

模块 1

函数与极限

纵观 300 年来函数概念的发展,数学家们不断赋予函数概念以新的思想,从而推动了整个数学的发展,微积分就是从研究函数开始的.极限是高等数学中重要的概念之一,是研究微积分学的重要工具,它是研究当自变量无限接近于某个常数或某个目标时,函数无限趋近的问题.微积分学中的许多概念,如连续、导数、定积分等都是通过极限来定义的.本模块将在已有函数知识的基础上,通过销售奖励、银行存款连续复利、机场收费三个学习任务进一步理解函数、复合函数及初等函数的概念与性质,并研究函数的极限、极限的性质与运算,以及用极限方法刻画函数的连续性.

1.1 函数

学习任务 1.1 销售奖励



扫一扫看
函数教学
课件



扫一扫下
载学习任
务书 1.1

某公司为了实现 1 000 万元利润的目标,准备制订一个激励销售部门的奖励方案:在销售利润达到 10 万元时,按销售利润进行奖励,且奖金 y (单位:万元)随销售利润 x (单位:万元)的增加而增加,但奖金总数不超过 5 万元.现有三个奖励模型: $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 1.002^x$, $y = \log_5 x$, 其中哪个模型能符合公司的要求?

这三个奖励模型是什么函数?它们的图像和性质是什么?不难发现,它们分别是幂函数、指数函数和对数函数.我们虽然之前学习过此三类函数,但为了后续数学知识的学习,有必要先来复习一下函数的相关知识及常用的基本初等函数,进而学习复合函数、初等函数的概念.

1.1.1 函数

1. 函数的概念

一个变量的值常常取决于另一个变量的值.例如,你的存款额在一年中的增长取决于银行的利率,即利息的多少 I 取决于利率 r .我们称 I 为因变量,因为它是由它所依赖的变量 r 的值所决定的.变量 r 为自变量.



【定义 1】 设 x 和 y 是某个变化过程中的两个变量, D 是一个给定的非空数集. 如果对于 D 中的每一个变量 x , 变量 y 按照某种对应法则总有唯一确定的数值和它对应, 则称 y 是定义在数集 D 上的 x 的**函数**, 记为 $y = f(x)$. x 称为**自变量**, y 称为**因变量**. 这种记号使我们能通过改变所用的字母给不同的函数以不同的名称. 例如, 利息是利率的函数, 可以记为 $I = f(r)$.

数集 D 称为**函数的定义域**, 当 x 取遍 D 中的一切值时, 与它对应的函数值的集合称为**函数的值域**. 当 $x = x_0 \in D$ 时, 对应的函数值记为 $f(x_0)$.

由定义可知: ①确定函数有两个要素: 定义域和对应法则; ②函数 $y = f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母, 如函数 $y = \varphi(x)$ 、 $y = \psi(x)$ 、 $y = F(x)$ 等.

注意: 判定两个函数是否相同时, 要看定义域和对应法则是否完全一致. 只有当它们完全一致时, 这两个函数才算相同.

一般地, 函数定义域的确定有两种不同的类型:

(1) 要考虑所讨论问题的实际意义, 则函数的定义域应由具体情况来确定. 例如, 自由落体公式 $H = \frac{1}{2}gt^2$ 中的 t 就应该满足 $[0, T]$, T 为物体从开始到落地所经历的时间.

(2) 不考虑所讨论问题的实际意义, 则求函数的定义域就是要让函数表达式 $y = f(x)$ 有意义, 常有以下几种情况:

- ① 若 $f(x)$ 是整式, 则函数的定义域是实数集 $\mathbf{R}$;
- ② 若 $f(x)$ 含有分式, 则函数的定义域是使得分母不等于零的实数的集合;
- ③ 若 $f(x)$ 含有偶次根式, 则函数的定义域是使得根号内的式子不小于 0 的实数的集合;
- ④ 若 $f(x)$ 含有对数式, 则函数的定义域是真数大于 0 的实数的集合;
- ⑤ 若 $f(x)$ 是由几个数学式子构成的, 则函数的定义域是使得各个式子都有意义的实数的集合.

例 1.1 判断下列函数是否相同, 为什么?

- (1) $f(x) = \frac{x^2}{x}$, $g(x) = x$; (2) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$;
- (3) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$.

解 (1) 不相同, 因为定义域不同.

(2) 不相同, 因为对应法则不同.

(3) 相同, 因为定义域、对应法则相同.

例 1.2 求下列函数的定义域.

- (1) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+5x+6}$; (2) $f(x) = \lg(2-x) + \sqrt{16-x^2}$; (3) $f(x) = -\frac{1}{1+3x^2}$.

解 (1) 要使 $\frac{x+1}{x^2+5x+6}$ 有意义, 必须使分母 $x^2+5x+6 \neq 0$, 解得 $x \neq -2$ 且 $x \neq -3$, 所以函数的定义域是 $(-\infty, -3) \cup (-3, -2) \cup (-2, +\infty)$.

(2) 要使 $\lg(2-x) + \sqrt{16-x^2}$ 有意义, 必须使 $2-x > 0$ 和 $16-x^2 \geq 0$ 同时成立, 即 $\begin{cases} 2-x > 0 \\ 16-x^2 \geq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x < 2 \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases}$, 所以函数的定义域是 $[-4, 2)$.



