0}} = \frac{0.0197}{0.0197 + 0.0376} = 34.4\%$$

可见, 上例中工作于短波的短振子由于波长长, 其电长度小, 使辐射电阻很小, 导致其辐射效率低。特别是对于频率很低的长、中波天线, 除天线本身的欧姆损耗外, 还有大地中感应电流所引入的等效损耗, 使 R_{σ} 很大, 致使其辐射效率很低。反之, 大多数微波天线的欧姆损耗都很小, 因而其 $e_r \approx 1$ 。

中点馈电的短振子的输入电阻 R_{in} 可由其实输入功率 P_{in} 得出:

$$R_{in} = \frac{P_{in}}{I_0^2/2} = \frac{P_r + P_{\sigma}}{I_0^2/2} = R_{r0} + R_{\sigma 0} \quad (1.2-32)$$

可见, 它就是归于输入端电流的辐射电阻和损耗电阻之和。上例中 $R_{in} = 0.0197 + 0.0376 = 0.0573 \, \Omega$ 。此输入电阻过小, 使天线难以与常规的特性阻抗为 $50 \, \Omega$ 的馈线相匹配。

短振子与电偶极子一样, 在其近区有容性虚功率, 因而还有容性输入电抗, 它对应于虚输入功率。根据第 2 章中式 (2.3-40) 和式 (2.3-33), 短振子的输入电抗近似为

$$X_{in} = -Z_a / \tan(kL/2) \approx -Z_a / (kL/2) = -\frac{120\lambda}{\pi L} \left(\ln \frac{L}{a_0} - 1 \right) \quad (1.2-33)$$

短振子的输入阻抗为 $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$ 。对例 1.2-1, 由上式求得 $X_{in} = -150.044 \, \Omega$, 这是很大的容抗。这类电小天线 (其物理尺寸远小于工作波长) 的特点是, 都具有高输入电抗和低输入电阻。

1.3 对偶原理, 磁流元与小电流环

1.3.1 广义麦克斯韦方程组与对偶原理

众所周知, 自然界并不存在任何单独的磁荷, 因而也不存在磁荷运动所形成的磁流。正是因此, 麦克斯韦方程组在形式上也是不对称的。不过, 在某些电磁场问题中, 为了便于处理, 可人为地引入假想的磁流和磁荷作为等效源, 即将一部分实际电流和电荷用与之等效的磁流和磁荷来代替。例如, 本节后面将会证明, 一个小电流环可以等效为垂直该环的一小段磁流元。而由对偶原理知, 求磁流元的场是很简便的。

引入假想的磁流和磁荷后, 便得到对称形式的广义麦克斯韦方程组, 两个旋度方程为

$$\nabla \times \vec{E} = -\vec{J}^m - j\omega\mu\vec{H} \quad (1.3-1a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E} \quad (1.3-1b)$$

式中 $\vec{J}^m$ (有的书表示为 $\vec{M}$) 为体磁流密度 (V/m^2)。相应地, 有下述广义边界条件:

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = -\vec{J}_s^m \quad (1.3-2a)$$

$$\hat{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_s \quad (1.3-2b)$$

式中 $\bar{J}_s^m$ 为分界面上的面磁流密度 (V/m), $\hat{n}$ 为分界面的法向单位矢量, 由②区指向①区。

引入上述等效源后, 激发电磁场的场源分成两种: 电流(及电荷)和磁流(及磁荷)。其中仅由场源电流 $\bar{J}$ 所产生的场 $\bar{E}^e$, $\bar{H}^e$ 的方程为

$$\nabla \times \bar{E}^e = -j\omega\mu\bar{H}^e \quad (1.3-3a)$$

$$\nabla \times \bar{H}^e = \bar{J} + j\omega\varepsilon\bar{E}^e \quad (1.3-3b)$$

