

# 第 1 章 物体的受力及其力学分析

## 1.1 力的基本概念

### 1.1.1 力的概念

#### 1. 力的定义

力是物体间的相互作用。力的作用效应使物体运动状态发生变化或引起物体变形。例如，推车、抛物，由于力的作用，车、物的运动状态发生了变化；锻锤冲击锻件使锻件改变了形状等。力使物体的运动状态发生了变化的效应称为力的外效应；力使物体发生了变形的效应称为力的内效应。

#### 2. 力的三要素

力对物体的作用效果，决定于三要素，即力的大小、力的方向、力的作用点。三个要素中任何一个要素的改变，都会使力的作用效果改变。

力是一个具有大小和方向的量，所以力是矢量。这个矢量用一个带箭头的有向线段表示，线段的长度按一定的比例，表示力的大小；线段箭头的指向表示力的方向；线段的起点  $A$  或终点  $B$  表示力的作用点，如图 1.1 所示。

#### 3. 力的单位

力的单位用国际单位制， $N$ （牛）或  $kN$ （千牛）表示。

#### 4. 平衡

所谓平衡是指物体相对于地球处于静止或匀速直线运动状态。平衡是相对的，又是有条件的。

力系使物体处于平衡状态，该力系称为平衡力系。力系平衡所满足的条件称为力系的平衡条件。

#### 5. 刚体的概念

在外力作用下形状和大小保持不变的物体称为刚体。实际上，任何物体在外力作用下都将发生变形，但微小变形对研究结果不产生显著影响，可以略去不计，静力学中研究的物体均视为刚体。

### 1.1.2 静力学的基本公理

经长期经验积累与总结，又经大量实践验证是符合客观实际的普遍静力学规律，称为

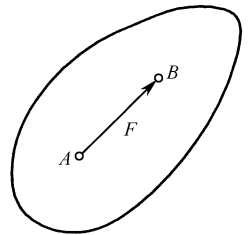


图 1.1 力

静力学的基本公理。这些公理是研究力系简化和平衡的主要依据。

### 1. 公理 1 力的平行四边形法则

作用于物体上同一点的两个力，可合成为一个作用于该点的合力，其大小和方向是以这两个力为邻边构成的平行四边形的对角线。

如图 1.2 (a) 所示， $\vec{F}_R$  是  $\vec{F}_1$ 、 $\vec{F}_2$  的合力，则有

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

即合力等于两分力的矢量和。

为了简便，在运用作图法求合力时，只需画出力平行四边形的一半即可，这称为力的三角形法则，如图 1.2 (b)、(c) 所示。

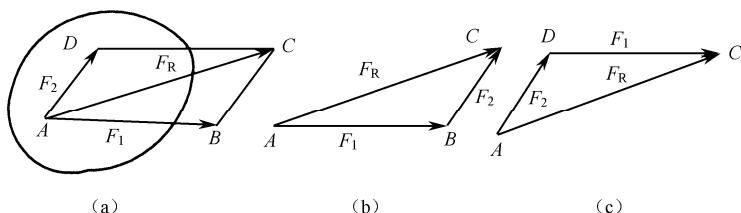


图 1.2 力的平行四边形法则、三角形法则

### 2. 公理 2 二力平衡公理

刚体在两个力作用下保持平衡的必要和充分条件是：这两个力大小相等，方向相反，且作用在同一直线上。

如图 1.3 所示的拉杆（或压杆）同时受到等值、反向、共线的两个力  $F_A$  和  $F_B$  作用，显然，该刚体是平衡的。

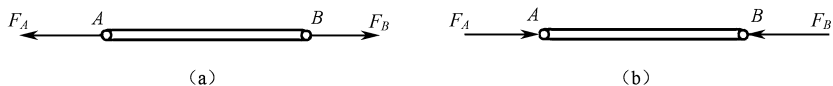


图 1.3 二力平衡

必须指出，本公理只适用于刚体。对于变形体，这个条件是不充分的。例如，一根绳索的两端受到等值、反向、共线的两拉力作用能平衡，若是压力则不能平衡。

在结构中凡只受二力作用，而处于平衡状态的构件，称为二力构件。

### 3. 公理 3 加减平衡力系公理

在已知刚体上加上或减去一个平衡力系，不改变原力系对刚体的作用效应。

根据上述三个公理，可以推导出下面两个推论。

#### 推论 1 力的可传性原理

作用于刚体上的力可沿其作用线移动，而不改变该力对刚体的效应。

如图 1.4 所示，在  $A$  点的作用力  $F$  和在  $B$  点的作用力  $F$  对小车的效果相同。

## 推论 2 三力平衡定理

刚体在共面而又互不平行的三个力作用下若平衡，则此三个力的作用线必汇交于一点，如图 1.5 所示。

### 4. 公理 4 作用力与反作用力公理

两物体间的作用力与反作用力，总是等值、反向、共线，而且同时作用在两个物体上的。

公理 4 概括了两个物体间的相互作用力间的关系，指出力是成对出现的，有作用力就有反作用力。例如，图 1.6 中，如物体  $B$  对物体  $A$  施作用力  $F$ ，则物体  $B$  也受到物体  $A$  对它的反作用力  $F'$ ，且这两个力大小相等，方向相反，沿同一直线作用。

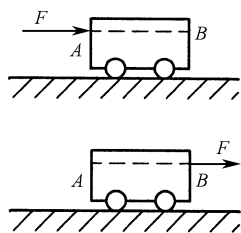


图 1.4 力的可传性

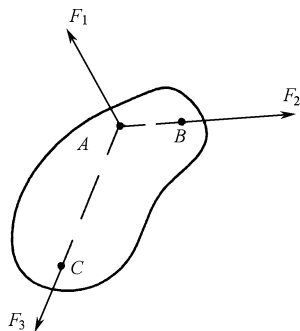


图 1.5 三力平衡

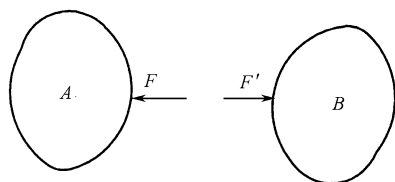


图 1.6 作用力与反作用力

## 1.2 工程中常见的约束

### 1.2.1 约束与约束反力

物体受的力可以分为主动力和约束反力，能够使物体产生运动，或运动趋势的力，称为主动力。主动力通常都是已知的。

一个物体的运动受到周围物体限制或阻碍时，这种限制就称为约束。例如，火车受铁轨的限制，只能沿轨道运行；房梁受立柱的限制，使它在空间得到稳定的平衡。

约束对物体的运动起限制作用的力，称为约束反力。约束反力的方向总是和该约束所能阻碍的运动方向相反。约束反力的作用点就是物体上与作为约束的物体相接触的点。约束反力是未知力，它的确定与约束类型及主动力有关，需要利用平衡条件确定。现将工程上常见的几种约束类型描述如下。

#### 1. 柔性约束

由柔绳、链条、皮带等柔性物形成的被约束物体约束称为柔性约束。柔性体本身只能承受拉力，因此柔性约束反力作用在接触点，方向沿柔绳而背离被约束物体，用符号  $F_T$  表示。