(3) 要使 $-\frac{1}{1+3x^2}$ 有意义, 必须使 $1+3x^2 \neq 0$ 成立, 解得 $x \in \mathbf{R}$, 所以函数的定义域是 $\mathbf{R}$.

2. 函数的表示法

函数的表示方法常用的有解析法、图像法、列表法三种.

1) 解析法

解析法就是把两个变量之间的函数关系用一个等式来表示, 这个等式称为函数的解析表达式, 简称解析式.

例如, 在牛顿力学中, 质量为 m 的物体以速率 v 运动时具有动能, 其动能公式 $E = \frac{1}{2}mv^2$ 就是用解析式表示函数关系. 再如, 我们学过的二次函数、正比例函数、反比例函数都是用解析式表示函数关系.

2) 图像法

图像法就是用函数图像表示两个变量之间的关系.

例如, 图 1.1 的心电图显示了两位患者的心律模式, 一位正常, 一位不正常. 尽管人们也能构造一个心电图函数的近似公式, 但很少这样做. 这种重复出现的图形正是医生需要了解的, 从图像上看这些重复图形远比从公式上看要容易得多, 而且每个心电图都把心电的活动表示成时间的函数.

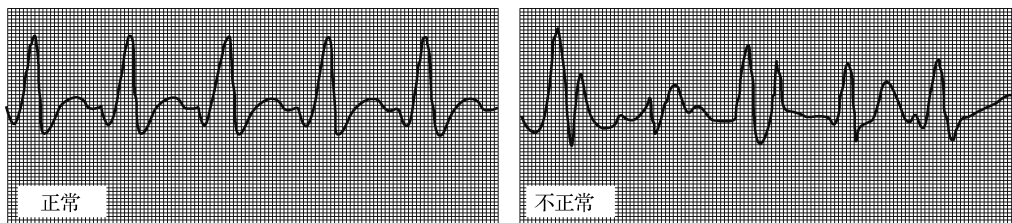


图 1.1

3) 列表法

列表法就是列出表格来表示两个变量之间的函数关系.

表 1.1 给出了北京市区 2017 年 7 月 1 日至 7 月 10 日每天的最高气温.

表 1.1

日期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
气温/ $^{\circ}\text{C}$	34	35	34	36	37	38	33	31	30	34

这里温度是日期的函数, 因为每一天都有一个唯一的最高气温, 虽然不存在任何计算温度的公式, 然而确实满足函数的定义: 对每个日期 t , 都有一个与 t 相对应的最高气温 H .

3. 函数的性质

1) 函数的单调性

【定义 2】 如果对于属于定义域 D 内某个区间 I 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 ,



(1) 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么就说 $y = f(x)$ 在区间 I 上是增函数, 如图 1.2 (a) 所示;

(2) 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么就说 $y = f(x)$ 在区间 I 上是减函数, 如图 1.2 (b) 所示.

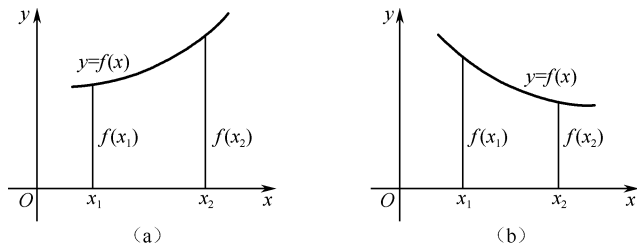


图 1.2

如果函数 $y = f(x)$ 在某个区间是增函数或减函数, 那么就说函数 $y = f(x)$ 在这一区间具有 (严格的) 单调性, 这一区间称为函数 $y = f(x)$ 的单调区间. 在单调区间上增函数的图像是从左到右上升的, 减函数的图像是从左到右下降的.

2) 函数的奇偶性

【定义 3】 如果对于函数 $y = f(x)$ 的定义域内任意一个 x :

- (1) 都有 $f(-x) = -f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就称为**奇函数**, 如图 1.3 (a) 所示;
- (2) 都有 $f(-x) = f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就称为**偶函数**, 如图 1.3 (b) 所示;
- (3) 既有 $f(-x) \neq f(x)$, 又有 $f(-x) \neq -f(x)$ 成立, 那么函数 $f(x)$ 称为**非奇非偶函数**.

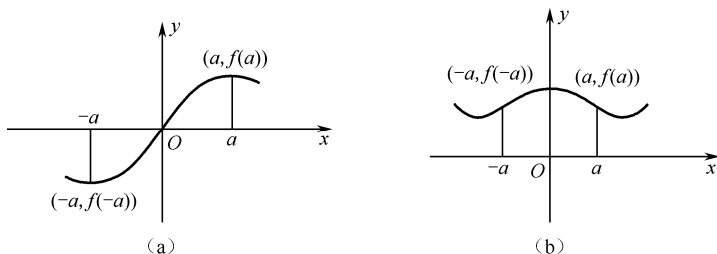


图 1.3

如图 1.3 (a) 所示, 奇函数的图像关于原点对称, 反过来, 如果一个函数的图像关于原点对称, 那么这个函数是奇函数; 如图 1.3 (b) 所示, 偶函数的图像关于 y 轴对称, 反过来, 如果一个函数的图像关于 y 轴对称, 那么这个函数是偶函数.

