第 1 章　电 磁 理 论

本章首先简要回顾微波工程的历史和重要应用，然后综述贯穿本书的电磁理论。详细探讨请读者参阅相关的参考文献[1~8]。

1.1　微波工程简介

射频（RF）和微波通常是指频率从 100MHz（1MHz = 10^6Hz）到 1000GHz（1GHz = 10^9Hz）之间的交变电流信号。其中，射频的频率范围是从甚高频（VHF，30～300MHz）到超高频（UHF，300～3000MHz）；微波的频率范围是从 3GHz 到 300GHz，对应的电磁波波长是从 $\lambda = c/f = 10$cm 到 $\lambda = 1$mm。波长为毫米量级的信号称为*毫米波*。图 1.1 给出了微波频段在电磁波谱中的位置。由于微波的频率高（波长短），因此通常不能直接使用普通电路理论来求解微波网络问题。这时，常规电路理论只是由麦克斯韦方程组描述的范围较宽的电磁理论的近似或具体应用，因为电路理论的集总电路元件近似在微波频段通常不成立。微波元件通常是分布元件，元件的尺度与微波波长为同一数量级，其中电压或电流的相位在元件的物理尺度内会明显变化。在极低的频率下，波长会大到足以使相位在整个元件的线性范围内无明显变化。频率的另一端称为光学工程，此时波长要比元件的尺度短得多。在这种情形下，麦克斯韦方程组可以简化为几何光学，而光学系统可用几何光学的理论来设计。这些技术有时也可应用于毫米波系统，这时人们把它们称为*准光学*。

在微波工程中，人们常常从麦克斯韦方程组及其求解开始。然而，这些方程带来了数学上的复杂性，因为麦克斯韦方程组包含了作为空间坐标函数的向量场量的向量微分或积分运算。为此，本书的目标之一是试图将这个复杂的场理论解，简化为可用更简单的电路理论来表达的结果。场理论解通常会给出空间中每一点的电磁场的完整描述，它要比大多数实际应用所需的信息多得多。我们通常更关心终端的量，如功率、阻抗、电压和电流等用电路理论概念表达的物理量。正是这种复杂性给微波工程带来了挑战与回报。

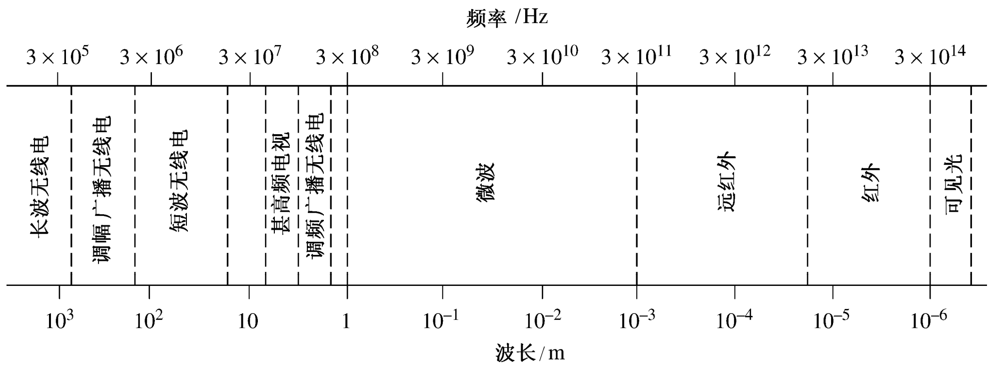
1.1.1　微波工程应用

虽然微波能量的高频率和短波长使得分析与设计微波元件和系统变得很困难，但是这些因素也为微波系统的应用带来了独特的机遇。具体原因如下：

- 天线增益与天线的电尺寸成比例。在较高的频率下，给定的天线尺寸有可能得到较高的增益，这对于装备小型化的微波系统有重要意义。
- 在较高的频率下能够实现更大的带宽（携带信息的容量）。600MHz 频率下 1%的带宽为 6MHz（一个电视频道的带宽），而 60GHz 频率下 1%的带宽为 600MHz（100 个电视频道的带宽）。带宽特别重要，因为在电磁频谱中可用的频带正被迅速耗尽。
- 微波信号按视线传播，而不像较低频率的信号进入电离层时，传播路径会弯曲。因此，通过在最近距离的地点间频率复用，可以实现非常大容量的卫星和地面通信联系。
- 雷达目标的有效反射面积（雷达散射截面）总与目标的电尺寸成比例。这一事实加上天线增益的频率特性，通常使微波频率成为雷达系统的首选。

- 各种分子、原子和原子核的谐振都发生在微波频率下，使得微波在基础科学领域、遥感、医学诊断和治疗及加热方法等方面具有独特的应用。

今天，射频与微波技术的主要应用是无线网络与通信系统、无线安全系统、雷达系统、环境遥感和医学系统。如图 1.1 给出的频率分布那样，射频与微波通信系统非常普遍，特别是在无线连接承诺向“任何人、任何地点、任何时间”提供语音和数据服务的今天。



典型频率		**频段的大致分配**	
调幅广播频段	535～1605kHz	中频	300kHz～3MHz
短波无线电频段	3～30MHz	高频（HF）	3～30MHz
调频广播频段	88～108MHz	甚高频（VHF）	30～300MHz
甚高频电视（2～4）	54～72MHz	超高频（UHF）	300MHz～3GHz
甚高频电视（5～6）	76～88MHz	L 波段	1～2GHz
超高频电视（7～13）	174～216MHz	S 波段	2～4GHz
超高频电视（14～83）	470～890MHz	C 波段	4～8GHz
美国蜂窝电话	824～849MHz	X 波段	8～12GHz
	869～894MHz	Ku 波段	12～18GHz
欧洲 GSM 蜂窝电话	880～915MHz	K 波段	18～26GHz
	925～960MHz	Ka 波段	26～40GHz
全球定位系统	1575.42MHz	U 波段	40～60GHz
	1227.60MHz	V 波段	50～75GHz
微波炉	2.45GHz	E 波段	60～90GHz
美国直播系统	11.7～12.5GHz	W 波段	75～110GHz
美国 ISM 波段	902～928MHz	F 波段	90～140GHz
	2.400～2.484GHz		
	5.725～5.850GHz		
美国超宽带无线电	3.1～10.6GHz		

图 1.1　电磁频谱

现代无线电话基于*蜂窝频率复用*的概念，这是贝尔实验室在 1947 年首次提出的技术创新，但直到 20 世纪 70 年代才实际实施。此时由于小型化技术的进步，以及无线通信需求的增加，推动了几个早期移动电话系统在欧洲、美国和日本的引进。*北欧移动电话*（NMT）系统于 1981 年在北欧国家部署，*高级移动电话系统*（AMPS）于 1983 年由 AT&T 在美国推出，日本 NTT 于 1988 年推出了其第一个移动电话服务。所有这些早期的系统都使用模拟调频调制，将分配的频段划分为几百个窄带语音信道。这些早期系统通常被称为*第一代蜂窝系统*，或 1G。

第二代（2G）蜂窝系统采用各种数字调制方案提高了性能，如 GSM、CDMA、DAMPS、PCS、PHS 系统等，它们是 20 世纪 90 年代美国、欧洲和日本引入的主要标准之一。这些系统可以处理数字化语音及一些有限的数据，数据速率通常为 8～14kbps。近年来，出现了各种各样的新标准和修改后的标准，以过渡到手持终端服务，包括语音、短信、数据网络、定位和 Internet 访问。这些标准被称为 2.5G、3G、3.5G、3.75G 和 4G，目前计划提供至少 100Mbps 的数据速率。使用无线服务的用户数量正与现代手持无线设备可提供的日益增长的能力保持同步。截至 2010 年，全球手机用户超过 50 亿。

卫星系统也依赖于射频与微波技术，已被开发用于提供全球范围内的蜂窝（语音）、视频和数据连接。20 世纪 90 年代末，两大卫星星座即铱星和全球星，被部署用于提供全球电话服务。遗憾的是，这些系统都遇到了技术缺陷和薄弱的商业模式的打击，导致了几十亿美元的损失。但是，小卫星系统，如全球定位卫星（GPS）和直播卫星（DBS）系统，却取得了极大的成功。无线局域网络（WLAN）提供了短距离计算机之间的高速网络连接，预计未来将继续保持这方面的强烈需求。更新的无线通信技术是超宽带（UWB）无线通信，其广播信号占用了很宽的频带，但功率电平却很低（通常低于环境无线电噪声水平），从而避免与其他系统间的干扰。

雷达系统在军事、商业和科学领域应用广泛。雷达既用于空中、地面和海洋目标的探测与定位，又用于导弹的制导和火控。在商业领域，雷达技术用于空中交通管制、运动探测器（门的开启和安全报警）、车辆避碰及距离测量。雷达在科学领域的应用包括气象预报，大气、海洋和陆地遥感，以及医学诊断与治疗。微波辐射计无源检测物体自身辐射的微波能量，既可用于大气和地球遥感、医学诊断，又可用于安全检查成像。

1.1.2 微波工程简史

微波工程是非常成熟的学科，既因为 50 电磁学的基本概念在 50 多年前就已发展起来，又因为微波技术的首个主要应用——雷达早在“二战”期间就得到了强劲的发展。尽管微波工程在 20 世纪就已开始，但其在高频固态器件、微波集成电路和现代微机电系统中的应用仍然非常活跃。

现代电磁理论的基础是由詹姆斯·克拉克·麦克斯韦（James Clerk Maxwell）于 1873 年提出的方程[1]，仅从数学考虑，他就提出了电磁波传播的假说，指出光也是电磁能量的一种形式。麦克斯韦方程组的现代形式由奥立弗·亥维赛（Oliver Heaviside）于 1885 年到 1887 年间提出。亥维赛的努力降低了麦克斯韦理论的数学复杂性——不仅引入了向量符号，而且提供了导波和传输线的应用基础。亨瑞克·赫兹（Heinrich Hertz）是德国的一位物理学教授和天才实验工作者，他非常了解麦克斯韦的理论。赫兹在 1887 年至 1891 年期间做了一系列实验，这些实验完全证实了麦克斯韦的电磁波理论。图 1.2 显示了赫兹在实验中所用的原始设备。有趣的是，这是根据理论基础进行预测时就有所发现的一个例子——科学史上的很多重要发现都具有这种特点。所有电磁理论的应用，包括无线电、电视和雷达，都要归功于麦克斯韦的理论工作。

由于缺少可靠的微波源和其他元件，20 世纪初无线电技术的快速发展主要发生在高频（HF）到甚高频（VHF）范围。20 世纪 40 年代“二战”期间，雷达的出现和发展才使得微波理论和技术得到了人们的重视。在美国，麻省理工学院（MIT）建立了辐射实验室来发展雷达理论和技术。许多顶尖的科学家，如 N. Marcuvitz、I. I. Rabi、J. S. Schwinger、H. A. Bethe、E. M. Purcell、C. G. Montgomery 和 R. H. Dicke 等，共同推进了微波领域的快速发展。他们的研究工作包括波导元件的理论和实验分析、微波天线、小孔耦合理论及初期的微波网络理论。在这些研究人员中，许多人是物理学家，他们在“二战”后重新恢复了对物理学的研究（很多人后来获诺贝尔奖）。他们在微波领域的研究成果总结在辐射实验室的 28 卷经典系列图书中，并且这些成果至今仍然应用广泛。

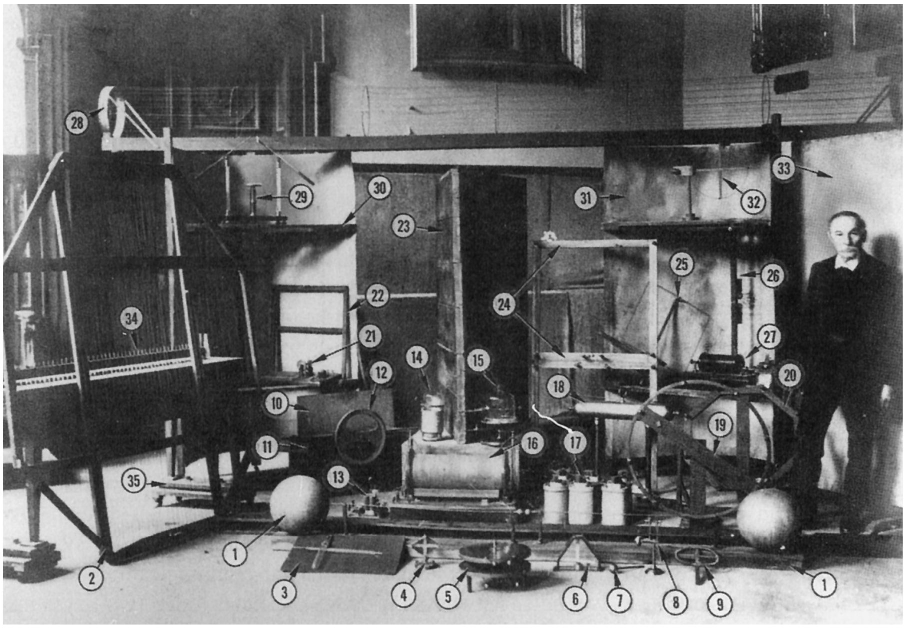


图 1.2 赫兹在电磁学实验中所用的原始设备：（1）50MHz 火花间隙发射机和加载偶极子天线；（2）极化实验用的平行线栅；（3）阴极射线实验用的真空装置；（4）热线检流计；（5）Reiss 或 Knochenhauer 螺旋线圈；（6）包金箔的检流计；（7）金属球探针；（8）Reiss 火花测微计；（9）同轴传输线；（10）～（12）展示电介质极化效应的仪器；（13）水银感应线圈断续器；（14）迈丁格尔小室；（15）真空钟罩；（16）高压感应线圈；（17）本生电池；（18）存储电荷用的大面积导体；（19）圆环接收天线；（20）八边形接收检测器；（21）旋转镜和水银断续器；（22）矩形环接收天线；（23）折射和介电常数测量仪器；（24）双矩形环接收天线；（25）矩形环接收天线；（26）偶极子发射天线；（27）高压感应线圈；（28）同轴线；（29）高压放电器；（30）柱形抛物面反射器/接收机；（31）柱形抛物面反射器/发射机；（32）圆环接收天线；（33）平面反射器；（34）～（35）蓄电池组。照片 1913 年 10 月 1 日摄于德国慕尼黑巴伐利亚科学院，照片中包括赫兹的助手 Julius Amman。照片和标识承蒙密歇根大学的 J. H. Bryant 提供和允许引用

采用微波技术的通信系统在雷达诞生后不久就开始得到发展，它得益于原本为雷达系统所做的许多研究成果。微波系统所具有的许多优点，包括宽频带和视线传播，已经证明对于陆地和卫星通信系统都是关键性的因素，因此对于低价位、小型化微波元件的继续发展提供了助力。有兴趣的读者可以参考文献[1, 2]，以进一步了解无线通信和微波工程领域的发展史。

1.2 麦克斯韦方程组

麦克斯韦于 1873 年发表的麦克斯韦方程组描述了宏观意义上的电现象和磁现象。这项研究工作不仅总结了当时电磁科学的成果，而且从理论考虑出发提出了存在位移电流的假说，导致赫兹和马可尼发现了电磁波。麦克斯韦的研究工作建立在高斯、安培、法拉第等人的大量实验和理论基础上。电磁学的第一门课程通常不仅都遵循这种历史的或演进的方法，而且认为读者已经掌握了微波工程的先修课程。参考文献中提供了几本适合于本科生和研究生的优秀电磁理论书籍[3~7]。

本章概述电磁理论的基本概念，这些内容是本书其他部分的基础。本章将给出麦克斯韦方程组、边界条件，并讨论介电材料和磁性材料的影响。波现象在微波工程中非常重要，因此本章有很多涉及平面波的主题。平面波是一种最简单的电磁波，使用它来展示与波传播相关的很多基本特性非常合适。尽管这里假设读者学习过平面波，但本章的内容既可帮助读者深入了解基本原理，又可为读者引入一些此前未掌握的概念。这些内容是后续章节的基础。

从教学法的角度来看，以“归纳”或公理性的方法从麦克斯韦方程组出发，给出电磁理论是有好处的。时变形式的麦克斯韦方程组可以写成“点”形式或微分形式，即

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{-\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} - \boldsymbol{\mathcal{M}} \tag{1.1a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}}{\partial t} + \boldsymbol{\mathcal{J}} \tag{1.1b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}} = \rho \tag{1.1c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0 \tag{1.1d}$$

