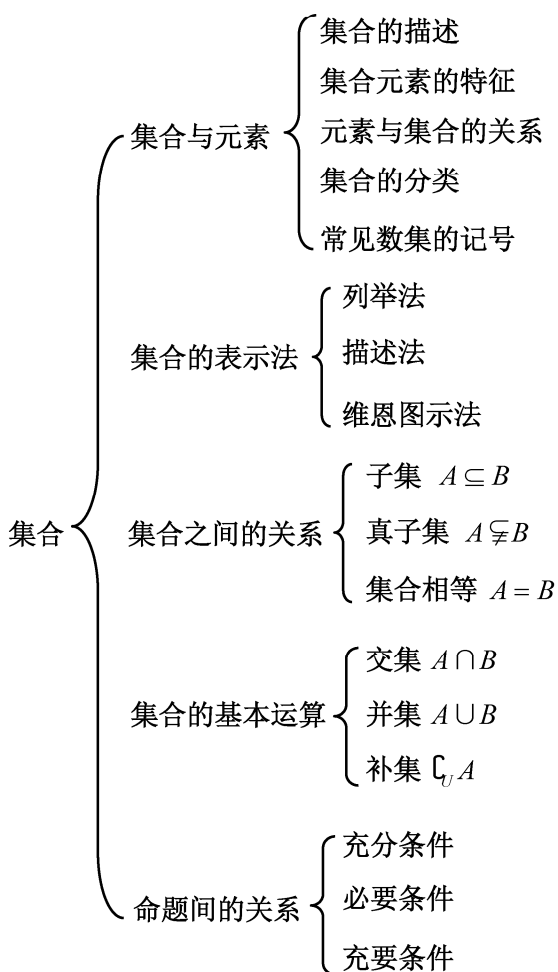


第 1 章

集 合

知识框架



❖ 考纲解析 ❖

(一) 考试内容

集合、元素及其关系，数集，空集；集合的表示法；集合之间的关系（子集、真子集、集合的相等）；集合的运算（交集、并集、补集）；充分条件、必要条件、充要条件。

(二) 考试要求

1. 理解集合的概念，掌握自然数集、正整数集、整数集、有理数集、实数集的字母表示，了解空集、有限集合、无限集合的含义，会用符号表示元素与集合之间的关系。

2. 掌握集合的表示方法，会用列举法和描述法表示一些简单的集合。

3. 理解集合的相等与包含关系，掌握子集、真子集、两集合相等的概念，会判别集合之间的关系，并能用符号表示集合之间的关系。

4. 理解交集、并集、补集的含义，会求集合的交集、并集、补集。

5. 了解充分条件、必要条件和充要条件的意义，会判别充分条件、必要条件和充要条件。

❖ 知识梳理 ❖

一、基本概念

◎ 集合的概念

1. 一般，我们把研究的对象统称为_____，由一些确定的对象组成的一个整体叫作_____。

2. 给定的集合，它的元素必须是_____。也就是说，给定一个集合，那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了。

3. 若元素 a 在集合 A 中，则可以记作_____，若 b 不是集合 A 的元素，则可以记作_____。

4. 集合中元素的三大特性是_____。

5. 不含任何元素的集合叫作_____，记作_____。

6. 常见的集合中，自然数集记作_____，正整数集记作_____，整数集记作_____，有理数集记作_____，实数集记作_____。

◎ 集合的表示

7. 常见的集合表示法有_____。

8. 用列举法表示集合时要注意元素_____。

9. 用描述法表示集合的书写格式为_____。

10. 集合 $\{0, 1, 2\}$ 的表示法为_____。

11. 集合 $\{x | |x-1| < 0\}$ 的表示方法为_____。

◎ 集合之间的关系

12. 如果集合 B 的元素都是集合 A 的元素，那么把集合 B 叫作集合 A 的_____，记

作_____.

13. 如果集合 B 是集合 A 的子集, 且 A 中至少有一个元素不属于 B , 那么把 B 叫作 A 的_____, 记作_____.

14. 如果集合 B 的元素与集合 A 的元素完全相同, 那么就说两个集合_____, 记作_____.

◎ 集合的运算

15. 对于两个给定的集合 A 、 B , 由既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合叫作 A 与 B 的_____, 记作_____.

16. 对于两个给定的集合 A 、 B , 由属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集合叫作 A 与 B 的_____, 记作_____.

17. 如果集合 A 是全集 U 的子集, 那么由 U 中不属于 A 的所有元素组成的集合叫作 A 在全集 U 中的_____, 记作_____.

◎ 充要条件

18. 若 $p \Rightarrow q$, 则称“ p 是 q 的_____”或“ q 是 p 的_____”.

19. 若 $p \Leftrightarrow q$, 则称“ p 是 q 的_____”或“ q 是 p 的_____”或“ q 与 p _____”.