如图 1.7 (a) 所示，重物用钢绳悬挂在固定架上；如图 1.7 (b) 所示的带传动，重物和皮带轮受到钢绳和皮带的拉力均属于此类约束反力。

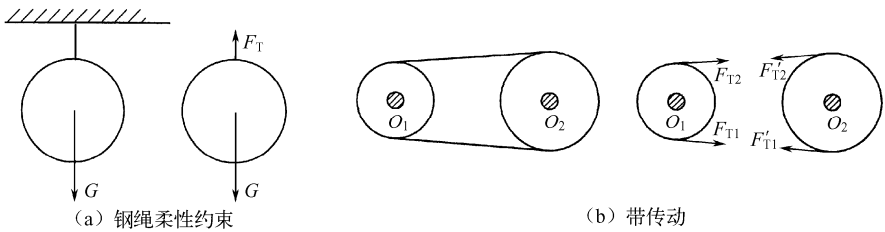
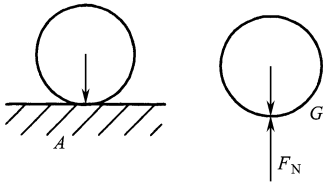


图 1.7 柔性约束

## 2. 光滑面约束



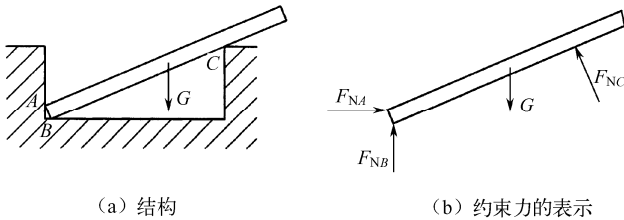
(a) 结构 (b) 约束力的表示

图 1.8 光滑面约束

两直接接触物体，忽略摩擦，把物体的接触面看成完全光滑的刚性接触面，简称为光滑面约束。光滑面约束反力的作用力通过接触点，方向沿接触面公法线而指向被约束物体，用符号  $F_N$  表示，如图 1.8 所示。

图 1.9 (a) 中直杆与方槽  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点接触，三点的约束反力均沿两者接触点的公法线方向指向直杆，如图 1.9 (b) 所示。

齿轮转动时，相啮合的一对轮齿的齿廓曲面相接触，如图 1.10 所示。两齿轮的相互作用力一定通过接触点并沿公法线方向分别指向另一个齿轮。



(a) 结构

(b) 约束力的表示

图 1.9 直杆与方槽

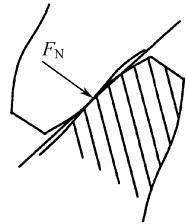
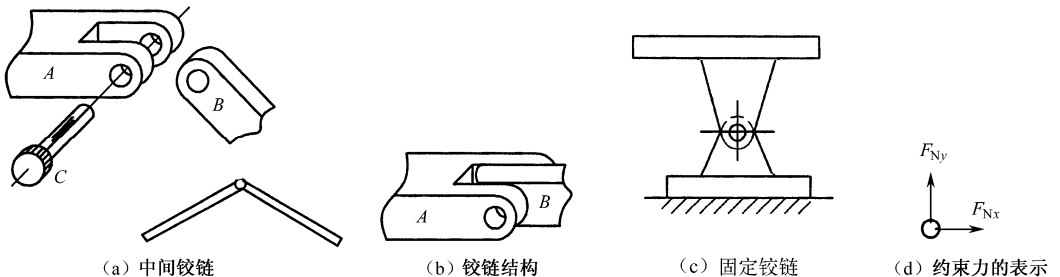


图 1.10 齿廓曲面接触

## 3. 光滑铰链约束

(1) 固定铰链和中间铰链。两构件采用圆柱销所形成的连接为铰链连接，这种约束是采用圆柱销  $C$  插入构件  $A$  和  $B$  的孔内而构成的，若不考虑摩擦，其接触面是光滑的，如图 1.11 (a)、(b) 所示。



(a) 中间铰链

(b) 铰链结构

(c) 固定铰链

(d) 约束力的表示

图 1.11 铰链连接

若相连接的构件有一个固定在地面或机架上，则这种约束称为固定铰链，如图 1.11 (c)

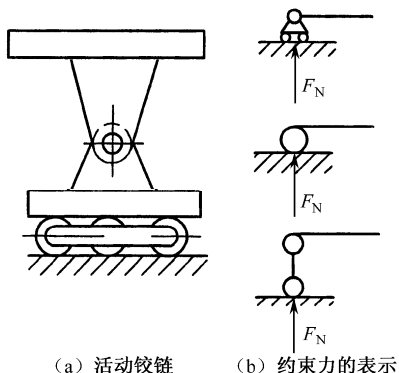
所示，若无固定构件则称为中间铰链，如图 1.11 (a) 所示。

这类约束的约束反力沿圆柱面接触点的公法线通过圆柱销中心，方向不确定，通常用两个正交分力  $\dot{F}_{Nx}$ 、 $\dot{F}_{Ny}$  来表示，如图 1.11 (d) 所示。

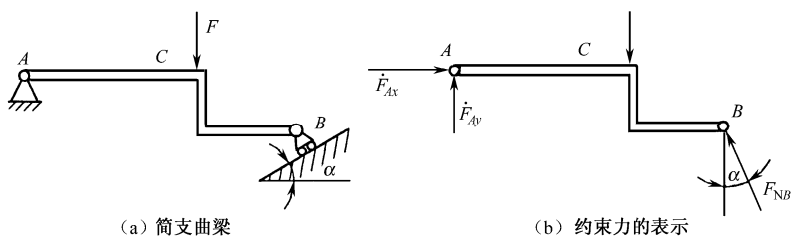
必须强调，当中间铰链或固定铰链约束的是二力构件时，其约束反力满足二力平衡条件，沿两约束反力作用点的连线，方向是确定的。

(2) 活动铰支座。支座下面装上滚子，使它能在支承面上任意移动，称为活动铰支座，如图 1.12 所示，如果接触面是光滑的，约束反力通过铰链中心，并垂直支承面，其方向随载荷的情况而定。

图 1.13 所示为  $ACB$  简支曲梁支承情况， $A$  为固定铰链， $B$  为活动铰链，约束反力画法如图 1.13 (b) 所示。



(a) 活动铰链 (b) 约束力的表示  
图 1.12 活动铰支座



(a) 简支曲梁 (b) 约束力的表示

图 1.13 梁支承

#### 4. 固定端约束

工程中还有一种常见的基本约束类型，如图 1.14 (a)、(b)、(c) 所示建筑物上的阳台、车刀固定于刀架部分、电线杆埋入地下部分等，这些约束称为固定端约束，这种约束的特点是构件一端被固定，既不允许构件随意移动，也不允许构件绕其固定端转动。因此，固定端的约束就有两个约束反力  $\dot{F}_{Ax}$ 、 $\dot{F}_{Ay}$  和一个约束力偶矩  $M$ ，如图 1.14 (f) 所示。

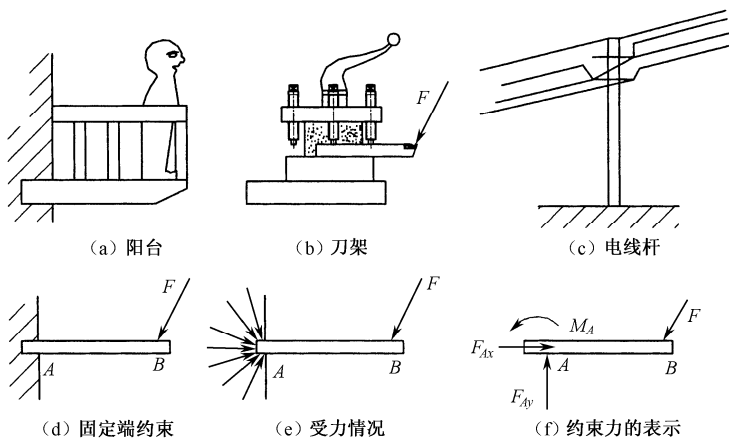


图 1.14 固定端约束

## 1.2.2 物体的受力分析

为了清楚地表示构件的受力情况，需把所研究的构件从周围的物体中分离出来，解除约束后的自由物体称为分离体。在分离体上画出全部（包括主动力和约束反力）的简图，称为受力图。