本书采用国际单位制，即米·千克·秒单位制。黑斜书写体表示时变向量场，它们是空间坐标 x, y, z 和时间变量 t 的实函数。这些量定义如下：

$\boldsymbol{\mathcal{E}}$ 表示电场强度，单位为 V/m①。

$\boldsymbol{\mathcal{H}}$ 表示磁场强度，单位为 A/m。

$\boldsymbol{\mathcal{D}}$ 表示电位移向量，单位为 C/m^2（电通量密度）。

$\boldsymbol{\mathcal{B}}$ 表示磁感应强度，单位为 Wb/m^2（磁通量密度）。

$\boldsymbol{\mathcal{M}}$ 表示（虚拟的）磁流密度，单位为 V/m^2。

$\boldsymbol{\mathcal{J}}$ 表示电流密度，单位为 A/m^2。

ρ 表示电荷密度，单位为 C/m^3。

电磁场的源是磁流 $\boldsymbol{\mathcal{M}}$、电流 $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ 和电荷密度 ρ。磁流 $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ 是虚拟的源，它是为数学上的方便引入的；磁流的真实源通常是一个电流环或类似的磁偶极子，而不是实际的磁荷流（单极磁荷是不存在的）。这里引入磁流是为了保持完整性，在第 4 章中在处理孔径问题时会用到它。因为电流是电荷的真实流动，所以可以说电荷密度 ρ 是电磁场最根本的源。

在真空中，电场强度、磁场强度与其通量密度之间存在如下的简单关系：

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \mu_0 \boldsymbol{\mathcal{H}} \tag{1.2a}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \boldsymbol{\mathcal{E}} \tag{1.2b}$$

式中，$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$H/m 是真空磁导率，$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$F/m 是真空介电常数。下一节中将介绍非真空的其他媒质是如何影响这些结构关系的。

式(1.1a)～式(1.1d)是线性的，但不是彼此无关的。例如，考虑式(1.1a)中的散度。因为任何向量的旋度的散度都是零［见附录 B 中的向量恒等式(B.12)］，所以有

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0 = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}$$

因为不存在自由磁荷，所以 $\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}} = 0$，这又导致 $\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0$ 或式(1.1d)。类似地，连续性方程可通

① *IEEE Standard Definitions of Terms for Radio Wave Propagation, IEEE Standard 211-1997* 建议使用术语“电场”和“磁场”替代旧术语“电场强度”和“磁场强度”。

过取式(1.1b)的散度得出，即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{1.3}$$

其中用到了式(1.1c)。这个方程表明电荷是守恒的，或者说电流是连续的，因为$\nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}}$代表从一点流出的电流，而$\partial\rho/\partial t$代表在同一点同一时间形成的电荷。正是这一结果让麦克斯韦得出式(1.1b)中的位移电流密度$\partial\boldsymbol{\mathcal{D}}/\partial t$非常必要的结论，它可视为对方程求散度。

上述微分方程可用各种向量积分定理转化为积分形式。因此，对式(1.1c)和式(1.1d)应用散度定理(B.15)得

$$\oint_C \boldsymbol{\mathcal{D}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_V \rho\mathrm{d}v=Q \tag{1.4}$$

$$\oint_S \boldsymbol{\mathcal{B}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0 \tag{1.5}$$

式(1.4)中的Q代表封闭体积V（封闭表面S包围的体积）内的总电荷。对式(1.1a)应用斯托克斯定理(B.16)得

$$\oint_C \boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_B \boldsymbol{\mathcal{B}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}-\int_S \boldsymbol{\mathcal{M}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.6}$$

没有$\boldsymbol{\mathcal{M}}$项时，它是常见的法拉第定律，是形成基尔霍夫电压定律的基础。在式(1.6)中，C代表如图1.3所示的围绕表面S的封闭周线。安培定律可由式(1.1b)应用斯托克斯定理导出：

$$\oint_C \boldsymbol{\mathcal{H}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{\mathcal{B}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}+\int_S \boldsymbol{\mathcal{J}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{\mathcal{D}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}+\mathcal{I} \tag{1.7}$$

式中，$\mathcal{I}=\int_S \boldsymbol{\mathcal{J}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$是流过表面$S$的总电流。式(1.4)～式(1.7)是麦克斯韦方程组的积分形式。

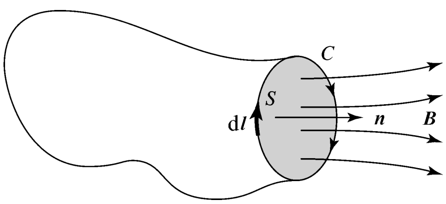


图 1.3　与法拉第定律有关的封闭周线 C 和表面 S

上述方程对任意时间依赖关系都成立，但本书的大部分内容只涉及具有正弦或简谐时间变化的场，即认为具有稳态条件。在这种情形下，用相量表示非常方便，因此所有的场量都隐含有时间依赖关系$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$的复向量，而且用正体字（非书写体）表示。于是，在$\boldsymbol{x}$方向极化的正弦电场为

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(x,y,z,t)=\boldsymbol{x}A(x,y,z)\cos(\omega t+\phi) \tag{1.8}$$

其相量形式为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\boldsymbol{x}A(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} \tag{1.9}$$

式中，A是（实）振幅，ω是圆频率，ϕ是波在$t=0$时的相位参考。本书中假定使用余弦基相量，因此从相量到实时变量的转换是将相量乘以$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，然后取其实部来实现的：

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \tag{1.10}$$

将式(1.9)代入式(1.10)得到式(1.8)。采用相量工作时，习惯上在所有量中将公共因子$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$略去。

处理功率和能量时，我们通常对二次量的时间平均感兴趣。它很容易用时谐场来求解。例如，

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}=\boldsymbol{x}E_1\cos(\omega t+\phi_1)+\boldsymbol{y}E_2\cos(\omega t+\phi_2)+\boldsymbol{z}E_2\cos(\omega t+\phi_3) \tag{1.11}$$

给出的电场，其相量形式为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{x}E_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_1}+\boldsymbol{y}E_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_2}+\boldsymbol{z}E_3\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_3} \tag{1.12}$$

其振幅的平方的时间平均值计算如下：

$$
\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{\mathcal{E}}\right|_{\text{avg}}^{2} &= \frac{1}{T}\int_{0}^{T}\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_{0}^{T}[E_1^2\cos^2(\omega t+\phi_1)+E_2^2\cos^2(\omega t+\phi_2)+E_3^2\cos^2(\omega t+\phi_3)]\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}(E_1^2+E_2^2+E_3^2)=\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{E}\right|^2 \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

于是，其均方根值为$\left|\boldsymbol{E}\right|_{\text{rms}}=\left|\boldsymbol{E}\right|/\sqrt{2}$。

在时间依赖关系 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 的假设下，式(1.1a)～式(1.1d)中的时间导数可用 jω 来代替。相量形式的麦克斯韦方程组变成

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}-\boldsymbol{M} \tag{1.14a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}+\boldsymbol{J} \tag{1.14b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{1.14c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1.14d}$$

傅里叶变换可将任意频率 ω 处的麦克斯韦方程组的解转换为任意时间依赖关系的解。

式(1.14)中的电流源和磁流源是体流密度，即 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{M}$，单位分别为 A/m^2 和 V/m^2。然而，在很多情况下，实际的电流和磁流是片状的、线状的或无限小的偶极子。这些特定类型的电流分布总可通过 δ 函数写成体流密度。图 1.4 给出了一些如何处理电流和磁流的例子。

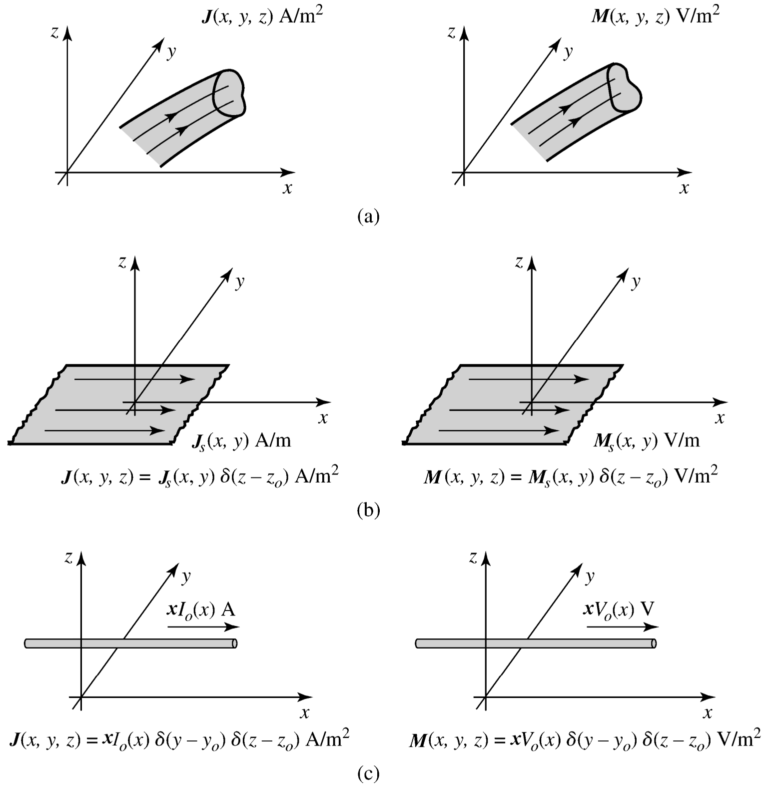


图 1.4　任意的体、面和线电流：(a)任意的体电流和磁流密度；(b)$z=z_0$ 平面上的任意表面电流和磁流密度；(c)任意的线电流和磁流密度；(d)平行于 x 轴的无限小电偶极子和磁偶极子

$\boldsymbol{J}(x, y, z) = \boldsymbol{x} Il\delta(x - x_o)\,\delta(y - y_o)\,\delta(z - z_o)$ A/m^2　　$\boldsymbol{M}(x, y, z) = \boldsymbol{x} Vl\delta(x - x_o)\,\delta(y - y_o)\,\delta(z - z_o)$ V/m^2

(d)

图 1.4　任意的体、面和线电流：(a)任意的体电流和磁流密度；(b)$z = z_0$ 平面上的任意表面电流和磁流密度；(c)任意的线电流和磁流密度；(d)平行于 x 轴的无限小电偶极子和磁偶极子（续）

1.3　媒质中的场和边界条件

上一节假设电场和磁场都在真空中，而且没有材料实体。实际上，材料实体通常是存在的；这就使得分析更为复杂，但也可将材料特性应用于微波元件。材料媒质中存在电磁场时，场向量是通过本构关系相互联系的。

对于电介质材料，外加电场 $\boldsymbol{E}$ 使材料的原子或分子产生极化，进而导致电偶极矩，它增大了总的位移通量 $\boldsymbol{D}$。这个附加的极化向量称为*电极化强度* $\boldsymbol{P}_e$，其中，

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_e \tag{1.15}$$

在线性媒质中，电极化强度与外加电场呈线性关系，即

$$\boldsymbol{P}_e = \epsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \tag{1.16}$$

式中，χ_e 称为*电极化率*，它可能是复数。于是有

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_e = \epsilon_0\,(1 + \chi_e)\boldsymbol{E} = \epsilon\,\boldsymbol{E} \tag{1.17}$$

式中，

$$\epsilon = \epsilon' - \mathrm{j}\epsilon'' = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \tag{1.18}$$

是媒质的复介电常数。ϵ 的虚部是电介质中偶极子振动阻尼产生的热损耗。真空中的 ϵ 是实数，它是无耗的。由于能量守恒，如 1.6 节所述，ϵ 的虚部必须为负值（ϵ'' 为正值）。介电材料的损耗还可以考虑有一个等效的导体损耗。在电导率为 σ 的材料中，传导电流密度为

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{1.19}$$

从电磁场的观点来看，这就是欧姆定律。这样，关于 $\boldsymbol{H}$ 的麦克斯韦旋度方程(1.14b)变成

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{H} &= \mathrm{j}\omega \boldsymbol{D} + \boldsymbol{J} \\ &= \mathrm{j}\omega\epsilon \boldsymbol{E} + \sigma \boldsymbol{E} \\ &= \mathrm{j}\omega\epsilon' \boldsymbol{E} + (\omega\epsilon'' + \sigma)\boldsymbol{E} \\ &= \mathrm{j}\omega\left(\epsilon' - \mathrm{j}\epsilon'' - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}\right)\boldsymbol{E}\end{aligned} \tag{1.20}$$

从中可以看出，由介电阻尼（$\omega\epsilon''$）引起的损耗与导电损耗（σ）不同。$\omega\epsilon'' + \sigma$ 可视为总有效电导率。感兴趣的有关量是损耗角正切，它定义为

$$\tan\delta = \frac{\omega\epsilon'' + \sigma}{\omega\epsilon'} \tag{1.21}$$

它可视为总位移电流的实部与虚部之比。微波材料总用实介电常数[①] $\epsilon' = \epsilon_r \epsilon_0$ 和一定频率下的损耗角正切来表征。附录 G 中列出了一些典型材料的这些常数值。注意，在无耗假设下求得问题的解后，损耗很容易用复数 $\epsilon = \epsilon' - \mathrm{j}\epsilon'' = \epsilon'(1-\mathrm{j}\tan\delta) = \epsilon_0\epsilon_r(1-\mathrm{j}\tan\delta)$ 取代实数来引入，这一点很有用。

上述讨论中假设 $\boldsymbol{P}_e$ 是与 $\boldsymbol{E}$ 同方向的向量。这种材料称为各向同性材料，但并非所有材料都具有这种特性。有些材料是各向异性的，它们用 $\boldsymbol{P}_e$ 和 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 之间更复杂的关系来表达。这些向量之间的最一般的线性关系取二阶张量的形式，可以用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\epsilon} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

由此可以看出，电场向量 $\boldsymbol{E}$ 的一个给定分量一般会引起 $\boldsymbol{D}$ 的三个分量。晶体结构和离子化的气体是各向异性介质的例子。对于各向同性的线性材料，式(1.22)中矩阵将简化为只有元素 ϵ 的对角阵。

类似的情形也出现在磁材料中，外加磁场可能使磁材料中的磁偶极子有序排列，产生磁极化（或磁化）向量 $\boldsymbol{P}_m$。于是有

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{P}_m) \tag{1.23}$$

对于线性磁材料，$\boldsymbol{P}_m$ 是与 $\boldsymbol{H}$ 线性相关的，即

$$\boldsymbol{P}_m = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{1.24}$$

式中，χ_m 是磁极化率，它是一个复数。由式(1.23)和式(1.24)得

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu\boldsymbol{H} \tag{1.25}$$

式中，$\mu = \mu_0(1+\chi_m) = \mu' - \mathrm{j}\mu''$ 是媒质的磁导率。同样，χ_m 或 μ 的虚部被认为是阻尼力引起的损耗；这里没有磁导率，因为不存在实际的磁流。与电的情况一样，磁材料可能是各向异性的，在这种情形下，张量磁导率写为

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

微波工程中各向异性磁材料的一个重要例子是称为铁氧体的亚铁磁类材料，这类材料及其应用将在第 9 章中讨论。

若有线性媒质（ϵ 和 μ 不依赖于 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{H}$），则麦克斯韦方程组可写为相量形式：

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} - \boldsymbol{M} \tag{1.27a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\epsilon\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \tag{1.27b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1.27c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.27d}$$

本构关系为

$$\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E} \tag{1.28a}$$

---

① *IEEE Standard Definitions of Terms for Radio Wave Propagation, IEEE Standard 211-1997* 建议用术语“相对介电常数”代替“介电常数”，但 *IEEE Standard Definitions of Terms for Antennas, IEEE Standard 145-1993* 仍然使用“介电常数”，因为这一术语在微波工程领域非常有用，本书中偶尔使用术语“介电常数”。

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{1.28b}$$

式中，ϵ 和 μ 可能是复数，也可能是张量。注意，类似于式(1.28a)和式(1.28b)的关系式一般不能写成时域形式，即便是对于线性媒质，因为在 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 之间可能存在相移。相量表达式通过 ϵ 和 μ 的复数形式已考虑了这一相移。