仅由场源磁流 $\bar{J}^m$ 所产生的场 $\bar{E}^m$, $\bar{H}^m$ 的方程为

$$\nabla \times \bar{E}^m = -\bar{J}^m - j\omega\mu\bar{H}^m \quad (1.3-4a)$$

$$\nabla \times \bar{H}^m = j\omega\varepsilon\bar{E}^m \quad (1.3-4b)$$

比较以上两组方程知, 二者数学形式完全相同, 因此它们的解也将取相同的数学形式。这样, 可由一种场源下电磁场问题的解导出另一种场源下对应问题的解。此即对偶原理或二重性原理(Duality principle)。

上述两组方程用矢位法求解时它们的对偶公式如下:

$$\text{电流源}(\bar{J}): \quad \bar{E}^e = -j\omega\mu\bar{A} + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) \quad (1.3-5a)$$

$$\bar{H}^e = \nabla \times \bar{A} \quad (1.3-5b)$$

$$\bar{A} = \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\bar{J}}{R} e^{-jkR} dv \quad (1.3-5c)$$

$$\text{磁流源}(\bar{J}^m): \quad \bar{H}^m = -j\omega\varepsilon\bar{F} + \frac{1}{j\omega\mu} \nabla(\nabla \cdot \bar{F}) \quad (1.3-6a)$$

$$\bar{E}^m = -\nabla \times \bar{F} \quad (1.3-6b)$$

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\bar{J}^m}{R} e^{-jkR} dv \quad (1.3-6c)$$

式中 $\bar{F}$ 是磁流源所产生的电矢位。

以上两组形式相同的方程中处于相同位置的量称为对偶量。表 1.3-1 列出了电流源和磁流源的一组对偶量, 其中 $k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$, $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ 。按对偶量互换, 便可将一种场源的方程换为另一种场源的方程。作为演示, 现将磁流源式(1.3-4a)和式(1.3-4b)中的量都用表 1.3-1 中的对偶量替代, 则有

$$\nabla \times (-\bar{H}^e) = -\bar{J} - j\omega\varepsilon\bar{E}^e \quad (1.3-7a)$$

$$\nabla \times \bar{E}^e = j\omega\mu(-\bar{H}^e) \quad (1.3-7b)$$

不难看出, 此两方程就是电流源的式(1.3-3b)和式(1.3-3a)。因而其解也可由对偶量互换来得出。

值得指出: 1) 表 1.3-1 给出的是一种对偶方式, 还可有其他的对偶方式, 即对偶方式并不是唯一的。2) 对于存在边界的系统, 不但两个系统的源是对偶的, 而且边界条件也应是对偶的。这就是说, 若仅有电流源时的边界条件与仅有磁流源时的边界条件也成对偶关系, 则按对偶量互换, 便可由前者的解得出后者的场; 反之亦然。

表 1.3-1 电流源与磁流源的对偶量

电流源 $\bar{J}(\bar{J}^m=0)$	磁流源 $\bar{J}^m(\bar{J}=0)$	电流源 $\bar{J}(\bar{J}^m=0)$	磁流源 $\bar{J}^m(\bar{J}=0)$
$\bar{E}^e$	$\bar{H}^m$	ε	μ
$\bar{H}^e$	$-\bar{E}^m$	μ	ε
$\bar{J}$	$\bar{J}^m$	k	k
$\bar{A}$	$\bar{F}$	η	$1/\eta$

式(1.3-8)表明,磁流元的电场只有 E_φ 分量,而磁场有两个分量 H_r 和 H_θ , 因而其坡印廷复矢量有两个分量:

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{1}{2} \hat{\varphi} E_\varphi \times (\hat{r} H_r^* + \hat{\theta} H_\theta^*) = \hat{r} \frac{1}{2} (-E_\varphi) H_\theta^* + \hat{\theta} \frac{1}{2} E_\varphi H_r^* = \hat{r} S_r + \hat{\theta} S_\theta \\ \begin{cases} S_r = \frac{1}{2} (-E_\varphi) H_\theta^* = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{k I^m L}{4\pi r} \sin \theta \right)^2 \left(1 + j \frac{1}{k^3 r^3} \right) \\ S_\theta = \frac{1}{2} E_\varphi H_r^* = -j \frac{k}{\eta r} \left(\frac{I^m L}{4\pi r} \sin \theta \right)^2 \left(1 + \frac{1}{k^2 r^2} \right) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3-10)$$

