

第2章 波 动

光的真实本性是光学的全部讨论的中心问题，在本书中我们从头到尾都得对待这个问题。“光究竟是一种波动现象还是一种粒子现象？”这个似乎干脆利索的问题，远比它初看之下复杂得多。比方说，一个粒子最实质的特征是它的局域性；它存在于一个完全确定的“小”空间区域中。实际上，我们倾向于取一件熟悉的东西，比方一个球或一块小石头，在想象中将它缩小再缩小，直到它小得快没有了，这就是一个“粒子”，或至少是“粒子”概念的基础。但是一个球是与它的环境相互作用的，它有一个引力场与地球（及月球、太阳等）相互作用。这个场（不论它究竟是什么）弥漫到空间中，不能把它与球分开；场是这个球的不可分割的一部分，正像场是“粒子”定义的不可分割的一部分一样。真实的粒子通过场相互作用，在一定的意义上，场就是粒子，粒子就是场。这个小难题属于量子场论的领域，这门学科以后我们还会谈到（第 173 页）。这里只要说下面这点就够了：如果光是一股亚微观粒子（光子）流，它们也决不是“通常的”小球般的经典粒子。

与之相反，一个波的本质特征是它的非局域性。一个经典的行进的波是媒质的一个自持的扰动，它穿过空间运动，输送能量和动量。我们倾向于将一个理想的波想象为存在于一个扩展的区域上的一个连续实体。但是当我们仔细观看真实的波（例如一条弦上的波）时，我们看到的是一幅复合的景象，由大量的粒子协同运动组成。支持这些波的媒质是原子性的（即粒子性的），因此波就其自身而言并不是连续实体。电磁波也许是唯一可能的例外。在概念上，我们假设经典的电磁波（第 59 页）是一个连续实体，用它作为与粒子完全不同的波的观念的模型。但是在上个世纪，我们发现，电磁波的能量不是连续分布的。不论在宏观层级上看多么奇怪，光的电磁理论的经典说法在微观层级上根本不成立。爱因斯坦首先建议，我们宏观上认为的电磁波，是其下的微观现象的根本的颗粒性的统计显示（第 69 页）。在亚原子领域内，经典的物理波概念只是一个幻象。虽然如此，在我们通常工作的大尺度体制下，电磁波还是显得足够真实，经典理论适用得很好。

因为对光的经典讨论和量子力学讨论都要用到波的数学描述，本章要为这两种表述所需要的东西打好基础。下面叙说的想法将用于一切物理波，从一杯茶的表面张力皱波，到从某个遥远的星系照到我们的光脉冲。

2.1 一维波

行进中的波的一个实质内容是，它是传播波的介质的一个自持的扰动。最熟悉的波和最容易想象的波是机械波（图 2.1），包括弦线上的波、液体的表面波、空气中的声波和流体中的压缩波。声波是**纵波**——介质在波的运动方向上位移。弦线上的波（和电磁波）是**横波**——介质的位移发生在与波的运动方向垂直的一个方向上。在一切情况下，虽然携带着能量的扰动穿过介质前行，但是参与其事的单个原子却停留在它们的平衡位置邻近：扰动前行，实物介质并不前行。这是波区别于粒子流的几个关键特征之一。吹过田野的风掀起“麦

浪”滚滚，虽然单棵植株只是在原地摇摆。达·芬奇似乎第一个认识到，波并不运送它所穿行的介质，而正是这一性质，允许波以很高的速率传播。

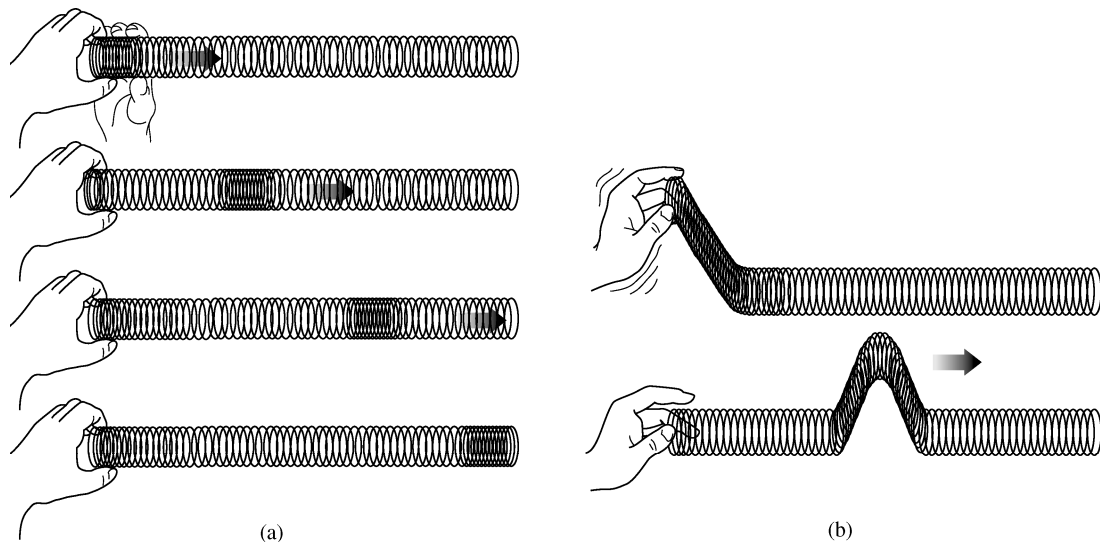


图 2.1 (a) 弹簧中的纵波。(b) 弹簧中的横波

我们在这里想要定出波动方程必定具有的形式。为此，设想某个这样的扰动 ψ 以恒定的速率 v 沿正 x 方向运动。扰动的具体本性暂时不重要。它可以是图 2.2 中弦线的垂直位移，也可以是一个电磁波的电场或磁场的大小（或者甚至是物质波的量子力学概率振幅）。

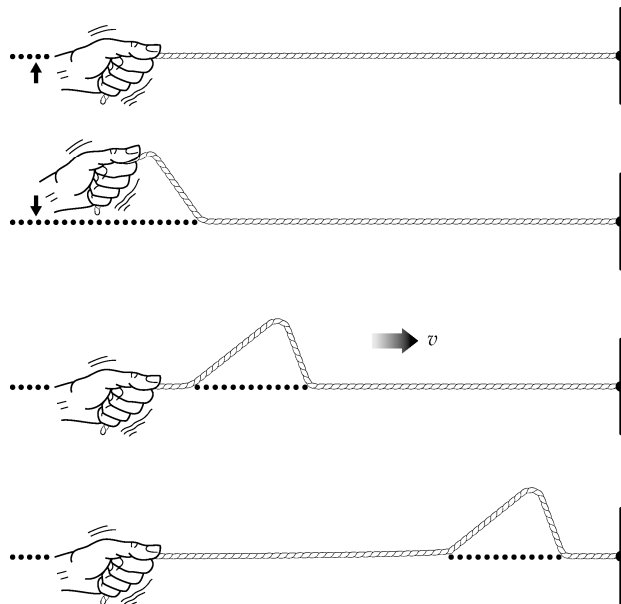


图 2.2 弦线上的波

既然扰动在运动，它必定是位置和时间的函数：

$$\psi(x, t) = f(x, t) \quad (2.1)$$

其中 $f(x, t)$ 对应于某个具体函数或波形。这画在图 2.3a 中，图中示出一个脉冲在一静止坐标

系 S 中以速率 v 运动。扰动在任意时刻 (比方 $t=0$ 时刻) 的形状可以把时间取为那个时刻而得到。这时

$$\psi(x, t)|_{t=0} = f(x, 0) = f(x) \quad (2.2)$$

代表那个时刻波的剖面的轮廓形状。举个例子, 若 $f(x) = e^{-ax^2}$, 其中 a 是一个常数, 其轮廓形状像一口钟; 即它是一个**高斯函数** (x 平方使它关于 $x=0$ 轴对称)。取 $t=0$ 类似于在脉冲经过时为它拍一张“照片”。

暂且我们仅限于考虑穿过空间前进时不改变形状的波。在一段时间 t 之后这个脉冲沿 x 轴走了一段距离 vt , 但其他一切保持不变。现在我们引入一个坐标系 S' , 它与脉冲一起以速率 v 运动 (图 2.3b)。在这个坐标系中 ψ 不再是时间的函数, 当我们与 S' 一起运动时, 我们看到一个由 (2.2) 式描述的静止的、定常的剖面轮廓。这里坐标是 x' 而不是 x , 因此

$$\psi = f(x') \quad (2.3)$$

坐标系 S' 中扰动在任何时刻 t 的形状, 都与在 S 中 $t=0$ 时刻 S 和 S' 具有公共原点时扰动的形状相同 (图 2.3c)。

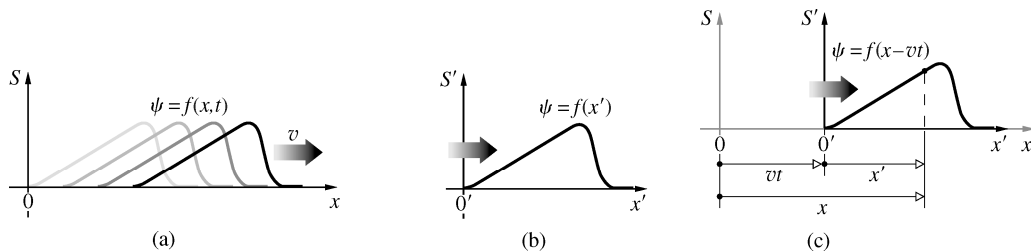


图 2.3 运动参考系

现在我们想要用 x 改写 (2.3) 式, 得到由 S 中的某个静止观察者描述的波。由图 2.3c 有

$$x' = x - vt \quad (2.4)$$

代入 (2.3) 式有

$$\psi(x, t) = f(x - vt) \quad (2.5)$$

这个函数代表了一维**波函数**的最一般的形式。更具体地说, 我们只需选择一个形状, 即 (2.2) 式, 然后在 $f(x)$ 中把 x 换成 $(x - vt)$ 。得出的表示式描述一个具有所要的剖面形状的波, 它以速率 v 沿正 x 方向运动。这样, $\psi(x, t) = e^{-a(x - vt)^2}$ 是一个钟形的波, 即一个脉冲。