二、必记性质

1. 并集的运算性质.

(1) $A \cup B = B \cup A$

(2) $A \cup A = A$

(3) $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

(4) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$

(5) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

2. 交集的运算性质.

(1) $A \cap B = B \cap A$

(2) $A \cap A = A$

(3) $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$

(4) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$

(5) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

3. 补集的运算性质.

(1) $A \cup \complement_U A = U$

(2) $A \cap \complement_U A = \emptyset$

(3) $\complement_U (\complement_U A) = A$



知识梳理答案

- | | | |
|---|--------------------|---|
| 1. 元素, 集合 | 2. 确定的 | 3. $a \in A, b \notin A$ |
| 4. 确定性、互异性、无序性 | | 5. 空集, $\emptyset$ |
| 6. $\mathbf{N}, \mathbf{N}^*$ (或 $\mathbf{N}_+$), $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ | | 7. 列举法, 描述法, 图示法 |
| 8. 不重复、不遗漏、不计顺序 | | 9. $\{代表元素 元素的特征性质\}$ |
| 10. 列举法 | 11. 描述法 | 12. 子集, $B \subseteq A$ 或 $A \supseteq B$ |
| 13. 真子集, $B \subset A$ 或 $A \supset B$ | | 14. 相等, $A = B$ |
| 15. 交集, $A \cap B$ | 16. 并集, $A \cup B$ | 17. 补集, $\complement_U A$ |
| 18. 充分条件, 必要条件 | | 19. 充要条件, 充要条件, 等价 |

❖ 要点突破 ❖

知识要点 1 集合的概念

- 由一些确定的对象组成的一个整体叫作集合.
- 集合必须具有以下两个特点:
 - ① 整体性. 集合是指某些对象的整体而不是指其中的个别对象.
 - ② 确定性. 依据某个明确的标准, 对象要么是集合的元素, 要么不是集合的元素; 因此标准的选择至关重要.

【典型例题 1】考查下列每组对象:

- (1) 著名的数学家;
- (2) 不超过 20 的所有自然数;
- (3) 某校 2012 年招收的高个子学生;
- (4) 方程 $x^2 - 9 = 0$ 的实数解;
- (5) 在直角坐标平面内, 第一象限的所有点.

其中能构成集合的是 ().

- | | |
|----------------|----------------|
| A. (1) (2) (3) | B. (2) (3) (4) |
| C. (2) (4) (5) | D. (3) (4) (5) |

【解析】(1) “著名的数学家” 不是一个明确的标准, 不能构成一个集合; (3) “高个子学生” 这一标准也不确定, 无法判定某人是高还是矮, 也不能构成集合. (2)、(4) 的对象是确定的. (5) 的对象虽然有无限个, 但它是确定的. 因此选 C.

【方法提炼】

判断某组对象能否构成集合, 关键看对象是否是整体的和确定的. 标准一定要是明确的, 不能模糊, 无法判断.

【小测试 1】下列各组对象能构成集合的是 ().

- (1) 某校高一 (2) 班漂亮的女生;
- (2) 小于 20 的所有质数;

- (3) 不等式 $2x > 1$ 的解;
 (4) 以 $O(1,2)$ 为圆心, 2 为半径的圆上的所有点;
 (5) 2008 年北京奥运会开幕式的所有参演人员.

- A. (1) (2) (3) (5) B. (1) (2) (3) (4)
 C. (1) (2) (4) (5) D. (2) (3) (4) (5)

知识要点 2 集合中元素的三个特性

1. 集合中元素的三个特性: 确定性、互异性、无序性.

① 确定性: 对于集合 A 和某一对象 x , 有一个明确的判断标准可以鉴定 x 属于 A , 还是 x 不属于 A , 二者必居其一.

② 互异性: 集合中没有相同的元素. 该知识点是考查的重点. 注意点: 由元素对应相等列方程解得的结果须**回代检验**, 防止出现重复元素.

③ 无序性: 集合中的元素是不排序的.

2. 两个集合相等的概念: 只要构成集合的元素是一样的, 这两个集合就是相等的.

【典型例题 2】 求集合 $\{1, x, x^2 - x\} (x \in \mathbf{R})$ 中元素 x 所满足的条件.

【解析】 根据集合中元素的互异性可知:

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq x^2 - x \\ x^2 - x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 2 \\ x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

故元素 x 所满足的条件为 $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 2$, $x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

【方法提炼】

考查集合中元素的互异性, 一旦集合的元素确定下来, 那么集合中就不会有重复的元素, 即**元素间均不相等**. 为了防止元素重复, 回代检验是良方. 注意: 有些考生在解答时往往容易遗漏不等式, 三个元素两两不相等的的不等式应该有三个, 而不是两个.