可见,磁流元沿 r 方向有实功率辐射,并在近区有感性的径向虚功率;同时,其近区也有沿 θ 方向的虚功率。其径向实功率密度为

$$S_r^{\text{av}} = \text{Re}[S_r] = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{k I^m L}{4\pi r} \sin \theta \right)^2 = \frac{1}{240\pi} \left(\frac{I^m L}{2\lambda r} \right)^2 \sin^2 \theta \quad (1.3-11)$$

对此功率密度在包围磁流元的球面上做面积分,得其辐射功率为

$$\begin{aligned}P_r &= \oint_s S_r^{\text{av}} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{240\pi} \left(\frac{I^m L}{2\lambda r} \right)^2 \sin^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{240\pi} \left(\frac{I^m L}{2\lambda} \right)^2 2\pi \frac{4}{3} = \frac{1}{90} \left(\frac{I^m L}{2\lambda} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.3-12)$$

可见,磁流元的辐射功率取决于其磁流强度 I^m 和电长度 L/λ , 而与距离 r 无关。

1.3.3 小电流环

我们来研究图 1.3-1 所示的小电流环,其半径 $a \ll \lambda$, 沿线电流 I 为常量。它所辐射的场仍可用矢位法求出。根据式(1.3-5c),它在场点 $P(r, \theta, \varphi)$ 处的磁矢位为

$$\bar{A} = \frac{1}{4\pi} \int_l \hat{\varphi} \frac{I}{R} e^{-jkR} dl' = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\varphi}' \frac{I}{R} e^{-jkR} a d\varphi' \quad (1.3-13)$$

与求电流元的场时处理方法相似,也需将 $\bar{A}$ 用场点的球坐标单位矢量表示。为此,利用附录 A 中表 A-2 对 $\hat{\varphi}'$ 做以下变换:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}' &= -\hat{x} \sin \varphi' + \hat{y}' \cos \varphi' \\ &= -(\hat{r} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \hat{\varphi} \sin \theta) \sin \varphi' + \\ &\quad (\hat{r} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \hat{\varphi} \cos \theta) \cos \varphi' \\ &= \hat{r} \sin \theta \sin(\varphi - \varphi') + \hat{\theta} \cos \theta \sin(\varphi - \varphi') + \hat{\varphi} \cos(\varphi - \varphi') \end{aligned} \quad (1.3-14)$$

又有

$$\begin{aligned}R &= |\bar{r} - \bar{r}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(r \sin \theta \cos \varphi - a \cos \varphi')^2 + (r \sin \theta \sin \varphi - a \sin \varphi')^2 + (r \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.3-15)$$

设 $a \ll \lambda < r$, 则上式可近似为

$$R \approx r - a \sin \theta \cos(\varphi - \varphi') \quad (1.3-16)$$

并有

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')$$

故

$$\begin{aligned}e^{-jkR} &\approx e^{-jkr} [1 + jka \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')] \\ \frac{e^{-jkR}}{R} &\approx \left[\frac{1}{r} + \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) a \sin \theta \cos(\varphi - \varphi') \right] e^{-jkr} \end{aligned} \quad (1.3-17)$$

将式(1.3-14)和式(1.3-17)代入式(1.3-13), 得

$$\bar{A} = \hat{\phi} A_{\phi} = \hat{\phi} j \frac{ka^2 I}{4r} \sin \theta \left(1 + \frac{1}{jkr}\right) e^{-jkr} \quad (1.3-18)$$

把此结果代入式(1.1-19)和式(1.1-27), 得小电流环的场如下:

$$\begin{cases} E_{\phi} = \eta \frac{(ka)^2 I}{4r} \sin \theta \left(1 + \frac{1}{jkr}\right) e^{-jkr} \\ H_r = j \frac{ka^2 I}{2r^2} \cos \theta \left(1 + \frac{1}{jkr}\right) e^{-jkr} \\ H_{\theta} = -\frac{(ka)^2 I}{4r} \sin \theta \left(1 + \frac{1}{jka} - \frac{1}{k^2 r^2}\right) e^{-jkr} \end{cases} \quad (1.3-19)$$

