

第1章 投影基础

太阳或灯光照射物体时,在墙壁或地面上就出现了物体的影子,这是一种自然的投影现象。根据这种现象,人类经过科学总结影子与物体的几何关系,创造了把空间物体在平面上表示的方法——投影法。本章主要研究立体及构成立体最基本的几何元素(点、线、面)在平面上的表达理论与方法。

1.1 投影法概述

1. 投影法基本概念

在投影法中,得到投影的平面(P)称为投影面,发自投射中心且通过物体上各点的直线称为投射射线,投影面上的“影子”称为投影,如图1-1所示。

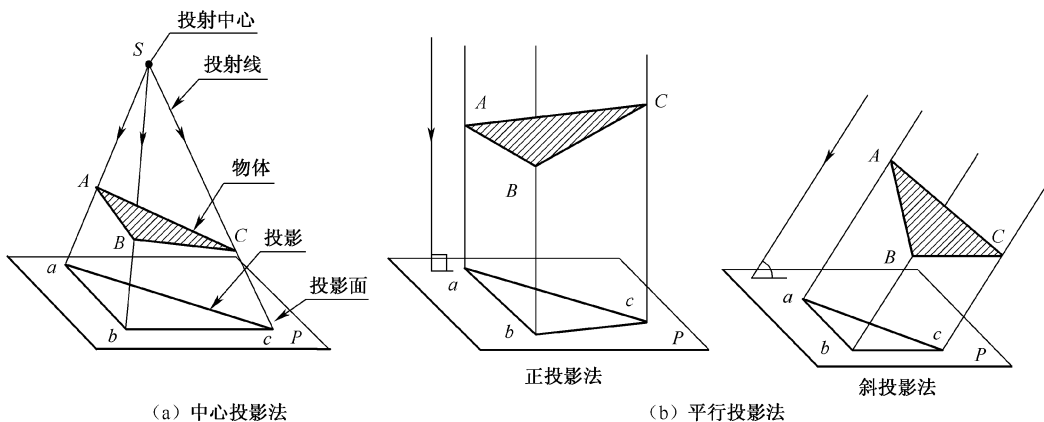


图1-1 投影法及分类

2. 投影法分类

由于投射线的不同,投影法一般可分为中心投影法和平行投影法两大类。

1) 中心投影法

投射射线相交于一点的投影法称为中心投影法,如图1-1(a)所示。

2) 平行投影法

投射射线相互平行的投影法(投射中心位于无限远处)称为平行投影法,如图1-1(b)所示。在平行投影法中,根据投射射线是否垂直于投影面,又分为如下两种。

(1) 正投影法:投射射线垂直于投影面的平行投影法,根据正投影法所得到的图形称为正投影图,简称正投影。

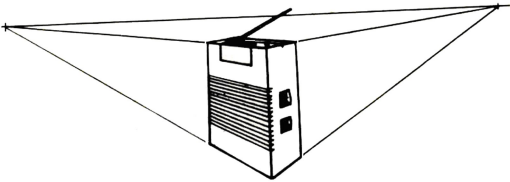
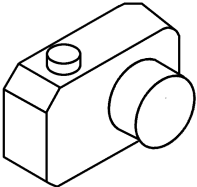
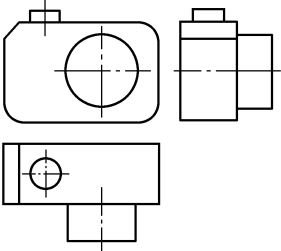
(2) 斜投影法:投射射线与投影面相倾斜的平行投影法,根据斜投影法所得到的图形称

为斜投影图,简称斜投影。

3. 投影法应用

工程上常用的投影方法是平行投影法。特别在一定条件下,正投影图的度量性好,作图简便,应用尤其广泛。本书主要研究正投影法。为了叙述简便起见,本书中如未加说明,所述投影均指正投影。投影法应用与图例见表 1-1。

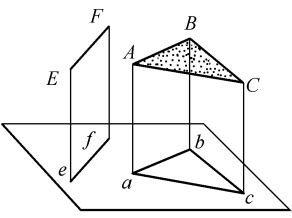
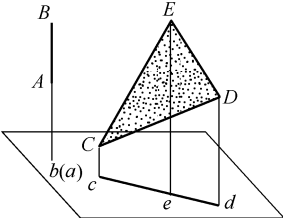
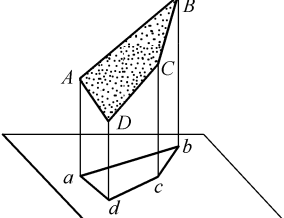
表 1-1 投影法应用与图例

投影法	投影图名	图 例	投影面数	特点与应用
中心 投影法	透视图		单个	近大远小特征,直观逼真,但作图复杂,度量性差。多应用于建筑等效果图
平行 投影法	轴测图		单个	直观性强但没有透视图逼真,度量性差。多应用于工程辅助图样
	多面正 投影图		多个	度量性好且作图容易,但直观性较差。主要应用于工程图样的绘制

4. 正投影的基本特性

空间元素与投影面的相对位置不同,其投影特性也不同。正投影的基本特性有真实性、积聚性、类似性。图例与特征见表 1-2。

表 1-2 正投影的基本特性

投影性质	真 实 性	积 聚 性	类 似 性
图例			
说明	直线、平面平行于投影面时,投影反映实形	直线、平面垂直于投影面时,投影积聚成点和直线	平面倾斜于投影面时,投影形状与原形状类似

1.2 三面投影

1. 三视图的形成

1) 单面投影

如图 1-2(a) 所示,点的投影仍为点。设投射方向为 S ,空间点 A 在投影面 H 上有唯一的投影 a 。反之,若已知点 A 在 H 面的投影 a ,却不能唯一确定点 A 的空间位置(如 A_1 、 A_2),由此可见,点的一个投影不能确定点的空间位置。

同样,仅有物体的单面投影也无法确定空间物体的真实形状,如图 1-2(b) 所示。形态不同的 A 、 B 物体在 W 面却得到了相同的投影。这样,空间形体与投影之间没有一一对应关系。为此,必须增加投影面的数量。

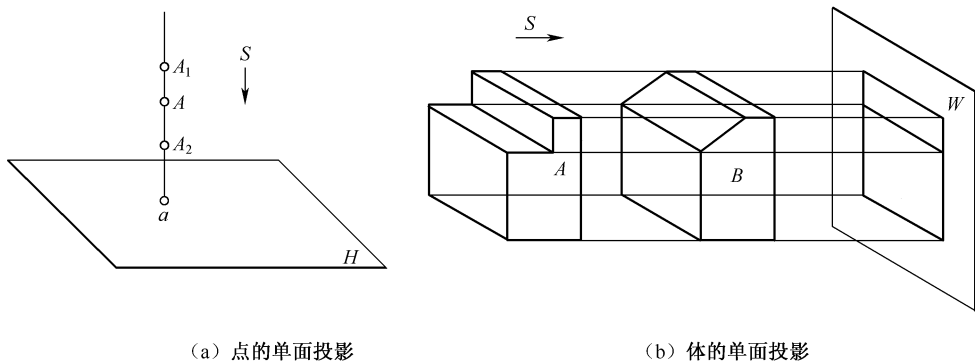


图 1-2 单面投影

2) 三面投影

三个相互垂直的投影面 V 、 H 和 W 构成三面投影体系,如图 1-3 所示。

- 正立放置的 V 面称正立投影面,简称正立面。
- 水平放置的 H 面称水平投影面,简称水平面。
- 侧立放置的 W 面称侧立投影面,简称侧立面。

投影面的交线即 OX 、 OY 、 OZ 称投影轴,三投影轴的交点 O 称为投影轴原点。

三面投影体系将空间分为八个区域,称为分角。国家标准图样画法规定,技术图样优先采用第一分角画法,本书主要讨论在第一分角的情况。

如图 1-4(a) 所示,将物体置于第一分角后,分别在三个方向得到投影。为了把物体的三面投影画在同一平面内,国家标准规定 V 面保持不动, H 面绕 OX 轴向下旋转 90° 与 V 面重合, W 面绕 OZ 轴向右旋转 90° 与 V 面重合。这样, V - H - W 展开后就得到了物体的三面投影,如图 1-4(b) 所示,其中 OY 轴随 H 面旋转时以 OY_H 表示,随 W 面旋转时以 OY_W 表示。