3) 函数的周期性

【定义 4】 如果存在一个非零常数 T , 使得当 x 取定义域内的每一个值时, 都有 $f(x+T) = f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就称为周期函数. 非零常数 T 称为这个函数的周期. 所有周期中最小的正数称为最小正周期, 通常我们说周期函数的周期是指它的最小正周期.

常见的周期函数:

- (1) $y = \sin x$, $y = \cos x$ 是以 $T = 2\pi$ 为周期的周期函数;
- (2) $y = \tan x$ 是以 $T = \pi$ 为周期的周期函数.



4) 函数的有界性

【定义 5】 若存在正数 M , 使得在区间 I 上恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有界, 否则称 $f(x)$ 在 I 上无界, 如图 1.4 所示.

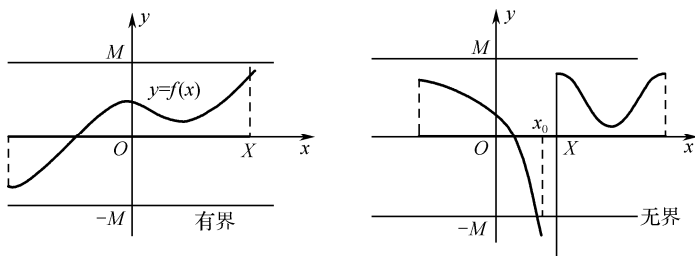


图 1.4

常见的有界函数:

- ① $y = \sin x$, 因为 $|\sin x| \leq 1, x \in \mathbf{R}$;
- ② $y = \cos x$, 因为 $|\cos x| \leq 1, x \in \mathbf{R}$.

4. 反函数

【定义 6】 对于函数 $y = f(x)$, 设定义域为 D , 值域为 A . 如果对于 A 中的任意一个值 y , 在 D 中总有唯一确定的 x 值与它对应, 则称这样得到的 x 关于 y 的函数为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$, $y \in A$. 习惯上我们记作 $y = f^{-1}(x)$, $x \in A$.

反函数的性质:

- (1) 互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y = x$ 对称;
- (2) 一个函数与它的反函数在相应区间上单调性一致.

例 1.3 求下列函数的反函数.

$$(1) y = \frac{3x-5}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}; \quad (2) y = x^2 - 2x + 3, x \leq 0.$$

解 (1) 由 $y = \frac{3x-5}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$ 得 $(2y-3)x = -y-5$, 则 $x = -\frac{y+5}{2y-3}, y \neq \frac{3}{2}$. 所以 $y = \frac{3x-5}{2x+1}$ 的反函数为 $y = -\frac{x+5}{2x-3}, x \neq \frac{3}{2}$.

(2) 因为 $y = (x-1)^2 + 2, x \leq 0, y \geq 3$, 所以 $x-1 = -\sqrt{y-2}$, 即 $x = -\sqrt{y-2} + 1$. 所以 $y = x^2 - 2x + 3$ 的反函数为 $y = -\sqrt{x-2} + 1, x \geq 3$.

5. 分段函数

【定义 7】 两个变量之间的函数关系要用两个或多于两个的数学式子来表示, 即在函数定义域的不同部分用不同的数学式子来表达函数关系, 这样的函数称为分段函数.

例 1.4 函数 $y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ 和 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ 都是定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$

的分段函数, 其图形分别如图 1.5 和图 1.6 所示.

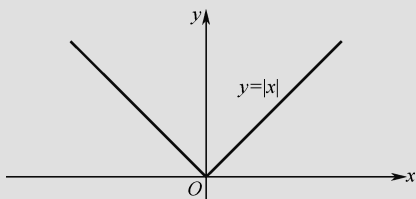


图 1.5

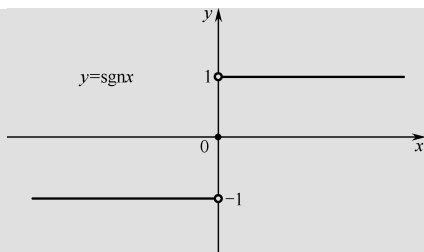


图 1.6

注意：分段函数是用几个式子共同表示一个函数，而不是表示几个函数. 分段函数的定义域是各段自变量取值的集合的并集.

例 1.5 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq -\frac{1}{2} \\ x^2 & -\frac{1}{2} < x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$, 求 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 、 $f(\sqrt{2})$ 、 $f(\pi)$ 及函数的定义域,

并画函数的草图.

解 (1) 因为 $-\frac{1}{2} \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, 所以相应的函数表达式为

$$f(x) = x + 2, \text{ 所以 } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

同理, 可得 $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$, $f(\pi) = 0$.

(2) 函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

(3) 草图如图 1.7 所示.

