第 1 章　光波电磁理论基础

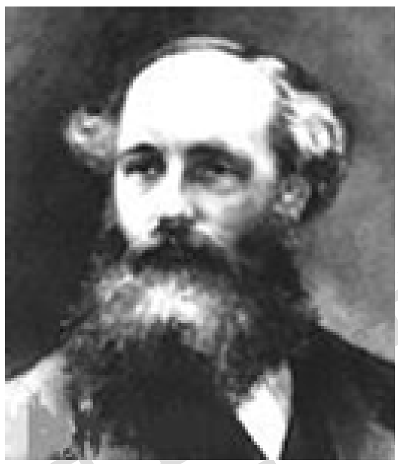
麦克斯韦方程是宏观电磁理论的基础，不仅适用于静态场，也适用于时变场；不仅适用于各向同性介质，也适用于各向异性介质；不仅适用于均匀介质，也适用于非均匀介质；不仅适用于理想介质，也适用于导电介质（吸收介质）；不仅适用于线性介质，也适用于非线性介质；不仅适用于天然介质，也适用于人工合成介质（超材料）。因而麦克斯韦方程是描述一切宏观电磁现象必须遵循的定律。

光波属于高频电磁波，宏观上描述光波在各种光学元件和器件中的传输特性，本质上讲，就是根据光学元件和器件构成的物理模型建立满足初始及边界条件的数学模型，即介质中的麦克斯韦方程或由麦克斯韦方程简化得到的波动方程，然后求解波动方程。波动方程的形式可以是微分形式，也可以是积分形式；可以是标量形式，也可以是矢量形式；可以是矩阵形式，也可以是差分形式或代数方程形式。这就使得求解不仅具有单一的数学手段，而是针对不同的物理问题需要采用解决该问题方便的数学手段。

为了便于后续章节的讨论，本章介绍基本形式的麦克斯韦方程组，描述电磁介质的微观经典物理模型及介质特性的物质方程、介质中的麦克斯韦方程、电磁场边界条件、电磁场波动方程、电磁场能量及能流、位函数及位函数方程、赫兹矢量、格林函数及电磁场积分方程等。

1.1　基本形式的麦克斯韦方程

自英国物理学家法拉第于 1831 年发现了电磁感应现象后，基于对一系列电磁感应现象的思考，麦克斯韦提出了涡旋电场和位移电流的概念，表明在时变电磁场情况下，电场和磁场同时存在并相互激发、相互影响，形成电磁波。根据矢量分析和场论，描述单一矢量场需要四个方程：两个积分方程分别是矢量场的环量方程和通量方程；两个微分方程分别是矢量场的旋度方程和散度方程。而时变电磁场电场和磁场同时存在，描述两个矢量场就需要八个方程：四个积分方程分别是电场强度矢量的环量方程和电场强度矢量的通量方程，磁场强度矢量的环量方程和磁场强度矢量的通量方程；四个微分方程分别是电场强度矢量的旋度方程和散度方程，磁场强度矢量的旋度方程和散度方程。这就是麦克斯韦 1865 年在《电磁场动力学理论》著作中提出的完整描述时变电磁场的方程，后被人们称为麦克斯韦方程。



英国物理学家、数学家麦克斯韦（James Clerk Maxwell，1831—1879）

麦克斯韦方程的基本形式包括时域积分形式和时域微分形式。微分形式适用于空间或电介质中连续的区域，但在不连续的边界必须用矢量场的通量方程和环量方程，所以麦克斯韦方程的积分形式和微分形式共同构成了描述电磁场的基本方程。

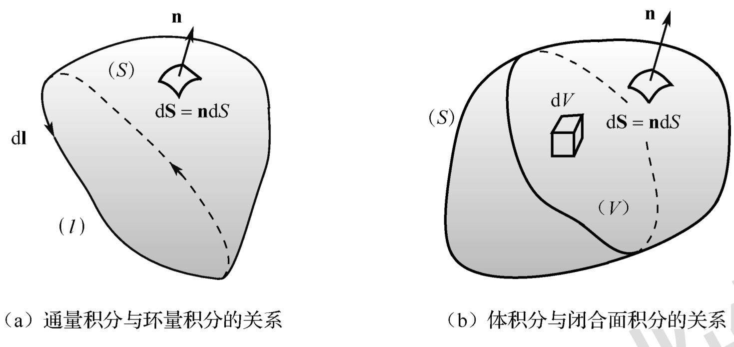
1.1.1　时域积分形式

麦克斯韦方程的积分形式为

$$\begin{cases} \oint_{(l)} \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint_{(S)} \left(\mathbf{J}_{\mathrm{V}} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} & (1\text{-}1) \\ \oint_{(l)} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\iint_{(S)} \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} & (1\text{-}2) \\ \oiint_{(S)} \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 & (1\text{-}3) \\ \oiint_{(S)} \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{(V)} \rho_{\mathrm{V}} \mathrm{d}V & (1\text{-}4) \end{cases}$$

式中，$\mathbf{E}(\mathbf{r};t)$ 为电场强度矢量，单位为伏/米（V/m）；$\mathbf{D}(\mathbf{r};t)$ 为电通密度矢量（也称电位移矢量），单位为库仑/平方米（$\mathrm{C/m^2}$）；$\mathbf{H}(\mathbf{r};t)$ 为磁场强度矢量，单位为安培/米（A/m）；$\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$ 为磁通密度矢量（也称磁感应强度矢量），单位为韦伯/平方米（$\mathrm{Wb/m^2}$）；$\mathbf{r}$ 为空间点位置矢量；t 为时间变量；$\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 为自由电流体密度矢量，单位为安培/平方米（$\mathrm{A/m^2}$）；$\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 为自由电荷体密度，单位为库仑/立方米（$\mathrm{C/m^3}$）。

式（1-1）表明，不仅电流产生磁场，随时间变化的电场（即位移电流）也产生磁场，自由电流体密度 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}$ 和位移电流密度 $\mathbf{J}_{\mathrm{d}} = \partial \mathbf{D}/\partial t$［单位为安培/平方米（$\mathrm{A/m^2}$）］沿开曲面 S 的积分等于磁场沿闭合回路 l 的环量，开曲面 S 的方向与闭合回路 l 满足右手法则，如图 1-1（a）所示。式（1-2）表明，随时间变化的磁场产生涡旋电场，$\partial \mathbf{B}/\partial t$ 沿开曲面 S 的积分等于电场沿闭合回路 l 的积分，如图 1-1（a）所示。式（1-3）表明，磁场对闭合面的积分恒为零，即磁力线永远是闭合线。式（1-4）表明，电荷是产生电场的通量源，体积分与闭合面积分的关系如图 1-1（b）所示。



（a）通量积分与环量积分的关系　　（b）体积分与闭合面积分的关系

图 1-1　积分关系示意图

1.1.2　时域微分形式

麦克斯韦方程的时域微分形式为

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_{\mathrm{V}}+\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} & (1\text{-}5) \\ \nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} & (1\text{-}6) \\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0 & (1\text{-}7) \\ \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_{\mathrm{V}} & (1\text{-}8) \end{cases}$$

式（1-5）表明，自由电流体密度 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}$ 和位移电流密度 $\mathbf{J}_{\mathrm{d}}=\partial\mathbf{D}/\partial t$ 是产生磁场的旋度源。式（1-6）表明，随时间变化的磁场 $\partial\mathbf{B}/\partial t$ 是涡旋电场的旋度源。式（1-7）表明，磁场无散度源，即不存在单磁荷。式（1-8）表明，自由电荷体密度 $\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 是电场的散度源。

1.1.3　电磁力

电荷和电流在电磁场中必然会受到力的作用。电荷在电场中的受力遵循库仑定律，电流在磁场中的受力遵循安培定律，运动点电荷在电磁场中的受力由洛伦兹力公式确定。这些都是电荷和电流在电磁场中受力的基本物理定律，不仅适用于静态场，也适用于时变场。

由库仑定律可知，点电荷 q 在静电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 中所受的电场力为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{1-9}$$

当 q 为正电荷时，力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 在点 $\mathbf{r}$ 处的方向是沿电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 的方向；当 q 为负电荷时，力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 在点 $\mathbf{r}$ 处的方向是沿电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 的反方向。

由安培定律可知，电流元 $I\mathbf{dl}$ 在恒定电流的磁场 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 中所受的力为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=I\mathbf{dl}\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{1-10}$$

式中，$I\mathbf{dl}$ 为线电流源，I 为线电流强度，单位为安培（A）。在空间任一点放置电流元 $I\mathbf{dl}$，其受力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 的方向垂直于由电流元 $I\mathbf{dl}$ 与磁场强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 构成的平面，三者遵循右手法则。

当点电荷 q 在磁场 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 中以速度 $\boldsymbol{\upsilon}$ 运动时，点电荷受力为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=q\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{1-11}$$

此力称为洛伦兹力。$\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 的方向垂直于点电荷运动速度 $\boldsymbol{\upsilon}$ 与磁场强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 构成的平面，三者遵循右手法则。

如果空间同时存在时变电磁场 $\mathbf{E}(\mathbf{r};t)$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$，则点电荷 q 受力为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r};t)=q[\mathbf{E}(\mathbf{r};t)+\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B}(\mathbf{r};t)] \tag{1-12}$$

1.1.4　电磁能量

电磁场具有能量，其能量以电场和磁场的形式存在于空间或介质中。对于静态场，电场能量密度为

$$w_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r}) \tag{1-13}$$

单位为焦耳/立方米（$\mathrm{J/m^3}$）。磁场能量密度为

$$w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\mathbf{H}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{1-14}$$

对于时变电磁场，能量密度是电场和磁场能量密度之和，即

$$w=w_{\mathrm{e}}+w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r};t)\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r};t)+\frac{1}{2}\mathbf{H}(\mathbf{r};t)\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r};t) \tag{1-15}$$

电磁场能量密度反映的是能量的空间分布，即能量密度是空间坐标点的函数。对于时变电磁场，能量密度不仅随空间坐标变化，而且随时间变化，由此产生电磁能量的流动。

1.2　电磁介质微观经典物理模型

任何物质都是由原子和分子构成的，所以电磁场与电磁介质相互作用就是电磁场与构成电磁介质的原子和分子这些带电粒子的相互作用。为了描述电磁介质的电磁特性，宏观电磁场理论通常采用三种微观经典物理模型：电偶极子模型、磁偶极子模型和自由电子模型。对于电介质用电偶极子模型，相对应的物理量是极化强度矢量 $\mathbf{P}(\mathbf{r};t)$；磁介质用磁偶极子模型，相应的物理量是磁化强度矢量 $\mathbf{M}(\mathbf{r};t)$；导电介质用自由电子模型，相应的物理量是自由电流体密度矢量 $\mathbf{J}_\mathrm{V}(\mathbf{r};t)$ 和自由电荷体密度 $\rho_\mathrm{V}(\mathbf{r};t)$。

1.2.1　电偶极子及极化强度矢量

1．电偶极子

电偶极子是由相距很近的两个等量异号点电荷构成的，如图 1-2（a）所示，q 是点电荷所带电量，两个点电荷相距为 d，对称地放置在 Z 轴上。对于空间任意点放置的点电荷，其电位表达式为