投影图大小与物体相对于投影面的距离无关,即改变物体与投影面的相对距离,并不

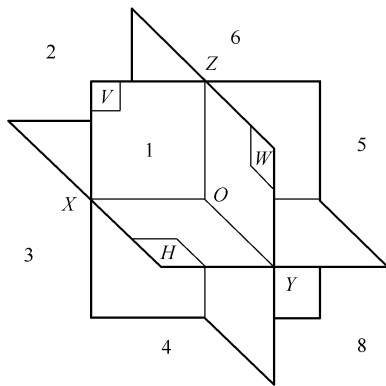


图 1-3 三面投影体系

会引起图形的变化。所以,在画实体投影图时一般不画出投影面的边界以及投影轴,如图1-4(c)所示。

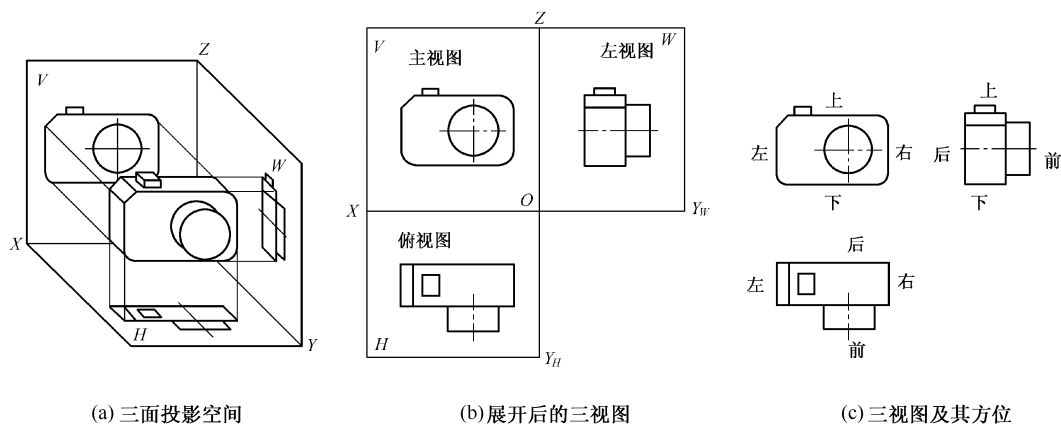


图1-4 三面投影空间与三视图

3) 视图的概念

所谓视图实际上就是物体正投影的通俗说法。如图1-4所示,物体在 V 、 H 和 W 面上的三个投影,通常称为物体的三视图。

其中,正面投影即从前向后投射所得的图形,称为主视图;水平投影即从上向下投射所得的图形,称为俯视图;侧面投影即从左向右投射所得的图形,称为左视图。如图1-4(b)所示,即为三视图的配置关系。

主视图上反映物体左右、上下方向;俯视图上反映左右、前后方向;左视图上反映上下、前后方向,如图1-4(c)所示。

2. 三视图之间的投影规律

如图1-5所示,三视图之间的投影关系如下:

- 主、俯视图——共同反映物体的长度方向的尺寸,简称“长对正”。
- 主、左视图——共同反映物体的高度方向的尺寸,简称“高平齐”。
- 俯、左视图——共同反映物体的宽度方向的尺寸,简称“宽相等”。

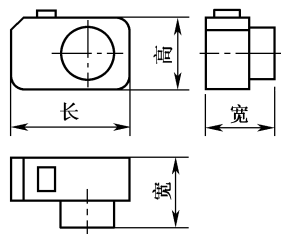


图1-5 三视图投影规律

“长对正、高平齐、宽相等”反映了物体上所有几何元素三个投影之间的对应关系。三视图之间的这种投影关系是画图时必须遵循的投影规律和读图时必须掌握的要领。

3. 物体三视图画法示例

如图1-6所示为立体的三视图画法示例。根据技术制图国家标准,对图线的规范要求是:

中心与对称轴线必须画成细点画线。可见轮廓画成粗实线。不可见轮廓画成细虚线。作图中的辅助线与投影连线通

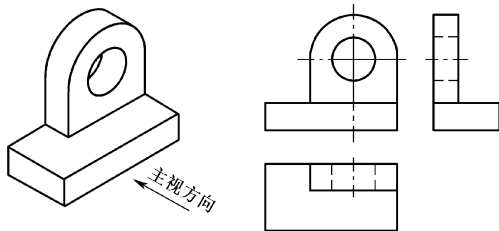


图1-6 物体三视图画法示例

常画成细实线。

图线粗细的规范是:粗线的线宽是细线线宽的2倍。

1.3 点、直线、平面的投影

前面已经初步研究了物体与视图之间的对应关系,但为了迅速而准确地表达更为复杂的空间形体,就必须进一步研究构成形体的最基本的几何元素(点、线、面)的投影规律。

1. 点的投影

1) 点的三面投影

如图1-7所示,由空间点 A 分别作垂直于 V 、 H 和 W 的投射线,其垂足 a' 、 a 、 a'' 即为点 A 在 V 面、 H 面和 W 面上的投影。通常规定,空间点用大写字母(如 A 、 B)表示,正面投影用相应小写字母加一撇表示,水平投影用相应的小写字母表示,侧面投影用相应小写字母加两撇表示。 a' 称为点 A 的正面投影; a 称为点 A 的水平投影; a'' 称为点 A 的侧面投影。

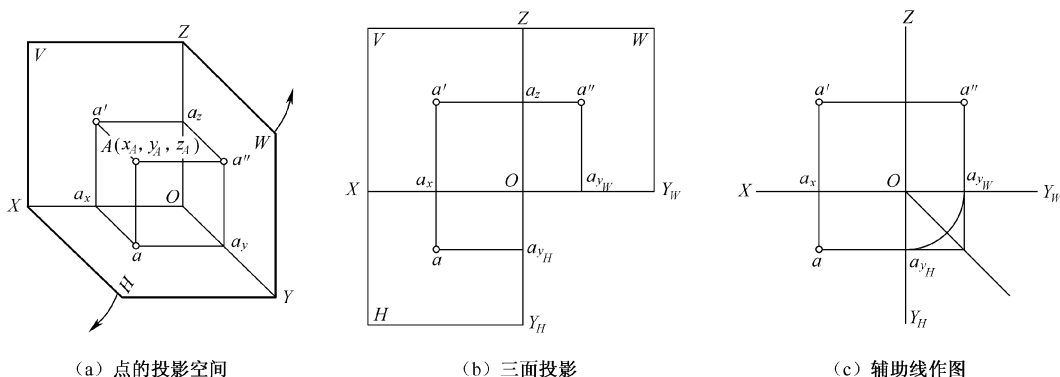


图1-7 点的三面投影

2) 点的投影规律

从图1-7中可以看出,空间一点 $A(x_A, y_A, z_A)$ 在三面投影体系中有唯一确定的一组投影(a' 、 a 、 a'');反之,如已知点 A 的三面投影即可确定点 A 的坐标值,也就确定了其空间位置。因此可以得出点的投影规律如下。

(1) 点的 V 面与 H 面的投影连线垂直于 OX 轴,即 $a'a \perp OX$ 。这两个投影都反映空间点到 W 面的距离即 X 坐标: $a'a_z = aa_{y_H} = X_A$ 。

(2) 点的 V 面与 W 面投影连线垂直于 OZ 轴,即 $a'a'' \perp OZ$ 。这两个投影都反映空间点到 H 面的距离即 Z 坐标: $a'a_x = a''a_{y_W} = Z_A$ 。

(3) 点的 H 面投影到 OX 轴的距离等于点的 W 面投影到 OZ 轴的距离。这两个投影都反映空间点到 V 面的距离即 Y 坐标: $aa_x = a''a_z = Y_A$ 。

实际上,上述点的投影规律也体现了三视图的“长对正、高平齐、宽相等”。

作图时,为了表示 $aa_x = a''a_z$ 的关系,通常用过原点 O 的 45° 辅助线把点的 H 面与 W 面投影关系联系起来,如图1-7(c)所示。

点的三个坐标值(x, y, z)分别反映了点到 W 、 V 、 H 面之间的距离。根据点的投影规律,可由点的坐标画出三面投影,也可根据点的两个投影作出第三投影。

【例 1-1】 已知点 A 的两面投影和点 B 的坐标为 $(25, 20, 30)$, 求点 A 的第三面投影及点 B 的三面投影(见图 1-8(a))。

解:(1)求 A 点的侧面投影。先过原点 O 作 45° 辅助线。过 a 作平行于 OX 轴的直线,与 45° 辅助线相交一点,过交点作垂直于 OY_W 的直线,该直线与过 a' 平行于 OX 轴的直线相交于一点,即为所求侧面投影 a'' 。