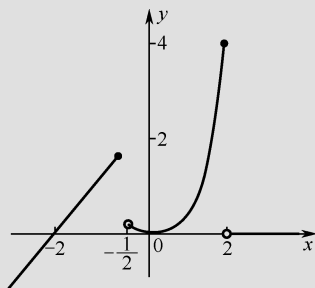


图 1.7

例 1.6 某公共汽车路线全长为 20 km, 票价规定如下: 乘坐 5 km 以下 (包括 5 km) 者收 1 元; 超过 5 km 但在 15 km 以下 (包括 15 km) 者收费 2 元; 其余收费 2 元 5 角. 试将票价 y 表示为路程 x 的函数, 并作出函数的图形.

解 $y = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 5 \\ 2, & 5 < x \leq 15 \\ 2.5, & 15 < x \leq 20 \end{cases}$, 草图如图 1.8 所示.

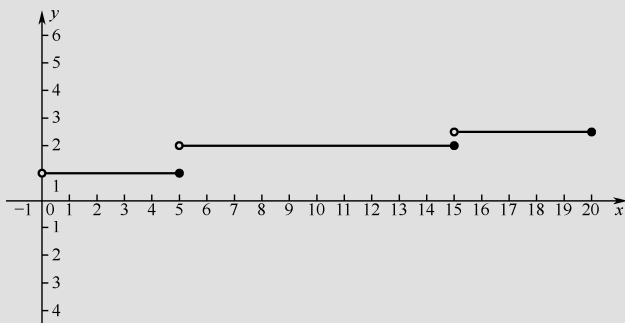


图 1.8



例 1.7 某市农村合作医疗住院报销的办法如表 1.2 所示.

表 1.2

(单位: 元)

住 院 费	报 销 比 例	备 注
0~500	0	含 500
500~10 000	70%	不含 500, 含 10 000
10 000~30 000	80%	不含 10 000, 含 30 000

(1) 一个农民的住院费为 3 000 元, 能够报销多少元?

(2) 一个农民的住院费为 x 元 ($500 < x \leq 10\,000$), 报销的金额为 y 元, 求 y 与 x 的函数关系式.

(3) 如果一个农民的住院费为 x 元 ($10\,000 < x \leq 30\,000$), 报销的金额为 y 元, 求 y 与 x 的函数关系式.

解 (1) $(3\,000 - 500) \times 70\% = 1\,750$ (元).

(2) 和 (1) 相比, 只不过是用字母表示数, 算式仍然一样:

$(x - 500) \times 70\% = y$, 即 $y = (x - 500) \times 70\% = 0.7x - 350$.

(3) 住院费为 x 元, $10\,000 < x \leq 30\,000$, 报销的金额为 y 元, 则

$y = (10\,000 - 500) \times 70\% + (x - 10\,000) \times 80\% = 0.8x - 1\,350$.

综上所述, $y = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 500 \\ 0.7x - 350, & 500 < x \leq 10\,000 \\ 0.8x - 1\,350, & 10\,000 < x \leq 30\,000 \end{cases}$.

1.1.2 基本初等函数

我们将已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

(1) 幂函数: 函数 $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) 称为**幂函数**. 幂函数的定义域要根据 α 的取值来确定, 图像及性质如表 1.3 所示.

(2) 指数函数: 形如 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的函数称为**指数函数**. 指数函数的定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $\mathbf{R}^+$, 图像及性质如表 1.3 所示.

(3) 对数函数: 形如 $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) 的函数称为**对数函数**. 对数函数的定义域为 $\mathbf{R}^+$, 值域为 $\mathbf{R}$, 图像及性质如表 1.3 所示.

(4) 三角函数: 如图 1.9 所示, 若任意角 α 终边上任意一点 $P(x, y)$, 点 P 到原点 O 的距离 $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2} = r > 0$, 则有

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x},$$

$$\csc \alpha = \frac{r}{y}, \quad \sec \alpha = \frac{r}{x}, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y}.$$

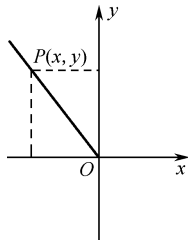


图 1.9



称 $y = \sin x$ 、 $y = \cos x$ 、 $y = \tan x$ 、 $y = \cot x$ 、 $y = \sec x$ 、 $y = \csc x$ 为三角函数，图像及性质如表 1.3 所示。

(5) 反三角函数：

① 反正弦函数：正弦函数 $y = \sin x$ ， $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数是反正弦函数，记作 $y = \arcsin x$ ， $x \in [-1, 1]$ ， $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ，图像及性质如表 1.3 所示。

② 反余弦函数：余弦函数 $y = \cos x$ ， $x \in [0, \pi]$ 的反函数是反余弦函数，记作 $y = \arccos x$ ， $x \in [-1, 1]$ ， $y \in [0, \pi]$ ，图像及性质如表 1.3 所示。

③ 反正切函数：正切函数 $y = \tan x$ ， $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数是反正切函数，记作 $y = \arctan x$ ， $x \in \mathbf{R}$ ， $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，图像及性质如表 1.3 所示。

④ 反余切函数：余切函数 $y = \cot x$ ， $x \in (0, \pi)$ 的反函数是反余切函数，记作 $y = \operatorname{arccot} x$ ， $x \in \mathbf{R}$ ， $y \in (0, \pi)$ ，图像及性质如表 1.3 所示。