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} \tag{1-16}$$

式中，(r,θ,φ) 为球坐标，相应的单位矢量为 $(\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\varphi)$；$u(r,\theta,\varphi)$ 为点电荷在空间点 P 处的电位；R 为点电荷 q 到空间点 $\mathbf{r}$ 处距离矢量 $\mathbf{R}$ 的大小；ε_0 为真空介电常数。

由式（1-16）可知，在球坐标系下可写出两个点电荷构成的电偶极子在空间点 $P(r,\theta,\varphi)$ 的电位为

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_1-R_2}{R_1R_2} \tag{1-17}$$

式中，R_1 和 R_2 分别为点电荷 $-q$ 和点电荷 $+q$ 到空间点 $P(r,\theta,\varphi)$ 的距离。当两个点电荷之间的距离相对于到场点的距离非常小时，即 $r\gg d$，取近似，有

$$R_1-R_2\approx d\cos\theta,\quad R_1R_2\approx r^2 \tag{1-18}$$

代入式（1-17），得到电偶极子电位的表达式为

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{1-19}$$

定义电偶极矩矢量 $\mathbf{p}_\mathrm{e}$ 为

$$\mathbf{p}_\mathrm{e}=p_\mathrm{e}\mathbf{e}_z=qd\mathbf{e}_z \tag{1-20}$$

式中，qd 是电偶极矩的大小，方向沿 Z 轴方向 $\mathbf{e}_z$ 由负电荷指向正电荷。由此可把式（1-19）改写为如下形式：

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{\mathbf{p}_\mathrm{e}\cdot\mathbf{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{1-21}$$

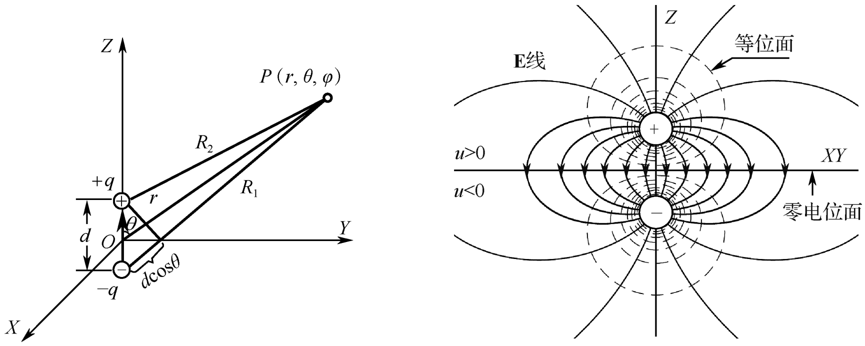
在球坐标系下，根据电场与电位之间的关系有

$$\mathbf{E} = -\nabla u = -\left(\frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi\right) \tag{1-22}$$

得到

$$\mathbf{E}(r,\theta,\varphi) = \frac{p_{\mathrm{e}}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\mathbf{e}_r + \sin\theta\mathbf{e}_\theta) \tag{1-23}$$

由式（1-19）和式（1-23）不难看出，在 $r \gg d$ 的近似条件下，电偶极子的电位和电场与坐标 φ 无关，因而具有轴对称性。与单一点电荷相比较，电偶极子的电位与距离的平方成反比，电场与距离的立方成反比，说明电偶极子的电场比单一点电荷的电场衰减得快。另外，电偶极子在 $Z>0$（θ 从 0 变化到 $\pi/2$）的上半平面中，$u>0$，而在 $Z<0$（θ 从 $\pi/2$ 变化到 π）的下半平面中，$u<0$，XY 平面为对称平面。电偶极子电力线分布如图 1-2（b）所示。



（a）电偶极子　　　（b）电力线分布

图 1-2　电偶极子模型及电力线分布仿真图

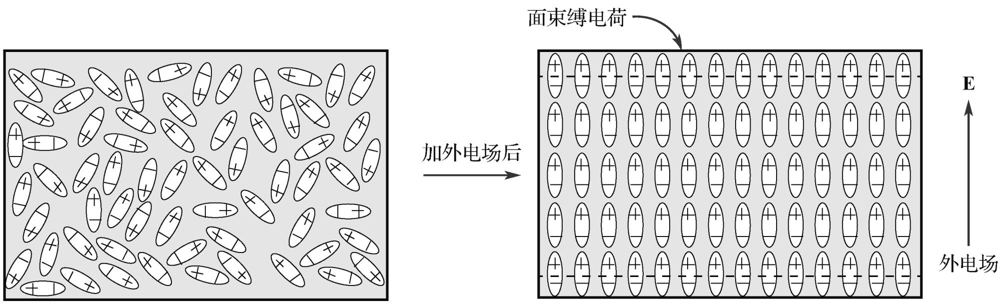
2．极化强度矢量

根据物质的电特性，通常把物质分为三大类：导体、半导体和绝缘体。导体和半导体的特点是其内部存在大量自由运动的电荷，在外电场的作用下，导体内部的自由电子可以做宏观运动而形成电流，描述导体导电性的参数是电导率。绝缘体是一种电阻率很高、导电性很差的物质，通常把绝缘体也称为电介质或介质。介质中没有自由运动的电荷，没有外电场的情况下，介质本身对外不显电性；而当介质存在于电场中时，会使介质表面或内部出现电荷分布，这种现象被称为介质的极化。

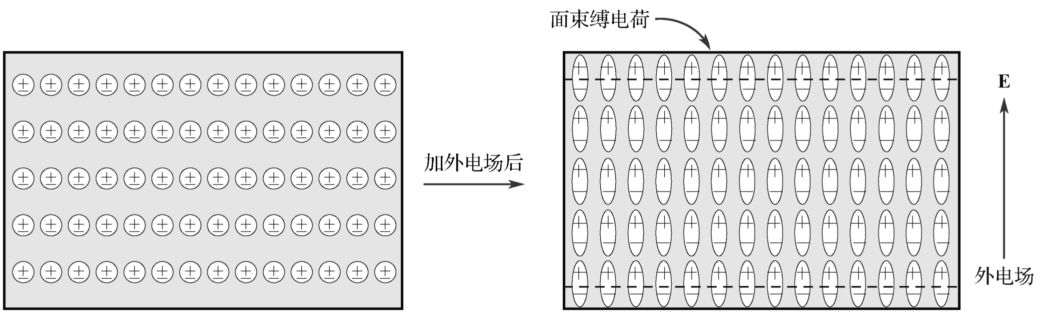
固体物理学将介质极化的机理分为三种方式：偶极转向、离子位移和电子位移。从微观的角度看，偶极转向是构成介质的分子具有极性，每个极性分子可以看作电偶极子，在没有外电场时，由于分子的热运动，介质中的极性分子杂乱无章地排列，宏观上对外不显电性，即所有分子电偶极矩矢量和为零；而当外加电场后，介质中的分子在外电场的作用下定向排列，所有分子电偶极矩矢量和不再为零，宏观上对外显电性，在电介质表面和内部出现电荷分布，如图 1-3（a）所示。这种电荷由于受到分子的束缚，故称为束缚电荷或极化电荷。如果束缚电荷仅出现在电介质表面，则该极化称为均匀极化；如果束缚电荷不仅出现在电介质表面，而且出现在电介质内部，则这种极化称为非均匀极化。

对于离子位移和电子位移极化，构成介质的分子和原子不具有极性，单个分子和原子的正电中心和负电中心重合，宏观上对外不显电性。当存在外加电场时，无极性分子和原子中

的离子和电子在外电场的作用下产生位移，构成电介质的分子和原子的正电中心和负电中心不再重合，形成电偶极子，并定向排列，如图 1-3（b）所示，在电介质表面和内部出现束缚电荷，宏观上对外显电性。



（a）偶极转向极化



（b）离子位移和电子位移极化

图 1-3 介质极化示意图

为了描述电介质在电场中的极化状态，引入极化强度矢量 **P**，其定义为电介质中单位体积内电偶极矩的矢量和，即

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i \mathbf{p}_{\mathrm{e}_i}}{\Delta V} \tag{1-24}$$

其单位是库仑/平方米（$\mathrm{C/m^2}$）。

极化强度矢量 **P** 取决于电介质的特性和外加电场强度矢量 **E**。对于不同的电介质，极化强度矢量 **P** 与电场强度矢量 **E** 的关系可概括为三大类。

1）各向同性线性介质

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_{\mathrm{e}} \mathbf{E} \tag{1-25}$$

式中，χ_{e} 为一无量纲的参数，称为介质的极化率，是反映介质电特性的物理量。该式说明电介质中 **E** 和 **P** 同方向，这种介质称为各向同性线性介质。如果 χ_{e} 取常数，则为均匀线性介质。如果 χ_{e} 是空间坐标的函数，则为非均匀线性介质。

2）各向异性线性介质

在直角坐标系下，极化强度矢量 **P** 和电场强度矢量 **E** 的分量形式为

$$\mathbf{P} = P_x \mathbf{e}_x + P_y \mathbf{e}_y + P_z \mathbf{e}_z \tag{1-26}$$

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z \tag{1-27}$$

式中，$\mathbf{e}_x$、$\mathbf{e}_y$ 和 $\mathbf{e}_z$ 分别为直角坐标系下沿 X、Y 和 Z 轴方向的单位矢量；P_x、P_y 和 P_z 分别为

极化强度矢量 **P** 沿 X、Y 和 Z 轴方向的分量；E_x、E_y 和 E_z 分别为电场强度矢量 **E** 沿 X、Y 和 Z 轴方向的分量。

对于各向异性的线性介质，介质的极化率取二阶张量形式

$$\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(1)}=[\chi_{\mathrm{e}ij}]_{3\times3}=\begin{bmatrix}\chi_{\mathrm{e}xx} & \chi_{\mathrm{e}xy} & \chi_{\mathrm{e}xz}\\ \chi_{\mathrm{e}yx} & \chi_{\mathrm{e}yy} & \chi_{\mathrm{e}yz}\\ \chi_{\mathrm{e}zx} & \chi_{\mathrm{e}zy} & \chi_{\mathrm{e}zz}\end{bmatrix},\quad i,j=x,y,z \tag{1-28}$$

如果把极化强度矢量 **P** 和电场强度矢量 **E** 的三个分量写成列向量形式

$$\mathsf{P}=[P_i]_{3\times1}=\begin{bmatrix}P_x\\ P_y\\ P_z\end{bmatrix},\quad i=x,y,z \tag{1-29}$$

$$\mathsf{E}^{(1)}=[E_j]_{3\times1}=\begin{bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{bmatrix},\quad j=x,y,z \tag{1-30}$$

则极化强度矢量 **P** 和电场强度矢量 **E** 的张量关系为

$$\begin{bmatrix}P_x\\ P_y\\ P_z\end{bmatrix}=\varepsilon_0\begin{bmatrix}\chi_{\mathrm{e}xx} & \chi_{\mathrm{e}xy} & \chi_{\mathrm{e}xz}\\ \chi_{\mathrm{e}yx} & \chi_{\mathrm{e}yy} & \chi_{\mathrm{e}yz}\\ \chi_{\mathrm{e}zx} & \chi_{\mathrm{e}zy} & \chi_{\mathrm{e}zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{bmatrix} \tag{1-31}$$