比较式(1.3-19)与式(1.3-8)可知:二者的场具有完全相同的形式, 等效关系为

$$I^m L = jka^2 I \pi \eta = j\omega \mu A_0 I \quad (1.3-20)$$

式中 $A_0 = \pi a^2$, 为圆环面积。由此, 为了便于分析, 小电流环可等效为一个磁流元, 该磁流元的磁矩取决于小环电流和面积的大小, 而与小环形状无关。

由式(1.3-19)可知, 小电流环的远区场为

$$\begin{cases} E_{\phi} = \eta \frac{(ka)^2 I}{4r} \sin \theta e^{-jkr} = \frac{120\pi^2 A_0 I}{r\lambda^2} \sin \theta e^{-jkr} \\ H_{\theta} = -\frac{(ka)^2 I}{4r} \sin \theta e^{-jkr} = -\frac{\pi A_0 I}{r\lambda^2} \sin \theta e^{-jkr} \end{cases} \quad (1.3-21)$$

将此结果与短振子的远场表示式相比较是有益的, 见表 1.3-2 (取 $I_0 = I$)。

表 1.3-2 短振子与小电流环的远场复振幅比较

短 振 子	小 电 流 环
$E_{\theta} = j \frac{30\pi I}{r} \frac{L}{\lambda} \sin \theta$	$E_{\phi} = \frac{120\pi^2 I}{r} \frac{A_0}{\lambda^2} \sin \theta$
$H_{\phi} = j \frac{I}{4r} \frac{L}{\lambda} \sin \theta$	$H_{\theta} = -\frac{\pi I}{r} \frac{A_0}{\lambda^2} \sin \theta$

我们注意到, 短振子与小电流环的远场方向图相同, 即它们在空间的振幅分布相同。但是, 两者的重要不同是, 其远场电场矢量的方向分别为 θ 和 ϕ 向, 相互垂直。同时, 短振子的远场式中含有虚数因子 j , 而小电流环却没有。这表明, 当短振子与小电流环两者的馈电电流同相时, 二者的远场在时间相位上相差 90° 。这是两者辐射场的又一不同。这样, 如果把它们组合在一起, 便能获得在空间和时间上都正交的两个电场分量, 当两者大小相等时就会形成圆极化波辐射场(见习题 1.3-3)。其条件是两者馈电电流同相且具有相同功率, 即

$$\frac{2\pi a}{\lambda} = \sqrt{\frac{L}{\lambda}} \quad (1.3-22)$$

小电流环的远区电场为 E_{ϕ} 分量, 远区磁场只有 H_{θ} 分量, 且 $H_{\theta} = -\frac{E_{\phi}}{120\pi}$, 故其坡印廷矢量仍为 $\hat{r}$ 向且为实数:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \hat{\phi} E_{\phi} \times \hat{\theta} H_{\theta}^* = -\hat{r} \frac{1}{2} E_{\phi} H_{\theta}^* = \hat{r} \frac{1}{2} \frac{E_{\phi} E_{\phi}^*}{120\pi} = \hat{r} \frac{|E_{\phi}|^2}{240\pi} \quad (1.3-23)$$

小电流环的时间平均径向功率密度为

$$S_r^{\text{av}} = \text{Re} \left[\frac{|E_{\phi}|^2}{240\pi} \right] = \frac{1}{240\pi} \left(\frac{120\pi^2 A_0 I}{r\lambda^2} \sin \theta \right)^2 = 60\pi \left(\frac{\pi I A_0}{r\lambda^2} \right)^2 \sin^2 \theta \quad (1.3-24)$$

其辐射功率可由上式的球面积分得出:

$$\begin{aligned} P_r &= \oint_s S^{\text{av}} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 60\pi \left(\frac{\pi I A_0}{r \lambda^2} \right)^2 \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= 60\pi \left(\pi I \frac{A_0}{\lambda^2} \right)^2 2\pi \frac{4}{3} = 160\pi^4 \left(\frac{IA_0}{\lambda^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.3-25)$$