表 1.3

	函 数	定义域与值域	图 像	特 性
幂 函 数	$y = x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
	$y = x^2$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		偶函数 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加
	$y = x^3$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
	$y = x^{-1}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$		奇函数 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少



模块1 函数与极限

续表

	函 数	定义域与值域	图 像	特 性
幂函数	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$x \in [0, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		单调增加
	$y = a^x$ ($a > 1$)	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		单调增加
指数函数	$y = a^x$ ($0 < a < 1$)	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		单调减少
对数函数	$y = \log_a x$ ($a > 1$)	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		单调增加
	$y = \log_a x$ ($0 < a < 1$)	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		单调减少
三角函数	$y = \sin x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		奇函数, 周期为 2π , 有界, 在 $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调 增加, 在 $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少
	$y = \cos x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		偶函数, 周期为 2π , 有界, 在 $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$ 内单调减少, 在 $(2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi)$ 内单调 增加



续表

	函 数	定义域与值域	图 像	特 性
三角函数	$y = \tan x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数，周期为 π ，在 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ 内单调增加
	$y = \cot x$	$x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数，周期为 π ，在 $(k\pi, k\pi + \pi)$ 内单调减少
反三角函数	$y = \arcsin x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$		奇函数，单调增加，有界
	$y = \arccos x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in [0, \pi]$		单调减少，有界
	$y = \arctan x$	$x \in [-\infty, +\infty]$ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$		奇函数，单调增加，有界
	$y = \operatorname{arccot} x$	$x \in [-\infty, +\infty]$ $y \in (0, \pi)$		单调减少，有界



1.1.3 复合函数与初等函数

1. 复合函数

【定义 8】 设 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, 当 x 在 $u = \varphi(x)$ 的定义域 D_φ 中变化时, $u = \varphi(x)$ 的值在 $y = f(u)$ 的定义域 D_f 内变化, 因此变量 x 与 y 之间通过变量 u 形成的一种函数关系, 记为 $y = f(u) = f[\varphi(x)]$, 称为**复合函数**, 其中 x 称为自变量, u 称为中间变量, y 称为因变量 (即函数).

例如, 函数 $y = \sin u$, $u = x^2$ 可以复合成函数 $y = \sin x^2$.

有时, 一个复合函数可能由三个或更多的函数复合而成. 例如, 由函数 $y = 2^u$, $u = \sin v$, $v = x^2 + 1$ 可以复合成函数 $y = 2^{\sin(x^2+1)}$, 其中 u 和 v 都是中间变量.

注意: 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 函数 $\varphi(x)$ 的值域取在函数 $y = f(u)$ 的定义域内时, 两个函数才能复合.

例如, 函数 $y = \arcsin u$, $u = x^2 + 2$ 就不可以复合.

例 1.8 指出下列复合函数的结构.

$$(1) y = (2x+1)^9; (2) y = \sqrt{\log_a(\cos x + 4^x)}; (3) y = 10^{\frac{\sin \frac{1}{x}}{x}}.$$

解 (1) $y = u^9$, $u = 2x+1$;

$$(2) y = \sqrt{u}, u = \log_a v, v = \cos x + 4^x;$$

$$(3) y = 10^u, u = \sin v, v = \frac{1}{x}.$$

例 1.9 分解下列复合函数.

$$(1) y = \sqrt{2x+1}; (2) y = \arcsin x^2; (3) y = \ln \sin(x^2+1);$$

$$(4) y = \cos^3(\ln x); (5) y = \ln \sqrt{\sin x}; (6) y = \arctan \ln 2x.$$

解 (1) $y = \sqrt{2x+1}$ 分解为 $y = \sqrt{u}$, $u = 2x+1$;

(2) $y = \arcsin x^2$ 分解为 $y = \arcsin u$, $u = x^2$;

(3) $y = \ln \sin(x^2+1)$ 分解为 $y = \ln u$, $u = \sin v$, $v = x^2+1$;

(4) $y = \cos^3(\ln x)$ 分解为 $y = u^3$, $u = \cos v$, $v = \ln x$;

(5) $y = \ln \sqrt{\sin x}$ 分解为 $y = \ln u$, $u = \sqrt{v}$, $v = \sin x$;

(6) $y = \arctan \ln 2x$ 分解为 $y = \arctan u$, $u = \ln v$, $v = 2x$.

2. 初等函数

【定义 9】 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的, 且能用一个式子表示的函数, 称为**初等函数**.

例如, $y = \sqrt{1+x^2}$, $y = \sin^3 x$, $y = \sqrt{\log_a 3^x}$ 等都是初等函数.

注意: 分段函数一般不是初等函数.

任务解答 1.1

根据任务 1.1 给出的三个奖励模型, 来判断哪个模型能符合公司的要求.



可以利用作图工具或软件画出三个函数的图像,如图 1.10 所示,任务要求在销售利润达到 10 万元以上时进行奖励,且奖金 y 随着销售利润 x 的增加而增加.这三个函数都是增函数,符合要求,但任务还要求奖金总数不超过 5 万元.观察图像,在区间 $[10, 1\,000]$ 上,模型 $y = \sqrt[3]{x}$ 、 $y = 1.002^x$ 的图像都有一部分在直线 $y = 5$ 的上方,只有模型 $y = \log_5 x$ 的图像始终在 $y = 5$ 的下方,这说明只有按模型 $y = \log_5 x$ 进行奖励时才符合公司的要求.