写成求和形式为

$$P_i=\sum_{j=x,y,z}\chi_{\mathrm{e}ij}E_j,\quad i=x,y,z \tag{1-32}$$

简记为

$$\mathsf{P}=\varepsilon_0\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(1)}\mathsf{E}^{(1)} \tag{1-33}$$

显然，由式（1-32）可以看出，极化率与方向有关，由此导致极化强度矢量 **P** 与电场强度矢量 **E** 的方向也不一致，但 **P** 与 **E** 仍然保持线性关系，这种介质称为各向异性线性介质。如果 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(1)}$ 的分量 $\chi_{\mathrm{e}ij}$ 取值为实常数，则称为均匀线性电各向异性介质；如果 $\chi_{\mathrm{e}ij}$ 的取值为空间坐标的函数，则称为非均匀线性电各向异性介质；如果 $\chi_{\mathrm{e}ij}$ 取复数值，则称为复线性电各向异性介质。

3）各向异性非线性介质

当极化强度矢量 **P** 与电场强度矢量 **E** 为非线性关系时，可将非线性关系写成向量形式

$$\mathsf{P}=\varepsilon_0\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(1)}\mathsf{E}^{(1)}+\varepsilon_0\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(2)}\mathsf{E}^{(2)}+\varepsilon_0\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(3)}\mathsf{E}^{(3)}+\cdots \tag{1-34}$$

式中，列向量 P 见式（1-29）；$\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(1)}$ 见式（1-28）。对于线性项列向量 $\mathsf{E}^{(1)}$、非线性项列向量 $\mathsf{E}^{(2)}$ 和 $\mathsf{E}^{(3)}$ 等，可根据外加电场分为以下两种情况。

（1）单个电场强度矢量显式非线性

当外加单一电场强度矢量 **E** 时，线性项列向量 $\mathsf{E}^{(1)}$ 见式（1-30）。非线性项列向量 $\mathsf{E}^{(2)}$ 是电场强度矢量乘积 **EE**（也称为并矢）构成的二阶非线性项列向量；非线性项列向量 $\mathsf{E}^{(3)}$ 是电场强度矢量乘积 **EEE** 相乘构成的三阶非线性项列向量；$\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(2)}$ 和 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(3)}$ 分别是与二阶和三阶非线性项列向量 $\mathsf{E}^{(2)}$ 和 $\mathsf{E}^{(3)}$ 相对应的三阶和四阶非线性极化率张量，$\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(2)}$ 是三阶张量，$\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(3)}$ 是四阶张量。例如，两矢量 **E**、**E** 相乘有

$$\begin{aligned}\mathbf{EE} &= (E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y + E_z\mathbf{e}_z)(E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y + E_z\mathbf{e}_z) \\ &= E_xE_x\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + E_yE_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_x + E_zE_x\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x + \\ &\quad E_xE_y\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y + E_yE_y\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + E_zE_y\mathbf{e}_z\mathbf{e}_y + \\ &\quad E_xE_z\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z + E_yE_z\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z + E_zE_z\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\end{aligned} \tag{1-35}$$

由此可构成二阶非线性项列向量

$$\begin{gathered}\mathsf{E}^{(2)} = [E_jE_k]_{9\times1} = [E_xE_x, E_yE_x, E_zE_x, E_xE_y, E_yE_y, E_zE_y, E_xE_z, E_yE_z, E_zE_z]^{\mathrm{T}}, \\ j,k = x,y,z\end{gathered} \tag{1-36}$$

式中，角标 T 表示转置。与式（1-36）相对应的三阶非线性极化率张量 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(2)}$ 的矩阵形式为

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(2)} &= \begin{bmatrix} \chi_{\mathrm{e}xxx} & \chi_{\mathrm{e}xyx} & \chi_{\mathrm{e}xzx} & \chi_{\mathrm{e}xxy} & \chi_{\mathrm{e}xyy} & \chi_{\mathrm{e}xzy} & \chi_{\mathrm{e}xxz} & \chi_{\mathrm{e}xyz} & \chi_{\mathrm{e}xzz} \\ \chi_{\mathrm{e}yxx} & \chi_{\mathrm{e}yyx} & \chi_{\mathrm{e}yzx} & \chi_{\mathrm{e}yxy} & \chi_{\mathrm{e}yyy} & \chi_{\mathrm{e}yzy} & \chi_{\mathrm{e}yxz} & \chi_{\mathrm{e}yyz} & \chi_{\mathrm{e}yzz} \\ \chi_{\mathrm{e}zxx} & \chi_{\mathrm{e}zyx} & \chi_{\mathrm{e}zzx} & \chi_{\mathrm{e}zxy} & \chi_{\mathrm{e}zyy} & \chi_{\mathrm{e}zzy} & \chi_{\mathrm{e}zxz} & \chi_{\mathrm{e}zyz} & \chi_{\mathrm{e}zzz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\chi_{\mathrm{e}ijk}\end{bmatrix}_{3\times9}, \quad i,j,k = x,y,z\end{aligned} \tag{1-37}$$

同理，可写出三阶非线性项列向量 $\mathsf{E}^{(3)}$ 和四阶非线性极化率张量 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(3)}$ 的分量表达式为

$$\mathsf{E}^{(3)} = [E_jE_kE_l]_{27\times1}, \quad j,k,l = x,y,z \tag{1-38}$$

$$\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(3)} = [\chi_{\mathrm{e}ijkl}]_{3\times27}, \quad i,j,k,l = x,y,z \tag{1-39}$$

由式（1-32）、式（1-36）～式（1-39），可将向量关系式（1-34）写成分量求和形式

$$P_i = \sum_{j=x,y,z} \varepsilon_0\chi_{\mathrm{e}ij}E_j + \sum_{j=x,y,z}\sum_{k=x,y,z} \varepsilon_0\chi_{\mathrm{e}ijk}E_jE_k + \sum_{j=x,y,z}\sum_{k=x,y,z}\sum_{l=x,y,z} \varepsilon_0\chi_{\mathrm{e}ijkl}E_jE_kE_l + \cdots, \quad i = x,y,z \tag{1-40}$$

由式（1-40）不难看出，极化强度矢量 $\mathbf{P}$ 与电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 不仅方向不一致，而且是非线性关系，这种介质称为各向异性非线性介质。如果 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(1)}$、$\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(2)}$ 和 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(3)}$ 等各分量的取值为常数，则称为均匀非线性电各向异性介质；如果 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(1)}$、$\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(2)}$ 和 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(3)}$ 等各分量是空间坐标点的函数，则称为非均匀非线性电各向异性介质；如果 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(1)}$、$\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(2)}$ 和 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(3)}$ 等各分量的取值与频率有关，则称为非线性电各向异性色散介质。因为式（1-40）中的电场分量 E_j、E_k 和 E_l 等是单一电场强度矢量的不同分量，所以属于单一电场强度矢量非线性。又由于线性极化率张量 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(1)}$、非线性极化率张量 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(2)}$ 和 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(3)}$ 等与电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 无关，非线性关系中电场强度矢量分量 E_j、E_k 和 E_l 等与 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(1)}$、$\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(2)}$ 和 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(3)}$ 相分离，因此称为单个电场强度矢量显式非线性。

（2）多个电场强度矢量显式非线性

当同方向或不同方向外加多个电场强度矢量（如 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{E}_3$ 等）时，线性项列向量 $\mathsf{E}^{(1)}$ 是电场强度矢量 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{E}_3$ 等构成的列向量之和，即

$$\mathsf{E}^{(1)} = [E_{1j}]_{3\times1} + [E_{2j}]_{3\times1} + [E_{3j}]_{3\times1} + \cdots, \quad j = x,y,z \tag{1-41}$$

线性极化率张量 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(1)}$ 见式（1-28）。$\mathsf{E}^{(2)}$ 是电场强度矢量 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{E}_3$ 等两两相乘 $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2$、$\mathbf{E}_1\mathbf{E}_3$ 和 $\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$（也称为并矢）等构成的二阶非线性项列向量之和；$\mathsf{E}^{(3)}$ 是电场强度矢量 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{E}_3$ 等每三个相乘 $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ 构成的三阶非线性项列向量之和；$\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(2)}$ 和 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(3)}$ 分别是与二阶和三阶非线性项列向量 $\mathsf{E}^{(2)}$ 和 $\mathsf{E}^{(3)}$ 相对应的三阶和四阶非线性极化率张量。例如，两矢量 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$ 相乘，有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 &= (E_{1x}\mathbf{e}_x + E_{1y}\mathbf{e}_y + E_{1z}\mathbf{e}_z)(E_{2x}\mathbf{e}_x + E_{2y}\mathbf{e}_y + E_{2z}\mathbf{e}_z) \\ &= E_{1x}E_{2x}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + E_{1y}E_{2x}\mathbf{e}_y\mathbf{e}_x + E_{1z}E_{2x}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x + \\ &\quad E_{1x}E_{2y}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y + E_{1y}E_{2y}\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + E_{1z}E_{2y}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_y + \\ &\quad E_{1x}E_{2z}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z + E_{1y}E_{2z}\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z + E_{1z}E_{2z}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\end{aligned} \tag{1-42}$$

由此可构成二阶非线性项列向量为

$$[E_{1j}E_{2k}]_{9\times1}=[E_{1x}E_{2x},E_{1y}E_{2x},E_{1z}E_{2x},E_{1x}E_{2y},E_{1y}E_{2y},E_{1z}E_{2y},E_{1x}E_{2z},E_{1y}E_{2z},E_{1z}E_{2z}]^{\mathrm{T}},\quad j,k=x,y,z \tag{1-43}$$

同理，$\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_3$ 相乘，有

$$[E_{1j}E_{3k}]_{9\times1}=[E_{1x}E_{3x},E_{1y}E_{3x},E_{1z}E_{3x},E_{1x}E_{3y},E_{1y}E_{3y},E_{1z}E_{3y},E_{1x}E_{3z},E_{1y}E_{3z},E_{1z}E_{3z}]^{\mathrm{T}},\quad j,k=x,y,z \tag{1-44}$$

$\mathbf{E}_2$、$\mathbf{E}_3$ 相乘，有

$$[E_{2j}E_{3k}]_{9\times1}=[E_{2x}E_{3x},E_{2y}E_{3x},E_{2z}E_{3x},E_{2x}E_{3y},E_{2y}E_{3y},E_{2z}E_{3y},E_{2x}E_{3z},E_{2y}E_{3z},E_{2z}E_{3z}]^{\mathrm{T}},\quad j,k=x,y,z \tag{1-45}$$

以此类推，相加得到二阶非线性列向量为

$$\mathsf{E}^{(2)}=[E_{1j}E_{2k}]_{9\times1}+[E_{1j}E_{3k}]_{9\times1}+[E_{2j}E_{3k}]_{9\times1}+\cdots,\quad j,k=x,y,z \tag{1-46}$$

与式（1-46）相对应的三阶非线性极化率张量 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(2)}$ 的矩阵形式仍取式（1-37）。