小电流环的辐射电阻为

$$R_r = \frac{P_r}{I^2/2} = 320\pi^4 \left(\frac{A_0}{\lambda^2} \right)^2, \quad A_0 = \pi a^2 \quad (1.3-26)$$

小环天线还有不小的损耗电阻。若小环平均(中线)半径为 a , 导线半径为 a_0 , 由式(1.2-29),

$$R_\sigma = \frac{R_s}{2\pi a_0} 2\pi a = \frac{a}{a_0} R_s, \quad R_s = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}} \quad (1.3-27)$$

自然, 可仍按式(1.2-28)求得其辐射效率。

早在赫兹实验时就使用了小环天线, 当今它仍广泛用来作为接收天线, 特别是用于场强检测和测向接收机。

例 1.3-1 一小电流环的平均(中线)半径为 $a = 0.25 \text{ m}$, 铜导线半径 $a_0 = 1 \text{ mm}$, 黄铜电导率 $\sigma = 1.57 \times 10^7 \text{ S/m}$, 求其在工作波长 $\lambda = 6 \text{ m}$ ($f = 50 \text{ MHz}$) 时的辐射电阻和辐射效率。

[解]

$$\begin{aligned} R_r &= 320\pi^4 \left(\frac{\pi \times 0.25^2}{6^2} \right)^2 = 0.927 \Omega \\ R_s &= \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\pi \times 4\pi \times 10^{-7} \times 50 \times 10^6}{1.57 \times 10^7}} = 3.55 \times 10^{-3} \Omega \\ R_\sigma &= \frac{0.25}{10^{-3}} \times 3.55 \times 10^{-3} = 0.888 \Omega \\ e_r &= \frac{R_r}{R_r + R_\sigma} = \frac{0.927}{0.927 + 0.888} = 51.5\% \end{aligned}$$

与短振子一样, 小电流环的辐射电阻过小。但是有所不同的是, 它可采用多匝环来增加辐射电阻。对 N 匝环, 由式(1.3-25)和式(1.3-26)可知, 其辐射电阻等于单匝环的值乘以 N^2 倍, 即

$$R_r = 320\pi^4 \left(\frac{NA_0}{\lambda^2} \right)^2 \quad (1.3-28)$$

例如, 上例单匝小圆环(半径为 $\lambda/24$)的辐射电阻仅为 0.927Ω 而采用 7 匝这样的小环时, 其辐射电阻增至 $0.927 \times 7^2 = 45.4 \Omega$ 。

采用 N 匝环时, 损耗电阻也将增加。由于邻近效应, 损耗电阻的增加大于 N 倍。环半径为 a , 导线半径为 a_0 , 环间距为 $2c$ 的 N 匝圆环天线[见图 1.3-4(a)]的损耗电阻为^[3]

$$R_\sigma = \frac{Na}{a_0} R_s (1 + n_c) \quad (1.3-29)$$

式中 n_c 代表由邻近效应引起的损耗电阻与忽略邻近效应的损耗电阻之比, 见图 1.3-4(b)。

例 1.3-2 若采用 7 匝小电流环, 圆环间距为 $2c = 4 \text{ mm}$, 其他参数与例 1.3-1 相同, 求其辐射效率。

[解]

$$R_r = 320\pi^4 \left(\frac{NA_0}{\lambda^2} \right)^2 = 0.927 \times 7^2 = 45.4 \Omega$$

$c/a_0 = 2$, 由图 1.3-4(b) 查得 $n_c = 0.36$, 故

$$R_{\sigma} = \frac{Na}{a_0} R_s (1 + n_e) = 7 \times 0.888 (1 + 0.36) = 8.45 \Omega$$