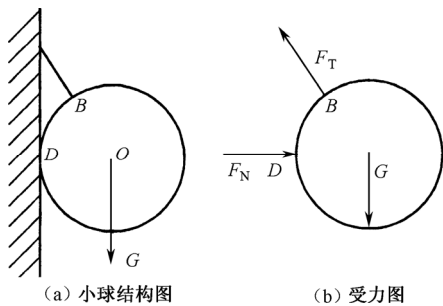


图 1.15 例 1.1

画受力图的步骤如下：

- (1) 确定研究对象，解除约束取分离体。
- (2) 画所有的主动力。
- (3) 画出全部约束反力。

**例 1.1** 重为  $G$  的球体，用绳子系在墙壁上，画球体的受力图。

**解：**(1) 以球体为研究对象，取分离体，如图 1.15 (b) 所示，解除约束。

(2) 画出主动力  $\dot{G}$ 。

(3) 画出全部的约束反力：球体  $B$  处受到柔性约束，约束反力沿柔体中线背离球体，用  $\dot{F}_T$  表示；在  $D$  处受光滑面约束，约束反力沿接触面  $D$  点的公法线，指向球体，用  $\dot{F}_N$  表示。

**例 1.2** 如图 1.16 所示的三铰拱结构，左、右两部分铰接而成，左部分点  $D$  受主动力  $\dot{F}$  作用，杆重不计。试画出  $AB$ 、 $BC$  两杆的受力图。

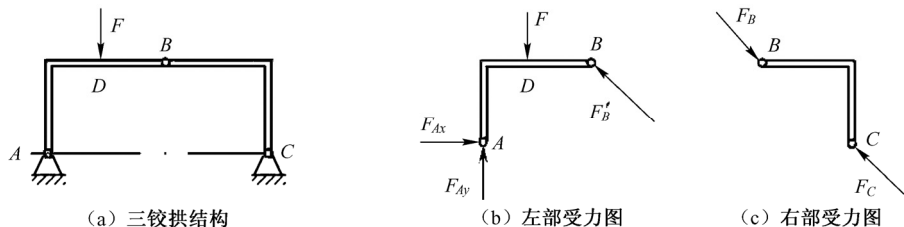


图 1.16 例 1.2

**解：**(1) 先分析此杆受力，由于  $BC$  杆为二力构件， $\dot{F}_B$ 、 $\dot{F}_C$  作用线必通过  $B$ 、 $C$  两点连线，如图 1.16 (c) 所示。

(2) 再以  $AB$  为研究对象，画出主动力  $\dot{F}$ 。

(3) 画约束反力。中间铰链  $B$  点的约束反力  $\dot{F}'_B$  与  $\dot{F}_B$  是一对作用力与反作用力，固定铰链  $A$  的约束反力的方向不定，可用两正交分力  $\dot{F}_{Ax}$  和  $\dot{F}_{Ay}$  表示，如图 1.16 (b) 所示。

## 1.3 平面汇交力系

凡各力的作用线均在同一平面内的力系称为平面力系。若各力的作用线全部汇交于一点，则称为平面汇交力系。

### 1.3.1 平面汇交力系的合成

#### 1. 力在坐标轴上的投影

如图 1.17 所示，已知  $F$  作用于刚体平面内的  $A$  点，方向由  $A$  点指向  $B$  点，且与水平线

的夹角为 $\alpha$ 。选定坐标系 $xOy$ ，过 $F$ 的两端点 $A$ 、 $B$ 向坐标轴 $x$ 、 $y$ 作垂线，垂足 $a$ 、 $b$ 的连线就称为 $F$ 在 $x$ 轴上的投影，即 $F_x=ab$ 。力在坐标轴上的投影是代数量，正负规定为：从 $a$ 到 $b$ 的指向与坐标轴的正向相同为正，相反为负。

若已知 $F$ 的大小及 $F$ 与 $x$ 轴的夹角 $\alpha$ ，则力在 $x$ 、 $y$ 轴的投影可由下式计算：

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \pm F \cos \alpha \\ F_y &= \pm F \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

注意：(1) 当力与轴平行时，力在轴上的投影绝对值等于力的大小。

(2) 当力与轴垂直时，力在轴上的投影为零。

当力 $F$ 沿坐标轴分解为两分力 $\dot{F}_x$ 、 $\dot{F}_y$ 时，这两个分力的大小分别等于力 $F$ 在两轴上的投影的绝对值，但当两轴不相互垂直时，分力 $\dot{F}_x$ 、 $\dot{F}_y$ 与投影 $F_x$ 、 $F_y$ 值不等。

必须指出，分力是矢量，而投影是代数量。

## 2. 合力投影定理

图 1.18 表示平面汇交力系的各力矢 $\dot{F}_1$ 、 $\dot{F}_2$ 、 $\dot{F}_3$ 、 $\dot{F}_4$ 组成的力多边形， $\dot{F}_R$ 为合力。将力多边形中各力矢投影到 $x$ 轴上，由图可见：

$$ae = ab + bc + cd - de$$

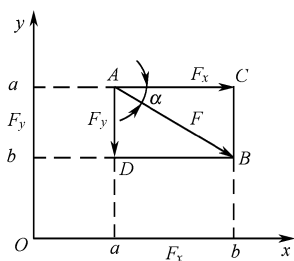


图 1.17 力在坐标轴上的投影

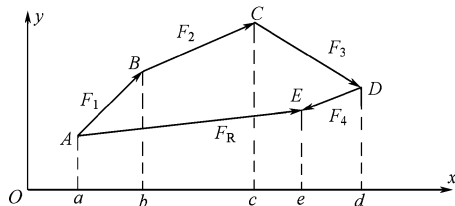


图 1.18 合力投影

按投影定义，上式左端为合力 $\dot{F}_R$ 的投影，右端为四个分力的投影的代数和，即

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = \sum F_x$$

同理：

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = \sum F_y$$

上式可推广到 $n$ 个力组成的力系，即

$$\left. \begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} &= \sum F_x \\ F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} &= \sum F_y \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

式(1-2)表明：合力在某一轴上的投影等于各分力在同一轴上投影的代数和。这就是合力投影定理。

## 3. 平面汇交力系合成的解析法

若物体受到平面汇交力系 $\dot{F}_1$ 、 $\dot{F}_2$ 、 $\cdots$ 、 $\dot{F}_n$ 作用，选定坐标系 $xOy$ ，求出各力在 $x$ 、 $y$ 轴

上的投影，则：

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum F_x \\ F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \sum F_y \end{aligned} \right\}$$

合力大小和方向分别为：

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \quad (1-3)$$

$$\tan \alpha = \frac{|\sum F_y|}{|\sum F_x|}$$

式中， $\alpha$  表示  $F_R$  与  $x$  轴所夹锐角。

### 1.3.2 平面汇交力系平衡方程及其应用

平面汇交力系平衡的必要和充分条件是力系的合力为零，即

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

上式称为平面汇交力系平衡方程。因只有 2 个独立的方程，所以对于平面汇交力系，只能求解 2 个未知量。

**例 1.3** 将图 1.19 所示重为  $G=5000\text{N}$  的球体放在 V 形槽内，试求槽面对球的约束反力。

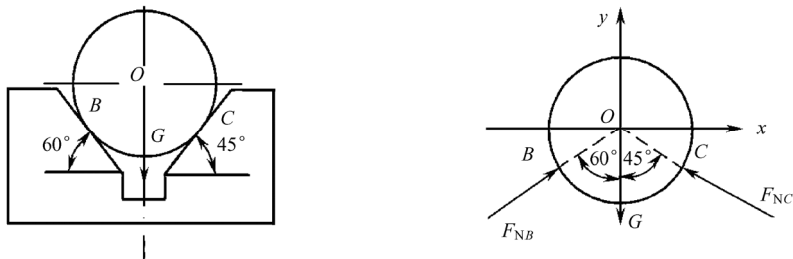


图 1.19 例 1.3 图

**解：**(1) 以球体为研究对象，作用在它上面有重力  $\dot{G}$  及光滑槽面的约束反力  $\dot{F}_{NB}$ 、 $\dot{F}_{NC}$ ，其受力图如图 1.19 (b) 所示。

(2) 选坐标轴，如图 1.19 (b) 所示。

(3) 列平衡方程：

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, & F_{NB} \sin 60^\circ - F_{NC} \sin 45^\circ &= 0 \\ \sum F_y &= 0, & F_{NB} \cos 60^\circ + F_{NC} \cos 45^\circ - G &= 0 \end{aligned}$$