微分形式的麦克斯韦方程组(1.27a)～(1.27d)必须已知边界上的值时才能有完整和唯一的解。本书所用的一般方法是首先在一定的区域求解无源的麦克斯韦方程组，得到带有未知系数的通解，然后利用边界条件来求这些系数。一系列特定的边界条件将在后面讨论。

1.3.1 一般材料分界面上的场

考虑两种媒质之间的平面界面，如图 1.5 所示。积分形式的麦克斯韦方程组可用来推导包含分界面上的法向场和切向场的边界条件。时谐形式的式(1.4)可以写为

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_V \rho \mathrm{d}v \tag{1.29}$$

式中，S 是如图 1.6 所示的封闭“圆筒”形表面。

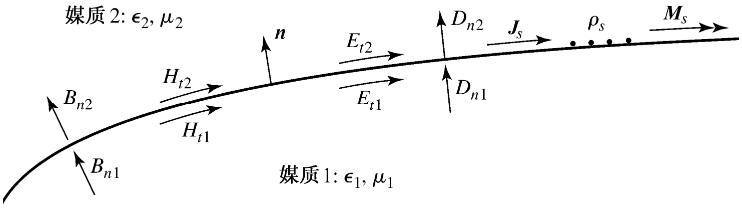


图 1.5 两媒质之间的一般分界面上的场、电流和表面电荷

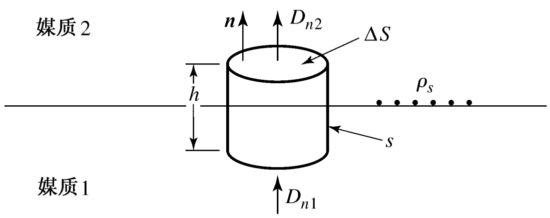


图 1.6 式(1.29)对应的封闭表面 S

在 $h \to 0$ 的极限情形下，$D_{\tan}$ 通过边壁的贡献为零，所以式(1.29)简化为

$$\Delta S D_{n2} - \Delta S D_{n1} = \Delta S \rho_s$$

或

$$D_{n2} - D_{n1} = \rho_s \tag{1.30}$$

式中，ρ_s 是分界面上的表面电荷密度。可将其写成向量形式：

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \rho_s \tag{1.31}$$

类似地，可得到 $\boldsymbol{B}$ 的结果为

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}_1 \tag{1.32}$$

因为这里没有自由磁荷。

对于电场的切向分量，可用式(1.6)的相量形式

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\mathrm{j}\omega \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} - \int_S \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.33}$$

把它和图 1.7 中的封闭周线 C 联系起来。在 $h\to 0$ 的极限情况下，$\boldsymbol{B}$ 的面积分趋于零（因为 $S=h\Delta\ell$ 变为零）。然而，若分界面上存在表面磁流密度 $\boldsymbol{M}_s$，则 $\boldsymbol{M}$ 的表面积分的贡献可能是非零的。因此，使用狄拉克 δ 函数可以写出

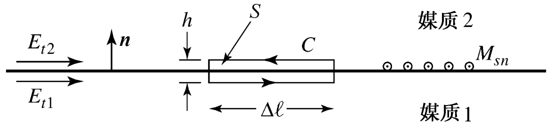


图 1.7　式(1.33)对应的封闭周线 C

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_s\delta(h) \tag{1.34}$$

式中，h 是垂直于分界面方向的坐标。这样，式(1.33)给出

$$\Delta\ell E_{t1}-\Delta\ell E_{t2}=-\Delta\ell M_s$$

或

$$E_{t1}-E_{t2}=-M_s \tag{1.35}$$

式(1.35)可以推广为向量形式

$$(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{M}_s \tag{1.36}$$

对磁场进行类似的讨论，可以得到

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{J}_s \tag{1.37}$$

式中，$\boldsymbol{J}_s$ 是分界面上可能存在的面电流密度。式(1.31)、式(1.32)、式(1.36)和式(1.37)是在材料的任意分界面及存在任意面电流和/或磁流时的边界条件的通用表达式。

1.3.2　介质分界面上的场

在两种无耗介电材料的分界面上通常不存在电荷或面电流密度、磁流密度。于是，式(1.31)、式(1.32)、式(1.36)和式(1.37)简化为

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_2 \tag{1.38a}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_2 \tag{1.38b}$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_2 \tag{1.38c}$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_2 \tag{1.38d}$$

换言之，这些方程是说，穿过分界面时 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量连续，而 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量连续。因为麦克斯韦方程组不都是线性无关的，所以包含在上述方程中的 6 个边界条件也不都是线性无关的。例如，若强制满足 4 个切向场分量的边界条件公式(1.38c)和公式(1.38d)，则会自动使法向分量的连续方程也得到满足。

1.3.3　理想导体（电壁）分界面上的场

微波工程中的很多问题包含有良导体（如金属）的边界，因此通常假设是无耗的（$\sigma\to\infty$）。在这种理想导体的情形下，导体内部区域的所有场分量必定为零。这一结果可视为导体具有有限导电率（$\sigma<\infty$），而且当 $\sigma\to\infty$时趋肤深度（微波功率可以穿透到达的深度）趋于零的情形（这样的分析将在 1.7 节中给出）。这里，若假设 $\boldsymbol{M}_s=0$，对应于理想导体充满边界一方的情况，则式(1.31)、式(1.32)、式(1.36)和式(1.37)简化为如下形式：

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=\rho_s \tag{1.39a}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1.39b}$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0 \tag{1.39c}$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_s \tag{1.39d}$$

式中，ρ_s 和 $\boldsymbol{J}_s$ 是分界面上的表面电荷密度和电流密度，$\boldsymbol{n}$ 是指向理想导体外的法向单位向量。这样的边界也称*电壁*，因为由式(1.39c)可以看出，电场 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量被“短路”，它在导体的表面必定为零。

1.3.4 磁壁边界条件

与上述边界条件对偶的是*磁壁*边界条件，其中 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量必须为零。这种边界条件实际上是不存在的，但在某些平面传输线问题中可用波纹表面来近似。此外，如后续几章所述，分界面上 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=0$ 的理想情况常常是一种方便的简化。磁壁边界条件类似于开路传输线终端电压和电流的关系，电壁边界条件类似于短路传输线终端电压和电流的关系。这样，磁壁边界条件不仅使得边界条件公式更加完整，而且在若干有实际意义的情形下是一种有用的近似。

磁壁上的场满足下述条件：

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=0 \tag{1.40a}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1.40b}$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{M}_s \tag{1.40c}$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=0 \tag{1.40d}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 是磁壁的外法向单位向量。

1.3.5 辐射条件

处理具有一个或多个无限大边界的问题（如无限大媒质中的平面波或无限长传输线）时，必须强加场在无限远处的条件。这种边界条件称为*辐射条件*，从根本上说，它就是能量守恒的一种表述。这种表述具体为：在离源无限远处，场要么为零，要么向外传播。只要一个无限大媒质包含一个小的损耗因子（因为很多物理媒质都具有损耗因子），那么这个结果就很容易得到。来自无限远处且具有有限振幅的波要求在无限远处有一个无限大的源，这是不可接受的。

1.4 波方程和基本平面波的解

1.4.1 亥姆霍兹方程

在无源、线性、各向同性和均匀的区域，相量形式的麦克斯韦方程组为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{1.41a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\epsilon\boldsymbol{E} \tag{1.41b}$$

两个方程包含两个未知量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$。因此，它们可用来求解 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$。于是，取式(1.41a)的旋度并应用式(1.41b)可得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\nabla\times\boldsymbol{H}=\omega^2\mu\epsilon\boldsymbol{E}$$

这是一个关于 $\boldsymbol{E}$ 的方程。这个结果可以利用向量恒等式(B.14)即 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$ 得到简化，该恒等式对任意向量 $\boldsymbol{A}$ 的直角分量都是正确的。于是有

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+\omega^2\mu\epsilon\boldsymbol{E}=0 \tag{1.42}$$

因为在无源区域中有 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$。式(1.42)是 $\boldsymbol{E}$ 的波方程，或亥姆霍兹方程。对于 $\boldsymbol{H}$，采用同样的方法，可得到完全相同的方程：

$$\nabla^2\boldsymbol{H}+\omega^2\mu\epsilon\boldsymbol{H}=0 \tag{1.43}$$

常数 $k=\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 是确定的，称为媒质的波数或传播常数，单位为 1/m。

作为引入波的行为的一种方法，下面研究上述波方程在其最简单形式下的解，首先研究无耗媒质，然后研究有耗（导电）媒质。

1.4.2 无耗媒质中的平面波

在无耗媒质中，ϵ 和 μ 是实数，因此 k 也是实数。上述波方程的一个平面波的基本解可以通过一个只有 $\boldsymbol{x}$ 分量且在 x 和 y 方向均匀（不变）的电场得到。因为 $\partial/\partial x=\partial/\partial y=0$，于是亥姆霍兹方程(1.42)简化为

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}+k^2E_x=0 \tag{1.44}$$

通过代入法很容易得到该方程的两个独立的解，形式为

$$E_x(z)=E^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+E^-\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz} \tag{1.45}$$

式中 E^+ 和 E^- 是任意振幅常数。

上述解是频率 ω 下的时谐形式。该结果在时域可以写为

$$\mathcal{E}_x(z,t)=E^+\cos(\omega t-kz)+E^-\cos(\omega t+kz) \tag{1.46}$$

式中，假定 E^+ 和 E^- 为实常数。考虑式(1.46)的第一项。这一项代表沿+z 方向传播的波。因为，为了保持波的一个固定点相位（$\omega t-kz=$ 常数），当时间增加时，它必须向+z 方向移动。类似地，式(1.46)中的第二项代表沿−z 方向传播的波；因此，用 E^+ 和 E^- 来表示这两个波的振幅。按此分析，波的速度称为相速，因为它是波在传播过程中于一个固定相位点的运动速度，并由下式给出：

$$v_p=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\omega t-\text{常数}}{k}\right)=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{1.47}$$

在真空中有 $v_p=1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}=c=2.998\times10^8$ m/s，这就是光速。

波长 λ 定义为波在某个确定的时刻，两个相邻的极大值（极小值或其他任意的参考点）之间的距离。因此，

$$(\omega t-kz)-[\omega t-k(z+\lambda)]=2\pi$$

所以

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi v_p}{\omega}=\frac{v_p}{f} \tag{1.48}$$

电磁场平面波的完整定义必须包含磁场。一般来说，无论已知的是 $\boldsymbol{E}$ 还是 $\boldsymbol{H}$，其他场向量都可用麦克斯韦旋度方程很快地求出。因此，把式(1.45)所示的电场应用于式(1.41a)可得 $H_x=H_z=0$，以及

$$H_y=\frac{1}{\eta}\left(E^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-E^-\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\right) \tag{1.49}$$

式中，$\eta=\omega\mu/k=\sqrt{\mu/\epsilon}$ 是平面波的波阻抗，它定义为 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 之比。对于平面波，该阻抗也是所在媒质的本征阻抗。在真空中有 $\eta_0=\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}=377\Omega$。注意，向量 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 互相正交，而且垂直于传播方向 $(\pm\boldsymbol{z})$；这是横向电磁波（TEM）的一个特征。

例题 1.1　平面波基本参量

一个在无耗介电媒质中传播的平面波具有电场形式 $\mathcal{E}_x = E_0\cos(\omega t-\beta z)$，频率为 5.0GHz，媒质中的波长为 3.0cm。求这个平面波的传播常数、相速、媒质的相对介电常数和波阻抗。

解：由式(1.48)得 $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/0.03 = 209.4\mathrm{m}^{-1}$，由式(1.47)得相速为

$$v_p = \omega/k = 2\pi f = \lambda f = 0.03\times 5\times 10^9 = 1.5\times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

这一速度约为光速的 1/2。媒质的相对介电常数可由式(1.47)求出：

$$\epsilon_r = \left(\frac{c}{v_p}\right)^2 = \left(\frac{3.0\times 10^8}{1.5\times 10^8}\right)^2 = 4.0$$

波阻抗为

$$\eta = \eta_0/\sqrt{\epsilon_r} = \frac{377}{\sqrt{4.0}} = 188.5\Omega$$ ■

1.4.3　一般有耗媒质中的平面波

现在考虑有耗媒质的影响。若媒质是导电的，电导率为 σ，则式(1.41a)和式(1.20)给出的麦克斯韦旋度方程组可以写为

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{1.50a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\epsilon\boldsymbol{E}+\sigma\boldsymbol{E} \tag{1.50b}$$

$\boldsymbol{E}$ 的波方程变为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+\omega^2\mu\epsilon\left(1-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)\boldsymbol{E} = 0 \tag{1.51}$$

上式与无耗情形下 $\boldsymbol{E}$ 的波方程(1.42)类似，差别在于式(1.42)中的波数 $k^2=\omega^2\mu\epsilon$ 被式(1.51)中的 $\omega^2\mu\epsilon[1-\mathrm{j}(\sigma/\omega\epsilon)]$ 代替。然后，将该媒质的复传播常数定义为

$$\gamma = \alpha+\mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \tag{1.52}$$

式中，α 是衰减常数，β 是相位常数。若再次假设电场只有 $\boldsymbol{x}$ 分量，且在 x 和 y 方向是均匀不变的，则式(1.51)给出的波方程可简化为

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}-\gamma^2 E_x = 0 \tag{1.53}$$

它具有解

$$E_x(z) = E^+\mathrm{e}^{-\gamma z}+E^-\mathrm{e}^{\gamma z} \tag{1.54}$$

正向传输波的传播因数是

$$\mathrm{e}^{-\gamma z} = \mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

其时域形式为

$$\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)$$

这代表一个沿+z 方向传播的波，相速为 $v_p=\omega/\beta$，波长为 $\lambda = 2\pi/\beta$，而且有指数衰减因子。随距离变化的衰减率由衰减常数 α 给出。式(1.54)中的反向行波项类似地沿−z 轴衰减。若去掉损耗，即 $\sigma=0$，则得到 $\gamma=\mathrm{j}k$，$\alpha=0$，$\beta=k$。

如 1.3 节所述，损耗也可处理为复介电常数。由式(1.52)和式(1.20)及 $\sigma=0$，但 $\epsilon=\epsilon'-\mathrm{j}\epsilon''$ 为复数，有

$$\gamma = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\epsilon} = \mathrm{j}k = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\epsilon'(1-\mathrm{j}\tan\delta)} \tag{1.55}$$

式中，$\tan\delta = \epsilon''/\epsilon'$ 为材料的损耗角正切。

接着，相关的磁场可以计算为

$$H_y = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{-\mathrm{j}\gamma}{\omega\mu}(E^+\mathrm{e}^{-\gamma z} - E^-\mathrm{e}^{\gamma z}) \tag{1.56}$$

在无耗情形下，波阻抗可以定义为电场与磁场之比：

$$\eta = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma} \tag{1.57}$$

这样，式(1.56)就可写为

$$H_y = \frac{1}{\eta}(E^+\mathrm{e}^{-\gamma z} - E^-\mathrm{e}^{\gamma z}) \tag{1.58}$$

注意，式(1.57)中的 η 一般为复数，而当 $\gamma = \mathrm{j}k = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 时，它简化为无耗情形下的 $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ 。

1.4.4 良导体中的平面波

很多实际问题包含良导体（而非理想导体）造成的损耗或衰减。良导体是前面分析过的导电电流比位移电流大得多的一种特殊情况，即 $\sigma \gg \omega\epsilon$ 。绝大多数金属都可视为良导体。宁可采用复介电常数，也不采用电导率，这个条件等效于 $\epsilon'' \gg \epsilon'$ 。忽略位移电流项，式(1.52)中的传播常数可以适当地近似为

$$\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta \approx \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{\frac{\sigma}{\mathrm{j}\omega\epsilon}} = (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \tag{1.59}$$

趋肤深度（或穿透的特征深度）定义为

$$\delta_s = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{1.60}$$

这样，导体中的场在传输一个趋肤深度的距离后，振幅就衰减为 1/e，即 36.8%，因为 $\mathrm{e}^{-\alpha z} = \mathrm{e}^{-\alpha\delta_s} = \mathrm{e}^{-1}$ 。在微波频率下，对于良导体，该距离是非常小的。这个结果的实际重要性在于对低耗微波元件而言，只需要一个薄片良导体（如银或金）就已足够。