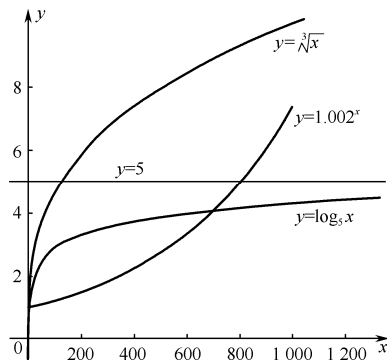


图 1.10

思考问题 若奖励函数是 $y = \log_5(x + 200)$ 这个复合函数,是不是更符合公司的要求? 还有更好的函数选择吗?

基础训练 1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \sqrt{x+2} + \lg(x^2 - 1)$;

(2) $y = \frac{x-2}{x^2-4}$;

(3) $y = \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2}}{x-1}$;

(4) $f(x) = \frac{x}{x \ln(x+2)}$.

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} x & -\infty < x \leq 1 \\ x^2 & 1 < x \leq 4 \\ 2^x & 4 < x < +\infty \end{cases}$, 求定义域 $f(1)$ 、 $f(4)$ 、 $f(-2)$ 、 $f(0)$ 并画出函数的草图.

3. 分解下列复合函数.

(1) $y = \sin(2x+1)$;

(2) $y = \arccos(5x+3)$;

(3) $y = e^{\ln 3x}$;

(4) $y = \ln^2(3x+1)$;

(5) $y = \cos \sqrt{3x-1}$;

(6) $y = \ln \arctan(3x+1)$.

1.2 极限

学习任务 1.2 银行存款连续复利

若银行一年活期年利率为 r , 那么储户存 10 万元的人民币, 一年到期后结算额为 $10 \times (1+r)$ 万元. 如果银行许可储户在一年内可任意次结算, 在不计利息税的情况下, 若储户等间隔地结算 n 次, 每次结算后将本息全部存入银行, 那么, 一年后该储户的本息和是多少? 随着结算次数的无限增加, 一年后该储户是否会成为百万富翁?

若每三个月结算一次, 由于复利, 储户存的 10 万元一年后可得 $10 \times \left(1 + \frac{r}{4}\right)^4$ 万元, 显然这比一年结算一次要多, 因为多次结算增加了复利. 结算越频繁, 获利越大. 如果一个储户



扫一扫看
极限教学
课件



扫一扫下
载学习任
务书 1.2



连续不断地存款、取款, 结算本息的频率趋于无穷大, 每次结算后将本息全部存入银行, 这意味着银行要不断地向储户支付利息, 称为连续复利问题. 连续复利会造成总结算额无限增大吗? 这是关于极限的问题.

学习极限须从数列的极限入手, 进而学习函数的极限, 以及学习极限运算法则、两个重要极限和无穷小的比较.

1.2.1 数列的极限

数列就是由数组成的序列, 一般写成 $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$, 记作 $\{x_n\}$.

极限是微积分的重要工具, 极限思想实际上是无限逼近的思想方法. 我们用下面的例子描述极限.

已知数列

$$\frac{5}{2}, \frac{9}{4}, \frac{13}{6}, \frac{17}{8}, \dots, \frac{4n+1}{2n}, \dots$$

这里每个数都比 2 大一点, 比 2 多的部分是 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots$, 其中 n 越大, 所多的部分就越小. 如果 n 无止境地加大下去, $\frac{1}{2n}$ 就不停地变小 (单调下降), $\frac{1}{2n}$ 将越来越趋近 0, $2 + \frac{1}{2n}$ 将越来越趋近于 2. 即当 n 无限增大时, $2 + \frac{1}{2n}$ 无限趋近于一个确定的常数 2.

【定义 1】 设有数列 $\{x_n\}$, 当 n 无限增大时, x_n 无限趋近于一个确定的常数 A , 则称常数 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 或 $x_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$.

注意: ① $n \rightarrow \infty$ 表示 n 无限增大. ② A 是唯一确定的常数. ③ $x_n \rightarrow A$ 表示无限接近于 A . ④ 若数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 则称这个数列收敛; 若数列 $\{x_n\}$ 极限不存在, 则称这个数列发散.

观察数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 的极限. 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 可写为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$. 观察发现: n 越来越大时, $x_n = \frac{1}{n}$ 的数值越来越小, 无限接近于 0, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

例 1.10 求下列数列的极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right); \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n; \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2; \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}.$$

解 观察得到 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ 不存在; (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$ 不是一个确定的数, n 无限增大时, n^2 的极限不存在. (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

1.2.2 函数的极限

数列是一种比较特殊的函数. 因此, 数列的极限只是这种特殊函数的极限, 它研究的是自变量 n 取正整数且无限增大时, 函数 $a_n = f(n)$ 的变化趋势.