与二阶非线性项相同，可写出三阶非线性项列向量 $\mathsf{E}^{(3)}$ 的分量表达式为

$$\mathsf{E}^{(3)}=[E_{1j}E_{2k}E_{3l}]_{27\times1}+\cdots,\quad j,k,l=x,y,z \tag{1-47}$$

与式（1-47）相对应的四阶非线性极化率张量 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(3)}$ 的矩阵形式仍取式（1-39）。

由式（1-28）、式（1-41）、式（1-37）、式（1-46）、式（1-39）和式（1-47），可将向量关系式（1-34）写成分量求和形式

$$\begin{aligned}P_i=&\sum_{j=x,y,z}\varepsilon_0\chi_{\mathrm{e}ij}[E_{1j}+E_{2j}+E_{3j}+\cdots]+\sum_{j=x,y,z}\sum_{k=x,y,z}\varepsilon_0\chi_{\mathrm{e}ijk}[E_{1j}E_{2k}+E_{1j}E_{3k}+E_{2j}E_{3k}+\cdots]+\\&\sum_{j=x,y,z}\sum_{k=x,y,z}\sum_{l=x,y,z}\varepsilon_0\chi_{\mathrm{e}ijkl}[E_{1j}E_{2k}E_{3l}+\cdots]+\cdots,\qquad i=x,y,z\end{aligned} \tag{1-48}$$

比较式（1-48）与式（1-40），可见其差别在于，在式（1-48）中，电场强度矢量分量 E_{1j}、E_{2k} 和 E_{3l} 等分别对应于不同电场强度矢量 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{E}_3$ 等的不同分量，所以属于多个电场强度矢量非线性。又由于电场强度矢量分量 E_{1j}、E_{2k} 和 E_{3l} 等与 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(1)}$、$\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(2)}$ 和 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(3)}$ 相分离，因此称为多个电场强度矢量显式非线性。在非线性光学中，二阶非线性项用于研究三波混频，而三阶非线性项用于研究四波混频。

除此之外，还存在单个电场强度矢量的隐式非线性和多个电场强度矢量的隐式非线性。

3．束缚电荷密度

在非均匀极化的情况下，电介质内部和表面出现束缚电荷分布。根据电偶极子电位叠加计算，可得到束缚电荷体密度 $\rho_{\mathrm{V_b}}(\mathbf{r})$ 和束缚电荷面密度 $\rho_{\mathrm{S_b}}(\mathbf{r})$ 与极化强度矢量 $\mathbf{P}$ 的关系为

$$\rho_{\mathrm{V_b}}(\mathbf{r})=-\nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r}) \tag{1-49}$$

$$\rho_{\mathrm{S_b}}(\mathbf{r})=\mathbf{P}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n} \tag{1-50}$$

式中，$\mathbf{n}$ 为电介质表面的外法向单位矢量。虽然式（1-49）和式（1-50）是在静电场情况下得到的结果，但在时变场情况下仍然适用。当束缚电荷随时间变化时，在电介质内会出现束缚电流体密度矢量 $\mathbf{J}_{\mathrm{V_{be}}}(\mathbf{r};t)$，详见 1.6.3 节有关赫兹位的讨论。

1.2.2 磁偶极子及磁化强度矢量

1．磁偶极子

磁偶极子是一通电流 I，半径为 a 的微小电流圆环，如图 1-4（a）所示。采用球坐标系，电流环放置于 XY 平面内，圆环中心与坐标原点重合。由于电流环电流分布具有对称性，因而磁场分布也具有对称性。线电流磁矢量位计算公式为

$$\mathbf{A}(r,\theta,\varphi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{(l')}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}'}{R} \tag{1-51}$$

式中，$\mathbf{A}(r,\theta,\varphi)$ 为线电流环 l' 在空间点 $\mathbf{r}$ 处的磁矢量位；R 为线电流环上线电流元 $I\mathrm{d}\mathbf{l}'$ 到空间点 $\mathbf{r}$ 处距离矢量 $\mathbf{R}$ 的大小；μ_0 为真空介电常数。下面求解在 $r\gg a$ 的情况下，磁矢量位 $\mathbf{A}$ 和磁通密度矢量 $\mathbf{B}$。为了清楚起见，源点的坐标采用 (r',θ',φ')，场点的坐标采用 (r,θ,φ)。

由图 1-4（a）和式（1-51）可知，磁矢量位仅有 $\mathbf{e}_{\varphi'}$ 分量，$\mathbf{e}_{r'}$ 和 $\mathbf{e}_{\theta'}$ 分量为零。据此可将待求场点选在 YZ 平面内，并不失一般性。在 YZ 平面内任取一场点 $P(r,\theta,\pi/2)$，在电流环上任取一源点 $Q(a,\pi/2,\varphi')$，过源点 Q 的线电流元表示为

$$I\mathrm{d}\mathbf{l}'=Ia\mathrm{d}\varphi'\mathbf{e}_{\varphi'} \tag{1-52}$$

又

$$\mathbf{e}_{\varphi'}=-\sin\varphi'\mathbf{e}_x+\cos\varphi'\mathbf{e}_y \tag{1-53}$$

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi=r\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{2}=0 \\ y=r\sin\theta\sin\varphi=r\sin\theta\sin\dfrac{\pi}{2}=r\sin\theta \\ z=r\cos\theta \end{cases} \tag{1-54}$$

$$\begin{cases} x'=r'\sin\theta'\cos\varphi'=a\sin\dfrac{\pi}{2}\cos\varphi'=a\cos\varphi' \\ y'=r'\sin\theta'\sin\varphi'=a\sin\dfrac{\pi}{2}\sin\varphi'=a\sin\varphi' \\ z'=r'\cos\theta'=a\cos\dfrac{\pi}{2}=0 \end{cases} \tag{1-55}$$

$$\begin{aligned} R&=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} \\ &=\sqrt{r^2+a^2-2ra\sin\theta\sin\varphi'} \end{aligned} \tag{1-56}$$

式中，(x',y',z') 表示直角坐标系下的源点坐标，(x,y,z) 表示直角坐标系下的场点坐标。由于 $r\gg a$，取近似，有

$$\frac{1}{R}\approx\frac{1}{r}\left[1+\frac{a}{r}\sin\theta\sin\varphi'\right] \tag{1-57}$$

把式（1-52）和式（1-57）代入式（1-51），有

$$\mathbf{A}(r,\theta,\varphi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\left[1+\frac{a}{r}\sin\theta\sin\varphi'\right]Ia(-\sin\varphi'\mathbf{e}_x+\cos\varphi'\mathbf{e}_y)\mathrm{d}\varphi' \tag{1-58}$$

积分得到

$$\mathbf{A}(r,\theta,\varphi)=\frac{\mu_0 Ia^2}{4r^2}\sin\theta(-\mathbf{e}_x) \tag{1-59}$$

对于空间任意一点有

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y \tag{1-60}$$

取场点坐标 $\varphi = \pi/2$，代入式（1-60）得到

$$\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \tag{1-61}$$

最后，得到磁矢量位在球坐标系下的表达式为

$$\mathbf{A}(r,\theta,\varphi) = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^2}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi \tag{1-62}$$

定义磁偶极矩矢量 $\mathbf{p}_\mathrm{m}$ 为

$$\mathbf{p}_\mathrm{m} = p_\mathrm{m}\mathbf{e}_z = IS\mathbf{n} = I\mathbf{S} \tag{1-63}$$

式中，$S = \pi a^2$ 为张在微小电流环上的平面面积；$p_\mathrm{m} = IS$ 为磁偶极矩矢量的大小；$\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ 为平面 S 的单位法向矢量，方向与电流的方向满足右手法则。将式（1-63）代入式（1-62），得到微小电流环磁矢量位的表达式为

$$\mathbf{A}(r,\theta,\varphi) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{p}_\mathrm{m}\times\mathbf{e}_r}{r^2} \tag{1-64}$$

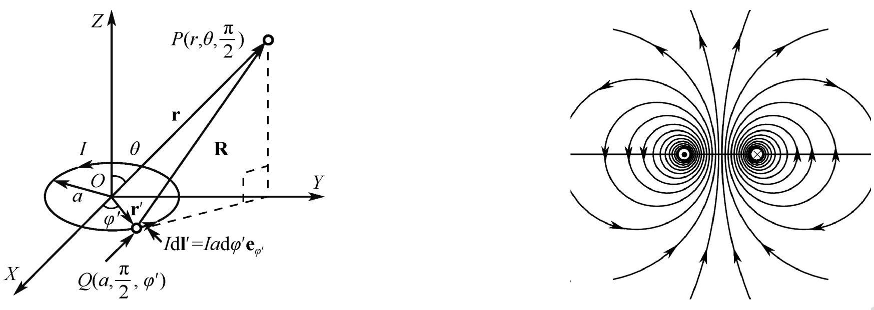
在球坐标系下，根据磁通密度矢量 $\mathbf{B}$ 与磁矢量位 $\mathbf{A}$ 的关系

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\mathbf{e}_r}{r^2\sin\theta} & \dfrac{\mathbf{e}_\theta}{r\sin\theta} & \dfrac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} \tag{1-65}$$

得到

$$\mathbf{B}(r,\theta,\varphi) = \frac{\mu_0 p_\mathrm{m}}{4\pi r^3}(2\cos\theta\mathbf{e}_r + \sin\theta\mathbf{e}_\theta) \tag{1-66}$$

微小电流环的磁力线分布如图 1-4（b）所示。



（a）磁偶极子　　（b）磁力线分布

图 1-4　磁偶极子模型及磁力线分布图

比较式（1-66）和式（1-23）可以看出，在远场近似条件下，式（1-66）与式（1-23）之间具有对偶性，仅仅需要将式（1-23）中的 $1/\varepsilon_0$ 换成 μ_0，p_e 换成 p_m，$\mathbf{E}(r,\theta,\varphi)$ 就变成 $\mathbf{B}(r,\theta,\varphi)$。因此，可以把微小电流环等效为一个两端有正、负磁荷 $\pm q_\mathrm{m}$ 的磁偶极子，正、负磁荷相距为 d，磁矩大小为 $p_\mathrm{m} = q_\mathrm{m}d = IS$。

2．磁化强度矢量

在构成物质的原子或分子中，电子的自旋及绕原子核的轨道运动会形成微小的圆形电流环，称为分子电流或束缚电流。每个微小电流环就相当于一个磁偶极子，具有一定的磁矩，所以物质的磁性可用分子的等效磁矩来表示。一般情况下，由于分子的热运动，物质中的磁偶极子的取向是杂乱无章的，磁偶极子产生的磁场在宏观上相互抵消，对外不显磁性。但是，如果有外磁场存在，磁性物质中的分子电流磁矩会取向排列，宏观上对外呈现磁效应，影响外磁场的分布，这种现象被称为磁化现象。就磁化特性而言，物质大体可分为三类：抗磁性、顺磁性和铁磁性物质。抗磁性物质在外磁场的作用下，分子磁矩产生的磁场与外磁场方向相反，削弱外磁场，其机理主要是电子轨道磁矩。所有的有机化合物和大部分无机化合物都是抗磁性物质，但这种反磁效应特别弱。顺磁性物质在外磁场的作用下，分子磁矩产生的磁场与外磁场一致，其机理主要是电子自旋磁矩。金、银、铜和石墨等都是顺磁性物质，但这种顺磁性仍然相当弱。铁磁性物质在外磁场的作用下产生强烈的磁化效应，其机理主要是在铁磁性物质中产生磁畴，因而出现磁滞现象。铁磁性物质在外磁场中所受到的磁力是顺磁性物质的数千倍，如铁、钴、镍、磁铁矿等。