解方程得：

$$F_{NB} = 3.66\text{N}, \quad F_{NC} = 4.48\text{N}$$

解题时可将坐标轴选取与未知力垂直（仅需一轴与一个未知力垂直）的方向，这样可列一个方程式解出一个未知力，避免求解联立方程，使计算简便。



## 1.4 力矩和力偶

力对物体除了移动效应，还有另一种作用，即力对物体的转动效应。本节将讨论描述这种作用的两个概念：力矩和力偶，以及它们的性质和计算方法。

### 1.4.1 力矩

#### 1. 力对点之矩

力对点之矩如图 1.20 所示。用扳手拧紧螺母时，拧动螺母的转动效应不仅与力  $F$  的大小有关，而且与转动中心 ( $O$  点) 到力的作用线的垂直距离  $d$  有关。工程上把力使物体绕  $O$  点转动效应的物理量称为力  $F$  对  $O$  点之矩，简称力矩，用  $M_O(\dot{F})$  表示，即

$$M_O(\dot{F}) = \pm Fd \quad (1-5)$$

式中， $O$  点称为力矩中心，简称矩心； $O$  点到  $F$  作用线的垂直距离称为力臂。正负号表明力矩是一个代数量，其正负规定为：力使物体绕矩心做逆时针方向转动时，力矩为正，反之为负。力矩的单位是  $\text{N}\cdot\text{m}$ 。

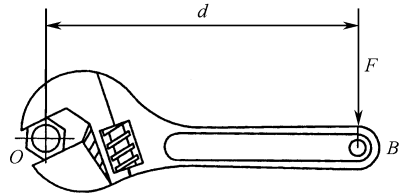


图 1.20 力对点之矩

#### 2. 合力矩定理

若力系有合力，则合力对某点之矩等于各个分力对同一点之矩代数和，即

$$M_O(\dot{F}_R) = M_O(\dot{F}_1) + M_O(\dot{F}_2) + \dots + M_O(\dot{F}_n) = \Sigma M_O(\dot{F}) \quad (1-6)$$

式中， $\dot{F}_R$  是  $\dot{F}_1, \dot{F}_2, \dots, \dot{F}_n$  的合力。

**例 1.4** 图 1.21 所示圆柱直齿轮的齿面受力  $F_n = 980 \text{ N}$ ，压力角  $\alpha = 20^\circ$ ，分度圆直径  $d = 160 \text{ mm}$ ，试计算对轴心  $O$  的力矩。

**解：**(1) 按力对点之矩的定义，有

$$M_O(\dot{F}_n) = F_n \cdot h = F_n \cdot \frac{d}{2} \cos \alpha = 980 \times \frac{160}{2} \cos 20^\circ / 1000 = 73.7 \text{ N}\cdot\text{m}$$

(2) 按合力矩定理得：

$$\begin{aligned} M_O(\dot{F}_n) &= M_O(\dot{F}_t) + M_O(\dot{F}_r) = F_n \cos \alpha \times \frac{d}{2} + F_n \sin \alpha \times 0 \\ &= 980 \times \cos 20^\circ \times \frac{160}{2} / 1000 = 73.7 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

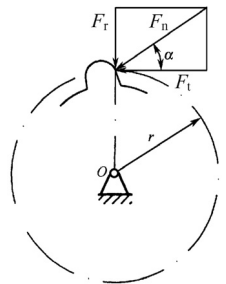


图 1.21 例 1.4 图

由此可见，以上两种方法的计算结果是相同的，这就验证了合力矩定理。

### 1.4.2 力偶

#### 1. 力偶的概念

在实践中，常遇到某物体受一对大小相等、方向相反、作用线平行的两个力作用。例如，开门锁、司机用双手转动方向盘（见图 1.22 (a)）、钳工用双手转动杠丝锥功螺纹

(见图 1.22 (b)) 等。这种大小相等、方向相反、作用线平行的两个力称为力偶，如图 1.22 (c) 所示。

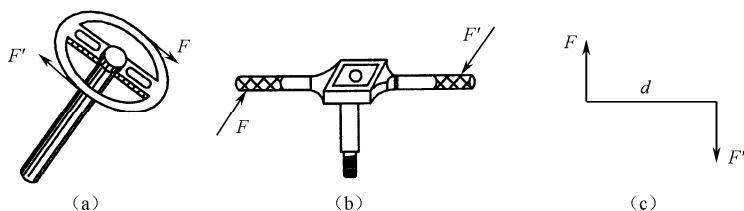


图 1.22 力偶

力偶中的两力作用线之间的垂直距离  $d$  称为力偶臂，力偶所在的平面称为力偶的作用面。

力偶对物体的转动效应取决于组成力偶反向平行力的大小、力偶臂的大小及力偶的转向。以力与力偶臂的乘积作为度量力偶在其作用面内对物体转动效应的物理量，称为力偶矩，记为  $M(\dot{F}、\dot{F}')$  或  $M$ ，即

$$M(\dot{F}、\dot{F}') = \pm Fd \quad (1-7)$$

一般规定，逆时针转向力偶矩为正，顺时针为负。力偶矩的单位为  $\text{N} \cdot \text{m}$ 。

力偶的三要素：力偶矩的大小、转向及作用面。三要素中的任何一个发生改变，力偶对物体的转动效应就会改变。

## 2. 力偶的性质

(1) 力偶无合力。因为组成力偶的两个力在其作用面内任一坐标轴上的投影之和等于零。

(2) 力偶只能用力偶来平衡。由于力偶对刚体只能产生转动效应，没有移动效应，所以力偶不能用一个力来代替，也不能用一个力来平衡。

(3) 力偶的等效性。在同一平面内的两个力偶，如果它们的力偶矩大小相等，转向相同，则两力偶等效，且可以相互代换。

力偶和力是力学中的基本物理量。

### 1.4.3 平面力偶系的合成及平衡

#### 1. 平面力偶系的合成

设在刚体基本平面上作用有若干个力偶，其力偶矩分别为  $M_1, M_2, \dots, M_n$ ，现求其合成结果。根据力偶的性质，力偶对刚体只产生转动效应，受若干个力偶共同作用时，也只能使刚体产生转动效应，可以证明，其力偶系对刚体的转动效应的大小等于各力偶转动效应的总和，即平面力偶系合成一个合力偶，其合力偶矩等于各力偶矩的代数和，即

$$M_R = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum M \quad (1-8)$$

#### 2. 力偶系的平衡

平面力偶系平衡的必要与充分条件是：力偶系中各力偶矩的代数和等于零，即

$$\Sigma M = 0 \quad (1-9)$$

**例 1.5** 如图 1.23 所示多轴钻床在水平放置的工件上钻三个直径相同的圆孔，且每个钻头作用于工件的切削力偶矩为  $M_1=M_2=10\text{N}\cdot\text{m}$ ， $M_3=15\text{N}\cdot\text{m}$ ，转向如图 1.23 所示，固定螺栓  $A$ 、 $B$  之间的距离  $L=0.2\text{m}$ 。求两个螺栓所受的力。