(2) 求 B 点的三面投影。在 OX 轴取 $Ob_x = 25\text{mm}$, 得点 b_x , 过 b_x 作 OX 轴的垂线,取 $b'b_x = 30\text{mm}$, 得点 b' , 取点 $b_x b = 20\text{mm}$, 得点 b ; 与求 A 点的侧面投影一样,可求得点 B 的侧面投影 b'' 。答案如图 1-8(b) 所示。

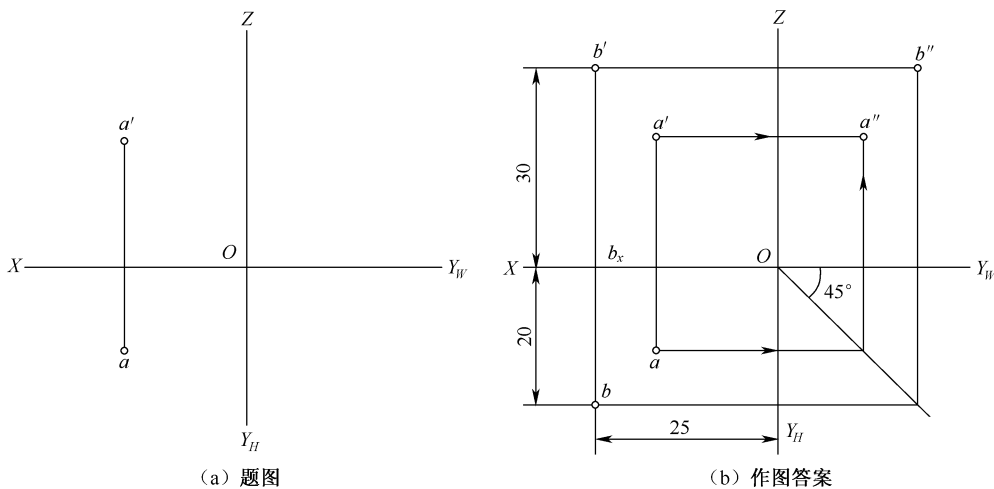


图 1-8 点的投影作图

3) 重影点及点的相对位置

若空间两点的某一投影重合在一起,则该点称为投影面的重影点。如图 1-9 所示,

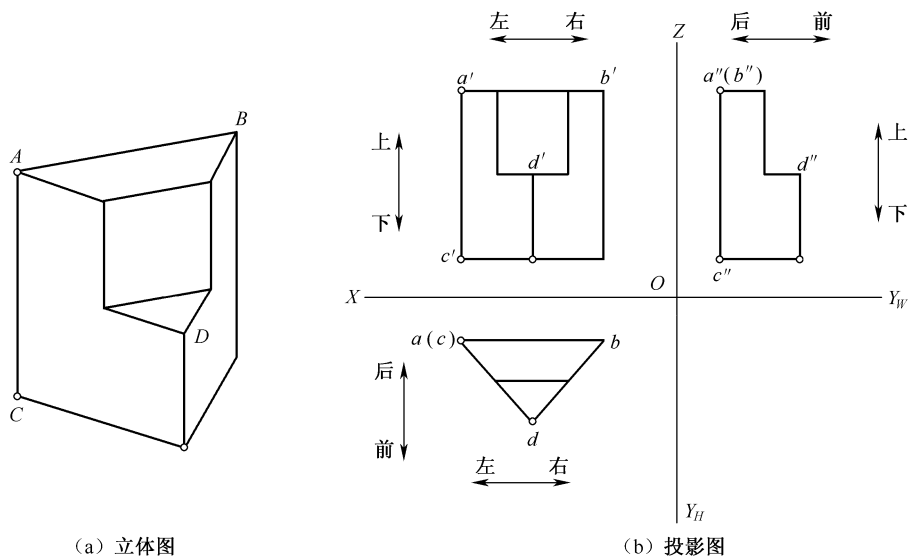


图 1-9 重影点及两点相对位置

在切角三棱柱上两点 A 、 C 为 H 面的重影点, A 、 B 为 W 面上的重影点。重影点的可见性由两点的相对位置判别, 不可见点的投影字母以加括号“()”表示。

空间点的相对位置, 可以在三面投影中直接反映出来, 如图 1-9(b) 所示, 切角三棱柱的两点 A 、 D , 在 V 面上反映两点上下、左右关系, 在 H 面上反映两点左右、前后关系, 在 W 面上反映两点上下、前后关系。

2. 直线的投影

1) 一般直线及直线上点的投影

直线的投影一般仍为直线。由几何学知道, 空间两点决定一直线, 因此要作直线的投影, 只需作出直线段上两点的投影(两点在同一投影面上的投影称为同面投影), 如图 1-10 所示。

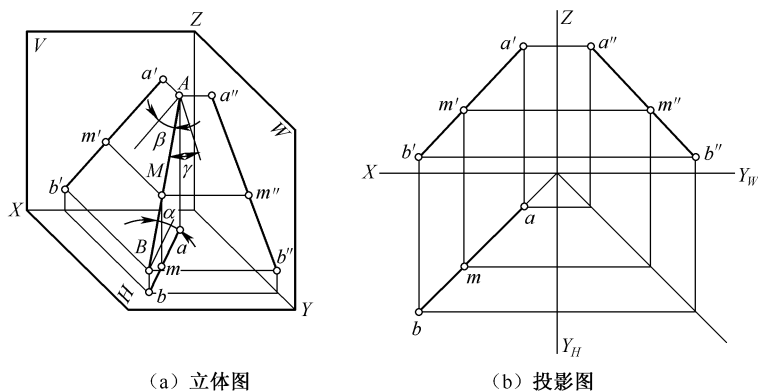


图 1-10 直线及直线上点的投影

一般位置直线对三个投影面都倾斜, 其三面投影仍为直线。直线对 H 、 V 、 W 面的倾角用 α 、 β 、 γ 来表示, 则 $ab = AB \cos \alpha < AB$, $a'b' = AB \cos \beta < AB$, $a''b'' = AB \cos \gamma < AB$ 。

直线上的点, 具有下列投影特性。

(1) 从属性: 点在直线上, 点的投影必在直线的同面投影上。如图 1-10 所示, 在直线 AB 上有一点 M , 点 M 的三面投影 m 、 m' 、 m'' 分别在直线 AB 的同面投影 ab 、 $a'b'$ 、 $a''b''$ 上。

(2) 定比性: 点在直线上, 点分线段之比等于其投影之比。如图 1-10 所示, 点 M 分 AB 成 AM 和 BM , 则 $AM : BM = am : bm = a'm' : b'm' = a''m'' : b''m''$ 。

【例 1-2】如图 1-11(a) 所示, 已知点 C 分 AB 为 $AC : BC = 3 : 2$, 求点 C 的投影。

解: 根据直线上点的定比性, 可将 AB 的任一投影分成 $3 : 2$, 求得点 C 的一个投影, 利用从属性, 可求出点 C 的另一投影。如图 1-11(b) 所示, 作图步骤如下。

(1) 过 a 作任意直线, 截取 5 个单位长度, 并连接线 $5b$ 。

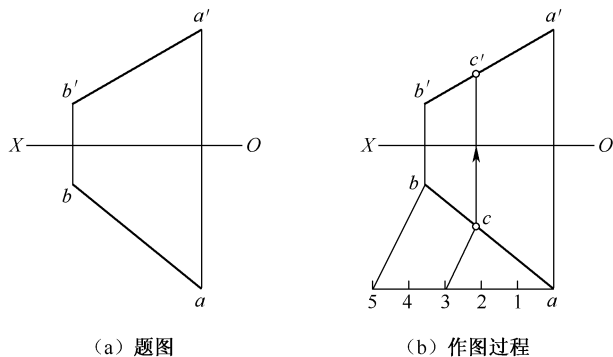


图 1-11 点分直线的投影作图

(2) 过 3 作 $5b$ 的平行线, 交 ab 于 c 。

(3) 由 c 作投影连线, 交 $a'b'$ 于点 c' 。

2) 特殊位置直线的投影特性

特殊位置直线	投影面平行线 (仅平行于某个投影面)	$\left\{ \begin{array}{l} \text{正平行: 平行于 } V, \text{ 倾斜于 } H、W \\ \text{水平线: 平行于 } H, \text{ 倾斜于 } V、W \\ \text{侧平线: 平行于 } W, \text{ 倾斜于 } V、H \end{array} \right.$
	投影面垂直线 (垂直于某个投影面)	$\left\{ \begin{array}{l} \text{正垂线: 垂直于 } V, \text{ 平行于 } H、W \\ \text{铅垂线: 垂直于 } H, \text{ 平行于 } V、W \\ \text{侧垂线: 垂直于 } W, \text{ 平行于 } V、H \end{array} \right.$