由于抗磁性物质和顺磁性物质在外磁场中所受的力都很弱，实际上通常把它们归为一类，统称为非磁性物质。而且假设所有非磁性物质的磁导率与真空磁导率 μ_0 相同。

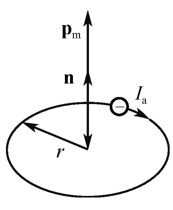


图 1-5　分子磁偶极矩

在磁介质中，分子中的电子以恒速绕原子核做圆周运动形成分子电流，相当于一个微小的电流环，如图 1-5 所示。这个微小的电流环可等效为磁偶极子，其磁偶极矩的表达式为

$$\mathbf{p}_\mathrm{m} = I_\mathrm{a} S \mathbf{n} \tag{1-67}$$

式中，I_a 为分子电流；S 为分子电流环的面积，其方向 $\mathbf{n}$ 与分子电流的绕行方向满足右手法则（注意，图中给出的是电子绕行的方向，与分子电流的方向相反）。

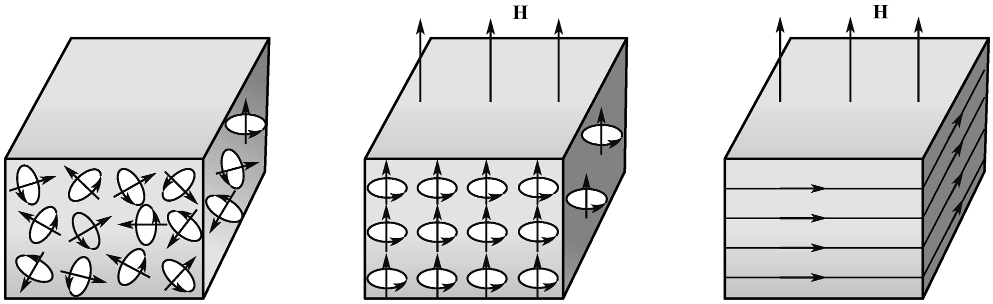
就一般磁介质而言，在没有外磁场时，磁介质内部各分子磁矩的取向随机分布，磁矩的矢量和为零，对外不显磁性，如图 1-6（a）所示。当有外磁场存在时，磁介质内部的分子磁矩沿外磁场方向排列，如图 1-6（b）所示，这种有序排列会在介质内部产生一个附加场。磁偶极子的有序排列类似于电偶极子在电介质中的有序排列，但有区别。电偶极子的有序排列总是使电场减弱，而顺磁性介质中的磁偶极子的有序排列则使磁场增强。对于均匀介质而言，磁介质内部的磁偶极子的有序排列会在磁介质的表面产生面电流分布，如图 1-6（c）所示，这种电流被称为束缚电流。

为了定量描述磁介质在外磁场作用下磁化程度的强弱，引入磁化强度矢量 $\mathbf{M}$。定义磁化强度矢量为磁介质中单位体积内分子磁矩的矢量和，即

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V' \to 0} \frac{\sum_i \mathbf{p}_{\mathrm{m}_i}}{\Delta V'} \tag{1-68}$$

其单位是安培/米（A/m）。如果 $\mathbf{M} \neq 0$，表明介质被磁化。

磁化强度矢量 $\mathbf{M}$ 取决于磁介质的特性和外加磁场强度矢量 $\mathbf{H}$。对于不同的磁介质，磁化强度矢量 $\mathbf{M}$ 与磁场强度矢量 $\mathbf{H}$ 的关系也可概括分为三大类。



（a）　　（b）　　（c）

图 1-6　介质的磁化

1）各向同性线性介质

对于各向同性线性介质，**M** 和 **H** 满足线性关系

$$\mathbf{M} = \chi_{\mathrm{m}}\mathbf{H} \tag{1-69}$$

式中，χ_{m} 是一个无量纲的量，称为介质的磁化率，是反映介质磁特性的物理量。对于抗磁性介质和顺磁性介质，在给定温度的情况下，χ_{m} 是一个常数，线性关系成立。对于顺磁性介质，$\chi_{\mathrm{m}} > 0$；对于抗磁性介质，$\chi_{\mathrm{m}} < 0$。如果 χ_{m} 取常数，则为均匀线性磁介质；如果 χ_{m} 是空间坐标点的函数，则为非均匀线性磁介质。

2）各向异性线性介质

在直角坐标系下，磁化强度矢量 **M** 和磁场强度矢量 **H** 的分量形式为

$$\mathbf{M} = M_x\mathbf{e}_x + M_y\mathbf{e}_y + M_z\mathbf{e}_z \tag{1-70}$$

$$\mathbf{H} = H_x\mathbf{e}_x + H_y\mathbf{e}_y + H_z\mathbf{e}_z \tag{1-71}$$

式中，M_x、M_y 和 M_z 分别为磁化强度矢量 **M** 沿直角坐标轴 X、Y 和 Z 方向的分量；H_x、H_y 和 H_z 分别为磁场强度矢量 **H** 沿直角坐标轴 X、Y 和 Z 方向的分量。

对于各向异性的线性介质，介质的磁化率取张量形式

$$\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{m}}^{(1)} = [\chi_{\mathrm{m}ij}]_{3\times3} = \begin{bmatrix} \chi_{\mathrm{m}xx} & \chi_{\mathrm{m}xy} & \chi_{\mathrm{m}xz} \\ \chi_{\mathrm{m}yx} & \chi_{\mathrm{m}yy} & \chi_{\mathrm{m}yz} \\ \chi_{\mathrm{m}zx} & \chi_{\mathrm{m}zy} & \chi_{\mathrm{m}zz} \end{bmatrix}, \quad i,j = x,y,z \tag{1-72}$$

如果把磁化强度矢量 **M** 和磁场强度矢量 **H** 的三个分量写成向量形式

$$\mathsf{M} = [M_i]_{3\times1} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}, \quad i = x,y,z \tag{1-73}$$

$$\mathsf{H}^{(1)} = [H_j]_{3\times1} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}, \quad j = x,y,z \tag{1-74}$$

则磁化强度矢量 **M** 和磁场强度矢量 **H** 的张量关系为

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{\mathrm{m}xx} & \chi_{\mathrm{m}xy} & \chi_{\mathrm{m}xz} \\ \chi_{\mathrm{m}yx} & \chi_{\mathrm{m}yy} & \chi_{\mathrm{m}yz} \\ \chi_{\mathrm{m}zx} & \chi_{\mathrm{m}zy} & \chi_{\mathrm{m}zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \tag{1-75}$$

写成求和形式为

$$M_i = \sum_{j=x,y,z} \chi_{mij} H_j , \quad i = x, y, z \tag{1-76}$$

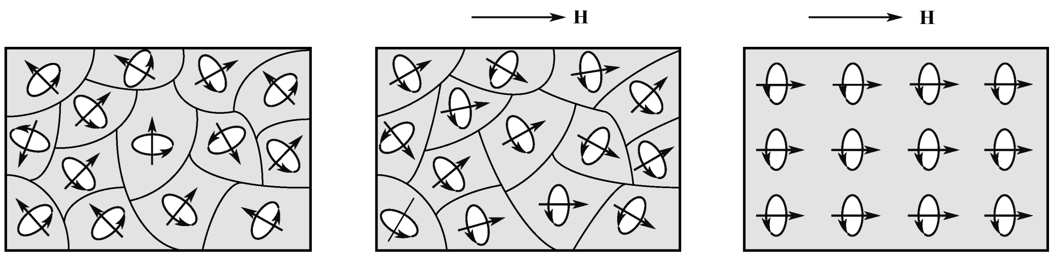
简记为

$$\mathsf{M} = \overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{m}}^{(1)} \; \mathsf{H}^{(1)} \tag{1-77}$$

式（1-76）表明，磁化率与方向有关，导致磁化强度矢量 **M** 与磁场强度矢量 **H** 方向不一致，但 **M** 与 **H** 仍然保持线性关系。如果 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{m}}^{(1)}$ 的分量 $\chi_{\mathrm{m}ij}$ 的取值为实常数，则称为均匀线性磁各向异性介质；如果 $\chi_{\mathrm{m}ij}$ 的取值为空间坐标的函数，则称为非均匀线性磁各向异性介质；如果 $\chi_{\mathrm{m}ij}$ 与频率有关，则称为线性磁各向异性色散介质。

3）各向异性非线性介质——隐式关系

对于铁磁性介质，其内部存在许多小区域，在每个小区域磁性原子或离子之间存在着很强的相互作用，这种相互作用可用内磁场来等效，其等效磁场称为分子磁场，相对应的小区域称为磁畴。在没有外磁场作用下，构成铁磁性介质内的磁畴磁矩矢量杂乱无章地排列，对外不显磁性，$\mathbf{M} = 0$，如图 1-7（a）所示；当铁磁性介质置于外加磁场 **H** 中时，铁磁性介质沿外加磁场方向被磁化，铁磁性介质对外显磁性，$\mathbf{M} \neq 0$，如图 1-7（b）所示；当外加磁场 **H** 不断增强，达到某一临界值时，铁磁性介质内部的磁畴消失，磁化强度矢量达到最大值 $\mathbf{M}_{\max}$，如图 1-7（c）所示。最大磁化强度矢量 $\mathbf{M}_{\max}$ 也称为饱和磁化强度，通常记作 $\mathbf{M}_{\mathrm{s}}$。铁磁性介质磁化过程中，磁场强度矢量 **H** 的大小与磁化强度矢量 **M** 的大小之间的非线性关系如图 1-8（a）所示。



（a）$\mathbf{M} = 0$　（b）$\mathbf{M} > 0$　（c）$\mathbf{M}_{\max}$

图 1-7　铁磁性物质内部磁畴磁矩随外磁场的变化

由此可见，铁磁性介质不仅具有各向异性，而且磁化率 χ_{m} 随磁场强度矢量 **H** 非线性变化，因此，磁化强度矢量 **M** 与磁场强度矢量 **H** 的关系可表示为

$$\mathsf{M} = \overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{m}}^{(1)}(\mathbf{H})\mathsf{H}^{(1)} + \overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{m}}^{(2)}(\mathbf{H})\mathsf{H}^{(2)} + \cdots \tag{1-78}$$

式中，列向量 M 见式（1-73）；列向量 $\mathsf{H}^{(1)}$ 见式（1-74）。列向量 $\mathsf{H}^{(2)}$ 是由磁场强度矢量 **H** 的乘积 **HH** 构成的列向量，即

$$\begin{aligned} \mathsf{H}^{(2)} &= [H_j H_k]_{9\times 1} = [H_x H_x, H_y H_x, H_z H_x, H_x H_y, H_y H_y, H_z H_y, H_x H_z, H_y H_z, H_z H_z]^{\mathrm{T}}, \\ & \qquad j, k = x, y, z \end{aligned} \tag{1-79}$$