要将这一切看得更细致些, 让我们对一个具体的脉冲, 比方说 $\psi(x) = 3/[10x^2 + 1] = f(x)$, 来作一次分析。这个函数的轮廓画在图 2.4a 中, 若它是绳索上的波, ψ 就将是竖直方向上的位移, 我们甚至可以将它换成一个符号 y 。不论 ψ 是代表位移还是代表压强或电场, 我们现在有了扰动的轮廓形状。为了将 $f(x)$ 转变为 $\psi(x, t)$, 也就是说, 让它描述一个以速率 v 向正 x 方向运动的波, 我们将出现在 $f(x)$ 中的一切 x 都换成 $(x - vt)$, 由此得出 $\psi(x, t) = 3/[10(x - vt)^2 + 1]$ 。如果随意令 v 等于某个值, 比方说 1.0 m/s , 并且在相继的几个时刻 $t=0$, $t=1 \text{ s}$, $t=2 \text{ s}$ 和 $t=3 \text{ s}$ 画出这个函数, 我们就得到图 2.4b, 它表明脉冲正在以 1.0 m/s 的速率向右运动, 和预料相同。顺带说一句, 若我们在轮廓函数中将 x 换成 $(x + vt)$, 得到的波将向左运动。

如果我们要通过考察 ψ 在时间增加 Δt 、 x 相应增大 $v\Delta t$ 后的值, 来核对 (2.5) 式的形式, 则有数学式

$$f[(x + v\Delta t) - v(t + \Delta t)] = f(x - vt)$$

波形轮廓不变。

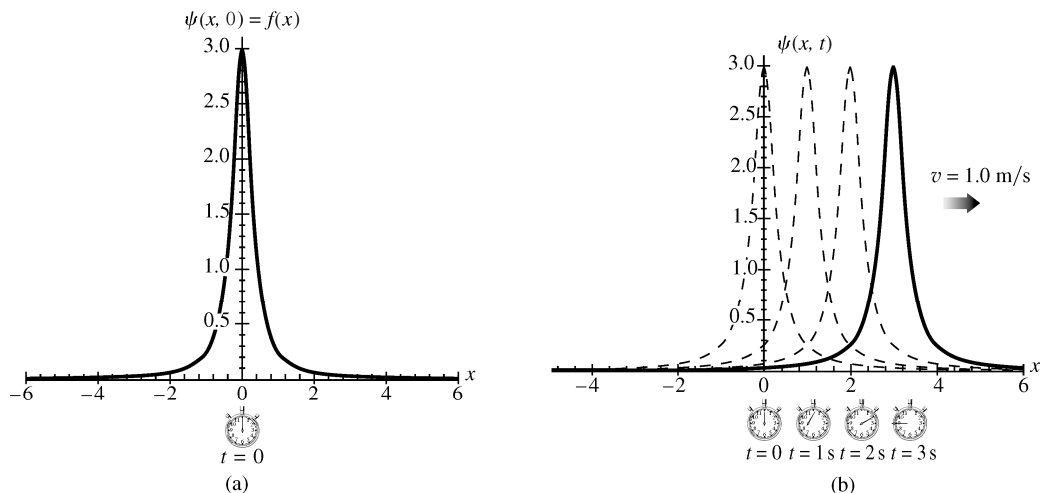


图 2.4 (a) 由函数 $f(x) = 3/(10x^2 + 1)$ 给出的脉冲的轮廓。(b) 图 a 中的波形轮廓现在作为一个波 $\psi(x, t) = 3/[10(x - vt)^2 + 1]$ 向右运动。我们赋予它一个速率 1 m/s，它向正 x 方向行进

相仿地，如果波向负 x 方向即向左运动，(2.5) 式应当变成

$$\psi = f(x + vt), \quad v > 0 \quad (2.6)$$

因此我们得出结论，不论扰动是什么形状，变量 x 和 t 在函数中一定作为一个整体出现，即以 $(x \mp vt)$ 的形式作为单个变量出现。(2.5) 式往往等价地表示为 $(t - x/v)$ 的某个函数，因为

$$f(x - vt) = F\left(-\frac{x - vt}{v}\right) = F(t - x/v) \quad (2.7)$$

我们说图 2.2 中所示的脉冲和 (2.5) 式描述的扰动是一维的，因为波扫过的是位于一条直线上的点——只需要一个空间变量来规定这些点。不要与这件事弄混淆：在这个具体场合，绳索的上下振动是在第二个维度上的。与之相反，一个二维波在一个面上传播，像池塘上的皱波，它由两个空间变量描述。

2.1.1 微分波动方程

1747 年，达朗贝尔 (Jean Rond d'Alembert) 将偏微分方程引入对物理学的数学讨论。同一年他写了一篇文章，讨论振动弦的运动，文中首次出现了所谓波动微分方程。通常取这个线性齐次二阶偏微分方程作为无损耗介质中物理波的定义式。有多种不同的波，每一种都由它自身的波函数 $\psi(x)$ 描述。有的是关于压强的，或者是关于位移的，其他的则是关于电磁场的，但是引人注意的是，所有这些波函数都是同一微分波动方程的解。它是一个偏微分方程的原因是，波必定是几个独立变量（空间和时间变量）的函数。一个线性微分方程实质上是由两项或更多项组成的方程，每一项由一个常数乘上一个函数 $\psi(x)$ 或其导数构成。关键点是每个这样的项必须只以一次方出现；也不能有 ψ 与其各阶导数的任何交叉乘积或各阶导数的乘积。我们还记得，一个微分方程的阶数等于方程中最高阶微商的阶数。还有，若一个微分方程为 N 阶，则其解中将含有 N 个任意常数。

现在我们在已有知识指导下推导一维波动方程的形式。可以预见，以固定速率行进的波最为基础的性质是，它需要用两个常数（振幅及频率或波长）来规定（第 18 页），这表明应

当取二阶微商。因为有两个独立自变量 (x 和 t)，我们可以求 $\psi(x, t)$ 对 x 或对 t 的偏微商。这时，我们对一个自变量求微商而将另一自变量当作常数对待。通常的微分规则适用，但是为了让区别明显，将偏微商写为 $\partial/\partial x$ 。

为了将 $\psi(x, t)$ 对空间的依赖关系和对时间的依赖关系相联系，我们来求 $\psi(x, t) = f(x')$ 对 x 的偏微商，让 t 不变。用 $x' = x \mp vt$ ，并且因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \\ \frac{\partial x'}{\partial x} &= \frac{\partial(x \mp vt)}{\partial x} = 1\end{aligned}\quad (2.8)$$

因为

让 x 不变，对时间的偏微商为

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} (\mp v) = \mp v \frac{\partial f}{\partial x'} \quad (2.9)$$

联合 (2.8) 式和 (2.9) 式，得

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mp v \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

这个式子表示， ψ 随 t 的变化率和随 x 的变化率只差一个常倍数，如图 2.5 中所示。(2.8) 式和 (2.9) 式的二阶偏微商是

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \quad (2.10)$$

和

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mp v \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = \mp v \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

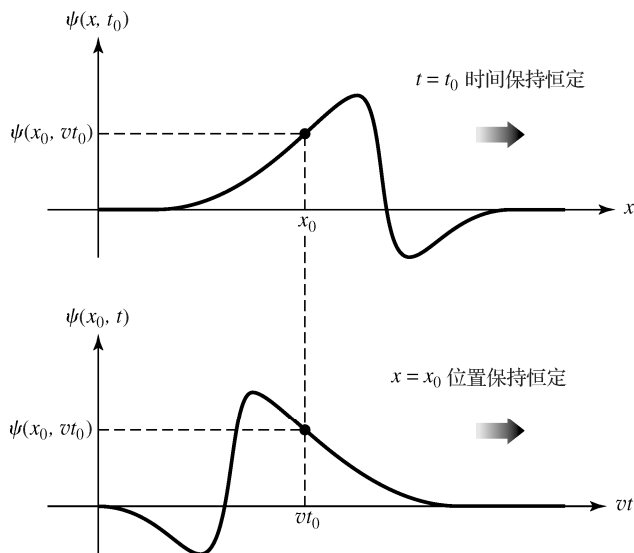


图 2.5 ψ 随 t 的变化和随 x 的变化

由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \mp v \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