(1) 投影面平行线的投影。

投影面平行线的投影特性(正平线、水平线、侧平线)见表 1-3。

表 1-3 投影面平行线的投影规律

名 称	立 体 图	投 影 图	投 影 特 性
正平线 $AB // V$			$a'b'$ 反映实长和真实倾角 $\alpha, \gamma; \beta=0$ $ab // OX, a''b'' // OZ$, 长度缩短
水平线 $AC // H$			ac 反映实长和真实倾角 $\beta, \gamma; \alpha=0$ $a'c' // OX, a''c'' // OY_W$, 长度缩短
侧平线 $BC // W$			$b''c''$ 反映实长和真实倾角 $\alpha, \beta; \gamma=0$ $b'c' // OZ, bc // OY_H$, 长度缩短

投影面平行线的投影特性:

- (1) 直线在与其平行的投影面上的投影, 反映该线段的实长及该直线与其他两个投影面的倾角。
- (2) 直线在其他两个投影面的投影分别平行于相应的投影轴

(2) 投影面垂直线的投影。

投影面垂直线的投影特性(正垂线、铅垂线、侧垂线)见表1-4。

表1-4 投影面垂直线的投影

名 称	立 体 图	投 影 图	投 影 特 性
正 垂 线 $CF \perp V$			1. $c'f'$ 积聚成一点 2. $cf \perp OX, c''f'' \perp OZ$, 且反映实长, 即 $cf = c''f'' = CF$
铅 垂 线 $BE \perp H$			1. b, e 积聚成一点 2. $b'e' \perp OX, b''e'' \perp OY_W$, 且反映实长, 即 $b'e' = b''e'' = BE$
侧 垂 线 $AD \perp W$			1. a'', d'' 积聚成一点 2. $a'd' \perp OZ, ad \perp OY_H$, 且反映实长, 即 $ad = a'd' = AD$
投影面垂直线的投影特性: (1) 直线在与其垂直的投影面上的投影积聚成一点。 (2) 直线在其他两个投影面的投影分别垂直于相应的投影轴, 且反映该线段的实长			

3) 一般直线的实长及倾角

特殊位置的直线至少有一个投影反映实长并反映直线对投影面的倾角。一般位置直线的三面投影均不反映实长及倾角的真实大小, 能否根据直线的已知投影求其实长及倾角的真实大小呢? 实际应用中, 可用直角三角形法求得。

如图1-12(a)所示, AB 为一般位置的直线, 过 A 作 $AB_0 \parallel ab$, 则得一直角三角形 $\triangle ABB_0$, 在直角三角形 $\triangle ABB_0$ 中, 两直角边的长度为 $BB_0 = Bb - Aa = Z_B - Z_A = \Delta Z$, $AB_0 = ab$, $\angle BAB_0 = \alpha$ 。

可见只要知道直线的投影长度 ab 和对该投影面的坐标差 ΔZ , 就可求出 AB 的实长及倾角 α , 作图过程如图1-12(b)所示。

同理, 利用直线的 V 面投影和对该投影面的坐标差 ΔY , 可求得直线对 V 面的倾角 β 和实长, 如图1-12(c)所示。同样方法可以求出直线对 W 面的倾角 γ , 请读者自己分析。

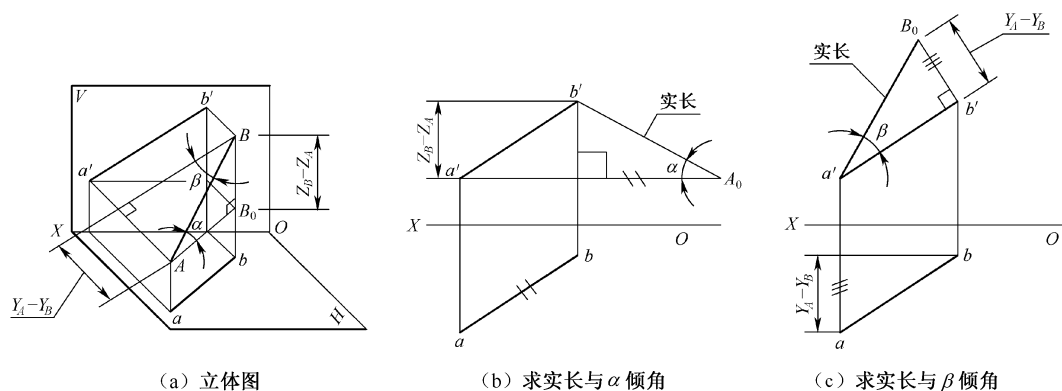


图 1-12 直角三角形法求实长及倾角

【例 1-3】 如图 1-13(a) 所示,求直线 AB 的实长及对 H 面的倾角 α 。并在直线 AB 上取一点 C ,使线段 $AC=10\text{mm}$ 。

解:先求出 AB 的实长及对 H 面的倾角 α ,再在 AB 实长上截取 $AC_0=10\text{mm}$ 得 C_0 点,然后将 C_0 点返回到 AB 的投影 ab 、 $a'b'$ 上求得 C 点的投影。作图过程如图 1-13(b) 所示。

(1) 过 b 作 ab 的垂线,取 $B_0b=Z_B-Z_A$ 得直角三角形,则 aB_0 、 α 即为所求实长与倾角。

(2) 在 AB 的实长 aB_0 上,截取 $aC_0=10$,得点 C_0 。

(3) 再作 $C_0c//B_0b$ 得点 C 的水平投影 c ,作投影连线得点 C 的正面投影 c' 。

4) 两直线的相对位置

空间两直线的相对位置有相交、平行和交叉三种情况。交叉两直线不在同一平面上,所以称为异面直线。相交两直线和平行两直线在同一平面上,所以又称它们为共面直线。

两直线的相对位置投影特性见表 1-5。根据投影图可判断两直线的相对位置。若两直线处于一般位置,一般由两面投影即可判断;若直线处于特殊位置,则需要利用三面投影或定比性等方法判断。

表 1-5 两直线的相对位置投影特性

名 称	立 体 图	投 影 图	投 影 特 性
平 行 两 直 线			平行两直线的同面投影分别相互平行,且具有定比性

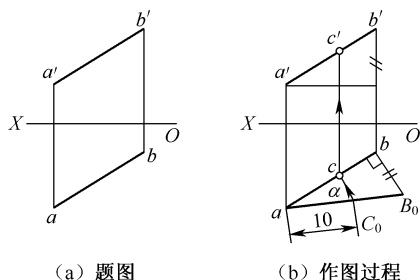


图 1-13 求实长、倾角及分点作图

(续)

名 称	立 体 图	投 影 图	投 影 特 性
相交两直线			相交两直线的同面投影分别相交,且交点符合点的投影规律
交叉两直线			既不符合平行两直线的投影特性,又不符合相交两直线的投影特性

5) 直角投影定理

定理:相互垂直的两直线,若其中一直线为投影面的平行线,则两直线在该投影面上的投影反映直角。

已知: $AB \perp BC$ 、 $BC \parallel H$ 面,如图 1-14(a) 所示。

证明:因 $BC \parallel H$ 面,而 $Bb \perp H$ 面,故 $BC \perp Bb$,所以 $BC \perp$ 平面 $BbaA$,又因 $bc \parallel BC$,故 $bc \perp$ 平面 $BbaA$ 。所以 $bc \perp ab$,即 $\angle abc = 90^\circ$,如投影图 1-14(b) 所示。

该定理的逆定理同样成立。直角投影定理常被用来求解有关距离问题。

【例 1-4】 如图 1-15(a) 所示,求点 C 到直线 AB 距离 CD 的实长。

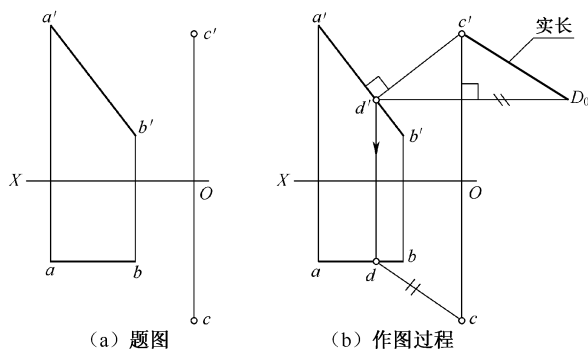


图 1-15 求点到直线的距离

解:求点到直线的距离,即从点向直线作垂线,求垂足。因 AB 是正平线,根据直角投影定理,从点 C 向 AB 作垂线,其正面投影必相互垂直。如图 1-15(b) 所示,步骤如下:

- (1) 过 C' 作 $a'b'$ 的垂线得垂足投影 d' 。
- (2) 根据点 D 在直线上,求出 d 。
- (3) 连 cd 、 $c'd'$ 即为距离的两面投影,利用直角三角法求出 CD 实长。

3. 平面的投影

1) 平面的表示法与一般平面

空间平面可用下列任意一组几何元素来表示,如图 1-16 所示。实际中这些表示方法之间是可以相互转换的。

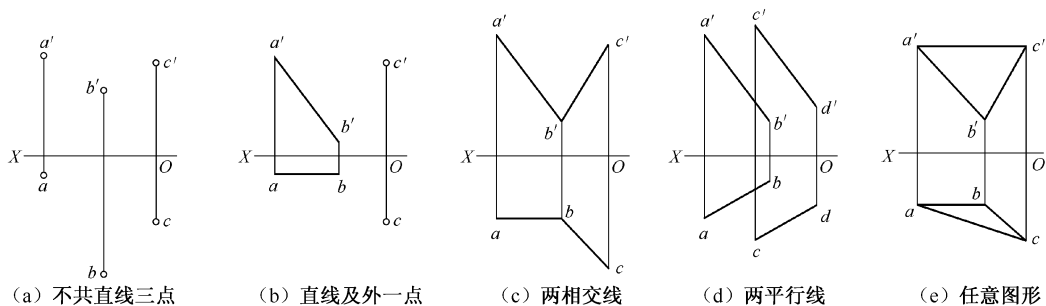


图 1-16 平面的表示法

一般位置平面的投影如图 1-17 所示,由于 $\triangle ABC$ 对 V 、 H 、 W 面都倾斜,因此其三面投影都是三角形,为原平面图形的类似形,且面积比原图形小。

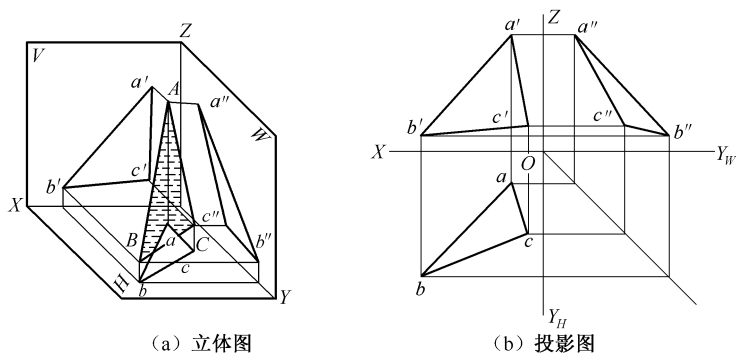


图 1-17 一般位置平面的投影

平面对 H 、 V 、 W 面的倾角,习惯用 α 、 β 、 γ 来表示。

2) 特殊位置平面的投影特性

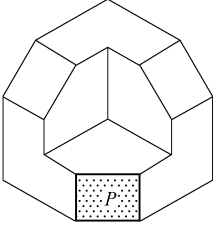
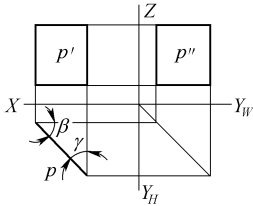
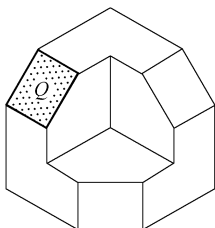
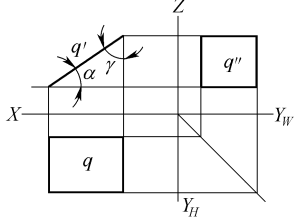
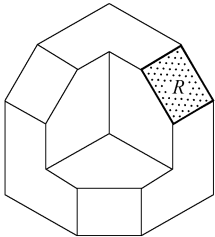
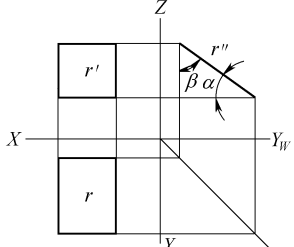
特殊位置平面分为投影面垂直面和投影面平行面两类。

特殊位置平面	投影面垂直面 (仅垂直于一个投影面)	正垂面:垂直于 V ,倾斜于 H 、 W
		铅垂面:垂直于 H ,倾斜于 V 、 W
		侧垂面:垂直于 W ,倾斜于 V 、 H
	投影面平行面 (平行于一个投影面)	正平面:平行于 V ,垂直于 H 、 W
		水平面:平行于 H ,垂直于 V 、 W
		侧平面:平行于 W ,垂直于 V 、 H

(1) 投影面垂直面的投影。

投影面垂直面(铅垂面、正垂面、侧垂面)的投影特性见表1-6。

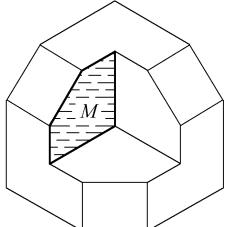
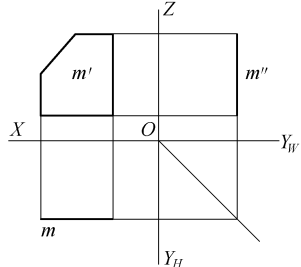
表1-6 投影面垂直面的投影

名称	立体图	投影图	投影特性
铅垂面 $P \perp H$			1. 水平投影积聚成一直线,并反映真实倾角β, γ。 2. 正面投影和侧面投影为类似形,但面积缩小
正垂面 $Q \perp V$			1. 正面投影积聚成一直线,并反映真实倾角α, γ。 2. 水平投影和侧面投影为类似形,但面积缩小
侧垂面 $R \perp W$			1. 侧面投影积聚成一直线,并反映真实倾角α, β。 2. 正面投影和水平投影为类似形,但面积缩小
投影面垂直面的投影特性: (1) 平面在与其垂直的投影面上的投影积聚成一直线,并反映该平面对其他两个投影面的倾角。 (2) 平面在其他两个投影面的投影都是面积小于原平面图形的类似形			

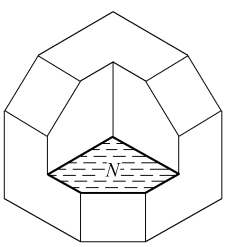
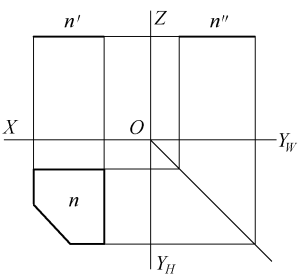
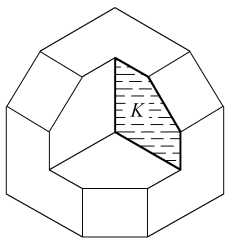
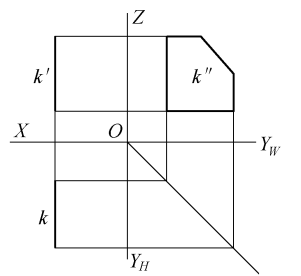
(2) 投影面平行面的投影。

投影面平行面(正平面、水平面、侧平面)的投影特性见表1-7。

表1-7 投影面平行面的投影

名称	立体图	投影图	投影特性
正平面 $M \parallel V$			1. 正面投影m'反映实形 2. 水平投影$\parallel OX$、侧面投影$\parallel OZ$,并分别积聚成一直线

(续)

名 称	立 体 图	投 影 图	投 影 特 性
水 平 面 $N//H$			1. 水平投影 n 反映实形 2. 正面投影 $//OX$、侧面投影 $//OY_W$, 并分别积聚成一直线
侧 平 面 $K//W$			1. 侧面投影 k'' 反映实形 2. 正面投影 $//OZ$、水平投影 $//OY_H$, 并分别积聚成一直线
投影面平行面的投影特性: (1) 平面在与其平行的投影面上的投影反映平面实形。 (2) 平面在其他两个投影面的投影都积聚成平行于相应投影轴的直线			

3) 平面内的点和直线

(1) 平面内取点和取直线。

① 点属于平面的几何条件是:点必须在平面内的一条直线上。因此要在平面内取点,必须过点在平面内取一条已知直线。如图 1-18 所示,在 $\triangle ABC$ 所确定的平面内取一点 N ,点 N 取在已知直线 AD 上,即在 $a'd'$ 上取 n' ,在 ad 上取 n ,因此点 N 必在该平面内。