磁化率张量 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{m}}^{(1)}(\mathbf{H})$ 和 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{m}}^{(2)}(\mathbf{H})$ 的分量形式分别为

$$\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{m}}^{(1)}(\mathbf{H}) = [\chi_{\mathrm{m}ij}(\mathbf{H})]_{3\times 3}, \quad i, j = x, y, z \tag{1-80}$$

$$\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{m}}^{(2)}(\mathbf{H}) = [\chi_{\mathrm{m}ijk}(\mathbf{H})]_{3\times 9}, \quad i, j, k = x, y, z \tag{1-81}$$

由此可将式（1-78）写成求和形式，即

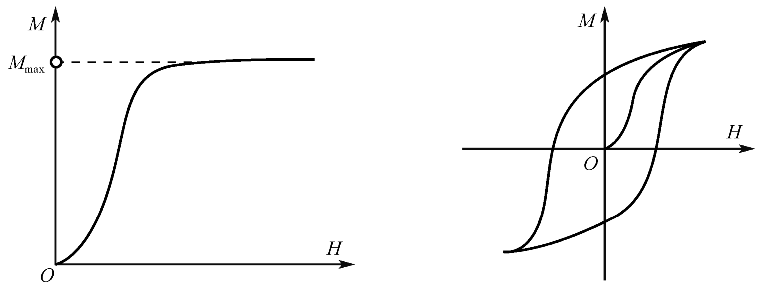
$$M_i = \sum_{j=x,y,z} \chi_{\mathrm{m}ij}(\mathbf{H})H_j + \sum_{j=x,y,z}\sum_{k=x,y,z} \chi_{\mathrm{m}ijk}(\mathbf{H})H_j H_k + \cdots, \quad i = x, y, z \tag{1-82}$$

式（1-80）和式（1-81）表明，反映铁磁性介质各向异性的磁化率张量，不仅随磁场强度矢量 $\mathbf{H}$ 的方向变化，而且随 $\mathbf{H}$ 的大小非线性变化。另外，比较式（1-82）和式（1-40）可以看出，电介质极化各向异性非线性关系为显式关系，而铁磁性介质各向异性非线性关系为隐式关系，这种隐式非线性关系通常都由微分方程的形式给出，如朗道-利夫希茨方程

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = -\gamma(\mathbf{M}\times\mathbf{H}) - \gamma\frac{\alpha}{M}\mathbf{M}\times(\mathbf{M}\times\mathbf{H}) \tag{1-83}$$

式中，常数 γ 称为旋磁比，无量纲常数 α 称为朗道（Landau）阻尼系数，M 是磁化强度矢量 $\mathbf{M}$ 的大小。方程（1-83）是微磁学研究的基本方程。

铁磁性介质磁场强度矢量 $\mathbf{H}$ 的大小与磁化强度矢量 $\mathbf{M}$ 的大小之间非线性变化的典型曲线就是磁滞回线，如图 1-8（b）所示。



（a）非线性磁化过程　　（b）磁滞回线

图 1-8　铁磁性介质非线性磁化过程示意图

3．束缚电流密度

在非均匀磁化情况下，磁介质内部和表面出现束缚电流分布。利用磁偶极子磁矢量位叠加计算，可得束缚电流体密度矢量 $\mathbf{J}_{\mathrm{V_{bm}}}(\mathbf{r})$ 和束缚电流面密度矢量 $\mathbf{J}_{\mathrm{S_b}}(\mathbf{r})$ 与磁化强度矢量 $\mathbf{M}$ 的关系为

$$\mathbf{J}_{\mathrm{V_{bm}}}(\mathbf{r}) = \nabla\times\mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{1-84}$$

$$\mathbf{J}_{\mathrm{S_b}}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}(\mathbf{r})\times\mathbf{n} \tag{1-85}$$

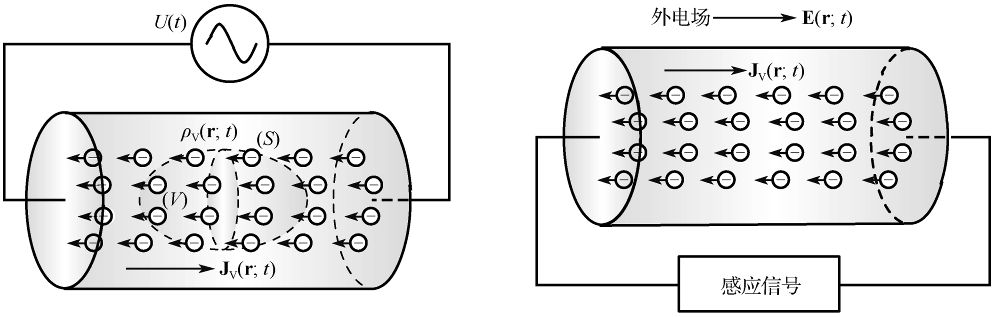
式中，$\mathbf{n}$ 为磁介质表面外法向单位矢量。由恒定电流磁场得到的关系式（1-84）和式（1-85）同样适用时变场的情况。当束缚电流随时间变化时，在磁介质内会出现束缚电流体密度矢量 $\mathbf{J}_{\mathrm{V_{bm}}}(\mathbf{r};t)$。

1.2.3　自由电子及自由电流体密度矢量

自由电流体密度矢量 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 是麦克斯韦方程组中的一个源项，而源 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 的载体是导电体（简称为导体）。导体的微观模型是导体由自由电子构成，当在导体两端加交变电压 $U(t)$ 时，在导体中会形成电流，导体内出现自由电流体密度分布 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$，因而导体内也同时出现自由电荷体密度分布 $\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$，两者之间满足电流连续性方程，如图 1-9（a）所示。另一方面，当导体置于时变电磁场中时，导体内的自由电子在电磁场的作用下感应产生自由电流体密度矢量 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$，如图 1-9（b）所示，该电流分布可用于计算电磁波在导体中传播能量的损耗，

欧姆定律和焦耳定律可用于定量描述。当在导体两端接负载形成回路时，导体就构成感应源，在回路中可产生电信号。但当导体不形成回路时，通常的做法是取 $\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)=0$，而 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)=\sigma\mathbf{E}(\mathbf{r};t)$。所以麦克斯韦方程组源项隐含两个方面：一是产生电磁波的真实源 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 或 $\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$，二是感应源 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$。真实源辐射电磁波，而感应源描述能量损耗且可产生电信号。

需要强调的是，用自由电子微观物理模型描述导体特性虽然在实际应用中解决了大量工程问题，但具有很大的局限性。尤其是描述光波在导体中的传播特性参数折射率和消光系数，其定义与实际测量值相差甚远，给理论计算带来很大困难。



（a）真实源　　（b）感应源

图 1-9　导体中的自由电流体密度分布

1．电流连续性方程

假设有一导电区域，其自由电荷体密度分布为 $\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$，自由电流体密度分布为 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$，如图 1-9（a）所示。在导电区域内任取一闭合曲面 S，则经闭合曲面流出的总电流为

$$i(\mathbf{r};t)=\oiint_{(S)}\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{1-86}$$

而闭合曲面内包含的总电荷量为

$$q(\mathbf{r};t)=\iiint_{(V)}\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)\mathrm{d}V \tag{1-87}$$

依据电流的定义有

$$i(\mathbf{r};t)=\frac{\partial q(\mathbf{r};t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{(V)}\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)\mathrm{d}V \tag{1-88}$$

根据电荷守恒原理，闭合曲面 S 流出的电流应等于单位时间内闭合曲面所包围的体积 V 中电荷的减少量，即

$$\oiint_{(S)}\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{(V)}\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)\mathrm{d}V \tag{1-89}$$

这就是电流连续性方程的积分形式。应用高斯散度定理

$$\iiint_{(V)}\nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}V=\oiint_{(S)}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{1-90}$$

式（1-89）可改写为

$$\iiint_{(V)}\left[\nabla\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)+\frac{\partial\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)}{\partial t}\right]\mathrm{d}V=0 \tag{1-91}$$

要使这个积分对任意体积都成立，必有被积函数为零，即

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t) = -\frac{\partial \rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)}{\partial t} \tag{1-92}$$

这就是电流连续性方程的微分形式。该式表明自由电荷体密度 $\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 随时间的变化是自由电流体密度矢量 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 的源。

电流连续性方程（1-92）也可以由麦克斯韦方程的微分形式得到。对式（1-5）两边取散度，并利用矢量恒等式

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0 \tag{1-93}$$

再利用式（1-8），就可得到电流连续性方程，即式（1-92）。

可以证明，麦克斯韦方程中的两个散度方程［见式（1-7）和式（1-8）］可以由两个旋度方程［见式（1-5）和式（1-6）］及电流连续性方程［见式（1-92）］导出，所以四个麦克斯韦微分方程并不是完全独立的。

需要指出的是，不管是发射源还是感应源，自由电流体密度 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 与自由电荷体密度 $\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 在导体中是同时出现的，二者之间满足电流连续性方程。在稳恒的情况下，虽然电荷随时间的变化率为零，但导体中的自由电流体密度矢量 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 和自由电荷体密度 $\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 并不为零。

2．焦耳定律

当电磁场存在于导体中时，导体中的自由电子在电磁力的作用下运动形成电流。由于电子在运动过程中不断与导体晶格阵点上的原子发生碰撞，导致导体温度升高，部分电能转化为热能，造成能量损耗，这种热能被称为焦耳热。热损耗被描述为单位体积内消耗的功率，即

静态场
$$p = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r}) \tag{1-94}$$

时变场
$$p = \mathbf{E}(\mathbf{r};t) \cdot \mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t) \tag{1-95}$$

式中，p 为功率密度，单位为瓦特/立方米（$\mathrm{W/m^3}$）；$\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 为导体中的自由电流体密度。式（1-94）和式（1-95）就是焦耳定律的微分形式。

1.3　物质方程

基本形式的麦克斯韦方程对于电磁场和电磁波问题的求解是普遍适用的，并没有涉及具体的介质。当求解实际问题时，麦克斯韦方程中的四个场矢量中仅有两个是相互独立的，电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 和电通密度矢量 $\mathbf{D}$、磁场强度矢量 $\mathbf{H}$ 和磁通密度矢量 $\mathbf{B}$、自由电流体密度矢量 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}$ 和电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 通过介质特性参数相联系，这种反映介质特性的 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$、$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$、$\mathbf{J}_{\mathrm{V}}$ 和 $\mathbf{E}$ 之间的关系称为物质方程，也称为本构方程。根据介质特性进行分类，$\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$、$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$、$\mathbf{J}_{\mathrm{V}}$ 和 $\mathbf{E}$ 之间的关系主要可归结为如下几种一般形式。

1.3.1　真空

在真空中，$\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$、$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 的关系定义为

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{1-96}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \tag{1-97}$$

式中，真空介电常数 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\,(\mathrm{F/m})$，真空磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,(\mathrm{H/m})$。

1.3.2 各向同性线性理想均匀介质

对于各向同性线性理想均匀介质，介电常数 ε 和磁导率 μ 为常数，有

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}=\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\mathbf{E} \tag{1-98}$$