例题 1.2 微波频率下的趋肤深度

计算铝、铜、金和银在频率为 10GHz 时的趋肤深度。

解：这些金属的电导率列在附录 F 中。式(1.60)给出的趋肤深度为

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f\mu_0\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi\times10^{10}\times(4\pi\times10^{-7})}}\sqrt{\frac{1}{\sigma}} = 5.03\times10^{-3}\sqrt{\frac{1}{\sigma}}$$

铝：$\delta_s = 5.03\times10^{-3}\sqrt{\dfrac{1}{3.816\times10^7}} = 8.14\times10^{-7}\,\mathrm{m}$ 。

铜：$\delta_s = 5.03\times10^{-3}\sqrt{\dfrac{1}{5.813\times10^7}} = 6.60\times10^{-7}\,\mathrm{m}$ 。

金：$\delta_s = 5.03\times10^{-3}\sqrt{\dfrac{1}{4.098\times10^7}} = 7.86\times10^{-7}\,\mathrm{m}$ 。

银：$\delta_s = 5.03\times10^{-3}\sqrt{\dfrac{1}{6.173\times10^7}} = 6.40\times10^{-7}\,\mathrm{m}$ 。

这些结果表明，良导体中的绝大部分电流都位于接近导体表面的极薄区域内。 ■

良导体内的波阻抗可以由式(1.57)和式(1.59)得到，结果为

$$\eta = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma} \approx (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = (1+\mathrm{j})\frac{1}{\sigma\delta_s} \tag{1.61}$$

注意，这一阻抗的相角为 45°，这是良导体的特征。无耗材料的相角为 0°，而任意有耗媒质的阻抗的相角在 0° 与 45° 之间。

表 1.1 小结了平面波在无耗和有耗均匀媒质中传播的一些结果。

表 1.1　平面波在无耗和有耗均匀媒质中传播的一些结果

物理量	类　型		
	无耗 ($\epsilon''=\sigma=0$)	一般损耗	良导体 ($\epsilon'' >> \epsilon'$ 或 $\sigma >> \omega\epsilon'$)
复传播常数	$\gamma = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\gamma = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ $= \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{1-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}}$	$\gamma = (1+\mathrm{j})\sqrt{\omega\mu\sigma/2}$
相位常数（波数）	$\beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\beta = \mathrm{Im}(\gamma)$	$\beta = \mathrm{Im}(\gamma) = \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$
衰减常数	$\alpha = 0$	$\alpha = \mathrm{Re}(\gamma)$	$\alpha = \mathrm{Re}(\gamma) = \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$
阻抗	$\eta = \sqrt{\mu/\epsilon} = \omega\mu/k$	$\eta = \mathrm{j}\omega\mu/\gamma$	$\eta = (1+\mathrm{j})\sqrt{\omega\mu/2\sigma}$
趋肤深度	$\sigma_s = \infty$	$\delta_s = 1/\alpha$	$\delta_s = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$
波长	$\lambda = 2\pi/\beta$	$\lambda = 2\pi/\beta$	$\lambda = 2\pi/\beta$
相速	$v_p = \omega/\beta$	$v_p = \omega/\beta$	$v_p = \omega/\beta$

1.5　平面波的通解

1.4 节中讨论了平面波的一些特征。下面从更一般的观点出发再次考察平面波，并用分离变量法来求解波动方程。这种方法在后续几章中还会用到。还将讨论圆极化平面波，这对于第 9 章中有关铁氧体的讨论是很重要的。

在真空中，电场 $\boldsymbol{E}$ 的亥姆霍兹方程可以写为

$$\nabla^2\boldsymbol{E} + k_0^2\boldsymbol{E} = \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial z^2} + k_0^2\boldsymbol{E} = 0 \tag{1.62}$$

这个向量波方程对于 $\boldsymbol{E}$ 的每个直角分量都是正确的：

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} + k_0^2 E_i = 0 \tag{1.63}$$

式中，下标 $i = x, y$ 或 z。现在，用分离变量法来求解这个方程，这是处理这种类型的偏微分方程的标准方法。这一方法首先认为式(1.63)的解（如 E_x）可以写为三个函数的乘积，而每个函数分别与三个坐标中的一个有关：

$$E_x(x,y,z) = f(x)g(y)h(z) \tag{1.64}$$

把这种形式的解代入式(1.63)，并除以 fgh 得

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + \frac{h''}{h} + k_0^2 = 0 \tag{1.65}$$

式中，双撇号表示二阶导数。现在，问题中的关键一步是认识到式(1.65)中的每一项是相互独立的，因此它们必须为常量。也就是说，f''/f 仅为 x 的函数，而且式(1.65)中余下的项与 x 无关，因

此 f''/f 必定是常数。式(1.65)中的其他项同样如此。因此，定义三个分离的常数 k_x, k_y 和 k_z，使得

$$f''/f=-k_x^2,\qquad g''/g=-k_y^2,\qquad h''/h=-k_z^2$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2 f=0,\qquad \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2 g=0,\qquad \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2 h=0 \tag{1.66}$$

联立式(1.65)和式(1.66)得

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k_0^2 \tag{1.67}$$

现在，偏微分方程(1.63)已简化为三个分离的常微分方程(1.66)。这三个方程的解的形式分别为 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}k_x x}$, $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}k_y y}$ 和 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}k_z z}$。如上节所述，带“+”号的项使波沿负 x 方向、负 y 方向或负 z 方向传播，而带“−”号的项使波沿正 x 方向、正 y 方向或正 z 方向传播。两个解都是可能的和合理的；这些项被激励的量值依赖于场的源。对于当前的讨论，选择沿每个坐标的正向传播的平面波，而把解 E_x 的完整形式写为

$$E_x(x,y,z)=A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_x x+k_y y+k_z z)} \tag{1.68}$$

式中，A 是任意振幅常数。现在，定义波向量 $\boldsymbol{k}$ 为

$$\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}+k_y\boldsymbol{y}+k_z\boldsymbol{z}=k_0\boldsymbol{n} \tag{1.69}$$

于是，由式(1.67)得 $|\boldsymbol{k}|=k_0$，而且 $\boldsymbol{n}$ 是传播方向上的单位向量。定义位置向量为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{x}+y\boldsymbol{y}+z\boldsymbol{z} \tag{1.70}$$

然后，式(1.68)可写为

$$E_x(x,y,z)=A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{1.71}$$

当然，式(1.63)对 E_y 和 E_z 的解，类似于 E_x 的式(1.71)的形式，但具有不同的振幅常数：

$$E_y(x,y,z)=B\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{1.72}$$

$$E_z(x,y,z)=C\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{1.73}$$

$\boldsymbol{E}$ 的三个分量［式(1.71)～式(1.73)］对 x, y, z 的依赖关系必须相同（相同的 k_x, k_y, k_z），因为散度条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$$

必须成立以便满足麦克斯韦方程组，这意味着 E_x, E_y 和 E_z 在 x, y, z 方向的变化相同（注意，上一节的解已自动满足散度条件，因为 E_x 只是 $\boldsymbol{E}$ 的唯一分量，而 E_x 又不随 x 变化）。这个条件对振幅 A、B 和 C 也施加了一个限制，因为若

$$\boldsymbol{E}_0=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{y}+C\boldsymbol{z}$$

则有

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

和

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=0$$

其中用到了向量恒等式(B.7)。因此，必定有

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0=0 \tag{1.74}$$

这表明电场振幅向量 $\boldsymbol{E}_0$ 必定垂直于传播方向 $\boldsymbol{k}$ 。这个条件是平面波的普通结果，意味着三个振幅常量 A、B 和 C 中只有两个可以独立地选择。

磁场可以由麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{H} \tag{1.75}$$

求出，具体为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\nabla\times(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})\\&=\frac{-\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\boldsymbol{E}_0\times\nabla\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\\&=\frac{-\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\boldsymbol{E}_0\times(-\mathrm{j}\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\\&=\frac{k_0}{\omega\mu_0}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\\&=\frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\\&=\frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}\end{aligned} \tag{1.76}$$

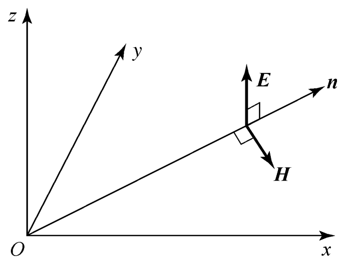


图 1.8　普遍平面波的三个向量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{k}=k_0\boldsymbol{n}$ 的方向

式中，在得到第二行时，用到了向量恒等式(B.9)。这个结果表明，磁场强度向量 $\boldsymbol{H}$ 位于垂直于传播方向 $\boldsymbol{k}$ 的平面内，而且 $\boldsymbol{H}$ 也垂直于 $\boldsymbol{E}$。图 1.8 显示了这些向量的关系。式(1.76)中的量 $\eta_0=\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}=377\Omega$ 是真空的本征阻抗。

电场的时域表达式可以求出为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{E}}(x,y,z,t)&=\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}\\&=\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}\\&=\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\end{aligned} \tag{1.77}$$

假定 $\boldsymbol{E}_0$ 中包含的振幅 A、B 和 C 为实数。若这些常量不是实数，则其相位应包含在式(1.77)的余弦项中。很容易证明，这个解的波长和相速与 1.4 节中得到的相同。

例题 1.3　作为平面波源的片电流

一个无穷大的表面电流片可认为是平面波的源。假设真空中 $z=0$ 处有一个面电流密度 $\boldsymbol{J}_s=J_0\boldsymbol{x}$，求它产生的电场，假定电流片的两边都产生平面波，并施加边界条件。

解： 因为源不随 x 和 y 变化，所以它产生的场也不随 x 和 y 变化，但将离开源分别沿±z 方向传播。在 $z=0$ 处需要满足的边界条件为

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=\boldsymbol{z}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0$$
$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{z}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=J_0\boldsymbol{x}$$

式中，$\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{H}_1$ 为 $z<0$ 时的场，$\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{H}_2$ 为 $z>0$ 时的场。为满足第二个条件，$\boldsymbol{H}$ 必须只有 $\boldsymbol{y}$ 分量。然后，因为 $\boldsymbol{E}$ 垂直于 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{z}$，所以 $\boldsymbol{E}$ 必定只有 $\boldsymbol{x}$ 分量。因此，场将具有如下形式：

$$\begin{aligned}z<0,\qquad \boldsymbol{E}_1&=\boldsymbol{x}A\eta_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0z}\\\boldsymbol{H}_1&=-\boldsymbol{y}A\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0z}\\z>0,\qquad \boldsymbol{E}_2&=\boldsymbol{x}B\eta_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z}\\\boldsymbol{H}_2&=-\boldsymbol{y}B\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z}\end{aligned}$$

式中，A 和 B 为任意振幅的常数。由第一个边界条件，即 E_x 在 $z=0$ 处连续，得到 $A=B$，

而对于 $\boldsymbol{H}$ 的边界条件，得到方程

$$-B-A=J_0$$

求解 A 和 B，得

$$A=B=-J_0/2$$

由此得到完整的解。 ■

1.5.1 圆极化平面波

以上讨论的平面波，其电场向量均指向一个固定的方向，因此称为*线极化波*。一般而言，平面波的极化方向是其电场向量的方向，它可能在一个固定的方向上，也可能随时间变化。

考虑一个振幅为 E_1 的 $\boldsymbol{x}$ 方向的线极化波与振幅为 E_2 的 $\boldsymbol{y}$ 方向的线极化波的叠加，这两个波都沿 $\boldsymbol{z}$ 方向传播。总电场可以写为

$$\boldsymbol{E}=(E_1\boldsymbol{x}+E_2\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z} \tag{1.78}$$

现在，产生了多种可能性。若 $E_1\neq0$ 而 $E_2=0$，则有一个极化方向在 $\boldsymbol{x}$ 方向的平面波。类似地，若 $E_1=0$ 而 $E_2\neq0$，则有一个极化方向在 $\boldsymbol{y}$ 方向的平面波。若 E_1 和 E_2 同为实数而且非零，则有一个极化方向在角度为

$$\phi=\arctan\frac{E_2}{E_1}$$

的平面波。例如，若 $E_1=E_2=E_0$，则有

$$\boldsymbol{E}=E_0(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z}$$

它代表与 x 轴成 45° 角的电场向量。

现在，考虑 $E_1=\mathrm{j}E_2=E_0$ 的情况，其中 E_0 为实数，于是有

$$\boldsymbol{E}=E_0(\boldsymbol{x}-\mathrm{j}\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z} \tag{1.79}$$

这个场的时域形式为

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(z,t)=E_0[\boldsymbol{x}\cos(\omega t-k_0z)+\boldsymbol{y}\cos(\omega t-k_0z-\pi/2)] \tag{1.80}$$

该式表明电场向量随时间或随 z 轴上的距离变化。为了解这一点，取一个固定点，如 $z=0$。式(1.80)简化为

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(0,t)=E_0[\boldsymbol{x}\cos\omega t+\boldsymbol{y}\sin\omega t] \tag{1.81}$$

因为 ωt 从零开始增加，所以电场向量从 x 轴开始逆时针方向旋转。结果是，$z=0$ 处的电场向量在时刻 t 与 x 轴的夹角为

$$\phi=\arctan\left(\frac{\sin\omega t}{\cos\omega t}\right)=\omega t$$

它表明，极化方向以匀角速度 ω 旋转。因此按右手定则，当大拇指指向波传播方向时，右手其他手指指向旋转方向，所以这种类型的波称为*右旋圆极化*（Right Hand Circularly Polarized，RHCP）波。类似地，形式为

$$\boldsymbol{E}=E_0(\boldsymbol{x}+\mathrm{j}\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z} \tag{1.82}$$

的场构成了一个左旋圆极化（Left Hand Circularly Polarized，LHCP）波，此处电场向量反方向旋转。从图 1.9 可以看到 RHCP 和 LHCP 平面波的极化向量。

与圆极化波相关的磁场可由麦克斯韦方程组或把波阻抗应用到电场的各个分量得到。例如，把式(1.76)应用到由式(1.79)给出的右旋圆极化波的电场，得到

$$\boldsymbol{H}=\frac{E_0}{\eta_0}\boldsymbol{z}\times(\boldsymbol{x}-\mathrm{j}\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}=\frac{E_0}{\eta_0}(\boldsymbol{y}+\mathrm{j}\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}=\frac{\mathrm{j}E_0}{\eta_0}(\boldsymbol{x}-\mathrm{j}\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}$$

可以看出，它也代表一个右旋圆极化型的向量旋转。

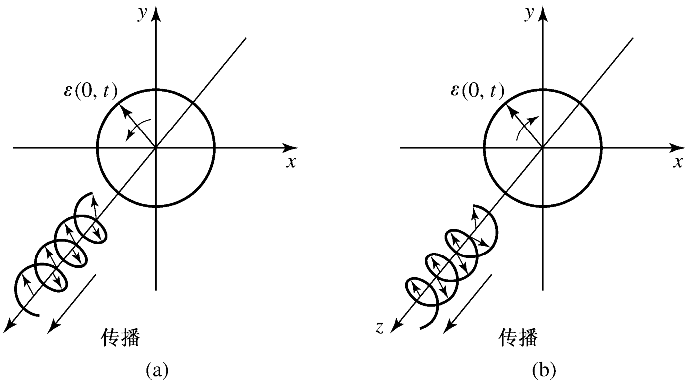


图 1.9　(a)右旋圆极化和(b)左旋圆极化平面波的电场极化方向

1.6　能量和功率

一般来说，电磁能量源建立电磁场，它存储电能和磁能，而且携带的功率可以传输出去或作为损耗消耗掉。在正弦稳态情况下，体积 V 中时间平均的存储电能由下式给出：

$$W_e=\frac{1}{4}\mathrm{Re}\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*\mathrm{d}v \tag{1.83}$$

在无耗、各向同性、均匀和线性介质的简单情形下，它是常数实标量，因此上式简化为

$$W_e=\frac{\epsilon}{4}\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*\mathrm{d}v \tag{1.84}$$

类似地，存储在体积 V 中的时间平均磁能为

$$W_m=\frac{1}{4}\mathrm{Re}\int_V \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}^*\mathrm{d}v \tag{1.85}$$

对于常数实标量 μ，它变为

$$W_m=\frac{\mu}{4}\int_V \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*\mathrm{d}v \tag{1.86}$$