于是

$$e_r = \frac{45.4}{45.4 + 8.45} = 84.3\%$$

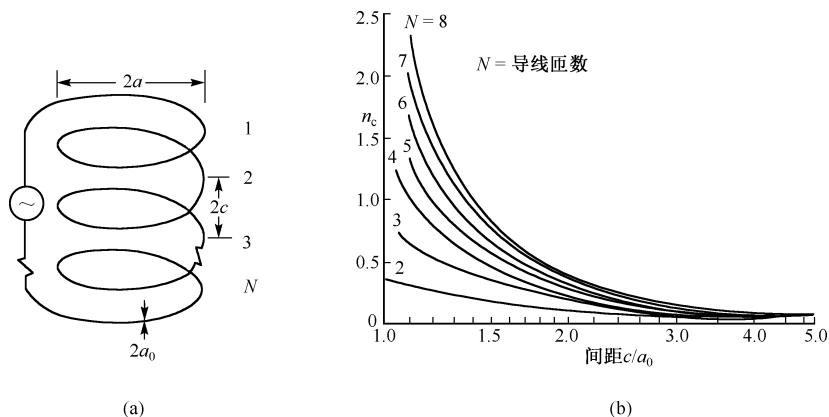


图 1.3-4 N 匝圆环与其邻近效应因子 n_e

增加辐射电阻的另一种方法是将线圈绕在铁氧体棒上。此时等效波数为 $k_e = \omega \sqrt{\mu_0 \mu_e \epsilon_0} = k \sqrt{\mu_e}$ ，因而在铁氧体棒上绕 N 匝线圈的辐射电阻为

$$R_r = 320\pi^4 \left(\frac{\mu_e N A_0}{\lambda^2} \right)^2 \quad (1.3-30)$$

这种天线称为磁棒天线，如图 1.3-5 所示。这是老式中波调幅收音机常用的接收天线。在 1 MHz 频率上使用的铁氧体材料可有 $\mu_e \approx 50$ 。

值得说明，小电流环的近区有感性虚功率，因而其输入电抗是感性的。 N 匝小环的电感也将按 N^2 增大^①。因此在使用上述磁棒天线时，在利用 μ_e 来增大 R_r 的同时，附加可变电容 C 来抵消感抗 $j\omega L$ （称为调谐），如图 1.3-5 所示。

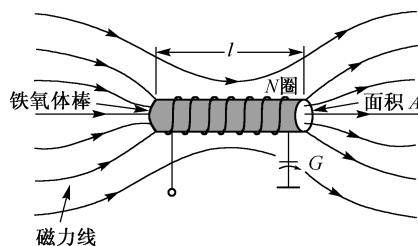


图 1.3-5 磁棒天线

对于尺寸大些的环形天线的分析，可参阅文献[1°]~[3°]及李乐伟教授^[4]等人的论文。

1.4 镜像原理与等效原理，惠更斯元

1.4.1 镜像原理

当均匀媒质中存在无限大理想导体平面时，该导体平面的作用可用真实场源在位于该平面另一侧对称位置上的镜像场源来等效。例如，一水平电流元 I 位于理想导体平面上方，如图 1.4-1(a) 所示。由于正电荷的镜像为镜面对称点处的负电荷，而负电荷对应的镜像为正电荷，因此，水平电流元 I 的镜像为 $-I$ 。故其等效系统如图 1.4-1(b) 所示，即问题简化为在均匀无界媒质中由真

① 见文献[10°]中的表 4.4-1， N 匝半径为 a 且长为 l 的螺线管的电感为 $L = \mu N^2 \pi a^2 / l$ ；而环半径为 a 且导线半径为 a_0 的单匝圆环的电感为 $L = \mu a \left(\ln \frac{8a}{a_0} - 1.75 \right)$ 。

实源 I 和镜像源 $-I$ 来求原导体平面上方的场。此即镜像原理。注意,只对原导体平面上方等效,原导体平面下方为零场。镜像原理的实质,就是使真实源和镜像源的合成场在导体平面上满足边界条件,即切向电场为零。根据唯一性定理,这样的场只有一个,也就是说,等于原先待求的场。如图 1.4-1(b) 所示,源 I 在 PP' 平面上任意点 B 产生的电场 E_θ 与镜像源 $I' = -I$ 在同一点产生的电场 E'_θ 二者的切向分量正好相互抵消。对于近区,源 I 和镜像源 I' 还有各自的径向电场 E_r 和 E'_r ,它们在 PP' 平面任意点 A 的切向分量也是相消的。