【小测试 2】 已知集合 $A = \{1, 1+d, 1+2d\}$, $B = \{1, q, q^2\}$, 若 $A = B$, 求 d , q 的值.

知识要点 3 集合与元素关系的判断

1. 如果 x 是集合 A 的元素, 称 x 属于 A , 记作 $x \in A$, 否则 $x \notin A$.

2. 符号 $\in$ 与 $\notin$ 只能用在元素与集合之间, 表示元素与集合的从属关系, 是个体与整体的关系.

【典型例题 3】 用符号 $\in$ 与 $\notin$ 填空.

(1) $2\sqrt{3}$ _____ $\{x|x < \sqrt{11}\}$;

(2) $(-1, 1)$ _____ $\{y|y = x^2\}$.

【解析】

(1) $2\sqrt{3} = \sqrt{12} > \sqrt{11}$, 故填 $\notin$.

(2) 把 $(-1, 1)$ 带入 $y = x^2$ 成立, 但 $(-1, 1)$ 是有序实数对, 而 $\{y|y = x^2\}$ 是 y 值的集合, 故填 $\notin$.

【方法提炼】

1. 判断一个对象是不是某个集合的元素, 就是判断这个对象是否具有该集合元素所具有公共属性, 因为集合多种多样, 因此判断方法也多种多样, 因题而异.

2. 一般地, ① 确定某数是否为某特定集合的元素, 往往要做恰当的等价变换, 进而做出判断, 如典型例题 3 中的 (1) 题; ② 确定某数是否为某数集的元素关键是看该数是否能表示成该集合的元素形式, 如典型例题 3 中的 (2) 题.

【小测试 3】 用符号 $\in$ 与 $\notin$ 填空.

(1) $2\sqrt{2}$ _____ $\{x|x < 3\}$;

(2) $(1, -1)$ _____ $\{x|x = y^2\}$;

(3) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ _____ $\{x|x < \sqrt{3} + \sqrt{5}\}$.

知识要点 4 集合的子集、真子集、相等

1. 子集.

(1) 定义: 对于给定的两个集合 A, B , 如果集合 A 中的任何一个元素集合 B 中都有, 则称集合 A 是集合 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

(2) 对于子集需注意的几点:

- ① 若 A 是 B 的子集, 则由任意 $x \in A$, 能推出 $x \in B$;
- ② 任何一个集合都是它本身的子集, 即 $A \subseteq A$;
- ③ 空集是任何集合的子集, 即 $\emptyset \subseteq A$;
- ④ 在解题中, 经常给定条件 $A \subseteq B$, 注意集合 A 是空集的情况;
- ⑤ 要注意各符号之间的区别与联系.

2. 真子集: 如果 $A \subseteq B$, 且 $A \neq B$, 就说集合 A 是集合 B 的真子集, 记作 $A \subset B$ (注意: 现在常用 “ $\subsetneq$ ” 符号表示真子集, 即真子集也记作 $A \subsetneq B$).

3. 集合相等: 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$.

4. 符号 $\in, \notin$ 表示元素与集合之间的关系, 符号 $\subseteq, \subset, (\subsetneq), \supseteq$ 表示集合与集合之间的关系, 使用时不可混淆.

【典型例题 4】

(1) 满足条件 $\{1, 2\} \subset M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的集合的个数是 ().

A. 3

B. 6

C. 7

D. 9

(2) 下列说法: ①空集没有子集; ②任何集合至少有两个子集; ③空集是任何集合的真子集; ④ $\emptyset \subset A$, 则 $A \neq \emptyset$, 其中正确的有()个.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【解析】

(1) 确定集合 M 中元素的组成情况即可求解, 由已知得集合必含1和2, 且至少有一个不同于1和2的元素. 故符合条件的集合 M 为 $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 共7个, 故选C.

(2) 由空集的性质可知: ①、②、③是错误的, ④是正确的, 故选A.

【方法提炼】

1. 依据子集的定义, 可根据集合 M 中所含元素的个数进行分类, 由于集合中必含元素1、2, 问题就归结为3、4、5这三个元素的添加了, 问题就不难解决了. 同时这两个步骤很好地体现了数学的两个重要思想——分类思想与化归思想.

2. 掌握每个知识点的概念与性质是解决问题的基本要求.

【小测试4】

(1) 满足条件 $\{a, b\} \subset M \subseteq \{a, b, c, d\}$ 的集合的个数是().

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

(2) 设集合 $A = \{x, y\}$, $B = \{0, x^2\}$, 若 $A = B$, 求实数 x, y .

知识要点5 集合关系中的参数取值问题

探究集合关系时, 常涉及一元二次方程根的问题及函数问题, 解题过程常用到分类讨论与数形结合思想.