事实上, 对于一般函数 $f(x)$ 来说, 自变量 x 的变化趋势分为以下两种情况: ① 自变量 x



的绝对值无限增大 (记为 $x \rightarrow \infty$); ②自变量 x 无限趋近于一个确定的常数 x_0 , 但可以不等于 x_0 (记为 $x \rightarrow x_0$). 我们将从这两种情况分析函数 $y = f(x)$ 的极限.

1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

如图 1.11 所示, $|x|$ 无限增大时, 观察 $\frac{1}{x}$ 的变化趋势, 发现有 $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, 记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

注意: $x \rightarrow -\infty$ 时 $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ 与 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ 同时成立.

【定义 2】 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 充分大时有定义. 如果当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A , 那么 A 就称为函数 $f(x)$ 的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$.

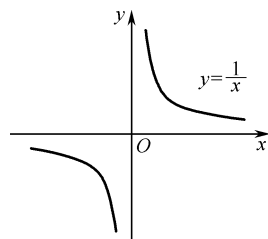


图 1.11

在定义中: ①当自变量 $x \rightarrow +\infty$ 时, 若函数 $y = \frac{1}{x}$ 无限趋近于一个确定的常数 A , 则记作 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty)$. ②当自变量 $x \rightarrow -\infty$ 时, 若函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A , 则记作 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow -\infty)$.

结论: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

例如, 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在.

例 1.11 观察下列函数的极限.

- | | | |
|---|---|---|
| (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$; | (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 10^x$; | (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$; |
| (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} 4$; | (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 2}$; | (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$. |

解 (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$. (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 10^x = 0$.

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$. (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} 4 = 4$.

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = \infty$. (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

2. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

例如, 观察 $x \rightarrow 4$ 时, $f(x) = \sqrt{x}$ 无限趋近于 2, 记作 $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$.

注意: $x \rightarrow 4$ 是 x 从左、右两侧无限接近于 4 时, $\sqrt{x}$ 越来越接近 2.

【定义 3】 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右近旁有定义 (点 x_0 可以除外). 如果当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于某一个确定的常数 A , 那么 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$.



注意: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 可能不存在, 如 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$.

例 1.12 求下列函数的极限.

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}\right)^x; & \quad (2) \lim_{x \rightarrow -1} 10^x; & \quad (3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2}; \\ (4) \lim_{x \rightarrow 1} \lg x; & \quad (5) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x + 2}; & \quad (6) \lim_{x \rightarrow 1} \ln x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}\right)^x &= \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1. & (2) \lim_{x \rightarrow -1} 10^x &= 10^{-1}. \\ (3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}. & (4) \lim_{x \rightarrow 1} \lg x &= 0. \\ (5) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x + 2} &= \frac{(-1)^2 + 1}{-1 + 2} = 2. & (6) \lim_{x \rightarrow 1} \ln x &= \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

3. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的左、右极限

讨论 $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$ 时, 是表示 x 从左、右两侧靠近 4 时, $f(x) = \sqrt{x}$ 无限趋近于确定的值 2. 如果 x 从两侧无限趋近 4 时, $f(x)$ 都趋近于同一个值, 则称该值为 x 无限趋近 4 时 $f(x)$ 的极限. 这时“左”极限和“右”极限是相等的. 如果它们不相等, 则称极限不存在.

【定义 4】如果当 x 从点 x_0 左侧 (即 $x < x_0$) 无限趋近于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 A , 则称 A 是函数 $f(x)$ 的左极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

【定义 5】如果当 x 从点 x_0 右侧 (即 $x > x_0$) 无限趋近于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 A , 则称 A 是函数 $f(x)$ 的右极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

注意: $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限为 A 的充要条件为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A.$$

$$\text{例 1.13 函数 } f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

解: 先求 $x \rightarrow 0$ 时的左极限, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$.

再求 $x \rightarrow 0$ 时的右极限, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

注意: 求分段函数分点处的极限, 需要分别求左极限和右极限.

函数极限不存在的两种情况:

- (1) 左极限与右极限至少有一个不存在;
- (2) 左极限和右极限均存在, 但不相等.

$$\text{例 1.14 函数 } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq -1 \\ x + 4, & x > -1 \end{cases}, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$



解 先求 $x \rightarrow -1$ 时的左极限, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 2) = 3$.

再求 $x \rightarrow -1$ 时的右极限, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 4) = 3$.

因为 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$.

1.2.3 极限的运算

利用极限的运算法则和两个重要极限可以方便地计算极限, 但在应用上一定要注意方法的使用, 有些问题需要应用一些技巧来解决.

1. 极限的运算法则

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x) \pm g(x)$ 、 $f(x)g(x)$ 、 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限存在,

则:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0);$$

$$(4) \text{当 } C \text{ 是常数, } n \text{ 是正整数时, 有 } \lim_{x \rightarrow x_0} [C f(x)] = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^n.$$

这些法则对于 $x \rightarrow \infty$ 的情况仍然适用, 其他情况也适用.