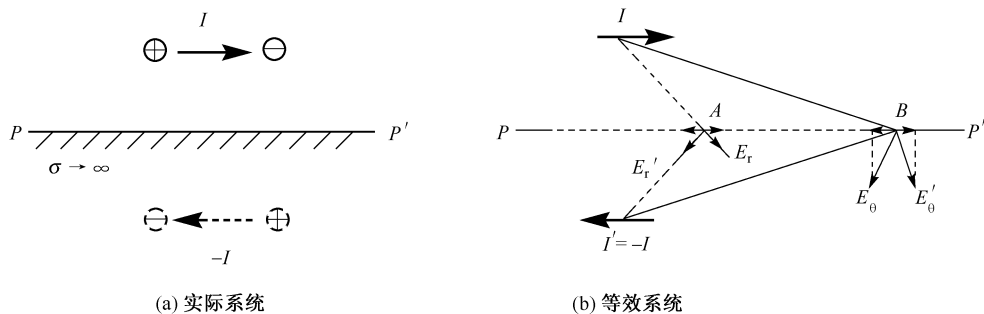


图 1.4-1 理想导体平面上方的水平电流元

与上同理可知,垂直电流元 I 的镜像源为正像 I ;而且,水平与垂直磁流源 I^m 的镜像源分别为 I^m 和 $-I^m$,如图 1.4-2(a) 所示。当存在理想导磁面时,电流元与磁流源的镜像源可利用对偶原理得出,如图 1.4-2(b) 所示。任意方向的 I 或 I^m 可先分解成平行和垂直于导体平面的两个分量,总的镜像等于每个分量的镜像之叠加。

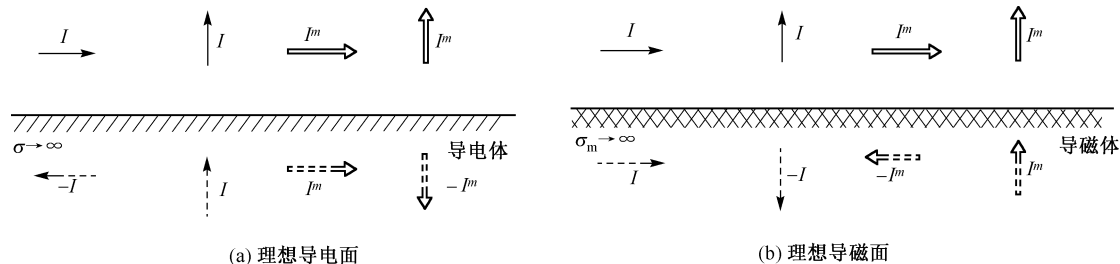


图 1.4-2 电流源和磁流源对导体平面的镜像

1.4.2 等效原理

以反射面天线为代表的面天线主要用于微波波段,其工作波长较短。面天线辐射场的确定是基于光学中的惠更斯(Christiaan Huygens, 1629—1695, 荷兰)原理。惠更斯原理说:“初始波前上的每一点都可看成次级球面波的新波源,这些次级波的包络便构成次级波前。”如图 1.4-3 所示,研究光通过屏上口径的绕射时,从初始波前开始,可依次确定后续的波前。1936 年谢昆诺夫(S. A. Schelkunoff, 1897—1992, 俄-美)导出等效原理,它是惠更斯原理的更严格的表述。

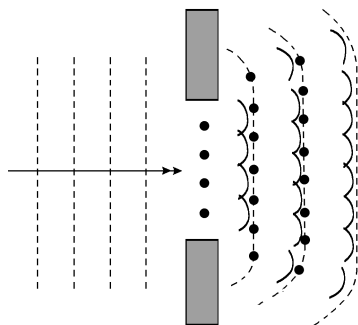


图 1.4-3 光通过屏上口径的绕射

如果有一假想场源,它在空间某一区域中产生的场与实际场源所产生的相同,我们称此二场源对该区域是等效的。此即场的等效原理(Field equivalence principle),一般表示如图1.4-4所示。原来问题是电流源 $\bar{J}$ 和磁流源 $\bar{J}^m$ 在空间各处产生电磁场 $(\bar{E}, \bar{H})$ [见图1.4-4(a)]。设想用一封闭面 s 来包围原场源,并将该场源取消,令 s 面内场为 $(\bar{E}_1, \bar{H}_1)$,而 s 面外的场仍保持为原来的场 $(\bar{E}, \bar{H})$ [见图1.4-4(b)]。 s 面内的场与 s 面外的场之间必须满足 s 面处边界条件:

$$\bar{J}_s = \hat{n} \times (\bar{H} - \bar{H}_1), \quad s \text{ 面上} \quad (1.4-1a)$$

$$\bar{J}_s^m = -\hat{n} \times (\bar{E} - \bar{E}_1), \quad s \text{ 面上} \quad (1.4-1b)$$

式中 $\hat{n}$ 为 s 面的外法线方向单位矢量。假想的 s 面上的电流 $\bar{J}_s$ 和磁流 $\bar{J}_s^m$ 就是 s 面外区域的等效场源。因为,根据场的唯一性定理, s 面上外区域的场由 s 面上的边界条件唯一地决定^①,而这些边界上的源在 s 面外产生的场正是原来的场 $(\bar{E}, \bar{H})$ 。

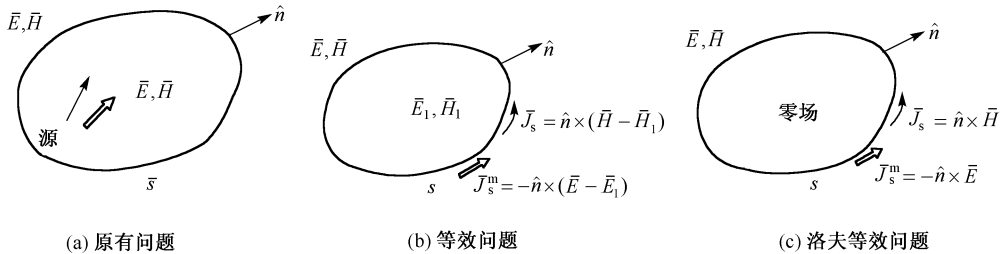


图1.4-4 等效原理

由于 s 面内的场 $(\bar{E}_1, \bar{H}_1)$ 可以是任何值,可假定它们是零。这时等效问题简化为图1.4-4(c),而 s 面上的等效场源化为

$$\bar{J}_s = \hat{n} \times \bar{H}, \quad s \text{ 面上} \quad (1.4-2a)$$

$$\bar{J}_s^m = -\hat{n} \times \bar{E}, \quad s \text{ 面上} \quad (1.4-2b)$$

等效性原理的这一形式称为洛夫(A. E. H. Love)等效原理。这是最常用的等效原理形式。注意,式(1.4-2b)与式(1.4-2a)相比,右端有一负号,即电流密度与 s 面法向、磁场强度成右手螺旋关系,而磁流密度与 s 面法向、电场强度成左手螺旋关系。这个负号与表1.3-1中 $\bar{H}^e \leftrightarrow -\bar{E}^m$ 的对偶关系是一致的。这些都源自广义麦克斯韦方程组中式(1.3-1a)与式(1.3-1b)右边相差一负号。可见,虽然式(1.1-5a)~式(1.1-5d)是极优美的对称形式方程组,但其中仍包含有电与磁内在的特性差异。

值得指出,上述洛夫等效原理适用于采用广义麦克斯韦方程组求解的场合,而不是用麦克斯韦方程组求解。因为,麦克斯韦方程组内只有电流源,其辐射场在均匀媒质中到处存在,一般不能使空间某一区域得到零场。只有引入磁流源后,二者产生的场在某一区域相消,从而形成零场。

洛夫等效原理的两种变形是:用理想导体作为零场区的媒质,此时 s 面上将只有面磁流 $\bar{J}_s^m = -\hat{n} \times \bar{E}$;或用理想导磁体作为零场区媒质,则 s 面上只有面电流 $\bar{J}_s = \hat{n} \times \bar{H}$ 。这时再结合镜像原理,就可使问题简化。

① 把 s 面外区域看成由 s 面所外包;或再做一半径无限大的球面来包围外区域,而该球面上的场必为零,因而并无贡献。