② 直线属于平面的几何条件是:该直线必通过此平面内的两个点或通过该平面内一点且平行于该平面内的另一已知直线。

依此条件,可在平面内取直线,如图 1-19(a) 所示,在 DE 和 EF 相交直线所确定的平面内取两点 M 和 N ,直线 MN 必在该平面内。图 1-19(b) 为过 M 作直线 $MN//EF$,则直线 MN 必在该平面内。

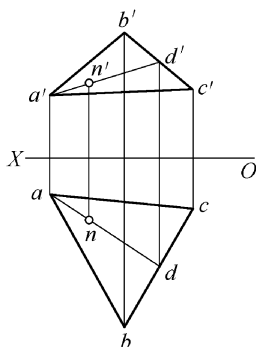
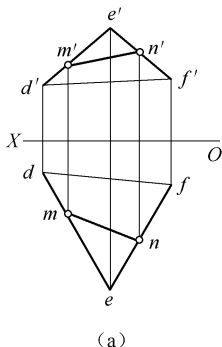
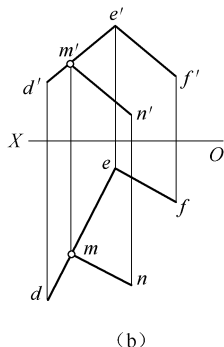


图 1-18 平面上取点



(a)



(b)

图 1-19 平面内取直线

在平面内取点和取直线是密切相关的,取点要先取直线,而取直线又离不开取点。

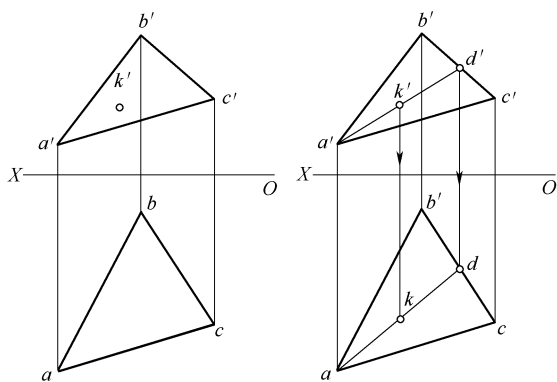
【例 1-5】 如图 1-20(a) 所示,点 K 属于 $\triangle ABC$ 所确定的平面,求作点 K 的水平投影。

解: 根据点在平面内的条件,点必在平面内的一条直线上,则过点 K 的一个投影在 $\triangle ABC$ 作一直线 AK 交 BC 于 D ,点 K 必在直线 AD 上。

作图过程如下(见图 1-20(b)):连 $a'k'$ 交 $b'c'$ 于 d' ,过 d' 作投影连线得 d ,即求得 AD 的水平投影 ad 。而点 K 的水平投影 k 必在 ad 上,过 k' 作投影连线与 ad 交得水平投影 k 。

(2) 平面内的投影面平行线。

既在给定平面内,又平行于投影面的直线,称为该平面内的投影面平行线。它们既具有投影面平行线的投影特性,又符合直线在平面内的条件。在图 1-21 中, AD 在 $\triangle ABC$ 内, $ad \parallel OX$ 轴即 $AD \parallel V$ 面,故 AD 为 $\triangle ABC$ 平面内的正平线。同理, AB 为该平面内的水平线。



(a) 题图

(b) 作图过程

图 1-20 求平面上点的另一投影

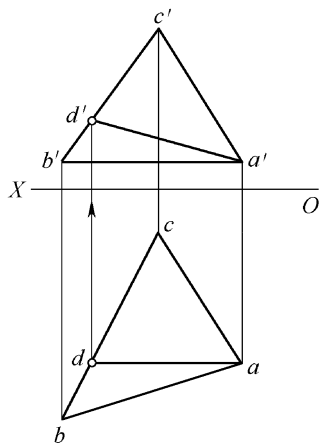


图 1-21 平面内的投影面平行线

【例 1-6】 如图 1-22 所示,在平面 $ABCD$ 内求点 K ,使其距 V 面为 15mm 、距 H 面为 12mm 。

解: (1) 分析。在平面 $ABCD$ 内求点 K 距 V 面 15mm ,则点一定在距 V 面 15mm 的正平线上。同理,又因点距 H 面为 12mm ,则点一定在距 H 面为 12mm 的水平线上。平面上的正平线与水平线的交点即为所求点 K 。

(2) 作图步骤(见图 1-22)。先作正平线 MN 的水平投影 $mn \parallel OX$,且距 OX 轴为 15mm ,并作出 MN 的正面投影 $m'n'$ 。

同理,作水平线 PQ 的正面投影 $p'q' \parallel OX$,且距 OX 轴为 12mm 。 $m'n'$ 与 $p'q'$ 的交点即为 K 点的正面投影 k' ,作投影连线交 mn 于 k ,点 K 即为所求。

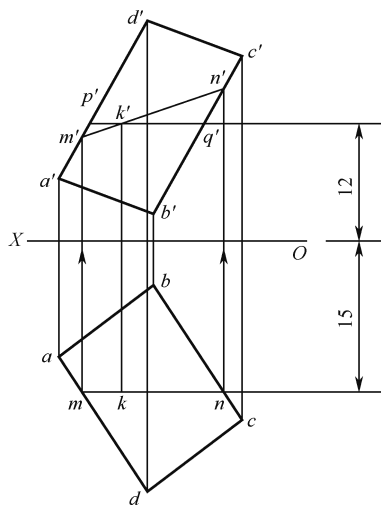


图 1-22 投影面平行线的应用

1.4 直线与平面、两平面的相对位置

直线与平面、两平面的相对位置可分为平行和相交两类。

1. 直线与平面、平面与平面平行

(1) 直线与平面平行的几何条件是:直线平行于平面内任一直线。

(2) 平面与平面平行的几何条件是:一平面内相交两直线对应平行于另一平面内的两相交直线。

利用上述几何条件可在投影图上求解有关平行问题。

【例 1-7】 如图 1-23 所示,判别直线 EF 是否平行于 $\triangle ABC$ 。

解:若 $EF \parallel \triangle ABC$, 则 $\triangle ABC$ 上可作出一直线 $\parallel EF$ 。故先作一辅助线 AD , 使 $a'd' \parallel e'f'$, 再求出水平投影 ad 。因 ad 不平行于 ef , 所以 EF 不平行于 AD , 也就是说在 $\triangle ABC$ 内不能作出一条直线平行于直线 EF , 故 EF 不平行 $\triangle ABC$ 。

【例 1-8】 如图 1-24(a) 所示, 过已知点 D 作正平线 DE 与 $\triangle ABC$ 平行。

解:(1) 分析。过点 D 可作无数条直线平行于已知平面, 但其中只有一条正平线, 故可先在平面内取一条辅助正平线, 然后过 D 作直线平行于平面内的正平线。

(2) 作图步骤。先过平面内的点 A 作一正平线 $AM(am \parallel OX)$; 再过点 D 作 DE 平行于 AM , 即 $de \parallel am, d'e' \parallel a'm'$, 则 DE 即为所求, 如图 1-24(b) 所示。

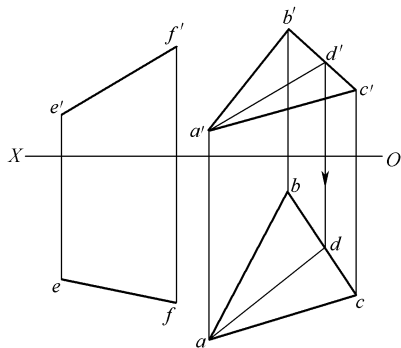
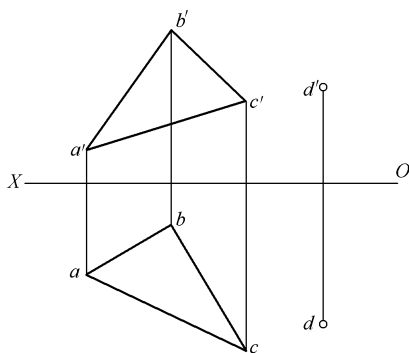
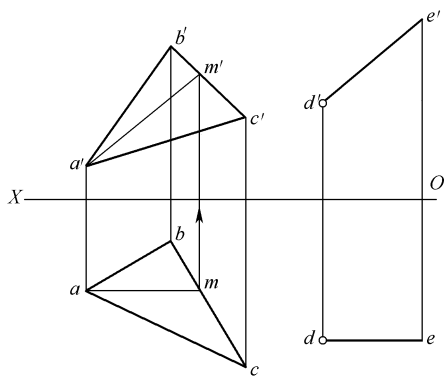