用(2.9)式, 得到

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2}$$

联合上式与(2.10)式, 我们得到

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

这就是所求的一维波动微分方程。

例题 2.1 图 2.4 中所示的波由下式给出:

$$\psi(x, t) = \frac{3}{[10(x - vt)^2 + 1]}$$

直接代入证明, 它是一维波动微分方程的解。

解

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

对 x 求微商

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{3}{10(x - vt)^2 + 1} \right] \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= (-1) 3 [10(x - vt)^2 + 1]^{-2} 20(x - vt) \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= (-1) 60 [10(x - vt)^2 + 1]^{-2} (x - vt) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{-60(-2) 20(x - vt)(x - vt)}{[10(x - vt)^2 + 1]^3} - \frac{60}{[10(x - vt)^2 + 1]^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{2400(x - vt)^2}{[10(x - vt)^2 + 1]^3} - \frac{60}{[10(x - vt)^2 + 1]^2} \end{aligned}$$

对 t 求微商

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{3}{10(x - vt)^2 + 1} \right] \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= (-1) 3 [10(x - vt)^2 + 1]^{-2} 20(-v)(x - vt) \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= 60v(x - vt) [10(x - vt)^2 + 1]^{-2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{60v(x - vt)(-2) 20(x - vt)(-v)}{[10(x - vt)^2 + 1]^3} + \frac{-60v^2}{[10(x - vt)^2 + 1]^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{2400v^2(x - vt)^2}{[10(x - vt)^2 + 1]^3} - \frac{60v^2}{[10(x - vt)^2 + 1]^2} \end{aligned}$$

从而

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

注意到(2.11)式是一个所谓的齐次微分方程; 它不包含仅有自变量的项(如一个“力”或一个“源”)。换句话说, 方程的每一项中都有 ψ , 这意味着, 若 ψ 是解, 则 ψ 乘任意倍数也

是解。方程 (2.11) 是**无阻尼系统的波动方程**，无阻尼系统在考虑的区域中不包含源。阻尼的效应可以加进一个 $\partial\psi/\partial t$ 项来描述，这时生成了一个更普遍的波动方程，不过我们以后再回过头来讨论它 (第 94 页)。

当我们描述的系统是连续系统时，通常出现偏微分方程。时间是自变量之一这个事实，反映了在分析的过程中时间变化的连续性。场论一般讨论物理量在时空中的连续分布，因此它取偏微分方程的形式。电磁学的麦克斯韦表述是一种场论，它给出方程 (2.11) 的一个变型，从这一理论形式中完全自然地产生了电磁波的概念 (第 59 页)。

我们用波的特殊情况开始我们的讨论，即传播中保持形状不变的波，尽管波一般并不保持固定不变的轮廓形状。虽然如此，这个简单假设还是引导我们得到普遍的表述：波动微分方程。如果代表一个波的函数是这个方程的解，它将同时是 $(x \mp vt)$ 的函数——特别是，它是一个可以既对 x 又对 t 以非平庸方式求二次微商的函数。

例题 2.2 函数

$$\psi(x, t) = \exp [(-4ax^2 - bt^2 + 4\sqrt{ab}xt)]$$

(其中 a 和 b 是常数) 是否描述一个波? 如果是，波速和传播方向是什么?

解 将括号内的项分解因式:

$$\psi(x, t) = \exp [-a(4x^2 + bt^2/a - 4\sqrt{b/a}xt)]$$

$$\psi(x, t) = \exp [-4a(x - \sqrt{b/4a}t)^2]$$

这是 $(x-vt)$ 的一个二次可微函数，所以它是方程 (2.11) 的解，因而描述一个波。波速 $v = \frac{1}{2}\sqrt{b/a}$ ，朝正 x 方向行进。

2.2 谐波

现在我们来考察最简单的波形，其轮廓图是正弦或余弦曲线。这种波有各种名称，叫做正弦波、简谐波或更简洁地叫做**谐波**。在第 7 章中我们将看到，任何波形都可以由谐波叠加合成，因此它们具有特殊的意义。

我们将波形选为下面的简单函数:

$$\psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x) = A \sin kx = f(x) \quad (2.12)$$

其中 k 是一个正的常数，叫做**传播数**。之所以必须引进常数 k ，是因为我们不能取一个有物理单位的量的正弦。正弦是两个长度之比，因此是无单位的。 kx 的合适单位是弧度，弧度是弧长与半径之比，它不是一个真实的物理单位。正弦函数的变化范围从 +1 到 -1，所以 $\psi(x)$ 的最大值为 A 。扰动的这个最大值叫做波的**振幅** (图 2.6)。为了把 (2.12) 式变为一个以速率 v 向正 x 方向前进的波，我们只需将 x 换为 $(x - vt)$ ，这时

$$\psi(x, t) = A \sin k(x - vt) = f(x - vt) \quad (2.13)$$

这显然是波动微分方程的一个解 (见习题 2.24)。让 x 或 t 保持固定，便得到一个正弦扰动；这个波在空间和时间中都是周期的。**空间周期**叫做**波长**，用 λ 表示。波长是每个波占几个长度

单位。光学中习惯上 λ 用纳米(nm)为测量单位, $1\text{ nm} = 10^{-9}\text{ m}$, 虽然微米($1\text{ }\mu\text{m} = 10^{-6}\text{ m}$)也常用, 还有更老的单位埃(angstrom, $1\text{ }\text{\AA} = 10^{-10}\text{ m}$) 在文献中也仍然能找到。 x 的大小增大或减小 λ , ψ 应保持不变, 即

$$\psi(x, t) = \psi(x \pm \lambda, t) \quad (2.14)$$

在谐波的情况下, 这等价于正弦函数的自变量改变 $\pm 2\pi$ 。因此

$$\sin k(x - vt) = \sin k[(x \pm \lambda) - vt] = \sin [k(x - vt) \pm 2\pi]$$

于是

$$|k\lambda| = 2\pi$$

或者, 由于 k 和 λ 都是正数,

$$k = 2\pi/\lambda \quad (2.15)$$

图 2.6 中表示的是如何用 λ 来画(2.12)式给出的波形轮廓。图中的 φ 是正弦函数的自变量, 也叫**相位**。换句话说, $\psi(x) = A \sin \varphi$ 。注意, 只要 $\sin \varphi = 0$ 就有 $\psi(x) = 0$, 这出现在 $\varphi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ 等处, 而这又分别发生在 $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2$ 时。

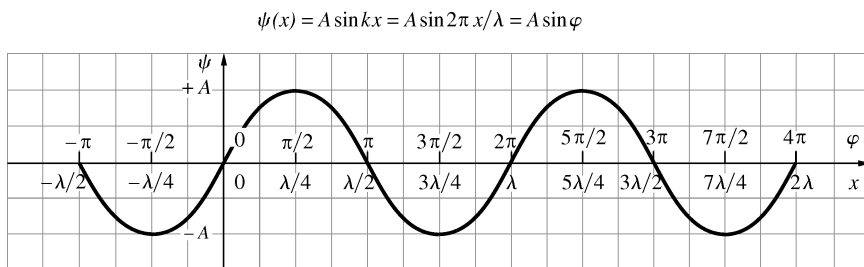


图 2.6 谐波的轮廓是一个简谐函数(正弦或余弦函数)。一个波长对应于相位 φ 改变 2π 弧度

与上面对 λ 的讨论类似, 现在来考察**时间周期** τ 。它是一个完整的波经过一个固定观察者所需的时间。这时, 我们感兴趣的是波在时间中的重复行为, 因此

$$\psi(x, t) = \psi(x, t \pm \tau) \quad (2.16)$$

及

$$\sin k(x - vt) = \sin k[x - v(t \pm \tau)]$$

$$\sin k(x - vt) = \sin [k(x - vt) \pm 2\pi]$$

因此

$$|kv\tau| = 2\pi$$

但是这些量都是正的; 因而

$$kv\tau = 2\pi \quad (2.17)$$

或

$$\frac{2\pi}{\lambda} v\tau = 2\pi$$

从此式得到

$$\tau = \lambda/v \quad (2.18)$$

周期是每个波占多少个时间单位(图 2.7), 它的倒数是**时间频率** ν , 或单位时间里(即每秒)波的个数。于是

$$\nu \equiv 1/\tau$$

单位为每秒周数或赫兹。于是(2.18)式变为

$$v = \nu\lambda \quad (2.19)$$

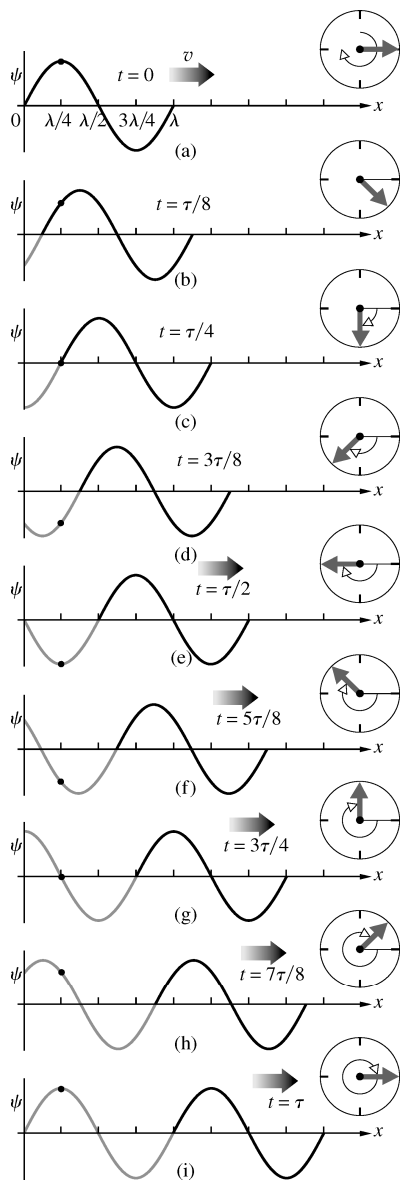


图 2.7 一个谐波在一个周期的时间里沿 x 轴的运动。注意，如果这是一根绳子，那么其上任意一点只做上下运动。我们将在 2.6 节讨论旋转的箭头的意义。暂时我们只注意，这个箭头在竖直轴上的投影等于 ψ 在 $x=0$ 处的值