【典型例题5】 设集合 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$ ($x \in \mathbf{R}$), 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

【解析】 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\} = \{-4, 0\}$, 因为 $B \subseteq A$, 所以分 $B = A$ 和 $B \subset A$ 两种情况讨论:

(1) 当 $B = A$ 时, $B = \{-4, 0\}$, 即 $-4, 0$ 是方程 $x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$ 的两个根, 于是得 $a = 1$.

(2) 当 $B \subset A$ 时, 若 $B = \emptyset$, 则 $\Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) < 0$, 解得 $a < -1$; 若 $B \neq \emptyset$, 则 $B = \{-4\}$ 或 $\{0\}$, $\Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) = 0$, 解得 $a = -1$, 验证知 $B = \{0\}$ 满足条件.

综上所述, 所求实数 a 的值为 $a = 1$ 或 $a \leq -1$.

【方法提炼】

1. 在解有关子集、真子集问题时, 要注意不能漏掉空集, 参数解出后, 应注意回代检验.

2. $B \subseteq A$ 包含两种情况, 解题时必须分类讨论, 分类讨论要结合实际, 做到不重不漏.

【小测试5】 已知 $A = \{x | -3 < x < 5\}$, $B = \{x | x < a\}$, 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

知识要点 6 并集及其性质

1. 并集的三种语言：文字语言、符号语言、图形语言.

2. 并集的性质：

$$(1) A \cup B = B \cup A; \quad (2) A \cup A = A; \quad (3) A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A;$$

$$(4) A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B; \quad (5) A \cup (\complement_U A) = U.$$

【典型例题 6】 已知集合 $A = \{x | x > 5\}$, $B = \{x | x < a - 3\}$, 求 $A \cup B$.

【解析】 分类讨论：

(1) 当 $a - 3 \leq 5$, 即 $a \leq 8$ 时, $A \cup B = \{x | x < a - 3 \text{ 或 } x > 5\}$;

(2) 当 $a - 3 > 5$, 即 $a > 8$ 时, $A \cup B = \mathbf{R}$.

【方法提炼】

在不等式解集的并集运算中, 利用数轴可使问题变得简单.

【小测试 6】

(1) 已知集合 $A = \{0, 2, a\}$, $B = \{1, a^2\}$, 若 $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 16\}$, 则 a 的值为 ().

A. 3

B. 4

C. 2

D. 1

(2) 满足 $\{1, 3\} \cup A = \{1, 3, 5\}$ 的所有集合 A 的个数是 ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

知识要点 7 交集及其性质

1. 交集的三种语言：文字语言、符号语言、图形语言.

2. 交集的性质：

$$(1) A \cap B = B \cap A; \quad (2) A \cap A = A; \quad (3) A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset;$$

$$(4) A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A; \quad (5) A \cap (\complement_U A) = \emptyset.$$

【典型例题 7】 已知集合 $A = \{-1, 1, 3\}$, $B = \{a + 2, a^2 + 4\}$, 且 $A \cap B = \{3\}$, 求实数 a 的取值范围.

【解析】 因为 $A \cap B = \{3\}$, 所以 $a + 2 = 3$ 或 $a^2 + 4 = 3$,

解得 $a = 1$, 此时满足 $A \cap B = \{3\}$, 故实数 a 的取值范围为 $a = 1$.

【方法提炼】

在解决带参数的集合运算时, 关键是找到“切入点”, 同时注意分类讨论, 最终的结果要进行验证.

【小测试 7】

(1) 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 < x < 3\}$, 则 $A \cap B = ()$.

A. $\{x | -1 < x < 1\}$

B. $\{x | -2 < x < 1\}$

C. $\{x | -2 < x < 3\}$

D. $\{x | 0 < x < 1\}$

(2) 集合 $A = \{x^2, 2x-1, -4\}$, $B = \{x-5, 1-x, 9\}$, 且 $A \cap B = \{9\}$, 求实数 x 的取值范围.

知识要点 8 全集与补集及其性质

1. 补集的三种语言: 文字语言、符号语言、图形语言.

2. 补集的性质:

$$(1) A \cup (\complement_U A) = U; \quad (2) A \cap (\complement_U A) = \emptyset; \quad (3) \complement_U (\complement_U A) = A;$$

$$(4) \complement_U \emptyset = U; \quad (5) \complement_U U = \emptyset.$$

3. 数轴和维恩图是进行交、并、补运算的有力工具.

【典型例题 8】 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x \mid |x-1| < 2\}$, 求集合 $\complement_U M$.

【解析】 $M = \{x \mid |x-1| < 2\} = \{x \mid -2 < x-1 < 2\} = \{x \mid -1 < x < 3\}$,

$$\text{则 } \complement_U M = \{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3\}.$$

【方法提炼】

1. 要会解含绝对值的简单不等式.

2. 如何求不等式解集的补集?

(1) 将不等式的解集在数轴上标出来;

(2) 取数轴上剩余部分即为补集. 这是数形结合思想的具体应用.