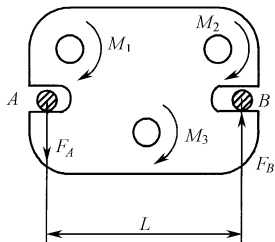


图 1.23 例 1.5 图

**解：**取工件为研究对象，作用于其上三个主动力偶矩和两个螺栓的受力作用而平衡，且在同一平面内，由于力偶只能用力偶平衡，两个螺栓的受力  $F_A$  和  $F_B$  必然组成为力偶，该两力的方向假设如图 1.23 所示，且  $F_A=F_B$ ，由平面力偶系的平衡条件有

$$\begin{aligned} \Sigma M &= 0 \\ F_A \times L - M_1 - M_2 - M_3 &= 0 \end{aligned}$$

解得：

$$F_A = F_B = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{L} = \frac{10 + 10 + 15}{0.2} = 175 \text{ N}$$

所得  $F_A$  和  $F_B$  为正值，所设方向与实际方向相同。

### 1.4.4 力的平移定理

作用于刚体上的力，均可平移到刚体内的任一点，但必须附加一力偶，其力偶矩等于原力对该点之矩。

图 1.24 描述了力向作用线外一点平移的过程。欲将作用于刚体上  $A$  点的力  $F$  平移到平面上任一点  $O$ ，如图 1.24 (a) 所示，则可在  $O$  点施加一对与力  $F$  值相等的平衡力  $F'$ 、 $F''$ ，如图 1.24 (b) 所示，取  $F$  与  $F''$  为一对等值、反向、不共线的平行力，组成一个力偶，称为附加力偶，其力偶矩等于原力  $F$  对  $O$  点力矩，即

$$M(F, F'') = M_O(F) = \pm Fd$$

于是原来作用在  $A$  点的力  $F$ ，与作用在  $O$  点的平移力  $F'$  和附加力偶  $M$  的联合作用等效。如图 1.24 (c) 所示。

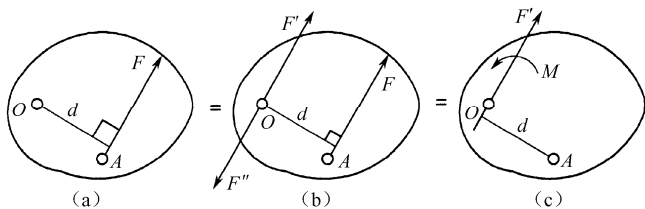


图 1.24 力的平移

## 1.5 平面一般力系

本节主要研究平面一般力系的简化与平衡方程的应用问题，同时还介绍力系平衡，考虑摩擦时平衡问题的解法。

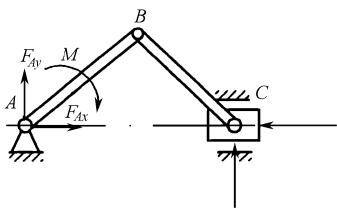


图 1.25 曲柄连杆机构的受力

各力的作用线处于同一平面内，既不平行又不汇交于一点的力系，称为平面一般力系。如图 1.25 所示的曲柄连杆机构的受力就属于一般力系。

### 1.5.1 平面一般力系的简化

设在刚体上作用一平面有一般力系  $\dot{F}_1, \dot{F}_2, \dot{F}_3, \dots, \dot{F}_n$ ，如图 1.26 (a) 所示，在平面内任取一点  $O$  作为简化中心，根据力的平移定理，将力系中各力都向  $O$  点平移，于是原力系就简化为一平面汇交力系  $\dot{F}'_1, \dot{F}'_2, \dot{F}'_3, \dots, \dot{F}'_n$  和力偶系  $M_1, M_2, \dots, M_n$ ，如图 1.26 所示。

平面汇交力系的合力  $\dot{F}'_R$ ，称为平面一般力系的主矢。主矢  $\dot{F}'_R$  的大小和方向为：

$$\left. \begin{aligned} F'_R &= \sqrt{(\sum F'_x)^2 + (\sum F'_y)^2} \\ \tan \alpha &= \left| \frac{\sum F'_y}{\sum F'_x} \right| \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

附加力偶  $M_1, M_2, \dots, M_n$  组成的平面力偶系的合力矩  $M_O$  称为平面一般力系的主矩。由平面力偶系的合成可知，主矩等于各附加力偶矩的代数和，也等于各分力对简化中心力矩的代数和，作用在力系所在的平面上，如图 1.26 (c) 所示。即

$$M_O = \sum M = \sum M_O(\dot{F})$$

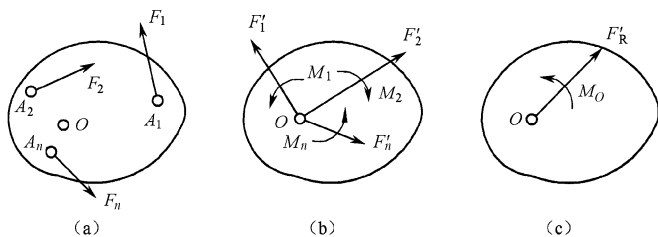


图 1.26 平面一般力系的简化

综上所述，平面一般力系向平面内任一点简化，得到一主矢  $\dot{F}'_R$  和一主矩  $M_O$ ，主矢的大小和方向与简化中心的位置无关；主矩的值与简化中心的位置有关。

### 1.5.2 平面一般力系的平衡方程及其应用

#### 1. 平衡条件和平衡方程

根据前面讨论可知，平面一般力系平衡的充分与必要条件是：该力系的主矢和对任意一点的主矩都等于零，即

$$\begin{aligned} \dot{F}'_R &= 0 \\ M_O &= 0 \end{aligned}$$

由此可得平面一般力系的平衡方程为：

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_O(\dot{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

上式是平面一般力系平衡方程的基本形式，它包括三个独立方程，可求解三个未知量。

## 2. 平衡方程的应用

利用平衡方程解题步骤与汇交力系解法一样，即

- (1) 取研究对象。
- (2) 画其受力图。
- (3) 列平衡方程。

在求解具体问题时，为了使每个方程中尽可能出现较少的未知量，从而简化计算，通常坐标轴选在与未知力垂直的方向上，矩心可选在未知力作用点（或交点）上。

**例 1.6** 如图 1.27 (a) 所示，起重机的水平梁  $AB$ ， $A$  端以铰链固定， $B$  端用拉杆拉住，梁重  $W=4\text{kN}$ ，载荷重  $F=10\text{kN}$ 。试求拉杆和铰链  $A$  的约束反力。

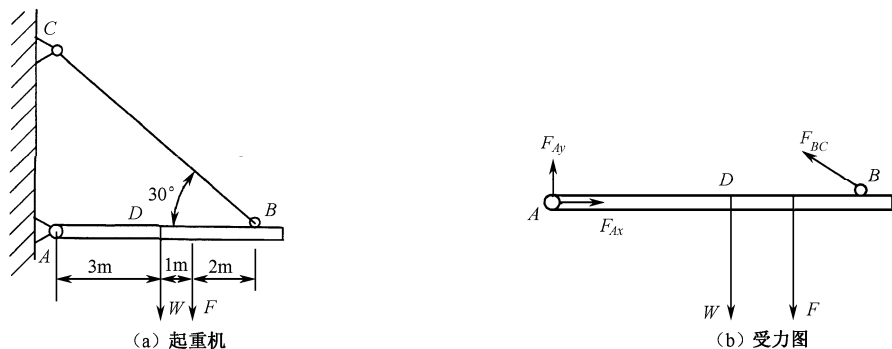


图 1.27 例 1.6 图

**解：**(1) 取  $AB$  梁为研究对象。

(2) 画受力图。主动力  $W$ 、 $F$ ，拉杆的拉力  $F_{BC}$  和支座在  $A$  处的约束反力  $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$ 。