想象你处于静止状态，一个谐波在弦上从你身边经过向前行进。每秒扫过的波的个数为 ν ，而每个波的长度为 λ 。在 1.0 s 里，从你身边经过的扰动的总长度为乘积 $\nu\lambda$ 。假设每个波长 2.0 m，每秒来 5 个，那么在 1.0 s 里，有 10 m 长的波从你身旁经过。这正是我们所称的波速 (v)，即波阵面行进的速率，单位为 m/s。稍微不同的说法是，因为在时间 τ 中走过一个波长，它的速率必定等于 $\lambda/\tau = \nu\lambda$ 。附带提一下，牛顿在他的《原理》(1687 年) 中题为“求波的速度”的一节里推导了这个关系式。

还有两个量在讨论波动的文献中常常用到。一个是时间角频率

$$\omega \equiv 2\pi/\tau = 2\pi\nu \quad (2.20)$$

单位是弧度/秒。另一个在光谱学中很重要，是波数或空间频率

$$\kappa \equiv 1/\lambda \quad (2.21)$$

单位为米的倒数。换句话说， κ 是单位长度 (如每米) 中波的数目。所有这些量同样适用于非谐波，只要每个波都由有规则地重复的单个轮廓单元构成 (图 2.8)。

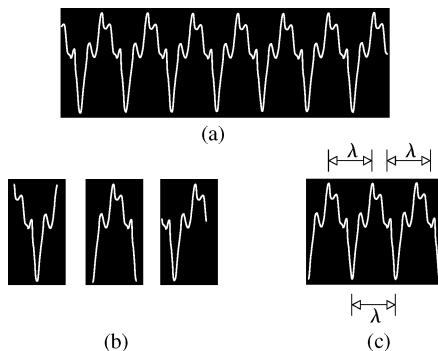


图 2.8 (a) 一支萨克斯管产生的波形。想象任意多个轮廓单元 (b)，它们的重复便生成波形 (c)。波隔一段距离便与自身重复，这个距离就叫波长 λ

例题 2.3 一台掺钕的钇铝石榴石激光器在真空中输出一束 $1.06 \mu\text{m}$ 的电磁辐射。求 (a) 这束光的时间频率；(b) 它的时间周期；(c) 它的空间频率。

解 (a) 由于 $v = \nu\lambda$

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{2.99 \times 10^8 \text{ m/s}}{1.06 \times 10^{-6} \text{ m}} = 2.82 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

或 $\nu = 282 \text{ THz}$ (太赫)。

(b) 时间周期 $\tau = 1/\nu = 1/(2.82 \times 10^{14} \text{ Hz}) = 3.55 \times 10^{-15} \text{ s}$, 或 3.55 fs (飞秒)。

(c) 空间频率 $\kappa = 1/\lambda = 1/(1.06 \times 10^{-6} \text{ m}) = 943 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$, 即每 1 m 中有 94.3 万个波。

用上面的定义, 可以为行进的谐波写出几个等价的表示式:

$$\psi = A \sin k(x \mp vt) \quad [2.13]$$

$$\psi = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{\tau} \right) \quad (2.22)$$

$$\psi = A \sin 2\pi (\kappa x \mp \nu t) \quad (2.23)$$

$$\psi = A \sin (kx \mp \omega t) \quad (2.24)$$

$$\psi = A \sin 2\pi \nu \left(\frac{x}{v} \mp t \right) \quad (2.25)$$

在这些表示式中, 最常遇到的是 (2.13) 式和 (2.24) 式。注意, 所有这些理想化的波都是延伸到无穷的, 即对 t 的任何一个固定值, 对 x 没有数学限制, 它从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 。每个这样的波具有单一的固定频率, 因此叫做**单色波**, 或者更合适地, 叫做**单能量波**。真实的波绝非单色波。即使一台完善的正弦波发生器也不能永远不停地工作。仅仅因为波不能回溯延伸到 $t = -\infty$, 它的输出将包含一个频率范围, 虽然很小。因此所有的波都包含有一个频段, 若频段很窄, 就说这个波是**准单色波**。

在继续往下讨论之前, 让我们将一些数字代入 (2.13) 式, 看看对每一项该怎么处理。为此, 任意地令 $v = 1.0 \text{ m/s}$ 和 $\lambda = 2.0 \text{ m}$ 。这时波函数

$$\psi = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt)$$

在国际单位制中变成

$$\psi = A \sin \pi(x - t)$$

图 2.9 表示随着时间的流逝, 这个波如何以 1.0 m/s 的波速向右行进: 最上面 $t = 0$, 这时 $\psi = A \sin \pi x$; 中间 $t = 1.0 \text{ s}$, 这时 $\psi = A \sin \pi(x - 1.0)$; 下面 $t = 2.0 \text{ s}$, 这时 $\psi = A \sin \pi(x - 2.0)$ 。

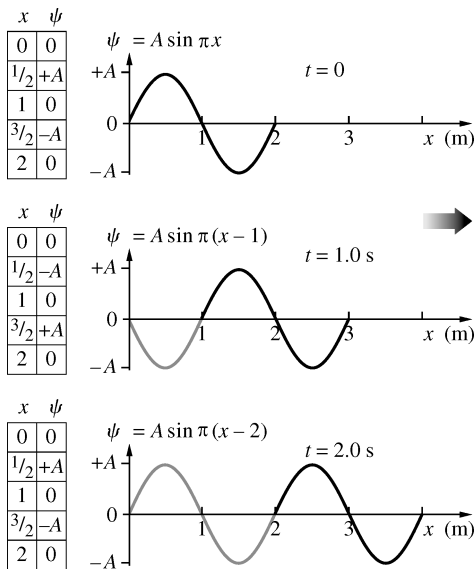


图 2.9 一个形式为 $\psi(x, t) = A \sin k(x - vt)$ 的行进的波, 以波速 1.0 m/s 向右运动

例题 2.4 考虑函数

$$\psi(y, t) = (0.040) \sin 2\pi \left(\frac{y}{6.0 \times 10^{-7}} + \frac{t}{2.0 \times 10^{-15}} \right)$$

其中所有的量都在国际单位制中取合适单位。(a) 这个表示式代表一个波吗? 解释理由。如果它代表一个波, 那么定出它的 (b) 频率、(c) 波长、(d) 振幅、(e) 传播方向和 (f) 波速。

解 (a) 从括号中提出因子 $1/6.0 \times 10^{-7}$, 我们清楚地看到, $\psi(y, t)$ 是 $(y \pm vt)$ 的二次可微函数, 因此它的确代表一个谐波。

(b) 我们也可以简单地用 (2.22) 式

$$\psi = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau} \right)$$

由此推得周期 $\tau = 2.0 \times 10^{-15} \text{ s}$, 于是 $\nu = 1/\tau = 5.0 \times 10^{14} \text{ Hz}$ 。

(c) 波长为 $\lambda = 6.0 \times 10^{-7} \text{ m}$ 。

(d) 振幅为 $A = 0.040$ 。

(e) 波向负 y 方向行进。

(f) 波速 $v = \nu\lambda = (5.0 \times 10^{14} \text{ Hz}) \times (6.0 \times 10^{-7} \text{ m}) = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。或者, 也可以将因子 $1/6.0 \times 10^{-7}$ 从括号中提出, 波速就变成 $6.0 \times 10^{-7} / (2.0 \times 10^{-15}) = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。

2.2.1 空间频率

周期波是穿越空间和时间运动的结构, 它们显示波长、时间周期、时间频率等性质; 它们在时间中振荡。在现代光学中, 我们也对稳定的信息周期性分布感兴趣, 在概念上这像是对波的一张快照。的确, 下面在第 7 章和第 11 章将看到, 通常的建筑物、人和岗哨的像, 统统可以通过一个叫做傅里叶分析的过程, 用空间的周期函数合成出来。