图 1-23 判别直线与平面是否平行



(a) 题图



(b) 作图过程

图 1-24 过已知点作正平线与平面平行

【例 1-9】 如图 1-25(a) 所示, 过点 E 作平面平行于两平行线 AB 与 CD 所确定的平面。

解:(1) 分析。只要过点 E 作相交两直线分别平行于 AB 与 CD 所确定的平面内任意两相交直线即可满足题目要求。

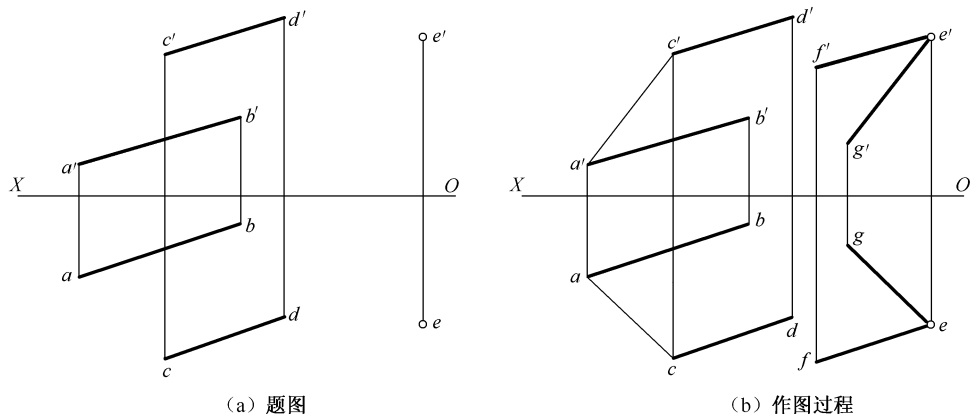


图 1-25 过点作平面平行于已知平面

(2) 作图步骤。先连 AC 线, 再过点 E 作 $EF \parallel AB$, 即作 $ef \parallel ab, e'f' \parallel a'b'$, 再过点 E 作 $EG \parallel AC$, 即作 $eg \parallel ac, e'g' \parallel a'c'$, 则平面 FEG 即为所求, 如图 1-25(b) 所示。

2. 直线与平面、平面与平面相交

直线与平面相交、平面与平面相交的关键是求交点和交线, 并判别可见性。其实质是求直线与平面的共有点、两平面的共有线。同时, 它们也是可见与不可见的分界点、分界线。本节只对直线或者平面处于特殊位置时进行讨论。

1) 直线与平面相交

(1) 当平面对投影面处于垂直位置时。

当平面为投影面的垂直面时, 由于它在该投影面上的投影具有积聚性, 所以交点的一个投影可以直接确定, 其他投影可以运用在直线上取点的方法确定。

如图 1-26(a) 所示, 直线与铅垂面 $\triangle ABC$ 交于点 K 。由于 $\triangle ABC$ 的水平投影 abc 积聚成直线, 故 MN 的水平投影 mn 与 abc 的交点 k 就是点 K 的水平投影, 由 k 在 $m'n'$ 上作出 k' 。

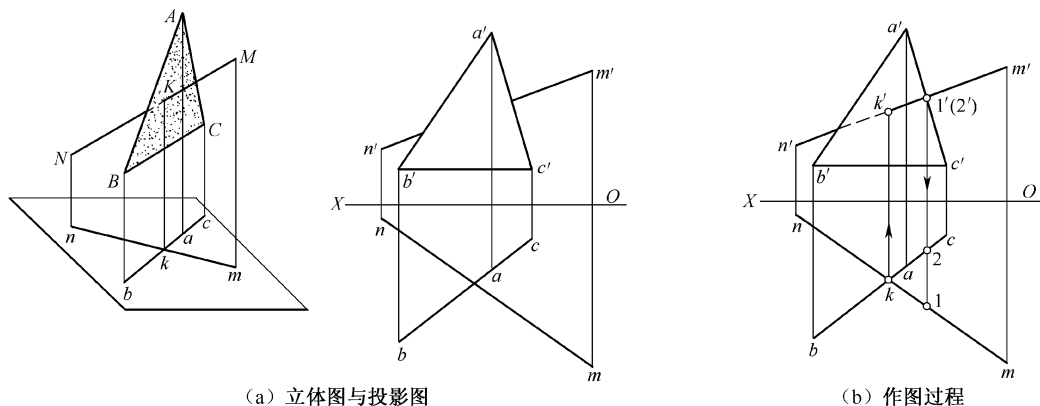


图 1-26 一般直线与铅垂面相交

MN 的可见性可利用重影点来判断。直线 MN 与 AC 在正立面投影有一重影点, 即 $m'n'$ 与 $a'c'$ 的交点 $1'、2'$ 。分别在 mn 和 ac 上求出 1 和 2, 由于点 1 在点 2 之前, 故 $1'$ 可见, 所以 $m'k'$ 为可见, 画成粗实线。而交点为可见与不可见的分界点, 故 $n'k'$ 与 $\triangle a'b'c'$ 重叠部分为不可见, 画成细虚线, 如图 1-26(b) 所示。

(2) 当直线对投影面处于垂直位置时。

当直线为投影面的垂直线时,则该直线在投影面上积聚成一点,那么,这个积聚点就是直线与平面交点的一个投影。再利用平面上取点的方法求得交点的另一投影。

如图 1-27(a) 所示,铅垂线 MN 与平面交于点 K 。由于 MN 在水平面上积聚成一点 $m(n)$,所以交点的水平投影 k 就是这个积聚点。因 K 点在平面内,所以,过交点的水平投影 k 作平面内直线的水平投影 cd ,再利用 $c'd'$ 求得交点的正面投影 k' 。可见性问题可以用直观法判别,即 $m'k'$ 可见, $k'n'$ 与平面的重叠部分为不可见,画成细虚线,如图 1-27(b) 所示。

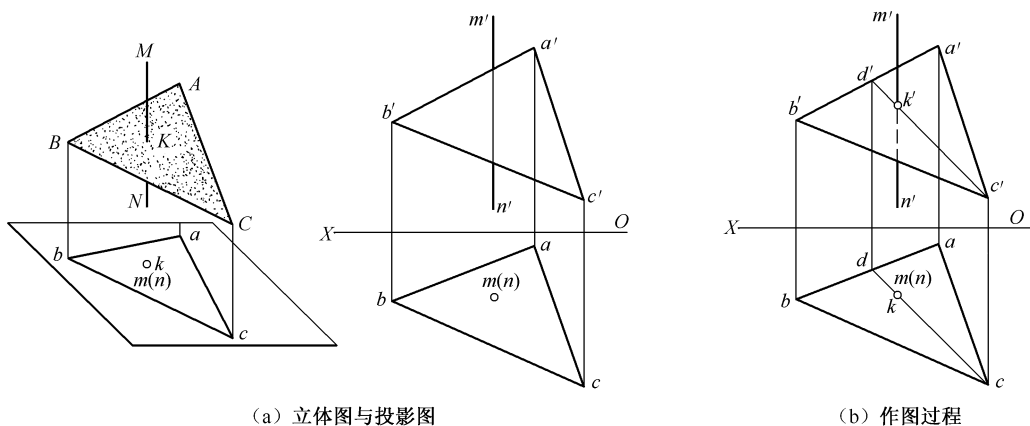


图 1-27 铅垂线与一般平面相交

直线与平面相交的特殊情况是垂直相交。

当平面为投影面垂直面时,如果直线和该面垂直,则直线必平行于该平面所垂直的投影面,并且直线在该投影面的投影,也必垂直于平面的投影。如图 1-28(a) 所示,平面 $CDEF$ 为铅垂面,直线 $AB \perp CDEF$ 面,则 AB 肯定为水平线。即 $ab \perp c(d)(e)f, a'b' \parallel OX$, 如图 1-28(b) 所示。

【例 1-10】 如图 1-29(a) 所示,求点 D 到正垂面 ABC 的距离 DE , 垂足为 E 。

解:(1) 分析。求点到平面的距离,则从点向平面作垂线,点与垂足的距离即为点到平面的距离。因 ABC 是正垂面,故所作垂线肯定为正平线,且在正面投影上反映为直角。