(3) 取图 1.27 (b) 所示坐标系，列平衡方程如下：

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad F_{Ax} - F_{BC} \cos 30^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad -F_{Ay} + W + F - F_{BC} \sin 30^\circ = 0 \\ \sum M_A(F) = 0 & \quad F_{BC} \times 6 \times \sin 30^\circ - F \times 4 - W \times 3 = 0 \end{aligned}$$

解方程得：

$$F_{BC} = 17.33 \text{ kN}, \quad F_{Ax} = 15.01 \text{ kN}, \quad F_{Ay} = 5.33 \text{ kN}$$

求解平衡问题时，解方程与投影方程或力矩方程的先后顺序无关。一般先解包含一个未知力的方程，避免求解联立方程，使求解过程简便。

## 3. 平衡方程的其他形式

(1) 二矩式方程形式如下：

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A(\dot{F}) = 0 \\ \sum M_B(\dot{F}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

应用二矩式时，所选坐标轴不能与矩心  $AB$  的连线垂直。

(2) 三矩式方程形式如下：

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A(\dot{F}) &= 0 \\ \sum M_B(\dot{F}) &= 0 \\ \sum M_C(\dot{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

在列三矩式方程时，所选矩心  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点不能在一条直线上。

## 1.6 摩擦

在前面研究平衡问题时，都假定物体之间互相接触是完全光滑的，总是将摩擦忽略不计。但是绝对光滑的表面事实上并不存在，两物体的接触面之间都有摩擦，有时摩擦起着决定性的作用。例如，闸瓦制动器、摩擦轮传动等，都依靠摩擦来工作，这都是摩擦有用的一面。但同时摩擦会磨损零件、消耗动力、降低机械效率等，即存在不利的一面。

摩擦可分为滑动摩擦和滚动摩擦，滑动摩擦又可分为静滑动摩擦和动滑动摩擦。

### 1.6.1 滑动摩擦

互相接触的两物体，接触面间产生相对滑动或具有相对滑动趋势时，接触面间就存在阻碍相对滑动的切向阻力，这种阻力称为滑动摩擦力。滑动摩擦力的方向与物体相对运动（相对滑动趋势）的方向相反，只有相对滑动趋势而无相对运动时的摩擦，称为静滑动摩擦。接触面间产生相对滑动时的摩擦称为动滑动摩擦。

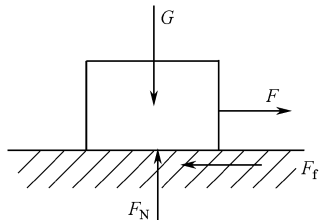


图 1.28 静滑动摩擦

#### 1. 静滑动摩擦

通过图 1.28 所示的实验说明滑动摩擦的规律。

当一个较小的力  $\dot{F}$  拉重为  $G$  的物体时，物体将平衡。由平衡方程可知，摩擦力  $\dot{F}_f$  与主动力  $\dot{F}$  大小相等。

当  $\dot{F}$  逐渐增大， $\dot{F}_f$  也随之增加，此时  $\dot{F}_f$  和一般约束反力有共同的特点，即随主动力的变化而变化，但又存在不同于一般约束反力的特点，当  $\dot{F}_f$  随  $\dot{F}$  增加到某一临界最大值  $F_{f\max}$ （称为临界摩擦力）时，就不会再增加；若继续增加  $\dot{F}$  物体将开始滑动，静摩擦力在零和最大值范围内，即  $0 < F_f \leq F_{f\max}$ 。

大量实验证明，最大静摩擦力的方向与两物体相对滑动趋势的方向相反，其大小与物体接触面间的正压力成正比，即

$$F_{f\max} = f F_N \quad (1-14)$$

式中， $F_N$  为接触面间的正压力； $f$  为静滑动摩擦系数，简称静摩擦系数。

$f$  的大小与两物体接触面间的材料表面情况有关，常用的静摩擦系数可在机械手册中查得。式 (1-14) 称为库仑定律或静摩擦定律。

由上述可知，静摩擦力也是一种被动且未知的约束反力，在一般平衡状态时  $0 < F_f \leq F_{f\max}$ 。

由平衡方程确定，在临界状态下：

$$F_f = F_{f\max} = f F_N$$

## 2. 动滑动摩擦

继续上述实验, 当静摩擦力达到  $F_{f\max}$  时, 若主动力再继续增大, 物体便开始滑动, 此时物体受到的摩擦阻力已由静摩擦力转化为动摩擦力  $F'_f$ 。实验证明, 动摩擦力的大小也与两物体间正压力  $F_N$  成正比, 即

$$F'_f = f' F_N \quad (1-15)$$

式中,  $f'$  为动摩擦系数。它与材料和表面情况有关, 通常  $f' < f$ 。对于一般工程计算  $f' \approx f$ 。

### 1.6.2 摩擦角与自锁现象

存在摩擦时, 平衡物体受到的约束反力为: 法向反力和切向反力 (即静摩擦力), 两者的合力称为全约束反力或全反力, 以  $F_R$  表示, 它与接触面法线的夹角为  $\varphi$ , 如图 1.29 所示。由此得:

$$\tan \varphi = \frac{F_f}{F_N}$$

当静摩擦力达到最大值时, 夹角  $\varphi$  也达到最大值  $\varphi_m$ ,  $\varphi_m$  称为摩擦角, 如图 1.29 (b) 所示。

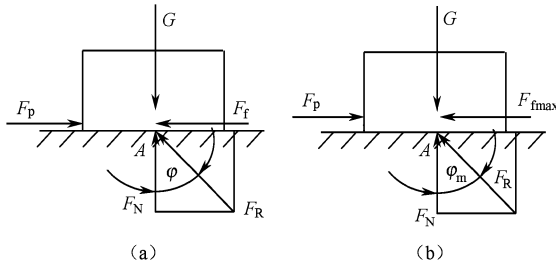


图 1.29 摩擦角

由图可知:

$$\tan \varphi_m = \frac{F_{f\max}}{F_N} = \frac{f F_N}{F_N} = f \quad (1-16)$$

上式表明, 静摩擦系数等于摩擦角的正切。

由于静摩擦力是一个范围值, 所以全反力与接触面间的夹角  $\varphi$  小于或等于摩擦角  $\varphi_m$ , 即

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_m$$

由于静摩擦力不可能超过其最大值, 因此全反力的作用线不可能超出摩擦角的范围。当主动力的合力  $F_Q$  的作用线在摩擦角  $\varphi_m$  以内, 由二力平衡公理可知, 全反力  $F_R$  与之平衡。因此, 只要主动力合力的作用线与接触面法线间的夹角  $\alpha$  不超过  $\varphi_m$ , 即

$$\alpha \leq \varphi_m \quad (1-17)$$

则不论这个力多大, 物体总是平衡的, 这种现象称为自锁。式 (1-17) 为自锁条件。自锁条件常用来设计某些结构和夹具, 例如, 砖块相对砖夹不下滑, 脚套钩在电线杆上不自行下滑等都是自锁现象。

### 1.6.3 考虑摩擦时构件的平衡问题

考虑摩擦时的平衡问题，其解题方法、步骤与不考虑摩擦时的平衡问题基本相同。关键是：画受力图时摩擦力要正确画出，并注意摩擦力的方向与滑动趋势相反；分析物体处于何种状态。一般状态下，静摩擦力的大小由平衡条件确定，并满足  $F \leq F_{f\max}$  关系式。临界状态下，补充方程  $F_f = F_{f\max} = f F_N$ ，所得结果是平衡范围的极限值。