我们在这里需要知道的是, 光学信息可以以一种周期性方式散布在空间里, 很像一个波的轮廓。为了表明这一点, 我们将图 2.6 的正弦曲线转换为图 2.10 这样的亮度平滑变化的图。这个正弦亮度变化有一个空间周期 (比方说, 从亮峰到亮峰) 为几毫米。每一对黑带和白带相当于一个“波长”, 即每一对黑带或白带占多少毫米 (或厘米)。它的倒数 (1 除以空间周期) 是空间频率, 即每毫米 (或每厘米) 中有多少对黑带或白带。图 2.11 中是一幅类似的图样, 不过空间周期更短, 空间频率更高。它们都是单一空间频率的分布, 与时域中的单色情况相似。在以后的讨论中会看到一个像如何用图 2.10 和图 2.11 那样的单一空间频率的贡献叠加生成。



图 2.10 空间频率较低的正弦亮度分布

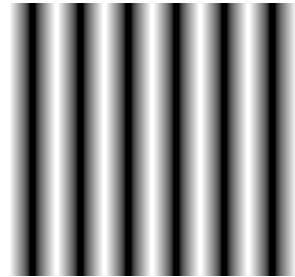


图 2.11 空间频率较高的正弦亮度分布

2.3 相位和相速度

考察任何一个谐波波函数, 如

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (2.26)$$

正弦函数的整个自变量是波的相位 φ , 因此

$$\varphi = (kx - \omega t) \quad (2.27)$$

当 $t = x = 0$ 时,

$$\psi(x, t) \Big|_{x=0}^{t=0} = \psi(0, 0) = 0$$

这当然是一个特殊情况。更普遍地，我们可以写出

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varepsilon) \quad (2.28)$$

其中 ε 是初相。要对 ε 的物理意义有一了解，想象我们要在一根拉直的绳子上产生一个前进的谐波，如图 2.12 中所示。为了生成谐波，握着绳子的手必须这样运动，使绳子的竖直位移 y 与绳子加速度的负值成正比，即作简谐运动（见习题 2.27）。但是在 $t=0$ 时刻及 $x=0$ 处，手当然不一定要像图 2.12 中那样在 x 轴上向下运动。它当然也可以向上舞绳来开始运动，这时 $\varepsilon=\pi$ ，如图 2.13 中所示。在后面这种情况下，

$$\psi(x, t) = y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \pi)$$

它等价于

$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx) \quad (2.29)$$

或

$$\psi(x, t) = A \cos\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right)$$

因此，初相角是在波发生器中产生的对相位的固定贡献，而与波在空间走了多远的距离和走了多长时间无关。

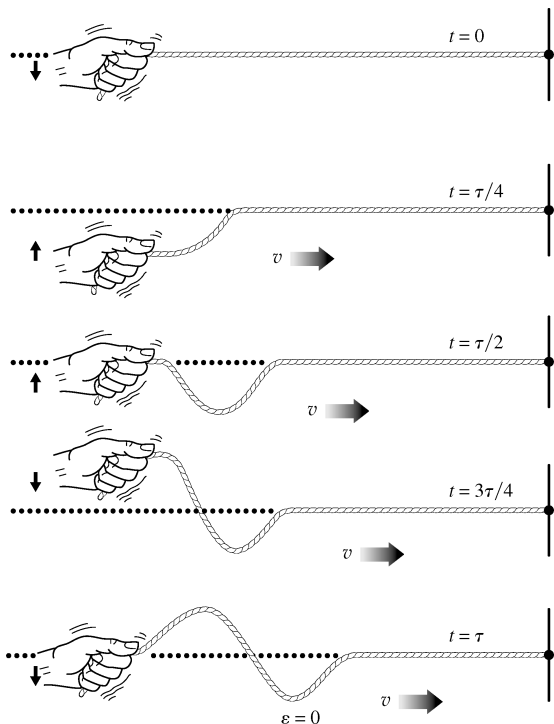


图 2.12 注意在 $x=0$ 及 $t=\tau/4=\pi/2\omega$
 $y=A \sin(-\pi/2)=-A$ 处 $\varepsilon=0$

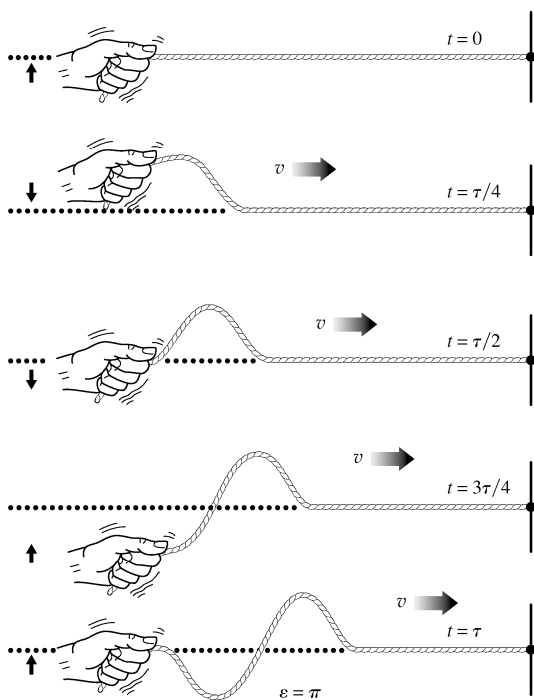


图 2.13 注意在 $x=0$ 及 $t=\tau/4$,
 $y=A \sin(\pi/2)=A$ 处 $\varepsilon=\pi$

(2.26) 式中相位是 $(kx - \omega t)$ ，而 (2.29) 式中它是 $(\omega t - kx)$ 。这两个式子都描述向正 x 方向行进的波，它们除有一个相对相差 π 以外，别的方面完全相同。情况常常是这样：在给定情形下初相位没有什么特别意义时，我们既可以用 (2.26) 式，也可以用 (2.29) 式，或者只要你高兴也可以用余弦函数来表示波。尽管如此，在某些场合下，一种相位表示式可能在数学上比另一种更有吸引力；文献中两种都用得很多，因此我们也二者都用。

(2.28) 式给出的扰动 $\psi(x, t)$ 的相位是

$$\varphi(x, t) = (kx - \omega t + \varepsilon)$$

它显然是 x 和 t 的函数。事实上, 保持 x 固定, φ 对 t 的偏微商是相位对时间的变化率, 或

$$\left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_x \right| = \omega \quad (2.30)$$

任何固定位置上的相位的时间变化率是波的角频率, 图 2.12 中, 绳索上的一点就以这个频率上下振动。这一点每秒振动的周数必定和波相同。每振动一周 φ 改变 2π 。量 ω 是相位每秒内变化的弧度数。量 k 是相位在每米距离内变化的弧度数。

类似地, 保持 t 固定, 相位随距离的变化率为

$$\left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_t \right| = k \quad (2.31)$$

上面两个表示式使我们想起偏微商理论中的一个公式, 这个公式在热力学中很常用, 即

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\varphi = \frac{-(\partial \varphi / \partial t)_x}{(\partial \varphi / \partial x)_t} \quad (2.32)$$

等式左边的项表示相位恒定的状态的传播速率。想象一个谐波, 在其轮廓图上选取任意一点, 例如波的一个波峰。当波穿过空间运动时, 波峰的位移 y 是不变的。由于谐波函数中唯一的变量是相位, 这个运动点的相位必定也保持不变。也就是说, 相位固定在这样的值上, 使所选的点的 y 值保持恒定。这一点跟随波的轮廓以速率 v 运动, 因而相位恒定的状态也以同样的速率运动。

取 (2.29) 式给出的 φ 的恰当的偏微商, 并把它们代入 (2.32) 式, 得到

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\varphi = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v \quad (2.33)$$

ω 的单位是 rad/s (弧度/秒), k 的单位是 rad/m (弧度/米)。 ω/k 的单位刚好是 m/s。这是波形轮廓运动的速率, 通常叫做波的**相速度**。当波朝 x 增加的方向运动时, 相速取正号, 朝 x 减小的方向时运动时取负号。这同前面关于 v 作为波速的大小的讨论相一致: $v > 0$ 。

下面考虑恒定相位的传播, 及它同任何一个谐波方程有什么关系, 这个谐波方程如

$$\psi = A \sin k(x \mp vt)$$

其相位

$$\varphi = k(x - vt) = \text{恒定}$$

随着 t 增大, x 必定增大。即使 $x < 0$ 因而 $\varphi < 0$, x 也必须增大 (即负得少些)。于是, 这时相位恒定的状态沿 x 增加的方向运动。只要相位中的两项是彼此相减, 波就朝正 x 方向行进。反过来, 对于

$$\varphi = k(x + vt) = \text{恒定}$$

当 t 增大时 x 可以是正的并减小, 也可以是负的并变得更负; 不论哪种情况, 恒定相位状态都朝 x 减小的方向运动。

例题 2.5 一个传播中的波, 在 $t=0$ 时刻用国际单位制可表示为 $\psi(y, 0) = (0.030 \text{ m})\cos(\pi y/2.0)$ 。扰动以 2.0 m/s 的相速度向负 y 方向运动。写出波在 6.0 s 时刻的表示式。