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}=\mu_0\mu_\mathrm{r}\mathbf{H} \tag{1-99}$$

式中，ε_r 和 μ_r 为无量纲量，分别为介质的相对介电常数和相对磁导率。ε_r 与介质极化率 χ_e、μ_r 与介质磁化率 χ_m 之间的关系为

$$\varepsilon_\mathrm{r}=1+\chi_\mathrm{e} \tag{1-100}$$

$$\mu_\mathrm{r}=1+\chi_\mathrm{m} \tag{1-101}$$

对于光学介质，由于 $\mu_\mathrm{r}\approx 1$，通常定义介质的折射率 n 为

$$n^2=\varepsilon_\mathrm{r} \quad 或 \quad n=\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}} \tag{1-102}$$

对于导体，电导率 σ 为常数，有

$$\mathbf{J}_\mathrm{V}=\sigma\mathbf{E} \tag{1-103}$$

1.3.3 各向同性线性非均匀介质

对各向同性线性非均匀介质，介电常数 ε 和磁导率 μ 为空间坐标 $\mathbf{r}$ 的函数，有

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}=\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}(\mathbf{r})\mathbf{E} \tag{1-104}$$

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}=\mu_0\mu_\mathrm{r}(\mathbf{r})\mathbf{H} \tag{1-105}$$

式中，相对介电常数 ε_r 与介质极化率 χ_e、相对磁导率 μ_r 和介质磁化率 χ_m 之间的关系为

$$\varepsilon_\mathrm{r}(\mathbf{r})=1+\chi_\mathrm{e}(\mathbf{r}) \tag{1-106}$$

$$\mu_\mathrm{r}(\mathbf{r})=1+\chi_\mathrm{m}(\mathbf{r}) \tag{1-107}$$

对于光学介质，其折射率 n 定义为

$$n^2(\mathbf{r})=\varepsilon_\mathrm{r}(\mathbf{r}) \quad 或 \quad n(\mathbf{r})=\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}(\mathbf{r})} \tag{1-108}$$

对于导体，电导率 σ 为空间坐标 $\mathbf{r}$ 的函数，有

$$\mathbf{J}_\mathrm{V}=\sigma(\mathbf{r})\mathbf{E} \tag{1-109}$$

1.3.4 色散介质

对于存在吸收的色散介质，介电常数 ε 和磁导率 μ 是频率的函数，且取复数形式，有

$$\mathbf{D}=\tilde{\varepsilon}(\omega)\mathbf{E}=\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_\mathrm{r}(\omega)\mathbf{E} \tag{1-110}$$

$$\mathbf{B}=\tilde{\mu}(\omega)\mathbf{H}=\mu_0\tilde{\mu}_\mathrm{r}(\omega)\mathbf{H} \tag{1-111}$$

式中，$\tilde{\varepsilon}(\omega)$ 和 $\tilde{\mu}(\omega)$ 分别为介质的复介电常数和复磁导率；ω 为电磁波圆频率；$\tilde{\varepsilon}_\mathrm{r}(\omega)$ 和 $\tilde{\mu}_\mathrm{r}(\omega)$ 分别为介质的相对复介电常数和相对复磁导率。定义相对复介电常数和相对复磁导率为

$$\tilde{\varepsilon}_\mathrm{r}(\omega)=\varepsilon_\mathrm{r}(\omega)-\mathrm{j}\varepsilon_\mathrm{i}(\omega) \tag{1-112}$$

$$\tilde{\mu}_\mathrm{r}(\omega)=\mu_\mathrm{r}(\omega)-\mathrm{j}\mu_\mathrm{i}(\omega) \tag{1-113}$$

与相对复介电常数 $\tilde{\varepsilon}_\mathrm{r}(\omega)$ 相对应的折射率也取复值，通常定义为

$$\tilde{N}(\omega)=n(\omega)-\mathrm{j}\alpha(\omega) \tag{1-114}$$

式中，实部 $n(\omega)$ 称为折射率，虚部 $\alpha(\omega)$ 称为消光系数。

注意，为了简单起见，式（1-112）中相对复介电常数的实部 $\varepsilon_{\mathrm{r}}(\omega)$ 与相对复介电常数 $\tilde{\varepsilon}_{\mathrm{r}}(\omega)$ 采用相同的下标，式（1-113）中相对复磁导率的实部 $\mu_{\mathrm{r}}(\omega)$ 和相对复磁导率 $\tilde{\mu}_{\mathrm{r}}(\omega)$ 采用相同的下标。

对于导体，电导率 σ 为圆频率 ω 的函数，有

$$\mathbf{J}_{\mathrm{V}} = \sigma(\omega)\mathbf{E} \tag{1-115}$$

1.3.5　各向异性线性介质

对于电极化各向异性线性介质，介电常数 ε 取张量形式 $\overline{\overline{\mathsf{\varepsilon}}}$，有

$$\mathsf{D} = \overline{\overline{\mathsf{\varepsilon}}}\mathsf{E}^{(1)} = \varepsilon_0\overline{\overline{\mathsf{\varepsilon}}}_{\mathrm{r}}^{(1)}\mathsf{E}^{(1)} \tag{1-116}$$

式中，D 为电通密度矢量 $\mathbf{D}$ 的三个分量构成的列向量，即

$$\mathsf{D} = [D_i]_{3\times1},\quad i = x,y,z \tag{1-117}$$

列向量 $\mathsf{E}^{(1)}$ 见式（1-30）。$\overline{\overline{\mathsf{\varepsilon}}}_{\mathrm{r}}^{(1)}$ 为相对介电常数张量，$\overline{\overline{\mathsf{\varepsilon}}}_{\mathrm{r}}^{(1)}$ 与极化率张量 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(1)}$ 的关系为

$$\overline{\overline{\mathsf{\varepsilon}}}_{\mathrm{r}}^{(1)} = \overline{\overline{\mathsf{I}}} + \overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(1)} \tag{1-118}$$

式中，$\overline{\overline{\mathsf{I}}}$ 为单位张量。写成分量形式有

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathrm{r}xx} & \varepsilon_{\mathrm{r}xy} & \varepsilon_{\mathrm{r}xz} \\ \varepsilon_{\mathrm{r}yx} & \varepsilon_{\mathrm{r}yy} & \varepsilon_{\mathrm{r}yz} \\ \varepsilon_{\mathrm{r}zx} & \varepsilon_{\mathrm{r}zy} & \varepsilon_{\mathrm{r}zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi_{\mathrm{e}xx} & \chi_{\mathrm{e}xy} & \chi_{\mathrm{e}xz} \\ \chi_{\mathrm{e}yx} & \chi_{\mathrm{e}yy} & \chi_{\mathrm{e}yz} \\ \chi_{\mathrm{e}zx} & \chi_{\mathrm{e}zy} & \chi_{\mathrm{e}zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\chi_{\mathrm{e}xx} & \chi_{\mathrm{e}xy} & \chi_{\mathrm{e}xz} \\ \chi_{\mathrm{e}yx} & 1+\chi_{\mathrm{e}yy} & \chi_{\mathrm{e}yz} \\ \chi_{\mathrm{e}zx} & \chi_{\mathrm{e}zy} & 1+\chi_{\mathrm{e}zz} \end{bmatrix} \tag{1-119}$$

在平面对称情况下，各向异性晶体（单轴晶体）的主光轴与坐标轴平行，如液晶，相对介电常数张量具有对角张量形式，即

$$\overline{\overline{\mathsf{\varepsilon}}}_{\mathrm{r}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathrm{r}xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\mathrm{r}yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\mathrm{r}zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{\mathrm{o}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_{\mathrm{o}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_{\mathrm{e}}^2 \end{bmatrix} \tag{1-120}$$

式中，n_{o} 和 n_{e} 分别为寻常光和非寻常光的折射率。

对于磁极化各向异性线性介质，磁导率 μ 取张量形式 $\overline{\overline{\mathsf{\mu}}}$，有

$$\mathsf{B} = \overline{\overline{\mathsf{\mu}}}\mathsf{H}^{(1)} = \mu_0\overline{\overline{\mathsf{\mu}}}_{\mathrm{r}}^{(1)}\mathsf{H}^{(1)} \tag{1-121}$$

式中，B 为由磁通密度矢量 $\mathbf{B}$ 的三个分量构成的列向量，即

$$\mathsf{B} = [B_i]_{3\times1},\quad i = x,y,z \tag{1-122}$$

列向量 $\mathsf{H}^{(1)}$ 见式（1-74）。$\overline{\overline{\mathsf{\mu}}}_{\mathrm{r}}^{(1)}$ 为相对磁导率张量，$\overline{\overline{\mathsf{\mu}}}_{\mathrm{r}}^{(1)}$ 与磁化率张量 $\overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{m}}^{(1)}$ 的关系为

$$\overline{\overline{\mathsf{\mu}}}_{\mathrm{r}}^{(1)} = \overline{\overline{\mathsf{I}}} + \overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{m}}^{(1)} \tag{1-123}$$

写成分量形式有

$$\begin{bmatrix} \mu_{\mathrm{r}xx} & \mu_{\mathrm{r}xy} & \mu_{\mathrm{r}xz} \\ \mu_{\mathrm{r}yx} & \mu_{\mathrm{r}yy} & \mu_{\mathrm{r}yz} \\ \mu_{\mathrm{r}zx} & \mu_{\mathrm{r}zy} & \mu_{\mathrm{r}zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi_{\mathrm{m}xx} & \chi_{\mathrm{m}xy} & \chi_{\mathrm{m}xz} \\ \chi_{\mathrm{m}yx} & \chi_{\mathrm{m}yy} & \chi_{\mathrm{m}yz} \\ \chi_{\mathrm{m}zx} & \chi_{\mathrm{m}zy} & \chi_{\mathrm{m}zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\chi_{\mathrm{m}xx} & \chi_{\mathrm{m}xy} & \chi_{\mathrm{m}xz} \\ \chi_{\mathrm{m}yx} & 1+\chi_{\mathrm{m}yy} & \chi_{\mathrm{m}yz} \\ \chi_{\mathrm{m}zx} & \chi_{\mathrm{m}zy} & 1+\chi_{\mathrm{m}zz} \end{bmatrix} \tag{1-124}$$

对于各向异性导体，有

$$\mathsf{J}_{\mathsf{V}} = \overline{\overline{\mathsf{\sigma}}}\mathsf{E}^{(1)} \tag{1-125}$$

式中，J_{V} 为由自由电流体密度矢量 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}$ 的三个分量构成的列向量，即

$$\mathsf{J}_{\mathsf{V}} = [J_{\mathrm{V}i}]_{3\times1},\quad i = x,y,z \tag{1-126}$$

$\overline{\overline{\mathsf{\sigma}}}$ 为电导率张量，其分量形式为

$$\overline{\overline{\sigma}} = [\sigma_{ij}]_{3\times3}, \quad i,j = x,y,z \tag{1-127}$$