**例 1.7** 如图 1.30 所示一重为  $G$  的物块放在倾角为  $\alpha$  的固定斜面上。已知物块与斜面间的静摩擦系数为  $f$ ，试求维持物块平衡的水平推力  $F$  的取值范围。

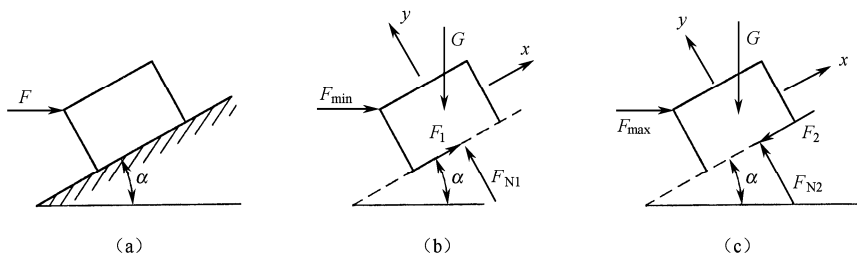


图 1.30 例 1.7 图

**解：**由于  $F$  值过大，物块将上滑， $F$  值过小，物块将下滑，故  $F$  值只在一定范围内 ( $F_{\min} \leq F \leq F_{\max}$ ) 才能保持物块静止。

(1) 物块处于下滑的临界状态时， $F = F_{\min}$ 。画受力图（见图 1.30 (b)），建立坐标系，列平衡方程如下：

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad F_{\min} \cos \alpha - G \sin \alpha + F_1 = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad -F_{\min} \sin \alpha - G \cos \alpha + F_{N1} = 0 \end{aligned}$$

补充方程：

$$F_1 = f F_{N1}$$

解得：

$$F_{\min} = G \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$$

(2) 物块处于上滑的临界状态时，即  $F = F_{\max}$ 。画受力图（见图 1.30 (c)），建立坐标系，列平衡方程如下：

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad F_{\max} \cos \alpha - G \sin \alpha - F_2 = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad -F_{\max} \sin \alpha - G \cos \alpha + F_{N2} = 0 \end{aligned}$$

补充方程：

$$F_2 = f F_{N2}$$

解得：

$$F_{\max} = G \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$$

由以上分析得知，欲使物块保持平衡，力  $F$  的取值范围为：

$$G \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha} < F < G \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$$



## 1.7 空间力系

当物体所受力的作用线不在同一平面内，而是在空间分布时，这样的力系称为空间力系。图 1.31 所示传动轴的受力即为空间力系。与平面力系一样，空间力系可分为空间汇交力系、空间平行力系和空间一般力系。

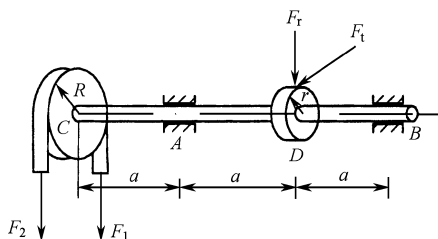


图 1.31 传动轴的受力

### 1.7.1 力在空间直角坐标系的投影

设空间直角坐标系的三个坐标轴如图 1.32 所示，已知  $\vec{F}$  与三坐标轴的夹角分别为  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ ，则力在三个轴上的投影等于力的大小乘以该夹角的余弦，即

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha \\ F_y &= F \cos \beta \\ F_z &= F \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

式中， $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  分别为力  $\vec{F}$  与  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴所夹的锐角。

如图 1.33 所示，若已知力  $\vec{F}$  与  $z$  轴的夹角为  $\gamma$ ，力与  $z$  轴所确定的平面与  $x$  轴的夹角为  $\varphi$ ，可先将力  $F$  在  $xOy$  平面上投影，然后再向  $x$ 、 $y$  轴进行投影，则力在坐标轴的投影分别为：

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \sin \gamma \cos \varphi \\ F_y &= F \sin \gamma \sin \varphi \\ F_z &= F \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

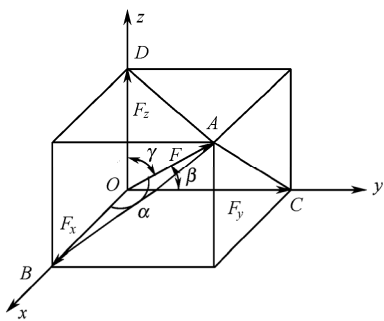


图 1.32 力在空间直角坐标系的投影

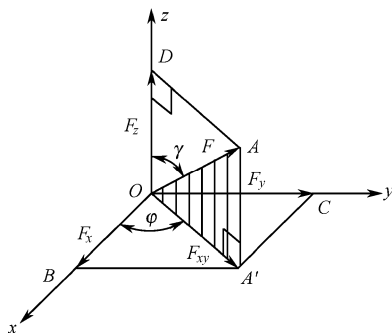


图 1.33 力在空间直角坐标系  $xOy$  平面上的投影

若已知  $F_x$ 、 $F_y$ 、 $F_z$ ，则合力的大小、方向由下式求得：

$$\left. \begin{aligned} F_R &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ \cos \alpha &= \frac{|F_x|}{F_R} \\ \cos \beta &= \frac{|F_y|}{F_R} \\ \cos \gamma &= \frac{|F_z|}{F_R} \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

## 1.7.2 力对轴之矩

在工程中，常遇到刚体绕定轴转动的情形，为了度量力对转动刚体的作用效应，必须引入力对轴之矩的概念。

现以关门为例，如图 1.34 所示，门上一边有固定轴  $z$ ，在  $A$  点作用一力  $\dot{F}$ ，度量此力对刚体的转动效应，现将  $\dot{F}$  分解为平行于  $z$  轴的分力  $\dot{F}_z$  和垂直于  $z$  轴的分力  $\dot{F}_{xy}$  ( $\dot{F}$  在垂直于  $z$  轴上的平面上的投影)。由于  $\dot{F}_z$  对  $z$  轴之矩为零，只有  $\dot{F}_{xy}$  对  $z$  轴有矩，即  $\dot{F}_{xy}$  对  $z$  轴之矩就是力  $\dot{F}$  对  $z$  轴之矩。 $d$  为点  $O$  到力  $\dot{F}_{xy}$  作用线的距离，则有

$$M_z(\dot{F}) = M_z(\dot{F}_{xy}) = M_O(\dot{F}_{xy}) = \pm F_{xy}d \quad (1-21)$$

上式表明：空间力对轴之矩是一个代数量，其值等于此力在垂直于该轴平面上的分力对该轴与平面的交点之矩。其正负规定为：从  $z$  轴的正向看，若力矩逆时针转动，则为正；反之为负。

由力对轴之矩定义可知，当力的作用线与转轴平行时，或者与转轴相交时，即当力与转轴共面时，力对该轴之矩等于零。

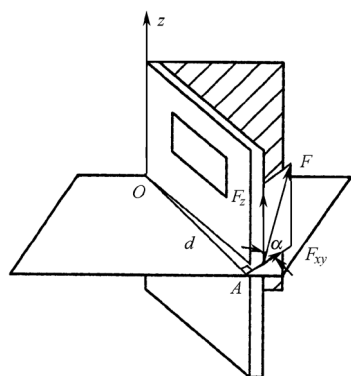


图 1.34 力对轴之矩

## 1.7.3 合力矩定理

设有一空间力系由  $\dot{F}_1$ 、 $\dot{F}_2$ 、 $\dots$ 、 $\dot{F}_n$  组成，其合力为  $\dot{F}_R$ ，则可证明合力  $\dot{F}_R$  对某一轴之矩，等于力系中各力对同一轴之矩的代数和，可写成：

$$M_z(\dot{F}_R) = \sum M_z(\dot{F}_i) \quad (1-22)$$

**例 1.8** 试计算如图 1.35 所示手柄力  $\dot{F}$  对  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴之矩。已知： $\alpha=60^\circ$ ， $F=100\text{N}$ ， $AB=20\text{cm}$ ， $BC=40\text{cm}$ ， $CD=15\text{cm}$ ， $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  处于同一水平面上。