解 写出波的表示式

$$\psi(y, t) = A \cos 2\pi \left(\frac{y}{\lambda} \pm \frac{t}{\tau} \right)$$

其中 $A = 0.030 \text{ m}$, 并且 $\psi(y, 0) = (0.030 \text{ m}) \cos 2\pi \left(\frac{y}{4.0} \right)$

我们要求周期。由于 $\lambda = 4.0 \text{ m}$, $v = \nu\lambda = \lambda/\tau$; $\tau = \lambda/v = 4.0 \text{ m}/(2.0 \text{ m/s}) = 2.0 \text{ s}$ 。由此

$$\psi(y, t) = (0.030 \text{ m}) \cos 2\pi \left(\frac{y}{4.0} + \frac{t}{2.0} \right)$$

相位括号中的+号表明运动朝负 y 方向。在 $t = 6.0 \text{ s}$ 时刻

$$\psi(y, 6.0) = (0.030 \text{ m}) \cos 2\pi \left(\frac{y}{4.0} + 3.0 \right)$$

谐波上任一大小固定的点将这样运动, 使 $\varphi(x, t)$ 不随时间变化, 换句话说, 使 $d\varphi(x, t)/dt = 0$, 或者换个说法, 即 $d\psi(x, t)/dt = 0$ 。这对一切波都成立, 不论是不是周期波, 由它得到下面的表示式:

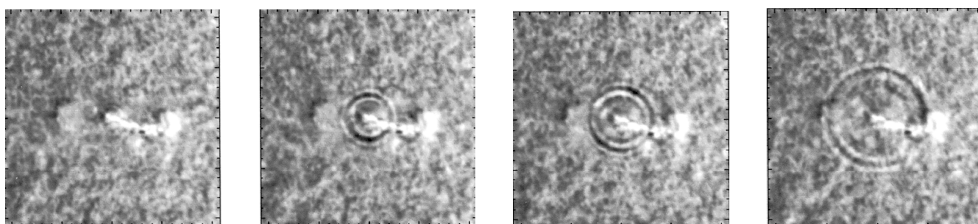
$$\pm v = \frac{-(\partial\psi/\partial t)_x}{(\partial\psi/\partial x)_t} \quad (2.34)$$

若我们已知 $\psi(x, t)$, 用此式可以方便地得出 v 。注意由于 v 永远是正数, 当上式右边比值为负时运动是在负 x 方向。

图 2.14 画出了一个波源, 它在液体表面上产生虚拟的二维波。介质升降时产生的扰动的正弦本性在图中很明显。不过还有另一个有用的方法来想象发生的事。连接具有给定相位值的所有各点的曲线形成一组同心圆。而且, 若给定在离波源任何一个距离上 A 处处为常数, 若 φ 在一个圆周上为常数, 则 ψ 在这个圆周上也必定是常数。换句话说, 一切对应的波峰和波谷都落在圆周上, 我们将这样的波叫做圆形波, 它们中的每个都以速率 v 向外扩张。



图 2.14 圆形波



太阳上的耀斑产生圆形的日震皱波流过太阳表面 (NASA)

2.4 叠加原理

波动微分方程的形式 [(2.11) 式] 揭示了波的一个令人感兴趣的性质, 这个性质与一股经典粒子流的行为很不相同。设 ψ_1 和 ψ_2 分别是波动方程的两个不同的解; 则可推出 $(\psi_1 + \psi_2)$

也是一个解。这叫叠加原理, 很容易证明。既然

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \quad \text{和} \quad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}$$

把它们相加, 得

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}$$

因此

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\psi_1 + \psi_2) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\psi_1 + \psi_2)$$

这证明了 $(\psi_1 + \psi_2)$ 的确是一个解。它的意思是, 当两个波到达空间中同一个地方, 在那里发生重叠, 它们将简单地一个与另一个相加 (或相减), 而不会永久摧毁或瓦解其中任何一个波。

重叠区域内每一点的合扰动是这个位置上单个成分波的代数和 (图 2.15)。一旦穿过两个波共存的这个区域, 每个波将继续向前运动离开, 不受这次遭遇的影响。

记住, 我们讲的是波的线性叠加, 这个过程是广泛成立和最常遇到的。不过, 也有可能波的振幅足够大, 大得以非线性方式驱动介质 (第 800 页)。我们暂且集中注意线性波动微分方程, 它给出的是线性叠加原理。

光学中要多处遇到波的这种或那种方式的叠加。即使是反射和折射这样的基本过程, 也是光从无数个原子上散射的宣示 (第 88

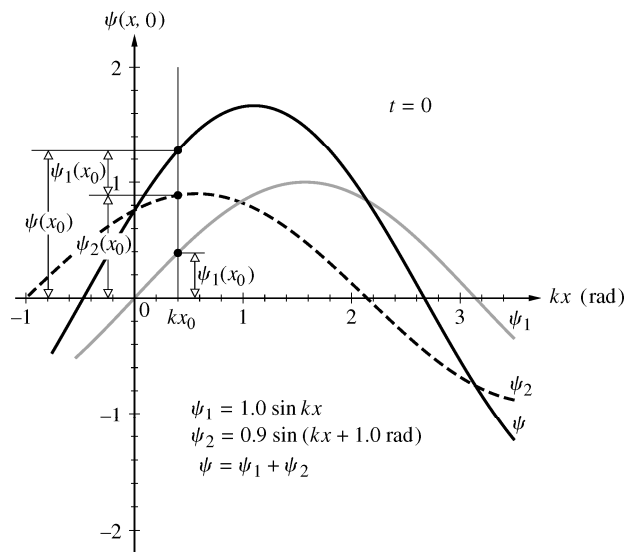


图 2.15 两个波长一样的正弦波的叠加, 其振幅分别为 A_1 和 A_2 。合成波是一个波长相同的正弦波, 它在每一点都等于上两个正弦波的代数和。比方在 $x = x_0$ 处, $\psi(x_0) = \psi_1(x_0) + \psi_2(x_0)$; 其大小相加。 ψ 的振幅 A 可用几种不同的方法定出; 见图 2.19

页), 这个现象只有用波的叠加才能令人满意地处理。因此至为关键的是, 我们要尽快理解这个过程, 至少得定性理解。因此, 细心考察图 2.15 中两个共存的波。在每一点 (即 kx 的每个值上) 我们简单地将 ψ_1 和 ψ_2 相加 (它们中的任何一个都可正可负)。作为一种快速核对方法, 记住只要在某个地方有一个分量波为零 (比方说 $\psi_1 = 0$), 合成扰动之值就等于另一个不为零的分量波之值 ($\psi = \psi_2$), 并且这两条曲线在这个位置 (比方, 在 $kx = 0$ 和 $+3.14$ 弧度) 相交。另一方面, 每当两个分量波大小相等而符号相反 (比如当 $kx = +2.67$ 弧度), 就有 $\psi = 0$ 。附带请注意两条曲线之间正相位差 1 弧度如何将 ψ_2 移到 ψ_1 之左 1 弧度处。

更多地讨论一下图示。图 2.16 表示两个振幅几乎相等的波叠加产生的结果如何依赖于它们之间的相角差。在图 2.16a 中两个波的相位相同; 即它们的相角差为零, 我们说它们**同相**; 两个波的升落是同步的, 互相加强。合成的波也是一个正弦波, 有巨大的振幅, 频率和波长与分量波相同 (第 356 页)。随着图的顺序, 我们看到, 随着相角差的增大, 合成波的振幅减小, 直到图 2.16d 中, 当相角差等于 π , 合成波几乎消失。这时我们说两个波**异相** 180° 。异相的波倾向于相互抵消这一事实, 使得整个这类现象被命名为**干涉**。

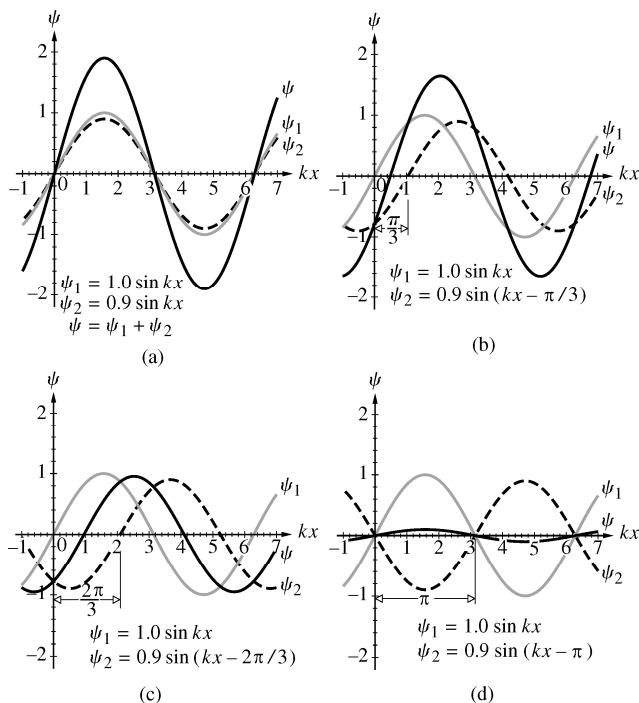


图 2.16 两个正弦波的叠加, 一个的振幅为 $A_1=1.0$, 另一个为 $A_2=0.9$ 。在 (a) 中两个正弦波同相。在 (b) 中 ψ_1 领先 ψ_2 相角 $\pi/3$ 。在 (c) 中 ψ_1 领先 ψ_2 相角 $2\pi/3$ 。在 (d) 中 ψ_1 和 ψ_2 相位相差 π , 几乎相互抵消。要知道如何确定振幅, 见图 2.20