现在可以推导坡印亭定理，该定理说电磁场和源的能量守恒。若有电流源 $\boldsymbol{J}_s$ 和由式(1.19)定义的传导电流 $\sigma\boldsymbol{E}$，则总电流密度为 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_s+\sigma\boldsymbol{E}$。然后，用 $\boldsymbol{H}^*$ 乘以式(1.27a)，用 $\boldsymbol{E}$ 乘以式(1.27b)的共轭，得到

$$\boldsymbol{H}^*\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\mathrm{j}\omega\mu|\boldsymbol{H}|^2-\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{M}_s$$

$$\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}^*)=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^*-\mathrm{j}\omega\epsilon^*|\boldsymbol{E}|^2=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_s^*+\sigma|\boldsymbol{E}|^2-\mathrm{j}\omega\epsilon^*|\boldsymbol{E}|^2$$

式中，$\boldsymbol{M}_s$ 是磁流源。把这两个公式代入向量恒等式(B.8)，得到

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)&=\boldsymbol{H}^*\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}^*)\\&=-\sigma|\boldsymbol{E}|^2+\mathrm{j}\omega(\epsilon^*|\boldsymbol{E}|^2-\mu|\boldsymbol{H}|^2)-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_s^*+\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{M}_s)\end{aligned}$$

现在，在整个体积 V 内积分，并利用散度定理，可得

$$\int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\mathrm{d}v = \oint_S \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$
$$= -\sigma\int_V |\boldsymbol{E}|^2\,\mathrm{d}v + \mathrm{j}\omega\int_V(\epsilon^*|\boldsymbol{E}|^2 - \mu|\boldsymbol{H}|^2)\mathrm{d}v - \int_V(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_s^* + \boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{M}_s)\mathrm{d}v \tag{1.87}$$

式中，S 是包围体积 V 的封闭表面，如图 1.10 所示。允许 $\epsilon = \epsilon' - \mathrm{j}\epsilon''$ 和 $\mu = \mu' - \mathrm{j}\mu''$ 是复数，以包含损耗，重写式(1.87)给出

$$-\frac{1}{2}\int_V(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_s^* + \boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{M}_s)\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\oint_S \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \frac{\sigma}{2}\int_V|\boldsymbol{E}|^2\,\mathrm{d}v +$$
$$\frac{\omega}{2}\int_V(\epsilon''|\boldsymbol{E}|^2 + \mu''|\boldsymbol{H}|^2)\mathrm{d}v + \mathrm{j}\frac{\omega}{2}\int_V(\mu'|\boldsymbol{H}|^2 - \epsilon'|\boldsymbol{E}|^2)\mathrm{d}v \tag{1.88}$$

在物理学家坡印亭（1852—1914 年）之后，这个结果被称为*坡印亭定理*，从根本上说，它是一个功率平衡方程。因此，左边的积分表示在封闭面 S 内，源 $\boldsymbol{J}_s$ 和 $\boldsymbol{M}_s$ 携带的复功率 P_s 为

$$P_s = -\frac{1}{2}\int_V(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_s^* + \boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{M}_s)\mathrm{d}v \tag{1.89}$$

式(1.88)右边的第一个积分表示由封闭表面 S 流出的复功率流。若将*坡印亭向量* $\boldsymbol{S}$ 定义为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^* \tag{1.90}$$

则这个功率可以表示为

$$P_o = \frac{1}{2}\oint_S \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\oint_S \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.91}$$

式(1.91)中的表面 S 必须是封闭的，以保证这种解释是成立的。式(1.89)和式(1.91)中的 P_s 和 P_o 的实部表示时间平均功率。

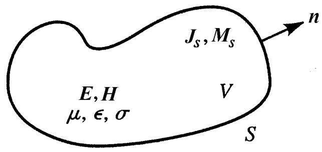


图 1.10　由封闭表面 S 包围的体积 V，包含了电磁场 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 和电磁流源 $\boldsymbol{J}_s, \boldsymbol{M}_s$

式(1.88)中的第二个积分和第三个积分是实数量，代表体积 V 内由于电导率、电介质和磁损耗而消耗的时间平均功率。若把这个功率定义为 P_ℓ，则有

$$P_\ell = \frac{\sigma}{2}\int_V|\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}v + \frac{\omega}{2}\int_V(\epsilon''|\boldsymbol{E}|^2 + \mu''|\boldsymbol{H}|^2)\mathrm{d}v \tag{1.92}$$

它有时称为*焦耳定律*。式(1.88)中的最后一个积分可视为与定义为式(1.84)和式(1.86)的电和磁的储能有关的项。

有了上述定义，坡印亭定理就可重写为

$$P_s = P_o + P_\ell + 2\mathrm{j}\omega(W_m - W_e) \tag{1.93}$$

换言之，这个复功率守恒方程是说，由源携带的功率（P_s）是通过表面传输的功率（P_o）、体积内损耗为热的功率（P_ℓ）及体积内存储的净电抗性能量的 2ω 倍之和。

1.6.1　良导体吸收的功率

要计算由于导电性较差引起的衰减和损耗，就必须求出导体中的功率消耗。后面将证明，利用导体表面的场就能做到这一点，这是计算衰减时的一个非常有用的简化。

考虑图 1.11 所示的几何图形，它给出了一个无耗媒质与良导体之间的分界面。假定场是从 $z < 0$ 的一方入射的，而且深入到 $z > 0$ 的导体区域。进入由分界面上的横截面 S_0 和表面 S 定义的导体体积内的实平均功率，根据式(1.91)给出为

$$P_{\mathrm{avg}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{S_0+S}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s \tag{1.94}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 是指向封闭表面(S_0+S)内部的单位向量，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 是这个表面上的场。式(1.94)源于表面 S

上的积分贡献可以通过恰当选择该表面而使其为零。例如，若场是垂直入射的平面波，则坡印亭向量 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*$ 将在 $\boldsymbol{z}$ 方向上，因而相切于 S 的上、下、前、后表面，只要这些表面选择为平行于 z 轴。若波是斜入射的，则这些表面也可倾斜而得到同样的结果。而且，若导体是良导体，则场从 $z=0$ 的界面向内的衰减将是非常快的，这样 S 的右端可以选择离 $z=0$ 足够远，使这部分积分贡献可以忽略。这样，通过 S_0 进入导体的时间平均功率可以写为

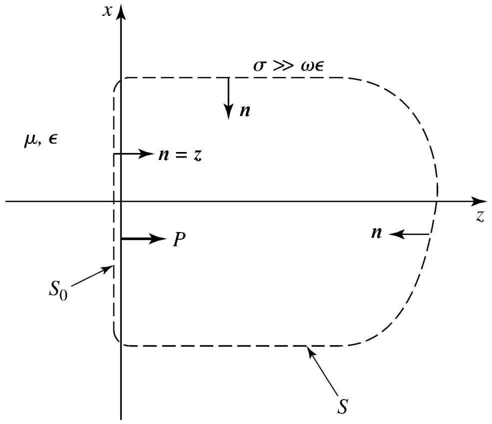


图 1.11　有耗媒质和良导体的分界表面，是计算导体中的功率消耗构建的封闭表面 S_0+S

$$P_{\text{avg}}=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{S_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{z}\mathrm{d}s \tag{1.95}$$

由向量恒等式(B.3)有

$$\boldsymbol{z}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)=(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{H}^*=\eta\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^* \tag{1.96}$$

式中 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}/\eta$，这是把式(1.76)推广到导电媒质的情况，$\eta$ 是导体的本征波阻抗。式(1.95)可写为

$$P_{\text{avg}}=\frac{R_s}{2}\int_{S_0}|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}s \tag{1.97}$$

式中，

$$R_s=\operatorname{Re}\{\eta\}=\operatorname{Re}\left\{(1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}\right\}=\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}=\frac{1}{\sigma\delta_s} \tag{1.98}$$

称为导体的*表面电阻*。式(1.97)中的磁场 $\boldsymbol{H}$ 与导体表面相切，只需要它在导体表面的值；因为 H_t 在 $z=0$ 处是连续的，因此这个场无论是在导体外计算还是在导体内计算都没有关系。下一节将证明当导体假定为理想导体时，如何用导体表面的表面电流密度来计算式(1.97)。

1.7　媒质分界面上的平面波反射

以后几章将要考虑的许多问题包含电磁场在有耗或导电媒质分界面上的行为，因此在这里研究从真空正入射到导电媒质半空间的分界面上的平面波的反射是有用的。有关的几何图形如图 1.12 所示，其中 $z>0$ 的有耗半空间由参量 ϵ，μ 和 σ 表征。

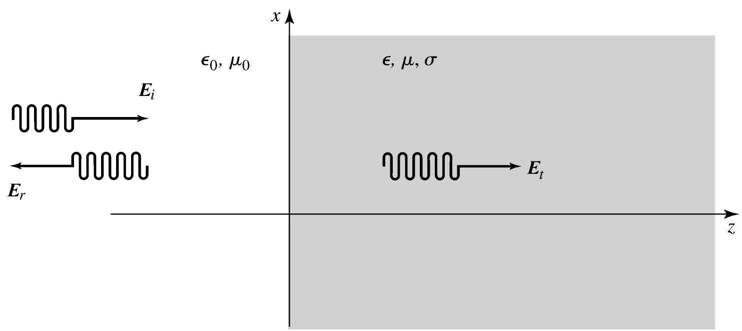


图 1.12　平面波正入射时，有耗媒质的反射

1.7.1　普通媒质

不失一般性，假设入射平面波具有沿 x 轴方向的电场，并沿正 z 轴方向传播。对于 $z<0$，入

射场可以写为

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{x}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z} \tag{1.99a}$$

$$\boldsymbol{H}_i = \boldsymbol{y}\frac{1}{\eta_0}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z} \tag{1.99b}$$

式中，η_0 是真空波阻抗，E_0 是任意振幅。在 $z<0$ 的区域，可能存在反射波，形式为

$$\boldsymbol{E}_r = \boldsymbol{x}\Gamma E_0\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_0z} \tag{1.100a}$$

$$\boldsymbol{H}_r = -\boldsymbol{y}\frac{\Gamma}{\eta_0}E_0\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_0z} \tag{1.100b}$$

式中，Γ 是未知反射电场的反射系数。注意，在式(1.100)中，如式(1.46)所导出的那样，指数项的符号已选择为正，以代表波沿 $-\boldsymbol{z}$ 方向传播。这也与坡印亭向量 $\boldsymbol{S}_r = \boldsymbol{E}_r \times \boldsymbol{H}_r^* = -|\Gamma|^2|E_0|^2\boldsymbol{z}/\eta_0$ 一致，它表示对反射波而言沿 $-\boldsymbol{z}$ 方向传播的功率。

如 1.4 节所证明的那样，由式(1.54)和式(1.58)，在 $z>0$ 的有耗媒质区域的透射场可以写为

$$\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{x}TE_0\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{1.101a}$$

$$\boldsymbol{H}_t = \frac{\boldsymbol{y}TE_0}{\eta}\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{1.101b}$$

式中，T 是透射电场的透射系数，η 是 $z>0$ 的区域的有耗煤质的本征阻抗。由式(1.57)和式(1.52)可得本征阻抗为

$$\eta = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma} \tag{1.102}$$

传播常数为

$$\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1-\mathrm{j}\sigma/\omega\epsilon} \tag{1.103}$$

现在有了边界值问题，其中场的普遍形式在 $z=0$ 处材料不连续的两边都是已知的，由式(1.99)至式(1.101)给出。两个未知常数 Γ 和 T 可通过应用在 $z=0$ 处有关 E_x 和 H_y 的两个边界条件得到。因为这些切向场分量在 $z=0$ 处必定连续，所以得到如下两个方程：

$$1+\Gamma = T \tag{1.104a}$$

$$\frac{1-\Gamma}{\eta_0} = \frac{T}{\eta} \tag{1.104b}$$

求解这两个方程可得反射系数和透射系数为

$$\Gamma = \frac{\eta-\eta_0}{\eta+\eta_0} \tag{1.105a}$$

$$T = 1+\Gamma = \frac{2\eta}{\eta+\eta_0} \tag{1.105b}$$

这是正入射到有耗材料分界面上的波的反射系数和透射系数的通解，其中 η 是材料的阻抗。现在考虑以上结果的三种特殊情况。

1.7.2 无耗媒质

若 $z>0$ 的区域是无耗媒质，则有 $\sigma=0$，且 μ 和 ϵ 都是实数。这种情况下的传播常数是纯虚数，因而可以写为

$$\gamma = \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\epsilon} = \mathrm{j}k_0\sqrt{\mu_r\epsilon_r} \tag{1.106}$$

式中 $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ 是真空平面波的波数。媒质中的波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \tag{1.107}$$

相速为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \tag{1.108}$$

（低于真空中的光速），而媒质中的波阻抗为

$$\eta = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \tag{1.109}$$

在无耗情形下，η 是实数，因此由式(1.105)可知 Γ 和 T 也是实数，而且 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在两种媒质中彼此都是同相的。

入射波、反射波和透射波的能量守恒可以通过计算两个区域的坡印亭向量来证明。因此，对于 $z<0$ 的区域，复坡印亭向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^- &= \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^* = (\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{E}_r)\times(\boldsymbol{H}_i+\boldsymbol{H}_r)^* \\ &= \boldsymbol{z}|E_0|^2\frac{1}{\eta_0}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z}+\Gamma\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0z})(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0z}-\Gamma\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0z})^* \\ &= \boldsymbol{z}|E_0|^2\frac{1}{\eta_0}(1-|\Gamma|^2+\Gamma\mathrm{e}^{2\mathrm{j}k_0z}-\Gamma^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_0z}) \\ &= \boldsymbol{z}|E_0|^2\frac{1}{\eta_0}(1-|\Gamma|^2+2\mathrm{j}\Gamma\sin 2k_0z)\end{aligned} \tag{1.110a}$$

其中利用了 Γ 是实数这一事实。对于 $z>0$ 的区域，复坡印亭向量为

$$\boldsymbol{S}^+ = \boldsymbol{E}_t\times\boldsymbol{H}_t^* = \boldsymbol{z}\frac{|E_0|^2|T|^2}{\eta}$$

利用式(1.105)，上式可改写为

$$\boldsymbol{S}^+ = \boldsymbol{z}|E_0|^2\frac{4\eta}{(\eta+\eta_0)^2} = \boldsymbol{z}|E_0|^2\frac{1}{\eta_0}(1-|\Gamma|^2) \tag{1.110b}$$

现在，在 $z=0$ 处有 $\boldsymbol{S}^- = \boldsymbol{S}^*$，因此复功率流在穿过界面时是守恒的。下面考虑两个区域的时间平均功率流。对于 $z<0$，通过 $1\mathrm{m}^2$ 横截面的时间平均功率流为

$$P^- = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{S}^-\cdot\boldsymbol{z}\} = \frac{1}{2}|E_0|^2\frac{1}{\eta_0}(1-|\Gamma|^2) \tag{1.111a}$$

而对于 $z>0$，通过 $1\mathrm{m}^2$ 横截面的时间平均功率流为

$$P^+ = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{S}^+\cdot\boldsymbol{z}\} = \frac{1}{2}|E_0|^2\frac{1}{\eta_0}\left(1-|\Gamma|^2\right) = P^- \tag{1.111b}$$

因此，实功率流也是守恒的。

现在指出一个细节问题。用式(1.110a)计算 $z<0$ 的复坡印亭向量时，用到了总场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$。若用入射波和反射波分别计算坡印亭向量，则可得到

$$\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{E}_i\times\boldsymbol{H}_i^* = \boldsymbol{z}\frac{|E_0|^2}{\eta_0} \tag{1.112a}$$

$$\boldsymbol{S}_r = \boldsymbol{E}_r\times\boldsymbol{H}_r^* = -\boldsymbol{z}\frac{|E_0|^2|\Gamma|^2}{\eta_0} \tag{1.112b}$$

这样，式(1.110a)中的 $\boldsymbol{S}_i+\boldsymbol{S}_r \neq \boldsymbol{S}^-$。少掉的叉积项代表 $z<0$ 的区域内存储在驻波中的电抗性储能。因此，一般来说，把坡印亭向量分解为入射波和反射波分量没有意义。有些书中把时间平均坡印