**解：**  $\dot{F}$  为平行于  $xOz$  平面的力，在  $x$  轴和  $z$  轴上有投影，即  $F_x = F \cos 60^\circ$ ， $F_z = F \sin 60^\circ$ 。

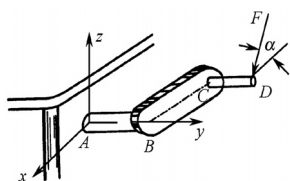


图 1.35 例 1.8 图

按力对轴之矩，可求得：

$$M_x(\dot{F}) = -F_z(AB + CD) = -100 \sin 60^\circ (20 + 15) = -3031 \text{N} \cdot \text{cm}$$

$$M_y(\dot{F}) = -F_z \times BC = -100 \sin 60^\circ \times 40 = -3464 \text{N} \cdot \text{cm}$$

$$M_z(\dot{F}) = -F_x(AB + CD) = -100 \cos 60^\circ (20 + 15) = -1750 \text{N} \cdot \text{cm}$$

## 1.7.4 空间力系的平衡方程

### 1. 空间力系平衡方程及其应用

某物体上作用有一个空间一般力系  $\dot{F}_1, \dot{F}_2, \dots, \dot{F}_n$ 。如果物体平衡，则力系平衡的必要与充分条件是：该力系向任意点简化所得的主矢与主矩为零。即  $\dot{F}'_R = 0, M_O = 0$ 。由此可得空间力系的平衡方程如下：

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma F_z &= 0 \\ \Sigma M_x(\dot{F}) &= 0 \\ \Sigma M_y(\dot{F}) &= 0 \\ \Sigma M_z(\dot{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

前三个方程称为**投影方程**，表示力系中各力在任意三个相互垂直的坐标轴上投影的代数和分别等于零。后三个方程称为**力矩方程**，表示力系中各力对三个坐标轴的力矩代数和分别为零，那么空间汇交力系的平衡方程为：

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-24)$$

空间平行力系的平衡方程为：

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_z &= 0 \\ \Sigma M_x(\dot{F}) &= 0 \\ \Sigma M_y(\dot{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-25)$$

以上两种力系只有三个独立的方程，故只能解三个未知量。

**例 1.9** 在三轮车上放一重量  $F=1\text{kN}$  的货物，重力的作用线在  $M$  点，如图 1.36 (a) 所示。已知： $O_1O_2=1\text{m}$ ， $O_3D=1.6\text{m}$ ， $O_1E=0.4\text{m}$ ， $EM=0.6\text{m}$ ， $D$  点是线段  $O_1O_2$  的中点， $EM \perp O_1O_2$ 。求  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三处的约束反力。

**解：**(1) 取小车为研究对象，画其受力图如图 1.36 (b) 所示。

(2) 设坐标系，列出平衡方程：

$$\Sigma F_z = 0, \quad F_A + F_B + F_C - F = 0$$

$$\Sigma M_x = 0, \quad F_C \times 1.6 - F \times 0.6 = 0$$

$$\Sigma M_y = 0, \quad F \times 0.4 - F_B \times 1 - F_C \times 0.5 = 0$$

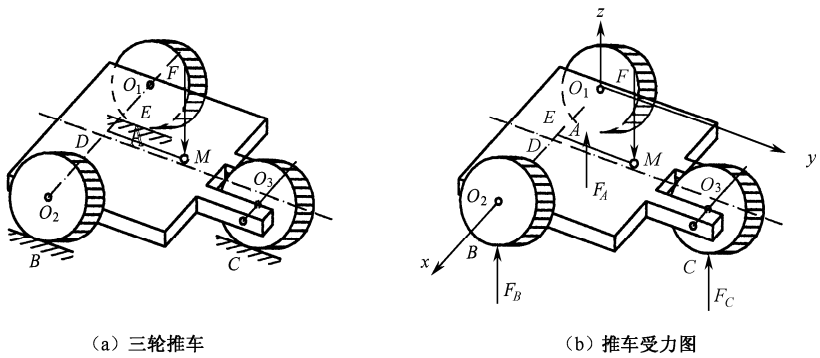


图 1.36 例 1.9 图

解得：

$$F_C = \frac{0.6}{1.6} \times F = 0.375 \text{ kN}$$

$$F_B = F \times 0.4 - F_C \times 0.5 = 0.213 \text{ kN}$$

$$F_A = F - F_B - F_C = 0.412 \text{ kN}$$

## 2. 轴类构件的平衡问题的平面解法

在工程中，常将空间力系投影到三个坐标平面上，画出构件的三视图，分别列出它们的平衡方程，同样可解出未知量。这种将空间问题转化为三个平面问题的方法，称为空间问题的平面解法。本法适合于解轮轴类构件的平衡问题。

例 1.10 某鼓轮轴如图 1.37 所示，已知  $W=8\text{kN}$ ， $b=c=30\text{cm}$ ， $a=20\text{cm}$ ，大齿轮分度圆直径  $d=40\text{cm}$ ，在  $E$  点受  $\dot{F}_n$  作用， $\dot{F}_n$  与齿轮分度圆切线之夹角即压力角  $\alpha=20^\circ$ ，鼓轮半径  $r=10\text{cm}$ ， $A$ 、 $B$  两端为向心轴承。求：轮齿作用力  $\dot{F}_n$  和轴承的约束反力。

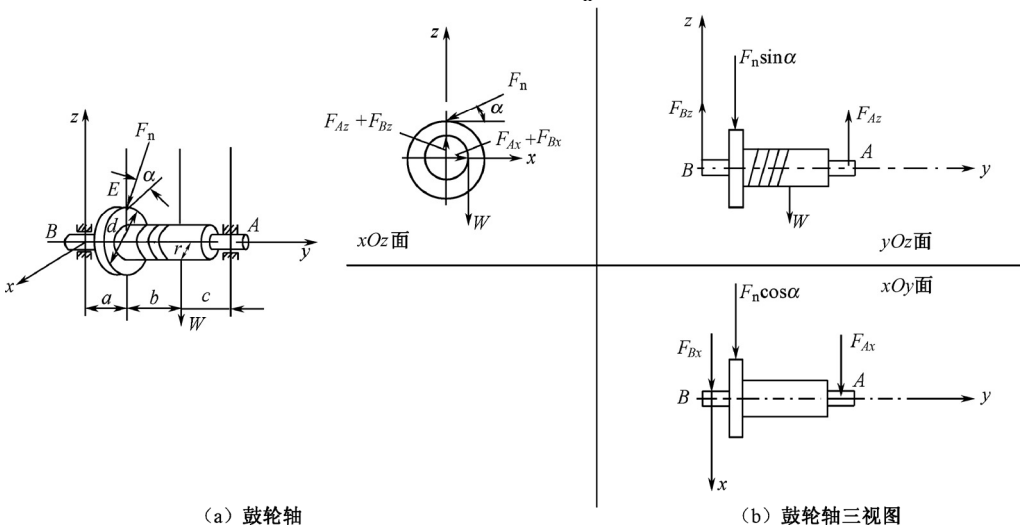


图 1.37 例 1.10 图