3. 求不等式解集的补集时需注意什么问题呢?

(1) 实点变虚点, 虚点变实点. 如 $M = \{x \mid -1 < x < 3\}$, 则 $\complement_U M = \{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$;

(2) 注意全集和补集的相对性, 同一子集相对不同的全集是不同的.

【小测试 8】 已知全集 $U = \{0, 2, 3-a^2\}$, 集合 $M = \{2, a^2-a-2\}$, 且 $\complement_U M = \{-1\}$, 求实数 a 的值.

知识要点 9 交集、并集、补集的综合

$$1. A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ 且 } A \supseteq B.$$

$$2. A \cup B = U \text{ 且 } A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A = \complement_U B.$$

【典型例题 9】 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{4, 7, 8\}$, 求:

$$\textcircled{1} A \cap B; \quad \textcircled{2} A \cup B; \quad \textcircled{3} (\complement_U B) \cap A; \quad \textcircled{4} (\complement_U B) \cap (\complement_U A).$$

【解析】 由已知可得:

$$\textcircled{1} A \cap B = \{4\};$$

$$\textcircled{2} A \cup B = \{3, 4, 5, 7, 8\};$$

$$\textcircled{3} (\complement_U B) \cap A = \{1, 2, 3, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3, 5\};$$

$$\textcircled{4} (\complement_U B) \cap (\complement_U A) = \complement_U (A \cup B) = \{1, 2, 6\}.$$

【方法提炼】

1. 对无限集的运算, 把已知集合及全集分别表示在数轴上, 然后再根据交集、并集、补集的定义求解, 这样处理形象直观, 解答过程中注意边界问题.

2. 对有限集的运算, 先把集合中的元素一一列举出来, 然后再结合交集、并集、补集的定义来求解. 另外针对此类问题, 可以结合图形语言(维恩图)来辅助解题, 这样比较直观、形象, 不易出错.

【小测试 9】

(1) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | -2 < x < 3\}$, $B = \{x | -3 < x < 1\}$, 求:

① $A \cap B$; ② $A \cup B$; ③ $(\complement_U B) \cap A$; ④ $(\complement_U B) \cap (\complement_U A)$.

(2) 设全集 $U = \{x | x \text{ 是小于等于 } 20 \text{ 的素数}\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{3, 5\}$, $(\complement_U A) \cap B = \{7, 19\}$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{2, 17\}$, 求集合 A, B .

知识要点 10 集合的关系与集合的运算综合

集合的关系与集合的运算的重要性质:

(1) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$;

(2) $A \cup B = A \Leftrightarrow A \supseteq B$.

【典型例题 10】 设 $A = \{-3, 4\}$, $B = \{x | x^2 - 2ax + b = 0\}$, $B \neq \emptyset$, 且 $A \cap B = B$, 求 a, b 的值.

【解析】 $\because A \cap B = B, \therefore B \subseteq A$

又 $\because A = \{-3, 4\}$, 且 $B \neq \emptyset$

$\therefore B = \{-3\}$ 或 $\{4\}$ 或 $\{-3, 4\}$

若 $B = \{-3\}$, 则 $\begin{cases} 2a = -3 + (-3) \\ b = -3 \times (-3) \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a = -3 \\ b = 9 \end{cases}$

若 $B = \{4\}$, 则 $\begin{cases} 2a = 4 + 4 \\ b = 4 \times 4 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a = 4 \\ b = 16 \end{cases}$

若 $B = \{-3, 4\}$, 则 $\begin{cases} 2a = -3 + 4 \\ b = (-3) \times 4 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -12 \end{cases}$

综上所述: 满足条件的 a, b 的值为 $\begin{cases} a = -3 \\ b = 9 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 4 \\ b = 16 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -12 \end{cases}$.

【方法提炼】

1. 利用集合的性质 $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$ 是解决问题的关键所在.
2. 本题明确指出 $B \neq \emptyset$, 如果没有这个条件, $B = \emptyset$ 的情况不能遗漏.
3. 分类讨论使问题清楚明白.

【小测试 10】 若 A, B, C 为三个集合, $A \cup B = B \cap C$, 则一定有 ().

- A. $A \subseteq C$ B. $C \subseteq A$ C. $A = C$ D. $A = \emptyset$

知识要点 11 充要条件

1. 若 $A \Rightarrow B$, 则称 A 是 B 的充分条件, B 是 A 的必要条件.
2. 若 $A \Leftrightarrow B$, 则称 A 是 B 的充要条件, A 与 B 等价.
3. 一般情况下, 如果条件甲为 $x \in A$, 条件乙为 $x \in B$.
当且仅当 $A \subseteq B$ 时, 甲为乙的充分条件;
当且仅当时 $A \supseteq B$, 甲为乙的必要条件;
当且仅当时 $A = B$, 甲为乙的充要条件.
4. 处理充分、必要条件问题时, 首先要分清条件与结论, 然后才能进行推理和判断.