亭向量定义为 $(1/2)\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\}$，这时把这样一个定义应用到单个入射分量和反射分量会给出正确的结果，因为 $P_i=(1/2)|\boldsymbol{E}_0|^2/\eta_0$ 和 $P_r=(-1/2)|\boldsymbol{E}_0|^2|\Gamma|^2/\eta_0$，所以 $P_i+P_r=P^-$。但是，即使这样定义，当 $z<0$ 的媒质为有耗媒质时，也不能提供有价值的结果。

1.7.3 良导体

若 $z>0$ 的区域是良导体（但不是理想导体），则传播常数可以写为 1.4 节中讨论过的形式：

$$\gamma=\alpha+\mathrm{j}\beta=(1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}=(1+\mathrm{j})\frac{1}{\delta_s} \tag{1.113}$$

类似地，该导体的本征阻抗简化为

$$\eta=(1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}=(1+\mathrm{j})\frac{1}{\sigma\delta_s} \tag{1.114}$$

现在，阻抗是复数，具有 45° 相角，因此 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 具有 45° 的相差，且 Γ 和 T 也是复数。在式(1.113)和式(1.114)中，如式(1.60)定义的那样，$\delta_s=1/\alpha$ 是趋肤深度。

对于 $z<0$，在 $z=0$ 处可以算出复坡印亭向量的值，具体为

$$\boldsymbol{S}^-(z=0)=\boldsymbol{z}|E_0|^2\frac{1}{\eta_0}(1-|\Gamma|^2+\Gamma-\Gamma^*) \tag{1.115a}$$

对于 $z>0$，复坡印亭向量为

$$\boldsymbol{S}^+=\boldsymbol{E}_t\times\boldsymbol{H}_t^*=\boldsymbol{z}|E_0|^2|T|^2\frac{1}{\eta^*}\mathrm{e}^{-2\alpha z}$$

利用 T 和 Γ 的表达式(1.105)，可得

$$\boldsymbol{S}^+=\boldsymbol{z}|E_0|^2\frac{4\eta}{|\eta+\eta_0|^2}\mathrm{e}^{-2\alpha z}=\boldsymbol{z}|E_0|^2\frac{1}{\eta_0}(1-|\Gamma|^2+\Gamma-\Gamma^*)\mathrm{e}^{-2\alpha z} \tag{1.115b}$$

因此，在分界面 $z=0$ 处，$\boldsymbol{S}^-=\boldsymbol{S}^+$ 且复功率是守恒的。

观察发现，若对 $z<0$ 的区域单独计算入射和反射坡印亭向量：

$$\boldsymbol{S}_i=\boldsymbol{E}_i\times\boldsymbol{H}_i^*=\boldsymbol{z}\frac{|E_0|^2}{\eta_0} \tag{1.116a}$$

$$\boldsymbol{S}_r=\boldsymbol{E}_r\times\boldsymbol{H}_r^*=-\boldsymbol{z}\frac{|E_0|^2|\Gamma|^2}{\eta_0} \tag{1.116b}$$

则得不到式(1.115a)中的 $\boldsymbol{S}_i+\boldsymbol{S}_r=\boldsymbol{S}^-$，即使是对 $z=0$。然而，用单个行波分量来考虑实功率流是可能的。这样，流过 $1\mathrm{m}^2$ 横截面的时间平均功率流就为

$$P^-=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{S}^-\cdot\boldsymbol{z})=\frac{1}{2}|E_0|^2\frac{1}{\eta_0}(1-|\Gamma|^2) \tag{1.117a}$$

$$P^+=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{S}^-\cdot\boldsymbol{z})=\frac{1}{2}|E_0|^2\frac{1}{\eta_0}(1-|\Gamma|^2)\mathrm{e}^{-2\alpha z} \tag{1.117b}$$

它表明在 $z=0$ 处功率是守恒的。此外，$P_i=|E_0|^2/2\eta_0, P_r=-|E_0|^2|\Gamma|^2/2\eta_0$。因此 $P_i+P_r=P^-$，它表明 $z<0$ 的实功率可以分解为入射波和反射波的分量。

注意，有耗导体内的功率密度 $\boldsymbol{S}^+$ 是按衰减因子 $\mathrm{e}^{-2\alpha z}$ 指数衰减的。这意味着当波沿$+z$ 方向传播到媒质时，功率耗散在有耗材料中。该功率和场经过材料的少数几个趋肤深度后，就衰减到可以忽略的较小值，对于一般的良导体，在微波频率下，这个距离很小。

流到导电区域的体电流密度为

$$\boldsymbol{J}_t = \sigma \boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{x}\sigma E_0 T\mathrm{e}^{-\gamma z}\ \ \mathrm{A/m^2} \tag{1.118}$$

因此，在 $1\mathrm{m}^2$ 横截面的导体体积中耗散的（或透入的）平均功率可由式(1.92)的导体损耗项（焦耳定律）计算：

$$\begin{aligned} P^t &= \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{E}_t \cdot \boldsymbol{J}_t^* \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{\infty}(\boldsymbol{x}E_0 T\mathrm{e}^{-\gamma z})\cdot(\boldsymbol{x}\sigma E_0 T\mathrm{e}^{-\gamma z})^* \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\sigma|E_0|^2|T|^2\int_{z=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\alpha z}\mathrm{d}z = \frac{\sigma|E_0|^2|T|^2}{4\alpha} \end{aligned} \tag{1.119}$$

因为 $1/\eta = \sigma\delta_s/(1+\mathrm{j}) = (\sigma/2\alpha)(1-\mathrm{j})$，所以通过 $1\mathrm{m}^2$ 横截面进入导体的实功率［由在 $z = 0$ 时的 $(1/2)\mathrm{Re}\{\boldsymbol{S}^+\cdot\boldsymbol{z}\}$ 给出］可用式(1.115b)表达成 $P^t = |E_0|^2|T|^2(\sigma/4\alpha)$，它与式(1.119)是一致的。

1.7.4 理想导体

现在假定 $z > 0$ 的区域为理想导体。上述结果可通过 $\sigma\to\infty$的特定情况得到。因此，由式(1.113)得 $\alpha\to\infty$；由式(1.114)得 $\eta\to 0$；由式(1.60)得 $\delta_s\to 0$；由式(1.105a, b)得 $T\to 0$，$\Gamma\to -1$。对于 $z > 0$，场衰减非常迅速，而理想导体中的场完全为零。理想导体可以考虑为把入射电场“短路”。对于 $z < 0$，因为 $\Gamma = -1$，所以由式(1.99)和式(1.100)得到总 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{E}_r = \boldsymbol{x}E_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 z}) = -\boldsymbol{x}2\mathrm{j}E_0\sin k_0 z \tag{1.120a}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_i + \boldsymbol{H}_r = \boldsymbol{y}\frac{1}{\eta_0}E_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 z}) = \boldsymbol{y}\frac{1}{\eta_0}E_0\cos k_0 z \tag{1.120b}$$

注意，在 $z = 0$ 处，$\boldsymbol{E} = 0$ 而 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{y}(2/\eta_0)E_0$。对于 $z < 0$，坡印亭向量为

$$\boldsymbol{S}^- = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^* = -\mathrm{j}\boldsymbol{z}\frac{4}{\eta_0}|E_0|^2\sin k_0 z\cos k_0 z \tag{1.121}$$

它的实部为零，说明没有实功率流到理想导体中。

在无限电导率的极限情况下，式(1.118)中的有耗导体的体电流密度退化为无限薄的面电流密度：

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{z}\times\left(\boldsymbol{y}\frac{2}{\eta_0}E_0\cos k_0 z\right)\Bigg|_{z=0} = \boldsymbol{x}\frac{2}{\eta_0}E_0\ \ \mathrm{A/m} \tag{1.122}$$

1.7.5 表面阻抗概念

在很多问题中，特别是在需要有衰减效应或导体损耗的情况下，必须考虑非理想导体的存在。表面阻抗概念可使我们非常方便地做到这一点。下面将从上面几节给出的理论发展出这一方法。

考虑 $z > 0$ 的区域为良导体。如前所述，正入射到该导体的平面波绝大部分被反射，而传输到导体的功率消耗在距表面很短的距离内并化为热。有三种方法可计算这一功率。

首先，如式(1.119)那样，可以用焦耳定律。对于 $1\mathrm{m}^2$ 的导体表面，通过这个表面传输并耗散为热的功率由式(1.119)给出。利用式(1.105b)给出的 T、式(1.114)给出的 η 及 $\alpha = 1/\delta_s$ 这一事实，可以给出如下结果：

$$\frac{\sigma|T|^2}{\alpha} = \frac{\sigma\delta_s 4|\eta|^2}{|\eta+\eta_0|^2} \approx \frac{8}{\sigma\delta_s\eta_0^2} \tag{1.123}$$

式中，假定 $\eta \ll \eta_0$，这对于良导体是成立的。然后，式(1.119)的功率可以写为

$$P^t = \frac{\sigma|E_0|^2|T|^2}{4\alpha} = \frac{2|E_0|^2}{\sigma\delta_s\eta_0^2} = \frac{2|E_0|^2 R_s}{\eta_0^2} \tag{1.124}$$

式中，

$$R_s = \mathrm{Re}\{\eta\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1+\mathrm{j}}{\sigma\delta_s}\right\} = \frac{1}{\sigma\delta_s} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \tag{1.125}$$

是金属的表面电阻。

求功率损耗的另一种方法是利用坡印亭向量计算进入导体的功率流，因为在 $z = 0$ 处进入导体的所有功率都被耗散掉了。如式(1.115b)所示，有

$$P^t = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{S}^+ \cdot \boldsymbol{z}\right\}\Big|_{z=0} = \frac{2|E_0|^2\,\mathrm{Re}\{\eta\}}{|\eta+\eta_0|^2}$$

对于大的电导率，因为 $\eta \ll \eta_0$，所以上式变为

$$P^t = \frac{2|E_0|^2 R_s}{\eta_0^2} \tag{1.126}$$

它与式(1.124)相同。

第三种方法是采用等效表面电流密度和表面阻抗，这时不需要用到导体内部的场。由式(1.118)得出导体中的体电流密度为

$$\boldsymbol{J}_t = \boldsymbol{x}\sigma\,\mathrm{T}E_0\,\mathrm{e}^{-\gamma z}\ \ \mathrm{A/m^2} \tag{1.127}$$

因此，在 x 方向单位宽度的总电流为

$$\boldsymbol{J}_s = \int_0^\infty \boldsymbol{J}_t \mathrm{d}z = \boldsymbol{x}\sigma\,\mathrm{T}E_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\gamma z}\mathrm{d}z = \frac{\boldsymbol{x}\sigma\,\mathrm{T}E_0}{\gamma}\ \ \mathrm{A/m}$$

对于很大的 σ 值，取 $\sigma T/\gamma$ 的极限，得到

$$\frac{\sigma T}{\gamma} = \frac{\sigma\delta_s}{(1+\mathrm{j})}\frac{2\eta}{(\eta+\eta_0)} \approx \frac{\sigma\delta_s}{(1+\mathrm{j})}\frac{2(1+\mathrm{j})}{\sigma\delta_s\eta_0} = \frac{2}{\eta_0}$$

因此，

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{x}\frac{2E_0}{\eta_0}\ \ \mathrm{A/m} \tag{1.128}$$

若电导率为无穷大，则 $\Gamma = -1$，且有正确的电流密度

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}\big|_{z=0} = -\boldsymbol{z}\times(\boldsymbol{H}_i+\boldsymbol{H}_r)\big|_{z=0} = \boldsymbol{x}E_0\frac{1}{\eta_0}(1-\Gamma) = \boldsymbol{x}\frac{2E_0}{\eta_0}\quad \mathrm{A/m}$$

流过，这与式(1.128)中的电流是一致的。

现在把均匀体电流延伸到一个趋肤深度上来代替式(1.127)表示的指数衰减体电流。由此，令

$$\boldsymbol{J}_t = \begin{cases} \boldsymbol{J}_s/\delta_s, & 0 < z < \delta_s \\ 0, & z > \delta_s \end{cases} \tag{1.129}$$

这样，总电流是相同的。然后，用焦耳定律求功率损耗：

$$P^t = \frac{1}{2\sigma}\int_S\int_{z=0}^{\delta_s}\frac{|\boldsymbol{J}_s|}{\delta_s^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}s = \frac{R_s}{2}\int_S|\boldsymbol{J}_s|^2\,\mathrm{d}s = \frac{2|E_0|^2 R_s}{\eta_0^2} \tag{1.130}$$

式中，$\int_S$ 表示对整个导体表面的面积分，在这种情况下选择面积为 $1\mathrm{m}^2$。式(1.130)的结果与以前对 P^t 所求的结果——式(1.126)和式(1.124)相同，因此说明功率损耗可用表面电阻 R_s 和表面电流 $\boldsymbol{J}_s$ 及切向磁场 $\boldsymbol{H}_t$ 精确而简单地计算为

$$P^t = \frac{R_s}{2}\int_S \left|\boldsymbol{J}_s\right|^2 \mathrm{d}s = \frac{R_s}{2}\int_S \left|\boldsymbol{H}_t\right|^2 \mathrm{d}s \tag{1.131}$$

重要的是，要认识到表面电流可以通过 $\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}$ 求得，就好像金属是理想导体那样。这一方法是很普遍的，适用于各种电磁场，而不限于平面波，还适用于任意形状的导体，只要其弯曲或拐角的半径大于等于趋肤深度。这种方法也是相当精确的，因为上述过程中的唯一近似是 $\eta \ll \eta_0$，这是很容易做到的近似。作为例子，铜在 1GHz 下的 $|\eta| = 0.012\Omega$，它确实远远小于 $\eta_0 = 377\Omega$。

例题 1.4　导体的平面波反射

考虑一个平面波正入射到充满半空间的铜表面的情形。若 $f = 1\text{GHz}$，计算该导体的传播常数、阻抗和趋肤深度。同时计算反射系数和透射系数。

解： 对于铜，$\sigma = 5.813\times10^7$ S/m，由式(1.60)得趋肤深度为

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 2.088\times10^{-6}\,\text{m}$$

由式(1.113)求出传播常数为

$$\gamma = \frac{1+\mathrm{j}}{\delta_s} = (4.789 + \mathrm{j}4.789)\times10^5\,\text{m}^{-1}$$

由式(1.114)得本征阻抗为

$$\eta = \frac{1+\mathrm{j}}{\sigma\delta_s} = (8.239 + \mathrm{j}8.239)\times10^{-3}\,\Omega$$

相对于真空阻抗（$\eta_0 = 377\Omega$），它是相当小的。根据式(1.105a)，反射系数为

$$\Gamma = \frac{\eta - \eta_0}{\eta + \eta_0} = 1\angle 179.99°$$

（实际上它是理想短路的反射系数），透射系数为

$$T = \frac{2\eta}{\eta + \eta_0} = 6.181\times10^{-5}\angle 45°$$

■

1.8　斜入射到一个介电界面

下面继续对平面波进行讨论。考虑平面波斜入射到两种无耗介电区域之间的平面分界面上的问题，如图 1.13 所示。这个问题有两种标准情况：电场要么在 xz 平面（平行极化），要么垂直于 xz 平面（垂直极化）。当然，一个任意的入射平面波可能这两种极化都不是，但它可以表达为这两种情况的线性叠加。

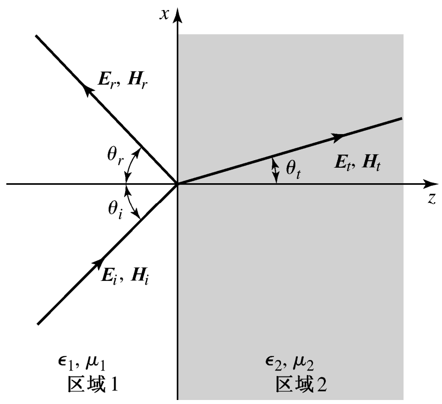


图 1.13　平面波斜入射到两个介电区域之间的分界面的示意图

一般的求解方法类似于正入射问题：首先写出每个区域的入射场、反射场、透射场的表达式，然后匹配边界条件求得未知的振幅系数和相角。

1.8.1　平行极化

在这种情形下，电场向量位于 xz 平面，入射场可以写为

$$\boldsymbol{E}_i = E_0(\boldsymbol{x}\cos\theta_i - \boldsymbol{z}\sin\theta_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \tag{1.132a}$$

$$\boldsymbol{H}_i = \frac{E_0}{\eta_1}\boldsymbol{y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \tag{1.132b}$$