水波的重叠与干涉

2.5 复数表示

进一步分析波动现象时将看到, 用正弦函数和余弦函数描写谐波, 会给我们带来一些不便。所表达的式子有时相当复杂, 处理这些式子所需的三角函数运算就更不受欢迎了。复数表示提供了另外一种描述方法, 它在数学上用起来更简单。实际上, 复指数函数在经典力学和量子力学中都用得广泛, 在光学中也一样。

复数 $\tilde{z}$ 的形式为

$$\tilde{z} = x + iy \quad (2.35)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 。 $\tilde{z}$ 的实部和虚部分别是 x 和 y , x 和 y 自身都是实数, 这用图示法表示在图 2.17a 的 Argand 图^①中。通过极坐标 (r, θ) , 有

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

和

$$\tilde{z} = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

由欧拉公式^②

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

① Argand 图, 即复平面上的直角坐标图, 水平轴为实轴, 代表实部 x , 竖轴为虚轴, 代表虚部 y 。Argand 是人名 (Jean Robert Argand, 瑞士数学家, 1768—1822)。——译者注

② 如果你对这个恒等式有任何疑问, 对 $\tilde{z} = \cos \theta + i \sin \theta$ (这里 $r=1$) 取微分, 得到 $d\tilde{z} = i\tilde{z}d\theta$, 再积分就得到 $\tilde{z} = \exp(i\theta)$ 。

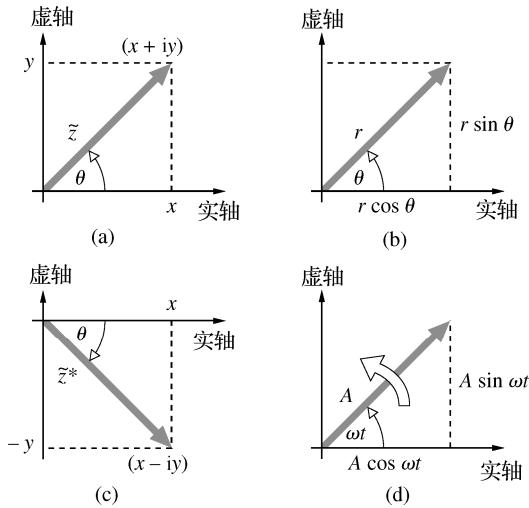


图 2.17 Argand 图通过复数的实部分量和虚部分量来表示复数。这可以要么用 (a) x 和 y , 要么用 (b) r 和 θ 来实现。此外, 若 θ 是时间的一个以常速变化的函数, 那么箭头以角速度 ω 旋转

得出 $e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta$, 这两个式子相加或相减, 得

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

及

此外, 欧拉公式允许我们写出 (图 2.17b)

$$\tilde{z} = r e^{i\theta} = r \cos\theta + i r \sin\theta$$

其中, r 是 $\tilde{z}$ 的长度, 而 θ 是 $\tilde{z}$ 的相角, 单位是弧度。长度常常用 $|\tilde{z}|$ 来表示, 叫做复数的模或绝对值。复数的复共轭用星号表示 (图 2.17c), 它是把出现的 i 都换成 $-i$ 而得到的, 因此

$$\tilde{z}^* = (x + iy)^* = (x - iy)$$

$$\tilde{z}^* = r(\cos\theta - i \sin\theta)$$

及

$$\tilde{z}^* = r e^{-i\theta}$$

加法和减法运算直截了当:

$$\tilde{z}_1 \pm \tilde{z}_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)$$

因此

$$\tilde{z}_1 \pm \tilde{z}_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

注意这个运算过程很像矢量的分量加法。

乘法和除法用极坐标形式表示最简单:

$$\tilde{z}_1 \tilde{z}_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

及

$$\frac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

对以后计算有用的几件事值得在这里讲一下。从普通三角函数的加法公式 (习题 2.44) 可得

$$e^{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2} = e^{\tilde{z}_1} e^{\tilde{z}_2}$$

于是, 若 $\tilde{z}_1 = x$, $\tilde{z}_2 = iy$, 就有

$$e^{\tilde{z}} = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

复数的模由下面的式子给出:

$$r = |\tilde{z}| \equiv (\tilde{z} \tilde{z}^*)^{1/2}$$

及

$$|e^{\tilde{z}}| = e^x$$

由于 $\cos 2\pi = 1$ 和 $\sin 2\pi = 0$,

$$e^{i2\pi} = 1$$

类似地

$$e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1 \quad \text{和} \quad e^{\pm i\pi/2} = \pm i$$

函数 $e^{\tilde{z}}$ 是周期性的; 即 $\tilde{z}$ 每隔 $i2\pi$ 函数就重复原来的值:

$$e^{\tilde{z} + i2\pi} = e^{\tilde{z}} e^{i2\pi} = e^{\tilde{z}}$$

任何一个复数可以表示为实部 $\text{Re}(\tilde{z})$ 和虚部 $\text{Im}(\tilde{z})$ 之和

$$\tilde{z} = \text{Re}(\tilde{z}) + i \text{Im}(\tilde{z})$$

$$\text{于是} \quad \text{Re}(\tilde{z}) = \frac{1}{2}(\tilde{z} + \tilde{z}^*) \quad \text{和} \quad \text{Im}(\tilde{z}) = \frac{1}{2i}(\tilde{z} - \tilde{z}^*)$$

这两个式子直接来自 Argand 图 (图 2.17a 和 c)。例如, $\tilde{z} + \tilde{z}^* = 2x$, 因为虚部消掉了, 因此 $\text{Re}(\tilde{z}) = x$ 。

从极坐标形式

$$\text{Re}(\tilde{z}) = r \cos \theta \quad \text{和} \quad \text{Im}(\tilde{z}) = r \sin \theta$$

显然实部或虚部都可以用来描述一个谐波。但是, 习惯上选用实部。这时, 将一个谐波写为

$$\psi(x, t) = \text{Re} [A e^{i(\omega t - kx + \varepsilon)}] \quad (2.36)$$

当然, 它等价于

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varepsilon)$$

今后, 只要会带来方便, 我们就把波函数写成

$$\psi(x, t) = A e^{i(\omega t - kx + \varepsilon)} = A e^{i\varphi} \quad (2.37)$$

并把这种复数形式用在需要的计算中。这是为了利用复指数运算的简单易行。只是在得出最后的结果之后, 并且只当我们要表示实际的波的时候, 我们才取实部。因此, 将 $\psi(x, t)$ 写成 (2.37) 式的形式是很普通的做法, 这时我们的理解是, 真实的波是实部。

虽然复数表示在现代物理学中已很常见, 但在应用它时必须小心: 在将一个波表示为一个复数函数, 然后用这个函数或对这个函数进行运算之后, 只有在这些运算限于加法、减法、乘或除以一个实数, 以及对一个实变量进行微分和/或积分时, 才能恢复实部。乘法运算 (包括矢量点乘和叉乘) 必须仅仅与实数量进行。乘复数量后取实部会得出错误结果 (见习题 2.47)。

2.6 相矢量和波的相加

让 Argand 图中的箭头 (图 2.17d) 以角频率 ω 旋转, 于是相角等于 ωt 。这就建议了一种机制以表示波 (最后还能使波相加), 我们先在这里对它作定性介绍, 后面还要定量讨论 (第 338 页)。图 2.18 画了一个谐波, 振幅为 A , 向左行进。图中的箭头的长度就是 A , 并以常速旋转, 使得它与参考轴 x 所成的角度为 ωt 。这个旋转的箭头及它产生的相角一起就构成一个 **相矢量**, 它告诉了我们关于这个谐波我们想知道的一切。通常通过相矢量的振幅 A 和它的相角 φ 将这个相矢量表示为 $A \angle \varphi$ 。

要想知道相矢量如何工作, 让我们首先分开考虑图 2.18 的每一部分。图 2.18a 中的相矢量的相角为零; 这就是说, 它在参考轴方向; 它对应的正弦函数也可以用来作参考。图 2.18b 中的相矢量有一个相角 $\pi/3$, 正弦曲线向左移动 $\pi/3$ 弧度。在图 2.18 的 c、d、e 三部分, 相角分别是 $\pi/2$ 、 $2\pi/3$ 和 π 弧度。整个曲线序列可以看作是一个向左行进的波 $\psi = A \sin(kx + \omega t)$ 。它等价地由一个逆时针旋转的相矢量表示, 其相位角在任何时刻都是 ωt 。图 2.7 中发生的事情很相似, 只不过波向右方行进, 相矢量顺时针旋转。

两个波函数组合, 我们通常感兴趣的是得到的组合波函数的振幅和相位。带着这个问题, 我们重新考察图 2.16 中两个波相加的方式。显然, 对于同相的两个扰动 (图 2.16a), 合成波的振幅 A 是组成它的两个成分波的振幅之和: $A = A_1 + A_2 = 1.0 + 0.9 = 1.9$ 。如果我们将指向同一方向的两个共线的矢量相加, 得到的也将是这个结果。类似地 (图 2.16d), 当两个分量