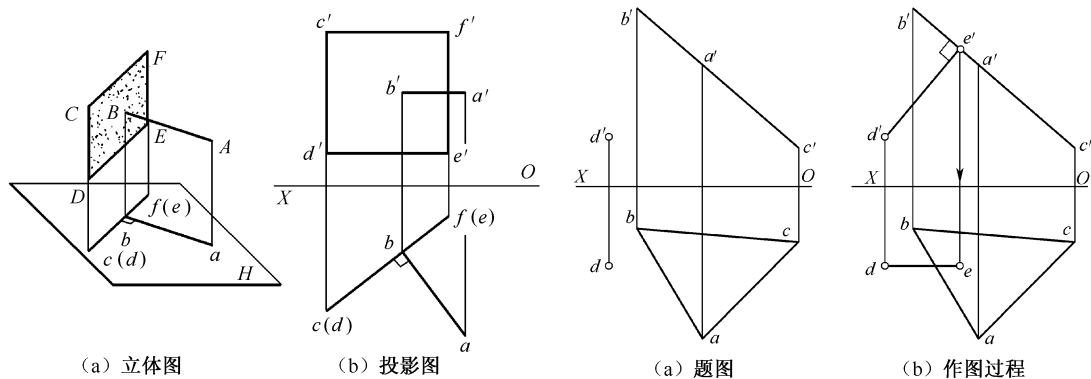


图 1-28 直线与铅垂面垂直

图 1-29 求点到平面的距离

(2) 作图。由 d' 作线 $d'e' \perp a'b'c'$, e' 为垂足的正面投影。由 d 作直线 $\parallel OX$ 轴, 求出 e , 故 $d'e'$ 即为点 D 到正垂面 $\triangle ABC$ 的距离实长, 如图 1-29(b) 所示。

2) 平面与平面相交

平面与平面相交的关键是求交线并判别可见性。它可以转化为一个平面里的两直线与另一个平面的交点问题来求解。

如图 1-30(a) 所示, 平面 $\triangle ABC$ 和铅垂面 $DEFG$ 相交线为 MN 。显然 M 、 N 分别是 $\triangle ABC$ 的两边 AB 、 AC 与铅垂面 $DEFG$ 的交点。如图 1-30(b) 所示, 利用求直线与投影面垂直面交点的作图方法, 求出交点 m 、 n , 对应得 m' 、 n' , 连接 $m'n'$ 、 mn , 即为交线的两面投影。

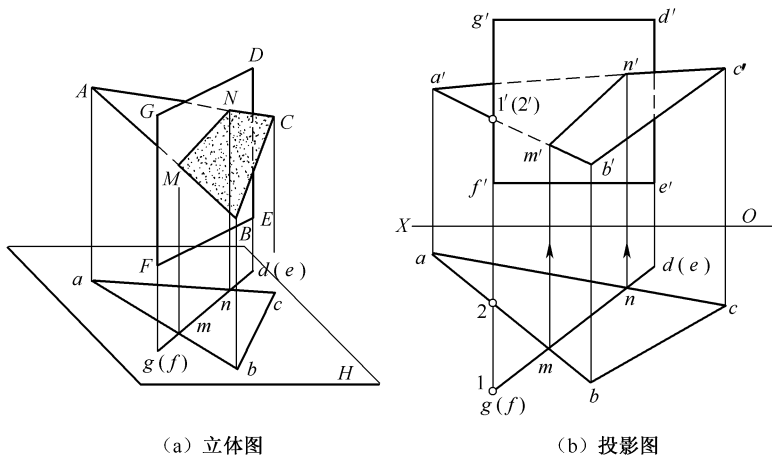


图 1-30 铅垂面与一般平面相交

两平面重叠部分的可见性, 同样可用重影点 $1'$ 、 $2'$ 来判别。由图 1-30(b) 可知, 由于点 1 在点 2 之前, 所以 $1'$ 可见, 故 $g'1'$ 为可见, $m'2'$ 为不可见, 根据平面与平面存在遮住与被遮住的关系, 可判断其余各部分的可见性。

【例 1-11】 如图 1-31(a) 所示, 求作两铅垂面 ABC 与 $EFGH$ 的交线, 并表明可见性。

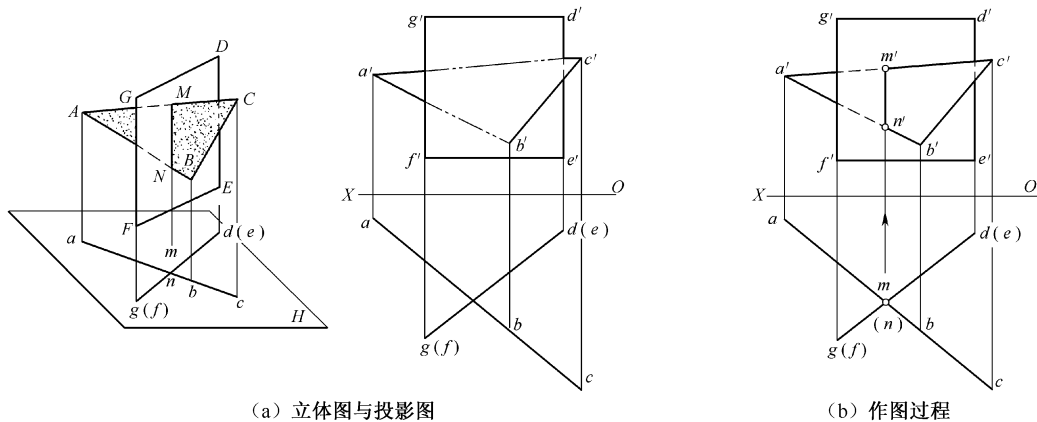


图 1-31 两铅垂面相交

解:(1) 分析。两平面同时垂直于第三平面,那么,它们的交线一定垂直于该投影面并积聚成一点。因为平面 ABC 与 $EFGH$ 在水平投影面上都有积聚性,所以,它们水平投影的交点就是交线的水平投影。该交线为铅垂线。

(2) 作图。经过分析可知,水平投影 abc 与 $d(e)(f)g$ 的交点就是交线 MN 的水平投影,可以直接标出 $m(n)$ 。再根据点在直线上返还作出交线的正面投影 $m'n'$ 。

两平面重叠部分的可见性,可以通过水平投影,根据平面的遮挡关系,利用直观的方法进行判别,如图1-31(b)所示。

1.5 基本立体的投影

复杂的形体都是由基本立体按一定的方式结合而形成的。研究基本立体的投影将为研究复杂立体的投影打下必要的基础。基本立体主要有平面立体与曲面立体。

1. 平面立体的投影

平面立体是由平面包围而成的立体,主要有棱柱、棱锥。

1) 棱柱的投影

(1) 棱柱的三面投影。

图1-32(a)所示为正六棱柱投影的直观图。该正六棱柱由六个棱面(即两正平面以及四个铅垂面)和上下底面(即两个正六边形的上下水平面)构成。图1-32(b)为正六棱柱的三视图。

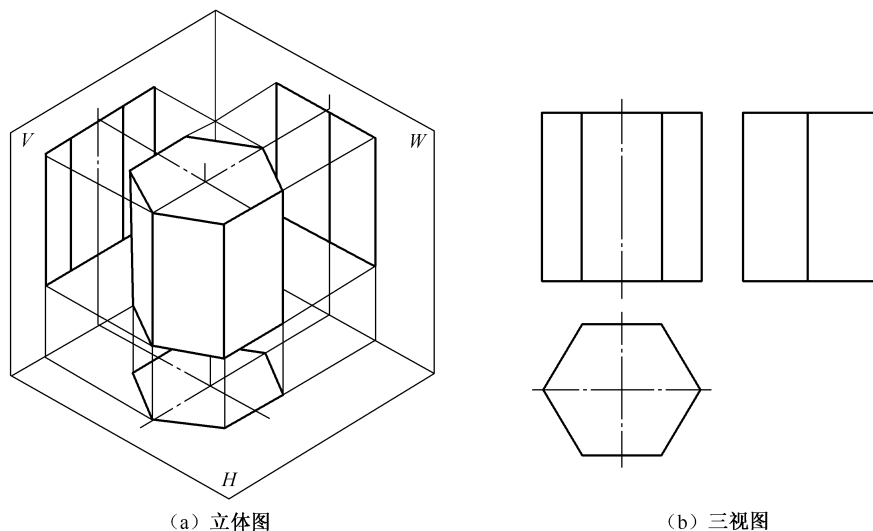


图 1-32 棱柱的投影

(2) 棱柱表面上取点。

图1-33(a)所示为六棱柱的三视图,现已知点 I、II、III 的正面投影,点 IV 的侧面投影和点 V 的水平投影,求作各点的其余投影。

在平面立体上取点的关键是要确定该点在哪一个棱面或棱线上,从而明确点的空间位置与投影位置。由图1-33(a)的主视图可知:点 $1'$ 可见,故 I 点在最左的棱线上;由点