式中，$k_1 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_1}$ 和 $\eta_1 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_1}$ 是区域 1 的波数和波阻抗。反射场和透射场可以写为

$$\boldsymbol{E}_r = E_0\Gamma(\boldsymbol{x}\cos\theta_r + \boldsymbol{z}\sin\theta_r)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \tag{1.133a}$$

$$\boldsymbol{H}_r = \frac{-E_0\Gamma}{\eta_1}\boldsymbol{y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \tag{1.133b}$$

$$\boldsymbol{E}_t = E_0T(\boldsymbol{x}\cos\theta_t - \boldsymbol{z}\sin\theta_t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \tag{1.134a}$$

$$\boldsymbol{H}_t = \frac{E_0T}{\eta_2}\boldsymbol{y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \tag{1.134b}$$

式中，Γ 和 T 为反射系数和透射系数，k_2 和 η_2 是区域 2 的波数和波阻抗，定义为

$$k_2 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_2}, \quad \eta_2 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_2}$$

到目前为止，Γ，T，θ_r 和 θ_t 都是未知量。

强加切向场分量 E_x 和 H_y 在分界面 $z = 0$ 处的连续条件，可得这些未知量的两个复数方程：

$$\cos\theta_i\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1x\sin\theta_i} + \Gamma\cos\theta_r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1x\sin\theta_r} = T\cos\theta_t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2x\sin\theta_t} \tag{1.135a}$$

$$\frac{1}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1x\sin\theta_i} - \frac{\Gamma}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1x\sin\theta_r} = \frac{T}{\eta_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2x\sin\theta_t} \tag{1.135b}$$

式(1.135a)和式(1.135b)的两边都是坐标 x 的函数。若 E_x 和 H_y 在分界面 $z = 0$ 处对所有 x 都是连续的，则这个 x 的变化在方程两边必定相同，于是得到以下条件：

$$k_1\sin\theta_i = k_1\sin\theta_r = k_2\sin\theta_t$$

这又产生了众所周知的斯涅尔反射定律和折射定律：

$$\theta_i = \theta_r \tag{1.136a}$$

$$k_1\sin\theta_i = k_2\sin\theta_t \tag{1.136b}$$

上述论点保证了式(1.135)的相位项在分界面两边随 x 也以相同的速率变化，因此它也称相位匹配条件。

在式(1.135)中利用式(1.136)，可以求得反射系数和透射系数为

$$\Gamma = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta^2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} \tag{1.137a}$$

$$T = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} \tag{1.137b}$$

观察发现，对于正入射，有 $\theta_i = \theta_r = \theta_t = 0$，因此有

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad 和 \quad T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

这与 1.7 节中给出的结果一致。

对于这类极化，存在一个特殊的入射角 θ_b，称为布儒斯特角，它使 $\Gamma = 0$。当式(1.137a)的分子为零（$\theta_i = \theta_b$）时，就产生了 $\eta_2\cos\theta_t = \eta_1\cos\theta_b$，利用

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \sin^2\theta_t} = \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\sin^2\theta_b} \tag{1.138}$$

它可简化为

$$\sin\theta_b = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon_1/\epsilon_2}}$$

1.8.2 垂直极化

在这种情形下，电场向量垂直于 xz 平面，入射场可以写为

$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{y} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \tag{1.139a}$$

$$\boldsymbol{H}_i = \frac{E_0}{\eta_1}(-\boldsymbol{x}\cos\theta_i + \boldsymbol{z}\sin\theta_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \tag{1.139b}$$

和前面一样，$k_1 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_1}$ 和 $\eta_1 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_1}$ 分别为区域 1 的波数和波阻抗。反射场和透射场可写为

$$\boldsymbol{E}_r = E_0 \Gamma \boldsymbol{y} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \tag{1.140a}$$

$$\boldsymbol{H}_r = \frac{E_0\Gamma}{\eta_1}(\boldsymbol{x}\cos\theta_r + \boldsymbol{z}\sin\theta_r)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \tag{1.140b}$$

$$\boldsymbol{E}_t = E_0 T \boldsymbol{y} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \tag{1.141a}$$

$$\boldsymbol{H}_t = \frac{E_0 T}{\eta_2}(-\boldsymbol{x}\cos\theta_t + \boldsymbol{z}\sin\theta_t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \tag{1.141b}$$

式中，$k_2 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_2}$ 和 $\eta_2 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_2}$ 是区域 2 的波数和波阻抗。

在 $z = 0$ 处的切向场分量 E_y 和 H_x 相等，因而有

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_i} + \Gamma\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_r} = T\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 x\sin\theta_t} \tag{1.142a}$$

$$\frac{-1}{\eta_1}\cos\theta_i \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_i} + \frac{\Gamma}{\eta_1}\cos\theta_r \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 x\sin\theta_r} = \frac{-T}{\eta_2}\cos\theta_t \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 x\sin\theta_t} \tag{1.142b}$$

采用与平行极化情况相同的匹配考虑，得到斯涅尔定律

$$k_1\sin\theta_i = k_1\sin\theta_r = k_2\sin\theta_t$$

它与式(1.136)相同。

在式(1.142)中利用式(1.136)，可求得反射系数和透射系数为

$$\Gamma = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \tag{1.143a}$$

$$T = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \tag{1.143b}$$

同样，对于正入射情况，这些结果简化为 1.7 节的结果。

对于垂直极化，不存在使得 $\Gamma = 0$ 的布儒斯特角，因为考察式(1.143a)的分子会发现

$$\eta_2\cos\theta_i = \eta_1\cos\theta_t$$

且利用斯涅尔定律可以给出

$$k_2^2(\eta_2^2 - \eta_1^2) = (k_2^2\eta_2^2 - k_1^2\eta_1^2)\sin^2\theta_i$$

但这产生了矛盾，因为右边括号中的项对介电媒质为零。因此，对介电媒质，垂直极化没有布儒斯特角。

例题 1.5　来自介电界面的斜反射

画出平行和垂直极化平面波由真空入射到 $\epsilon_r = 2.55$ 的介电区域时反射系数随入射角的变化曲线。

解：波阻抗为

$$\eta_1 = 377\ \Omega$$

$$\eta_2 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{377}{\sqrt{2.55}} = 236\ \Omega$$

于是，可以对不同的入射角计算式(1.137a)和式(1.143a)；结果绘于图 1.14 中。

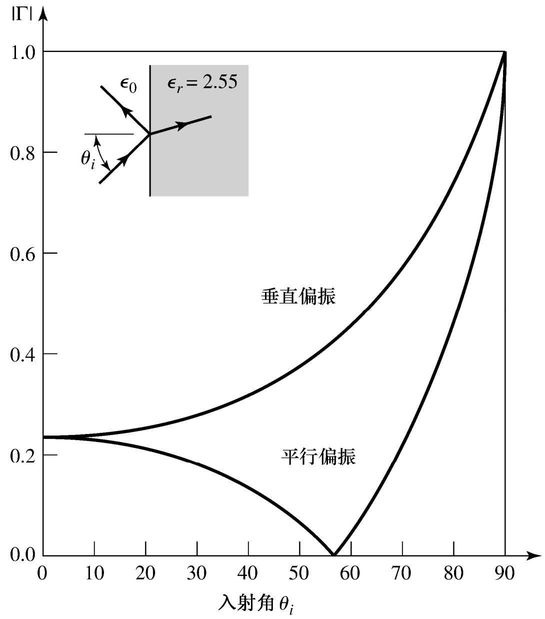


图 1.14　平行和垂直偏振平面波斜入射到介电半空间上的反射系数幅值 ■

1.8.3　全反射和表面波

式(1.136b)给出的斯涅尔定律可重写为

$$\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}\sin\theta_i \tag{1.144}$$

现在，考虑 $\epsilon_1 > \epsilon_2$ 的情况（平行极化和垂直极化都考虑）。当 θ_i 增加时，折射角 θ_t 也增加，但比 θ_i 增加的速度快。使 $\theta_t = 90^\circ$ 的入射角 θ_i 称为临界角 θ_c，所以当

$$\sin\theta_c = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \tag{1.145}$$

大于等于这个角时，入射波会被全部反射，这时没有透射波进入区域 2。下面更详细地考察 $\theta_i > \theta_c$ 且平行极化时的情况。

当 $\theta_i > \theta_c$ 时，式(1.144)表明 $\sin\theta_t > 1$，所以 $\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t}$ 必定是虚数，因而角度 θ_t 没有物理意义。这时，最好把区域 2 中的透射场的表达式转换为

$$\boldsymbol{E}_t = E_0 T\left(\frac{-\mathrm{j}\alpha}{k_2}\boldsymbol{x} - \frac{\beta}{k_2}\boldsymbol{z}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x}\mathrm{e}^{-\alpha z} \tag{1.146a}$$

$$\boldsymbol{H}_t = \frac{E_0 T}{\eta_2}\boldsymbol{y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x}\mathrm{e}^{-\alpha z} \tag{1.146b}$$

注意到 $-\mathrm{j}k_2\sin\theta_t$ 在 $\sin\theta_t > 1$ 时仍为虚数但 $-\mathrm{j}k_2\cos\theta_t$ 仍为实数后，由式(1.134)导出的这种形式的电磁场，因此用 β/k_2 代替 $\sin\theta_t$，用 $-\mathrm{j}\alpha/k_2$ 代替 $\cos\theta_t$。把式(1.146b)代入 $\boldsymbol{H}$ 的亥姆霍兹方程得

$$-\beta^2 + \alpha^2 + k_2^2 = 0 \tag{1.147}$$

使式(1.146)表示的 E_x 和 H_y 与入射场和反射场的 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分量表达式(1.132)和式(1.133)在 $z = 0$ 处匹配，可得

$$\cos\theta_i \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_i} + \Gamma\cos\theta_r \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_r} = \frac{-\mathrm{j}\alpha}{k_2}T\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x} \tag{1.148a}$$

$$\frac{1}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_i} - \frac{\Gamma}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_r} = \frac{T}{\eta_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x} \tag{1.148b}$$

为得到边界 $z = 0$ 处的相位匹配，必须有

$$k_1 \sin\theta_i = k_1 \sin\theta_r = \beta$$

这再次导出斯涅尔反射定律：$\theta_i = \theta_r$ 和 $\beta = k_1 \sin\theta_i$。然后，α 由式(1.147)确定为

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 - k_2^2} = \sqrt{k_1^2 \sin^2\theta_i - k_2^2} \tag{1.149}$$

可以看出，它是正实数，因为 $\sin^2\theta_i > \epsilon_2/\epsilon_1$。反射系数和透射系数可由式(1.148)得到，具体为

$$\Gamma = \frac{(-\mathrm{j}\alpha/k_2)\eta_2 - \eta_1\cos\theta_i}{(-\mathrm{j}\alpha/k_2)\eta_2 + \eta_1\cos\theta_i} \tag{1.150a}$$

$$T = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{(-\mathrm{j}\alpha/k_2)\eta_2 + \eta_1\cos\theta_i} \tag{1.150b}$$

因为 Γ 的形式为 $(\mathrm{j}a-b)/(\mathrm{j}a+b)$，所以其幅值是 1，这表明入射功率被反射回来。

式(1.146)给出的透射场表明，其在 x 方向沿分界面传播，但在 z 方向指数衰减。这样的波称为*表面波*[①]，因为它被紧密地限制在分界面上。表面波是非均匀平面波的一个例子，之所以这么称呼，是因为它除在 x 方向的传播因子外，还具有 z 方向的振幅变化。

最后，对式(1.146)的表面波场计算复坡印亭向量是有意义的：

$$\boldsymbol{S}_t = \boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{H}_t^* = \frac{|E_0|^2|T|^2}{\eta_2}\left(\boldsymbol{z}\frac{-\mathrm{j}\alpha}{k_2} + \boldsymbol{x}\frac{\beta}{k_2}\right)\mathrm{e}^{-2\alpha z} \tag{1.151}$$

它表明，在 z 方向没有实功率流动。x 方向的实功率流是表面波场的功率流，而它随进入区域 2 的距离指数衰减。因此，尽管没有实功率流传输到区域 2，但为了满足分界面上的边界条件，在那里仍然存在非零场。

1.9 一些有用的定理

最后讨论电磁学中的几个定理，这些定理对后续的学习非常有用。

1.9.1 互易定理

互易性是物理学和很多工程领域中的一个普遍概念，读者也许已经熟悉电路理论的互易定理。这里将导出两种不同形式的电磁场的洛伦兹互易定理。本书稍后将利用该定理来得到代表微波电路的网络矩阵的一般特性，计算波导与电流探针和电流环的耦合，计算波导间通过小孔的耦合。这种非常有用的概念还具有其他重要应用。

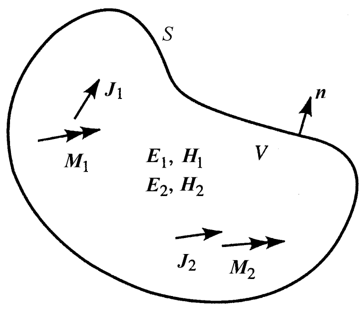


图 1.15　洛伦兹互易定理示意图

考虑由封闭表面 S 围成的体积 V 内的两组分开的源 $\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{J}_2, \boldsymbol{M}_2$，它们产生的场分别为 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{H}_2$，如图 1.15 所示。两组源和场分别满足麦克斯韦方程组，所以可以写出

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_1 = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{M}_1 \tag{1.152a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_1 = \mathrm{j}\omega\epsilon\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{J}_1 \tag{1.152b}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_2 = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{M}_2 \tag{1.153a}$$

① 有的作者认为，“表面波”一词不应该用于这种类型的场，因为仅当平面波场在 $z<0$ 的区域时它才存在，因此最好称之为“类表面波”（surface wave-like）或“强迫表面波”（forced surface wave）。

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_2 = \mathrm{j}\omega\epsilon \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{J}_2 \tag{1.153b}$$

现在考虑量$\nabla \cdot (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1)$，它可以由向量恒等式(B.8)展开得到：

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{J}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2 \tag{1.154}$$

在整个体积 V 内积分，并利用散度定理(B.15)，可得

$$\begin{aligned}\int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1)\mathrm{d}v &= \oint_S (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\ &= \int_V (\boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{J}_1 - \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{J}_2 + \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{H}_2 \cdot \boldsymbol{M}_1)\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{1.155}$$

式(1.155)是互易定理的普遍形式，但实际上有些特殊情况往往会导致一些简化。考虑三种情况。

S 封闭无源。这时 $\boldsymbol{J}_1 = \boldsymbol{J}_2 = \boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}_2 = 0$，场 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{H}_2$ 为无源场。此时，式(1.155)的右边为零，于是得到

$$\oint_S \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint_S \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.156}$$

这个结果将在第 4 章用来阐明互易微波网络的阻抗矩阵的对称性。

S 为理想导体。例如，S 可能是一个理想导电的封闭腔的内表面。于是式(1.155)的面积分为零，因为 $\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 \cdot \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1)\cdot \boldsymbol{H}_2$［由向量恒等式(B.3)得到］，而 $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1$ 在理想导体表面为零（$\boldsymbol{E}_2$ 也类似）。结果为

$$\int_V (\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{J}_2 - \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2)\mathrm{d}v = \int_V (\boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{J}_1 - \boldsymbol{H}_2 \cdot \boldsymbol{M}_1)\mathrm{d}v \tag{1.157}$$

这个结果与电路理论的互易定理相似。换言之，这个结果说，系统的响应 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$ 不会因为源点和场点的交换而改变，即由 $\boldsymbol{J}_2$ 产生的在 $\boldsymbol{J}_1$ 处的场 $\boldsymbol{E}_2$ 与由 $\boldsymbol{J}_1$ 产生的在 $\boldsymbol{J}_2$ 处的场 $\boldsymbol{E}_1$ 相等。

S 为无限远处的球面。此时，S 处的场极其远离源，因而可以局部地考虑为平面波。于是，将阻抗关系 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} / \eta$ 应用到式(1.155)可得

$$(\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1)\cdot \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1)\cdot \boldsymbol{H}_2 - (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_2)\cdot \boldsymbol{H}_1 = \frac{1}{\eta}\boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2 - \frac{1}{\eta}\boldsymbol{H}_2 \cdot \boldsymbol{H}_1 = 0$$