【典型例题 11】 $|x+1| > 2$ 是 $|x| > 1$ 的 ().

- A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【解析】 解不等式 $|x+1| > 2 \Leftrightarrow x+1 > 2$ 或 $x+1 < -2 \Leftrightarrow x > 1$ 或 $x < -3$;

解不等式 $|x| > 1 \Leftrightarrow x > 1$ 或 $x < -1$,

由于集合 $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < -3\} \subset \{x | x > 1 \text{ 或 } x < -1\}$,

所以 “ $x > 1$ 或 $x < -3$ ” 是 “ $x > 1$ 或 $x < -1$ ” 的充分条件. 故选 A.

【小测试 11】 设命题甲为 $0 < x < 5$, 命题乙为 $|x-2| < 3$, 那么甲是乙的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

基础过关**一、单项选择题**

1. 英语单词 propose 的所有字母构成的集合的元素个数是 ().

- A. 7 个 B. 6 个 C. 5 个 D. 4 个

2. 下列表示集合的方法中, 正确的是 ().

A. 不等式 $x^2 + 2 \geq 0$ 的解集是 $\{\mathbf{R}\}$

B. 方程 $x^2 + 1 = 0$ 的解集是 $\{\emptyset\}$

C. 集合 $A = \{x | x^2 = 2x\}$ 用列举法可表示为 $\{2, 0\}$

D. 方程组 $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$ 的解集为 $\{3, 1\}$

3. 大于 3 且小于 8 的整数构成的集合是 ().
 A. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ B. $\{3, 4, 5, 6, 7\}$
 C. $\{4, 5, 6, 7\}$ D. $\{4, 5, 7\}$
4. 偶数构成的集合为 ().
 A. $\{x | x = 2n\}$ B. $\{x | x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$
 C. $\{x | x = 2n, n \in \mathbf{N}\}$ D. $\{x | x = 2n, n \in \mathbf{N}^*\}$
5. 全体奇数构成的集合是 ().
 A. $\{x | x = 2n + 1\}$ B. $\{x | x = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$
 C. $\{x | x = 2n + 1, n \in \mathbf{N}\}$ D. $\{x | x = 2n + 1, n \in \mathbf{N}^*\}$
6. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 6\}$, 那么集合 $\{2, 7\}$ 是 ().
 A. $\complement_U(A \cap B)$ B. $A \cap B$ C. $A \cup B$ D. $\complement_U(A \cup B)$
7. 设集合 $A = \{1, 3, x\}$, $B = \{1, x^2\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 x 允许取值的个数有 ().
 A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
8. 若 $A = \{x | x^2 = 1\}$, $B = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$, 则 $A \cap B =$ ().
 A. $\{3\}$ B. $\{1\}$ C. $\emptyset$ D. $\{-1\}$
9. 集合 $M = \{0, 1, 2\}$, 其所有子集和真子集的个数分别为 ().
 A. 8 个, 6 个 B. 8 个, 7 个 C. 7 个, 6 个 D. 6 个, 5 个
10. 已知集合 $M = \{(x, y) | x + y = 4\}$, $N = \{(x, y) | x - y = 2\}$, 那么 $M \cap N$ 为 ().
 A. $x = 3, y = 1$ B. $(3, 1)$ C. $\{3, 1\}$ D. $\{(3, 1)\}$
11. 满足不等式 $x - 1 > 7$ 的整数解构成的集合为 ().
 A. $\{x \in \mathbf{Q} | x > 8\}$ B. $\{x \in \mathbf{Z} | x > 8\}$
 C. $\{x \in \mathbf{N} | x - 1 > 7\}$ D. $\{x \in \mathbf{R} | x - 1 > 7\}$
12. 下列各关系表达正确的是 ().
 A. $3 \in \{0, 1, 2\}$ B. $2 \in \{0, 1, 2\}$ C. $\emptyset \in \{0, 1, 2\}$ D. $\emptyset \notin \{0, 1, 2\}$
13. 若集合 $M = \{0\}$, 则下列关系中正确的是 ().
 A. $M = \emptyset$ B. $0 \in M$ C. $0 \notin M$ D. $0 \notin \emptyset$
14. 设 $M = \{x | x \geq 2\}$, $a = \sqrt{2}$, 则下列关系中正确的是 ().
 A. $\{a\} \subseteq M$ B. $a \notin M$
 C. $a \subseteq M$ D. $a \in M$
15. 已知集合 $A = \{x, y\}$, $B = \{2x, 2\}$, 且 $A = B$, 则 x, y 的值分别为 ().
 A. $x = 1, y = 2$ B. $x = 2, y = 4$
 C. $x = 4, y = 2$ D. $x = 2, y = 1$

二、填空题

16. 若 $\{a, 0, -1\} = \{4, b, 0\}$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.
17. $(a - 3)(b + 1) = 0$ 的 _____ 条件是 $a = 3$.
18. 设集合 $M = \{m | m \in \mathbf{N}, \text{且 } 8 - m \in \mathbf{N}\}$, 则元素 m 的个数是 _____.
19. 已知集合 $A = \{-1, 3, 2m - 1\}$, 集合 $B = \{3, m^2\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 $m =$ _____.
20. “四边形是正方形” 是 “两条对角线互相平分” 的 _____ 条件.