例 1.15 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (4x^2 - 6x - 3); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 6x + 5};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 4}{3x^3 - x^2 + 1};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} (4x^2 - 6x - 3) = \lim_{x \rightarrow 1} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 6x - \lim_{x \rightarrow 1} 3$
 $= 4 \times 1^2 - 6 \times 1 - 3 = -5$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 6x + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 6x + 5)} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 1+1=2$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 4}{3x^3 - x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 + x - 4}{x^3}}{\frac{3x^3 - x^2 + 1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}}{3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{3} = 0.$$



$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{x^2}}{\frac{2x^2 - x - 1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

$$(6) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \infty.$$

$$\text{结论: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_n}, & m = n \\ 0, & m < n \\ \infty, & m > n \end{cases}.$$

例 1.16 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 4x + 3};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}.$$

$$\text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+5)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+5}{x-1} = 4.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x} = \frac{1}{2}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6}.$$

例 1.17 已知 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + mx + 2}{x + 2} = n$, 求 m, n .

解 由 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + mx + 2}{x + 2} = n$ 可知 $x^2 + mx + 2$ 含有因式 $(x + 2)$, 所以 $x = -2$ 是方程 $x^2 + mx + 2 = 0$ 的根, 所以 $m = 3$, 代入求得 $n = -1$.

例 1.18 设 $f(x) = \begin{cases} 5x + 2k, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$, 则常数 k 为何值时, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在?

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (5x + 2k) = 2k$, 要使 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 只需 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 所以 $2k = 1$, 故 $k = \frac{1}{2}$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

2. 两个重要极限

在微积分的众多常用极限中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 这两个极限称为重要极限, 因

为在由导数概念建立初等函数的求导公式这一过程中和求函数极限的运算过程中, 这两个极限起着必不可少的纽带作用.



1) 重要极限一

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

注意: (1) 是 $\frac{0}{0}$ 型的未定式;

(2) 应用 $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$ 解题时变量 “ $\square$ ” 必须统一.

例 1.19 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan 2x}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5(\sin 5x)}{3(\sin 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin 2x)}{3(\tan 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2 \tan 2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\tan 2x} = \frac{1}{2}.$$

注意: (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin ax}{ax} = 0$, a 为常数; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$; (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

2) 重要极限二

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

注意: (1) 是 1^∞ 型的未定式;

(2) 应用 $\lim_{\square \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\square}\right)^\square = e$ 解题时变量 “ $\square$ ” 必须统一;

(3) 括号内除去 “1+” 之外部分与指数互为倒数.



在上式中, 若设 $z = \frac{1}{x}$, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时, $z \rightarrow 0$, 于是上式又可写为 $\lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e$.

注意: 第二个重要极限有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 或 $\lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e$ 两种形式.

例 1.20 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x^2)^{\frac{1}{x^2}}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{3x-1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{x}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-x};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x; \quad (8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{2x-5}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = e^2.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x^2)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1-x^2)^{-\frac{1}{x^2}}\right]^{-1} = e^{-1}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{3x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{3x}}{\left(1 - \frac{1}{3x}\right)^{3x}} \cdot \left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{-1}\right] = \frac{e^2}{e^{-1}} = e^3.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+6x) = \lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1+6x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1+6x)]^{\frac{1}{6x} \cdot 6} = \ln e^6 = 6.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2 = e^2.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2}{x}\right)^{\frac{x}{-2}}\right]^2 = e^2.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x} + 1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{2x-5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{2x} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{-5}\right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left[\left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{4}{3}} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{-5}\right] = e^{\frac{4}{3}} \cdot 1 = e^{\frac{4}{3}}.$$



1.2.4 无穷小的比较

1. 无穷小

1) 无穷小的定义

【定义 6】 若 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, $f(x)$ 以零为极限, 则称 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小量, 简称无穷小, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$) .

例如, 函数 $f(x) = x - 2$ 是 $x \rightarrow 2$ 时的无穷小, 而函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

注意:

- (1) 无穷小是变量, 不能与很小的数混淆;
- (2) 在常量中只有零是无穷小.

2) 无穷小的性质

【性质 1】 有限个无穷小的代数和是无穷小.

【性质 2】 有限个无穷小的乘积是无穷小.

【性质 3】 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论: 常数与无穷小的乘积是无穷小.

2. 无穷大

【定义 7】 若 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, $|f(x)|$ 无限增大, 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大量, 简称无穷大, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$).

特殊情形: 正无穷大 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, 负无穷大 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

注意:

- (1) 无穷大是变量, 不能与很大的数混淆;
- (2) 一定不要把 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 认为极限存在.

例 1.21 在自变量的变化过程中, 判断下列函数是无穷小、还是无穷大.

- (1) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y = \frac{1}{x-1}$;
- (2) 当 $x \rightarrow 2$ 时, $y = 2x - 4$;
- (3) 当 $x \rightarrow 1$ 时, $y = \frac{1}{x-1}$;
- (4) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y = 2x - 4$.

解

(1) 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0$, 所以当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x-1}$ 为无穷小.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 4) = 0$, 所以当 $x \rightarrow 2$ 时, $2x - 4$ 为无穷小.

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$, 所以当 $x \rightarrow 1$ 时 $\frac{1}{x-1}$ 为无穷大.

(4) 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 4) = \infty$, 所以当 $x \rightarrow \infty$ 时, $2x - 4$ 为无穷大.