所以再次得到了式(1.157)的结果。对于表面阻抗边界条件成立的封闭表面 S 的情况，也能得到这个结果。

1.9.2 镜像理论

在很多问题中，电流源位于接地导电平面附近。镜像理论允许把接地平面拿开而在平面的另一边放置一个虚拟的镜像源。读者应该熟悉静电学中的这一概念，下面针对一个无限电流片相邻于无限大地平面的情况来证明这一结果，然后总结其他可能的情况。

考虑平行于接地平面的表面电流密度 $\boldsymbol{J}_s = J_{s0}\boldsymbol{x}$，如图 1.16a 所示。由于电流源是无限延伸的，而且在 x, y 方向是均匀的，所以它将激励离它而去的平面波。负向传输的波将在 $z = 0$ 的地平面反射，然后沿正向传播。因此，在 $0 < z < d$ 的区域将形成一个驻波，而在 $z > d$ 的区域将形成一个正向传输波。这两个区域的场的形式可以写为

$$E_x^s = A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}), \qquad 0 < z < d \tag{1.158a}$$

$$H_y^s = \frac{-A}{\eta_0}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}), \qquad 0 < z < d \tag{1.158b}$$

$$E_x^+ = B\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}, \qquad z > d \tag{1.159a}$$

$$E_y^+ = \frac{B}{\eta_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}, \qquad z > d \tag{1.159b}$$

式中，η_0 是真空中的波阻抗。注意，式(1.158)的驻波场的构成已经满足 $z = 0$ 处的边界条件 $E_x = 0$。余下需要满足的边界条件是 $\boldsymbol{E}$ 在 $z = d$ 处的连续性，以及 $\boldsymbol{H}$ 场在 $z = d$ 处由电流片导致的不连续性。因为 $\boldsymbol{M}_S = 0$，所以由式(1.36)可得

$$E_x^s = E_x^+\Big|_{z=d} \tag{1.160a}$$

而由式(1.37)有

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{z}\times\boldsymbol{y}(H_y^+ - H_y^s)\big|_{z=d} \tag{1.160b}$$

然后利用式(1.158)和式(1.159)得到

$$2\mathrm{j}A\sin k_0 d = B\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 d}$$

和

$$J_{s0} = -\frac{B}{\eta_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 d} - \frac{2A}{\eta_0}\cos k_0 d$$

从中可以求得 A 和 B：

$$A = \frac{-J_{s0}\eta_0}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 d}$$
$$B = -\mathrm{j}J_{s0}\eta_0\sin k_0 d$$

因此，总场为

$$E_x^s = -\mathrm{j}J_{s0}\eta_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 d}\sin k_0 z, \qquad 0 < z < d \tag{1.161a}$$
$$H_y^s = J_{s0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 d}\cos k_0 z, \qquad 0 < z < d \tag{1.161b}$$
$$E_x^+ = -\mathrm{j}J_{s0}\eta_0\sin k_0 d\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}, \qquad z > d \tag{1.162a}$$
$$E_y^+ = -\mathrm{j}J_{s0}\sin k_0 d\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}, \qquad z > d \tag{1.162b}$$

现在，考虑把镜像理论应用于这一问题。如图 1.16b 所示，把地平面拿开，然后在 $z = -d$ 处放置一个镜像源 $-\boldsymbol{J}_s$。通过叠加，$z > 0$ 的总场可以通过把两个源独立产生的场相加得到。这些场可以由与上述分析相类似的方法导出，具有以下结果。

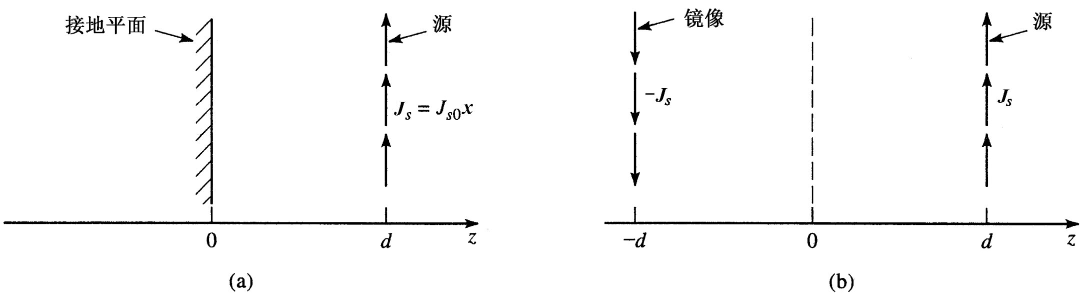


图 1.16　镜像理论应用于接地平面附近有一个电流源的示意图：(a)平行于接地平面的表面电流密度；(b)用 $z = -d$ 处的镜像电流代替(a)中的接地平面

由 $z = d$ 处的源产生的场：

$$E_x = \begin{cases} \dfrac{-J_{s0}\eta_0}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0(z-d)}, & z > d \\ \dfrac{-J_{s0}\eta_0}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0(z-d)}, & z < d \end{cases} \tag{1.163a}$$

$$H_y = \begin{cases} \dfrac{-J_{s0}}{2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0(z-d)}, & z > d \\ \dfrac{J_{s0}}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0(z-d)}, & z < d \end{cases} \tag{1.163b}$$

由 $z = -d$ 处的源产生的场：

$$E_x = \begin{cases} \dfrac{J_{s0}\eta_0}{2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0(z+d)}, & z > -d \\ \dfrac{J_{s0}\eta_0}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0(z+d)}, & z < -d \end{cases} \tag{1.164a}$$

$$H_y = \begin{cases} \dfrac{J_{s0}}{2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0(z+d)}, & z > -d \\ \dfrac{-J_{s0}}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0(z+d)}, & z < -d \end{cases} \tag{1.164b}$$

可以证明，这个解与式(1.161)在 $0 < z < d$ 时的解及式(1.162)在 $z > d$ 时的解是一致的，因此证明了镜像理论求解方法的正确性。注意，镜像理论只能给出导电平面右边的正确场。图 1.17 给出了用于电、磁偶极子的普遍镜像理论。

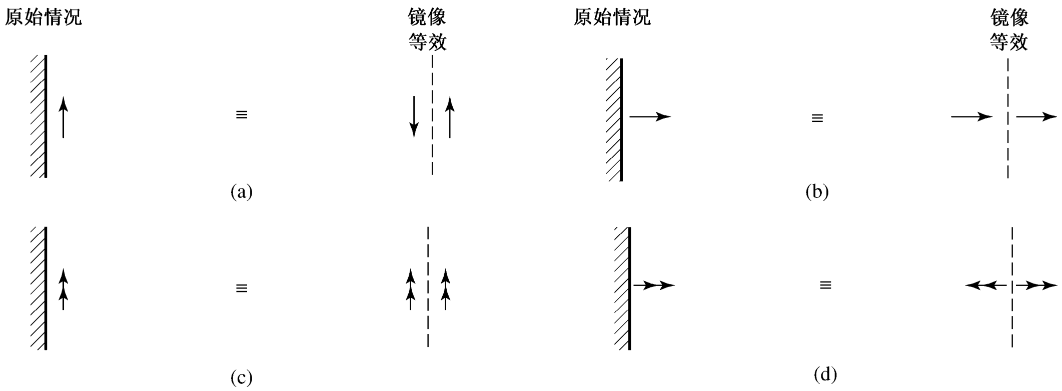


图 1.17　电流和磁流镜像：(a)平行于接地平面的电流；(b)垂直于接地平面的电流；(c)平行于接地平面的磁流；(d)垂直于接地平面的磁流

参考文献

[1] T. S. Sarkar, R. J. Mailloux, A. A. Oliner, M. Salazar-Palma, and D. Sengupta, *History of Wireless*, John Wiley & Sons, Hoboken, N.J., 2006.

[2] A. A. Oliner, “Historical Perspectives on Microwave Field Theory,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-32, pp. 1022–1045, September 1984 [this special issue contains other articles on the history of microwave engineering].

[3] F. Ulaby, *Fundamentals of Applied Electromagnetics*, 6th edition, Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 2010.

[4] J. D. Kraus and D. A. Fleisch, *Electromagnetics*, 5th edition, McGraw-Hill, New York, 1999.

[5] S. Ramo, T. R. Whinnery, and T. van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3rd edition, John Wiley & Sons, New York, 1994.

[6] R. E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, 2nd edition, Wiley-IEEE Press, Hoboken, N.J., 2001.

[7] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[8] D. M. Pozar, *Microwave and RF Design of Wireless Systems*, John Wiley & Sons, Hoboken N.J., 2001.

习题

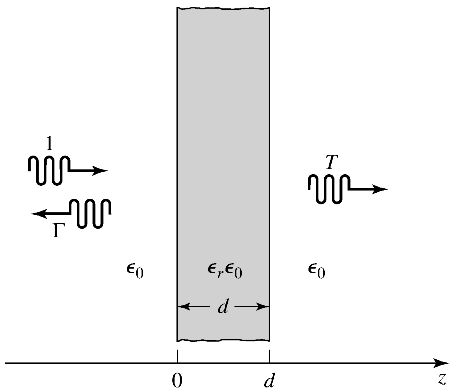
1.1 谁发现了无线电？马可尼发现了现代无线电，但此前其他人员有了几个重大发现。简述 1865—1900 年关于无线电的早期工作，特别是马隆洛·米斯、奥利弗·洛奇、尼古拉·特斯拉和马可尼的工作。解释感生通信方案和涉及波传播的无线通信方案的不同。无线电的发展可归功于某个人吗？参考文献[1]可能是一个较好的起点。

1.2 在 $\epsilon_r = 2.45$ 的聚苯乙烯填充区域内沿 x 轴传播的一个平面波，电场为 $E_y = E_0\cos(\omega t - kx)$，频率为 2.4GHz，$E_0 = 5.0\text{V/m}$。(a)求磁场的振幅和方向。(b)求相速。(c)求波长。(d)求 $z_1 = 0.1\text{m}$ 和 $z_2 = 0.15\text{m}$ 之间的相移。

1.3 证明 $\boldsymbol{E} = E_0(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}$ 形式的线极化平面波可以表示成右旋圆极化波与左旋圆极化波之和，其中 a 和 b 是实数。

1.4 计算式(1.76)的一般平面波场的坡印亭向量。

1.5 一个平面波正入射到介电常数为 ϵ_r、厚度为 d 的介质片，如下图所示。其中，$d = \lambda_0 / (4\sqrt{\epsilon_r})$，$\lambda_0$ 为入射波的真空波长。若介质片的两边都是真空，求波由介质片前面反射的反射系数。



1.6 考虑一个右旋圆极化平面波由真空（$z < 0$）正入射到由良导体构成的半空间（$z > 0$）。令入射电场为

$$\boldsymbol{E}_i = E_0(\boldsymbol{x} - \mathrm{j}\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}$$

求 $z > 0$ 的区域的电场和磁场。计算 $z < 0$ 和 $z > 0$ 的坡印亭向量并证明复功率是守恒的。反射波的极化方向如何？

1.7 考虑一个在 $z < 0$ 的有耗介电媒质中传播的平面波，在 $z = 0$ 处有一理想导电板。假定有耗媒质的特性参量为 $\epsilon = (5 - \mathrm{j}2)\epsilon_0$，$\mu = \mu_0$，平面波的频率为 1.0GHz，入射电场在 $z = 0$ 处的大小为 4V/m。求 $z < 0$ 处的反射电场，画出总电场在区间$-0.5 \leqslant z \leqslant 0$ 内的幅值。

1.8 一个 1GHz 的平面波正入射到厚度为 t 的薄铜片上。(a)计算波在空气-铜和铜-空气界面上的传输损耗，用 dB 表示。(b)若将铜片用作屏蔽，要把传输波的电平减少 150dB，则铜片的最小厚度应为多少？

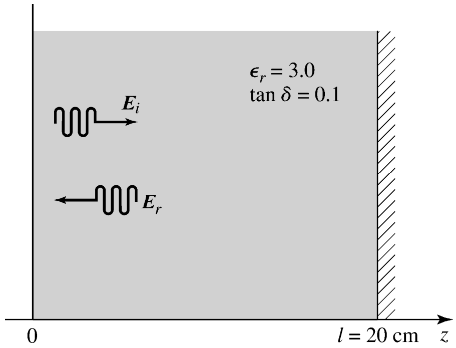
1.9 一均匀有耗媒质（$\epsilon_r = 3.0$，$\tan\delta = 0.1$，$\mu = \mu_0$）填充从 $z = 0$ 到 $z = 20\text{cm}$ 的区域，$z = 20\text{cm}$ 处为接地平面，如下图所示。一入射平面波具有电场

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{x}100\mathrm{e}^{-\gamma z}\ \text{V/m}$$

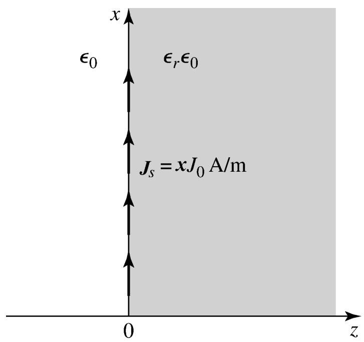
从 $z = 0$ 开始，向$+z$ 方向传播。频率为 $f = 3.0\text{GHz}$。

(a) 计算 $z = 0$ 处的入射功率密度 S_i 和反射波的功率密度 S_r。

(b) 计算来自 $z=0$ 处的总场在 $z=0$ 处的输入功率密度 S_{in}。是否有 $S_{in}=S_i-S_r$?



1.10 假定表面电流密度为 $\boldsymbol{J}_s = J_0\,\boldsymbol{x}$ A/m 的无限大电流片置于 $z=0$ 处的平面上，$z<0$ 为真空，$z>0$ 为 $\epsilon = r\epsilon_0$ 的电介质，如下图所示。求两个区域的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 场。提示：假定平面波解离开电流片传播，如例题 1.3 中那样，利用匹配边界的条件求振幅。



1.11 重做习题 1.10，但表面电流密度为 $\boldsymbol{J}_s = J_0\boldsymbol{x}e^{-j\beta x}$ A/m，其中 $\beta < k_0$。

1.12 一平行极化平面波由真空斜入射到一磁材料，其介电常数 ϵ_0 为 0，磁导率为 $\mu_0\mu_r$。求反射系数和透射系数。在这种情况下，是否存在布儒斯特角，当入射角为这个特殊角时反射系数为零？

1.13 对于垂直极化的情况重做习题 1.12。

1.14 各向异性材料具有如下介电常数张量 $\boldsymbol{\epsilon}$。在材料中的某点，电场已知为 $\boldsymbol{E} = 3\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} + 5\boldsymbol{z}$。在该点的 $\boldsymbol{D}$ 为多少？

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & 3j & 0 \\ -3j & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1.15 考虑一个旋性介电常数张量：

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_r & j\kappa & 0 \\ -j\kappa & \epsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

证明变换

$$E_+ = E_x - jE_y, \quad D_+ = D_x - jD_y$$
$$E_- = E_x + jE_y, \quad D_- = D_x + jD_y$$

可使得 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的关系写为

$$\begin{bmatrix} D_+ \\ D_- \\ D_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\epsilon}' \begin{bmatrix} E_+ \\ E_- \\ E_z \end{bmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{\epsilon}'$ 是一个对角阵，$\boldsymbol{\epsilon}'$ 的元素是什么？利用这个结果，导出 E_+和 E_-的平面波方程，求相应的传播常数。

1.16 证明：式(1.157)表达的互易定理也可应用到由一个封闭表面 S 包围的区域，其上存在表面阻抗边界条件。

1.17 考虑位于 $z = d$ 平面的表面电流密度 $\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{y}J_0\mathrm{e}^{-\beta x}$ A/m 。若一个理想导体接地平面位于 $z = 0$ 处，使用镜像理论求 $z > 0$ 时的总场。

1.18 令 $\boldsymbol{E} = E_\rho\boldsymbol{\rho} + E_\phi\boldsymbol{\phi} + E_z\boldsymbol{z}$ 是圆柱坐标系中的电场向量。通过计算对给定电场的向量恒等式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E}$ 的两边来证明：在圆柱坐标系中把 $\nabla^2\boldsymbol{E}$ 表达为 $\boldsymbol{\rho}\nabla^2E_\rho + \boldsymbol{\phi}\nabla^2E_\phi + \boldsymbol{z}\nabla^2E_z$ 是不正确的。