三、解答题

21. 判定以下关系是否正确.

(1) $\{a\} \subseteq \{a\}$

(2) $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$

(3) $\emptyset \subset \{0\}$

(4) $0 \in \{0\}$

(5) $\emptyset \in \{0\}$

(6) $\emptyset = \{0\}$

22. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 4, 6, 9\}$, 全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 求:(1) $A \cup B$, (2) $A \cap B$, (3) $\complement_U A$, (4) $\complement_U B$, (5) $\complement_U (A \cup B)$, (6) $\complement_U (A \cap B)$.23. 用“ $\Rightarrow$ ”或“ $\Leftarrow$ ”或“ $\Leftrightarrow$ ”填空.

(1) a, b 都是偶数 $\underline{\hspace{2cm}}$ $a+b$ 是偶数

(2) $x^2 + x - 2 = 0$ $\underline{\hspace{2cm}}$ $x = -2$

(3) $c^2 a > c^2 b$ $\underline{\hspace{2cm}}$ $a > b$

(4) $b^2 = ac$ $\underline{\hspace{2cm}}$ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

(5) $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 0$ $\underline{\hspace{2cm}}$ $(x+3)(y-3) = 0$

24. 已知集合 $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, 又知非空集合 C 是这样—个集合: 其各元素都加 2 后, 就变为 A 的一个子集; 若各元素都减 2 后, 则变为 B 的一个子集, 求集合 C .25. 已知集合 $A = \{x, x^2, y^2 - 1\}$, $B = \{0, |x|, y\}$ 且 $A = B$, 求 x, y .26. 设集合 $A = \{x^2, 2x-1, -4\}$, $B = \{x-5, 1-x, 9\}$, 若 $A \cap B = \{9\}$, 求 $A \cup B$.

能力闯关

一、选择题 (每小题 5 分, 共 60 分)

1. 下列命题为真命题的是 ().

A. 3 是 9 的约数或 5 是 8 的约数

B. $5 > 3$ 且 $2 < 1$ C. 存在一个实数 x , 使 $x^2 < 0$ D. 对任意实数 x , 都有 $x+1 > 0$

2. 下列选项中正确的是 ().

A. $ab > bc \Rightarrow a > c$ B. $a > b \Rightarrow ac^2 > bc^2$ C. $a > b \Leftrightarrow ac^2 > bc^2$ D. $a > b, c > d \Leftrightarrow ac > bd$

3. 下列集合中, 结果是空集的是 ().

A. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4 = 0\}$ B. $\{x \mid x > 9 \text{ 或 } x < 3\}$ C. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$ D. $\{x \mid x > 9 \text{ 且 } x < 3\}$ 4. 已知 $27 \in \{3, 6, 3a^2\}$, 则实数 a 的值为 ().

A. 3

B. -3

C. ± 3 D. ± 2

5. 下列判断中不正确的一项是 ().

A. $\{x \mid |x| < 0\} = \emptyset$ B. $\{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{N}\}$ 是无限集C. $\{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$ D. $\{(x, y) \mid x - y = 2, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$ 是有限集6. “ $xy = 0$ ” 的含义是 ().A. $x = 0$ 或 $y = 0$ B. $x = 0$ 且 $y = 0$ C. $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$ D. $x \neq 0$ 或 $y \neq 0$

7. 关于集合和元素的关系, 下列判断正确的是 ().

① $-3 \in \mathbf{N}$ ② $\pi \notin \mathbf{Q}$ ③ $1.5 \in \mathbf{Z}$ ④ $1.5 \notin \mathbf{R}$ ⑤ $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Q}$ ⑥ $\mathbf{N}^* \in \mathbf{Q}$

A. ①④

B. ②⑥

C. ②⑤

D. ④⑤

8. 关于集合的运算性质 (其中 U 为全集), 错误的一项是 ().A. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ 且 } A \supseteq B$ B. $A = B \Leftrightarrow A \cup B = A$ C. $A = \complement_U B \Rightarrow A \cup B = B$ D. $A \cap U = A$ 9. 设 $A = \{\text{正方形}\}$, $B = \{\text{矩形}\}$, $C = \{\text{平行四边形}\}$, $D = \{\text{梯形}\}$, 则下列包含关系中不正确的是 ().A. $A \subseteq B$ B. $B \subseteq C$ C. $A \not\subset D$ D. $C \subseteq D$ 10. 若 A, B, C 为三个集合, $A \cup B = B \cap C$, 则一定成立的是 ().A. $A \subseteq C$ B. $C \subseteq A$ C. $A = C$ D. $A = \emptyset$ 11. 已知集合 $A = \{x \mid -2 < x \leq 2, x \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x \mid x < 4, x \in \mathbf{N}\}$, 则 $A \cup B =$ ().A. $\{1, 2\}$ B. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ C. $\{-1, 1, 2, 3\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

12. 下列命题中错误的是 ().