波 180° 异相时, $A = A_1 - A_2 = 1.0 - 0.9 = 0.1$, 就像两个指向相反的共线矢量相加时一样。虽然相矢量并不是矢量, 它们相加的方式相似。以后我们将会证明, 两个任意的相矢量, $A_1 \angle \varphi_1$ 和 $A_2 \angle \varphi_2$, 组合时将像矢量那样首尾相接 (图 2.19), 产生一个合成的 $A \angle \phi$ 。因为两个相矢量以同样的快慢 ω 一道旋转, 我们可以简单地将它们冻结在 $t = 0$ 时刻, 不用担心它们对时间的依赖关系, 这使得它们画起来容易得多。

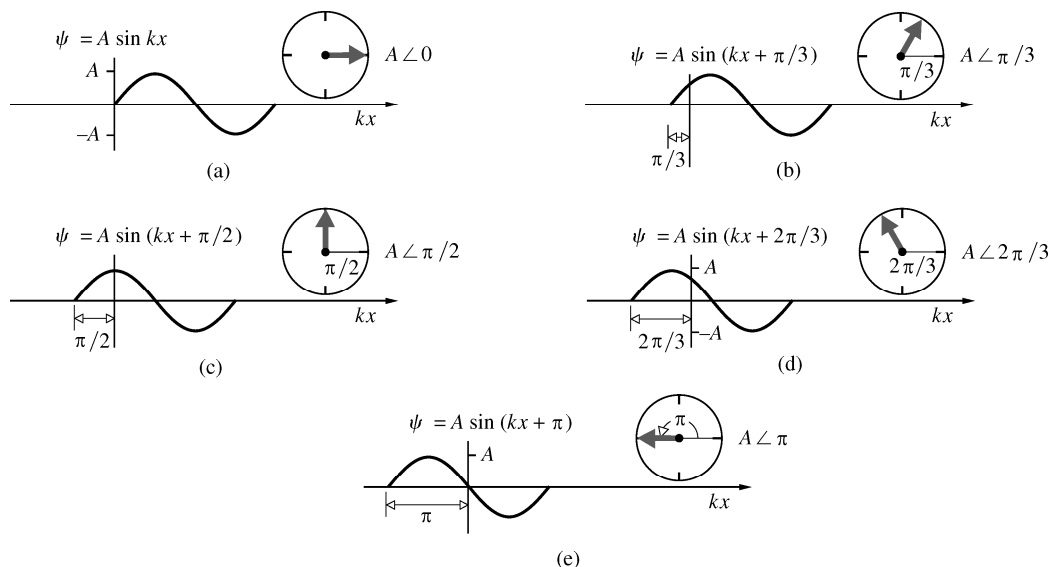


图 2.18 函数 $\psi = A \sin(kx + \omega t)$ 和对应的相矢量图。在 (a)、(b)、(d)、(d) 和 (e) 中, ωt 之值分别为 0 、 $\pi/3$ 、 $\pi/2$ 、 $2\pi/3$ 和 π 。转动的箭头在竖直线上的投影仍等于 ψ 在 $kx = 0$ 轴上的值

图 2.20 中的 4 张相矢量图对应于图 2.16 中按顺序布列的两个波组合的 4 种情况。当两个波同相时 (图 2.16a 中的情况), 我们取波 1 和波 2 两个的相位为零 (图 2.20a), 并且将对应的相矢量首尾相接放置在零值的参考轴上。当两个波的相位相差 $\pi/3$ 时 (图 2.16b 中的情况), 两个相矢量也有一个相对的相位差 $\pi/3$ (图 2.20b)。从图 2.16b 和图 2.20b 都可以看到, 这时的合成波的振幅比前面情况的合成波适当减小, 而相位在 0 与 $\pi/3$ 之间。当两个波的相位差 $2\pi/3$ 时 (图 2.16c 中的情况), 对应的相矢量在图 2.20c 中差不多构成一个等边三角形 (除了 $A_1 > A_2$ 这一点), 因此现在 A 的位置是在 A_1 和 A_2 之间。最后, 当两个波 (和两个相矢量) 的相角是 π 弧度 (180°) 时, 它们几乎抵消, 合振幅为极小值。注意 (在图 2.20d 中) 合相矢量的指向沿着参考轴, 因此与 $A_1 \angle \phi_1$ 有同样的相位 (0)。于是它和 $A_2 \angle \phi_2$ 的相位差 180° 异相; 图 2.16d 中对应的波也是这样。

这只是对相矢量和相矢量相加的最简略的介绍。我们将在 7.1 节回到这个方法, 那里它将得到广泛的应用。

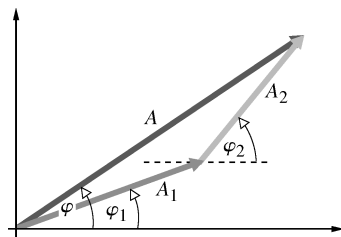


图 2.19 两个相矢量 $A_1 \angle \varphi_1$ 和 $A_2 \angle \varphi_2$ 之和等于 $A \angle \phi$ 。回顾图 2.13, 那里画了两个正弦波的重叠, 其振幅分别为 $A_1 = 1.0$ 和 $A_2 = 0.9$, 相位为 $\varphi_1 = 0$ 和 $\varphi_2 = 1.0$ 弧度

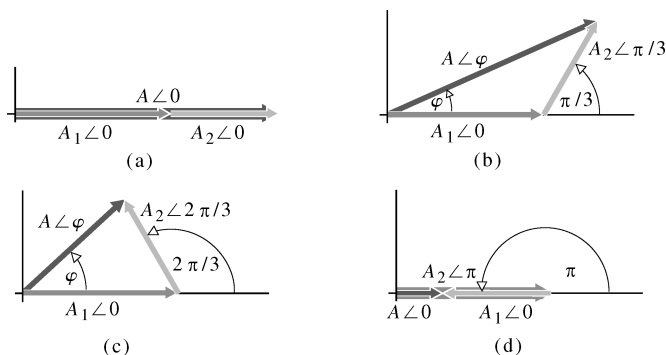


图 2.20 代表两个波的两个相矢量的相加。一个的振幅是 $A_1 = 1.0$ ，另一个是 $A_2 = 0.9$ 。如图 2.16 中所示的那样，有 4 个不同的相对相位

2.7 平面波

一个光波可以在给定时刻在空间的一点用它的频率、振幅、传播方向等描述，但是这并没有告诉我们关于存在于一个广延的空间区域上的光扰动的许多信息。为了得到这方面的信息，我们引入**波阵面**的空间概念。光是振动着的，它对应于某种谐振荡，在开始想象这种现象时，一维的正弦波是一块重要的基石。图 2.14 中画的是，怎样将一个在二维中摊开的辐射传播的正弦波，看成是生成一个统一的、正在扩展的扰动，一个圆波。每个向外行进的一维子波上的每个波峰，都位于一个个圆周上，波谷也一样——的确，对波的任何特定物理量都是这样。对任何一个特定的相位（比方说 $5\pi/2$ ），各个分量正弦波的这个量有一个特定的大小（例如 1.0），那么这个量的大小为 1.0 的所有点位于一个圆上。换句话说，每个一维子波上相位相同的所有的点的轨迹形成一系列同心圆，每个圆对应一个特定的相位（对于波峰，这个相位是 $\pi/2$ 、 $5\pi/2$ 、 $9\pi/2$ 等）。

普遍地说，在任何时刻，三维空间中的波阵面是一个恒定相位的曲面。在实际情况下，波阵面通常具有极其复杂的形状。从一棵树上或一张人脸反射的光波，是一个延展的、不规则的、弯曲的表面，处处是凸起和下陷，向外和向远处运动，变化无常。本章下面将研究几个非常有用的理想化的波阵面的数学表示式，这些波阵面不复杂，其表示式容易写出。

平面波或许是三维波的最简单的例子。它存在于给定时刻，当扰动的一切等相面构成一组平面，每个平面一般都垂直于传播方向时。研究这种扰动有一些非常实际的理由，其中之一是，用光学器件容易产生类似于平面波的光波。

垂直于给定矢量 $\vec{k}$ 并通过某点 (x_0, y_0, z_0) 的平面的数学表示式很容易推出（图 2.21）。首先我们写出直角坐标系中的位置矢量，用三个坐标轴上的单位基元矢量分量表示（图 2.21a）

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

它开始于某个任意的原点 O ，终止于点 (x, y, z) ，这一点暂且可以是空间任何地方。类似地，

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) = (x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k}$$

通过让

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{k} = 0 \quad (2.38)$$

我们强令矢量 $(\vec{r} - \vec{r}_0)$ 扫过一个垂直于 $\vec{k}$ 的平面，这时它的端点 (x, y, z) 取一切许可的值。把 $\vec{k}$ 写成

$$\vec{k} = k_x\hat{i} + k_y\hat{j} + k_z\hat{k} \quad (2.39)$$

① 本书中矢量采用原书中的矢量表示方式。——编者注