① $a = 0$ 是 $ab = 0$ 的必要条件;

② $x=1$ 或 $x=2$ 是 $x^2-3x+2=0$ 的充分条件;

③ $A=60^\circ$ 是 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的必要条件;

④ $a=b$ 是 $|a|=|b|$ 的充要条件.

A. ①②③

B. ①②④

C. ②③④

D. ①②③④

二、填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

13. 用适当的符号 ($\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\supseteq$, $\subset$ ($\subsetneq$), $\supset$, $=$) 填空.

① $\sqrt{3}$ $\mathbf{Q}$

② a $\{a, b, c\}$

③ $\{0\}$ $\emptyset$

④ $\{-1, 1\}$ $\{x | x^2 = 1\}$

14. 用列举法表示集合 $\{(x, y) | x+y=3, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$.

15. 若 $A = \{1, 4, x\}$, $B = \{1, x^2\}$, 且 $A \cup B = A$, 则 $x =$.

16. $x \in A$ 且 $x \in B$ 是 $x \in A \cap B$ 的 条件.

三、解答题 (本大题共 74 分)

17. (本题满分 12 分) 下列各组对象哪些能形成集合, 哪些不能形成集合, 说明理由.

(1) 高一(6)班全体男生;

(2) 所有正方形;

(3) 高一(6)班漂亮的女生;

(4) 所有有理数;

(5) 所有数学难题.

18. (本题满分 12 分) 设全集 $U = \{x | x \leq 4\}$, $A = \{x | -2 < x < 3\}$, $B = \{x | -1 < x \leq 3\}$, 求 $\complement_U A$, $A \cap B$, $\complement_U (B \cap A)$, $(\complement_U A) \cap B$.

19. (本题满分 12 分) 已知含有三个元素的集合 $A = \{a, \frac{b}{a}, 1\}$, $B = \{a^2, a+b, 0\}$, 且 $A = B$, 求 $a^{2019} + b^{2019}$ 的值.

20. (本题满分 12 分) 设全集 $U = \{-\frac{1}{3}, -3, 5\}$, 集合 $A = \{x | 3x^2 + px - 5 = 0\}$ 与集合 $B = \{x | 3x^2 + 10x + q = 0\}$, 且 $A \cap B = \{-\frac{1}{3}\}$, 求 $\complement_U A$, $\complement_U B$.

21. (本题满分 12 分) 已知 $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{x | ax + 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 取值的集合.

22. (本题满分 14 分) 集合 $A = \{x | (x+3)(x-5) \leq 0\}$, $B = \{x | m-2 < x < 2m-3\}$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围.

❖ 真题体验 ❖

- (单选题) 集合 $A = \{x | -1 < x \leq 3\}$, $B = \{x | 1 < x < 5\}$, 则 $A \cup B =$ ().
 A. $\{x | -1 < x < 5\}$ B. $\{x | 3 < x < 5\}$
 C. $\{x | -1 < x < 1\}$ D. $\{x | 1 < x \leq 3\}$
- (单选题) 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 5, 8, 10\}$, 则 $A \cap B =$ ().
 A. $\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 10\}$ B. $\{2, 4\}$
 C. $\{2, 4, 5\}$ D. $\emptyset$
- (单选题) 若集合 $M = \{x | x - 1 = 0\}$, $N = \{1, 2\}$, 则 $M \cup N =$ ().
 A. $\{1\}$ B. $\{2\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{-1, 1, 2\}$
- (单选题) “ $m = 1$ ” 是 “直线 $mx + y + 1 = 0$ 和 $x + my + 2 = 0$ 平行” 的 ().
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- (单选题) 若集合 $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, 则下列关系中正确的是 ().
 A. $M \cap N = M$ B. $M \cup N = N$ C. $N \subsetneq M$ D. $M \subsetneq N$
- (单选题) 设集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N = \{x | x^2 - 6x + 5 < 0, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $M \cap N =$ ().
 A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{2, 3, 4\}$ C. $\{3, 4, 5\}$ D. $\{2, 4, 5\}$
- (单选题) “ $a = b$ ” 是 “ $\lg a = \lg b$ ” 的 ().
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件