列向量 $\mathsf{E}^{(1)}$ 见式（1-30）。

1.3.6 双各向同性线性介质

一般情况下，各向同性和各向异性介质在电场作用下产生极化，而在磁场作用下产生磁化，极化和磁化两者之间不产生耦合。但对于一些特殊介质，电场作用不仅产生极化，而且产生磁化，同样磁场作用也产生极化和磁化。如果极化和磁化呈各向同性，则称这种介质为双各向同性线性介质，其物质方程形式为

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \kappa\mathbf{H} \tag{1-128}$$

$$\mathbf{B} = \gamma\mathbf{E} + \mu\mathbf{H} \tag{1-129}$$

式中，κ 和 γ 分别为极化和磁化耦合系数。

当电介质或磁介质在电磁场中运动时，介质不仅被极化，而且被磁化，呈双各向同性。描述运动介质双各向同性线性介质的物质方程形式为

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} - \kappa\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \tag{1-130}$$

$$\mathbf{B} = \gamma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu\mathbf{H} \tag{1-131}$$

1.3.7 双各向异性线性介质

如果在电场或磁场作用下，介质极化和磁化呈各向异性，则称这种介质为双各向异性线性介质。对于双各向异性线性介质，不仅介电常数和磁导率取张量形式，而且极化和磁化耦合系数也取张量形式，其物质方程形式为

$$\mathsf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\mathsf{E}^{(1)} + \overline{\overline{\kappa}}\mathsf{H}^{(1)} \tag{1-132}$$

$$\mathsf{B} = \overline{\overline{\gamma}}\mathsf{E}^{(1)} + \overline{\overline{\mu}}\mathsf{H}^{(1)} \tag{1-133}$$

式中，$\overline{\overline{\varepsilon}}$ 为介电常数张量，由式（1-116）和式（1-119）有

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = [\varepsilon_{ij}]_{3\times3} = \varepsilon_0[\varepsilon_{\mathrm{r}ij}]_{3\times3}, \quad i,j = x,y,z \tag{1-134}$$

$\overline{\overline{\mu}}$ 为磁导率张量，由式（1-121）和式（1-124）有

$$\overline{\overline{\mu}} = [\mu_{ij}]_{3\times3} = \mu_0[\mu_{\mathrm{r}ij}]_{3\times3}, \quad i,j = x,y,z \tag{1-135}$$

极化和磁化耦合系数张量 $\overline{\overline{\kappa}}$ 和 $\overline{\overline{\gamma}}$ 分别为

$$\overline{\overline{\kappa}} = [\kappa_{ij}]_{3\times3}, \quad i,j = x,y,z \tag{1-136}$$

$$\overline{\overline{\gamma}} = [\gamma_{ij}]_{3\times3}, \quad i,j = x,y,z \tag{1-137}$$

物质方程（1-132）和方程（1-133）也可写成矩阵形式。在直角坐标系下，将电通密度矢量 **D** 和磁通密度矢量 **B** 的分量合写在一起，构成列向量

$$\mathsf{C} = [D_x, D_y, D_z, B_x, B_y, B_z]^{\mathrm{T}} \tag{1-138}$$

式中，角标 T 表示转置。电场强度矢量 **E** 和磁场强度矢量 **H** 的分量合写在一起，构成列向量

$$\mathsf{G} = [E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z]^{\mathrm{T}} \tag{1-139}$$

将介电常数张量 $\overline{\overline{\varepsilon}}$、磁导率张量 $\overline{\overline{\mu}}$、极化和磁化耦合系数张量 $\overline{\overline{\kappa}}$ 和 $\overline{\overline{\gamma}}$ 合写在一起，构成矩阵

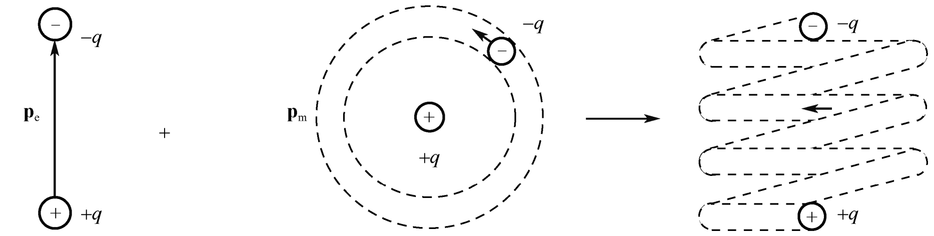
$$\mathsf{Q}=[q_{ij}]_{6\times6}=\begin{bmatrix}[\varepsilon_{ij}]_{3\times3} & [\kappa_{ij}]_{3\times3}\\ [\gamma_{ij}]_{3\times3} & [\mu_{ij}]_{3\times3}\end{bmatrix}_{6\times6},\quad i,j=x,y,z \tag{1-140}$$

由此可将双各向异性线性介质物质方程［见式（1-132）和式（1-133）］写成向量形式为

$$\mathsf{C}=\mathsf{Q}\,\mathsf{G} \tag{1-141}$$

如果极化和磁化耦合系数张量 $\bar{\bar{\kappa}}=0$ 和 $\bar{\bar{\mu}}=0$，向量式（1-141）就转化为各向异性线性介质物质方程［见式（1-116）和式（1-121）］的分量形式。

从极化和磁化的观点看，静态电场或磁场作用于双各向同性线性介质或双各向异性线性介质，可出现极化和磁化耦合；同样，时变电磁场作用也可以产生极化和磁化耦合，这种耦合的本质是在双各向同性线性介质或双各向异性线性介质中同时出现束缚电荷和束缚电流，其微观物理模型既具有电偶极子特性，又具有磁偶极子特性。一个合适的模型就是微螺旋[2]，如图 1-10 所示。根据电流方向，螺旋可分为左手和右手，所以这种介质也被称为手征介质。



（a）电偶极子　　（b）磁偶极子　　（c）微螺旋

图 1-10　极化和磁化耦合微螺旋模型

1888 年伦琴首次发现介质在电场中运动被磁化，而后 1905 年威尔逊又证明介质在均匀磁场中运动被极化。由此可见，当介质在电磁场中运动时，介质将出现极化和磁化耦合现象，呈现出双各向同性或双各向异性特性。1957 年朗道在理论上又预言了手征介质的存在，引起人们对电磁理论和电磁材料广泛而深入的研究。目前已经发现的具有手征特性的天然材料主要有氧化铬（Cr_2O_3）、镓铁氧化物、铁磁晶体、氨基酸、葡萄糖和某些有机聚合物等。随着薄膜技术的发展，人工合成手征薄膜材料也已成为可能。由于电磁波在手征介质中具有特殊的传播特性，所以在光电子学领域的潜在应用已引起人们的广泛注意。

1.3.8　各向异性非线性介质

与极化各向异性非线性介质相对应，依据式（1-34），可写出各向异性非线性物质方程为

$$\mathsf{D}=\varepsilon_0\mathsf{E}^{(1)}+\mathsf{P}=\varepsilon_0\bar{\bar{\varepsilon}}_{\rm r}^{(1)}\mathsf{E}^{(1)}+\varepsilon_0\bar{\bar{\varepsilon}}_{\rm r}^{(2)}\mathsf{E}^{(2)}+\varepsilon_0\bar{\bar{\varepsilon}}_{\rm r}^{(3)}\mathsf{E}^{(3)}+\cdots \tag{1-142}$$

式中

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_{\rm r}^{(1)}=\bar{\bar{\mathrm{I}}}+\bar{\bar{\chi}}_{\rm e}^{(1)},\ \bar{\bar{\varepsilon}}_{\rm r}^{(2)}=\bar{\bar{\chi}}_{\rm e}^{(2)},\ \bar{\bar{\varepsilon}}_{\rm r}^{(3)}=\bar{\bar{\chi}}_{\rm e}^{(3)},\ \cdots \tag{1-143}$$

D 为由电通密度矢量的三个分量构成的列向量，见式（1-117）；$\mathsf{E}^{(1)}$ 为由电场强度矢量的三个分量构成的列向量，见式（1-30）；$\mathsf{E}^{(2)}$ 和 $\mathsf{E}^{(3)}$ 分别是由电场强度矢量乘积 **EE** 和 **EEE** 得到的二阶和三阶非线性项分量构成的列向量，见式（1-36）和式（1-38）；$\bar{\bar{\varepsilon}}_{\rm r}^{(1)}$ 为相对介电常数张量，见式（1-119）；$\bar{\bar{\varepsilon}}_{\rm r}^{(2)}$ 和 $\bar{\bar{\varepsilon}}_{\rm r}^{(3)}$ 为相对介电常数三阶和四阶非线性项介电张量，与式（1-37）和式（1-39）中的三阶和四阶非线性极化率张量 $\bar{\bar{\chi}}_{\rm e}^{(2)}$ 和 $\bar{\bar{\chi}}_{\rm e}^{(3)}$ 取相同形式。

将向量关系式（1-142）写成分量求和形式有

$$D_i=\sum_{j=x,y,z}\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}ij}E_j+\sum_{j=x,y,z}\sum_{k=x,y,z}\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}ijk}E_jE_k+\sum_{j=x,y,z}\sum_{k=x,y,z}\sum_{l=x,y,z}\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}ijkl}E_jE_kE_l+\cdots,\quad i=x,y,z \tag{1-144}$$

与磁化各向异性非线性介质相对应，依据式（1-78），可写出各向异性非线性物质方程为

$$\mathsf{B}=\mu_0\bar{\bar{\mathsf{\mu}}}_{\mathrm{r}}^{(1)}(\mathbf{H})\mathsf{H}^{(1)}+\mu_0\bar{\bar{\mathsf{\mu}}}_{\mathrm{r}}^{(2)}(\mathbf{H})\mathsf{H}^{(2)}+\cdots \tag{1-145}$$

式中，B为由磁通密度矢量的三个分量构成的列向量，见式（1-122）；由磁场强度矢量$\mathbf{H}$构成的列向量$\mathsf{H}^{(1)}$见式（1-74）；由磁场强度矢量乘积$\mathbf{HH}$构成的列向量$\mathsf{H}^{(2)}$见式（1-79）。相对磁导率张量$\bar{\bar{\mathsf{\mu}}}_{\mathrm{r}}^{(1)}(\mathbf{H})$和$\bar{\bar{\mathsf{\mu}}}_{\mathrm{r}}^{(2)}(\mathbf{H})$的分量形式分别为

$$\bar{\bar{\mathsf{\mu}}}_{\mathrm{r}}^{(1)}(\mathbf{H})=[\mu_{\mathrm{r}ij}(\mathbf{H})]_{3\times3},\ i,j=x,y,z \tag{1-146}$$

$$\bar{\bar{\mathsf{\mu}}}_{\mathrm{r}}^{(2)}(\mathbf{H})=[\mu_{\mathrm{r}ijk}(\mathbf{H})]_{3\times9},\ i,j,k=x,y,z \tag{1-147}$$

由此可将式（1-145）写成分量求和形式，有

$$B_i=\sum_{j=x,y,z}\mu_0\mu_{\mathrm{r}ij}(\mathbf{H})H_j+\sum_{j=x,y,z}\sum_{k=x,y,z}\mu_0\mu_{\mathrm{r}ijk}(\mathbf{H})H_jH_k+\cdots,\quad i=x,y,z \tag{1-148}$$

上面给出的物质方程是反映电磁介质物理特性的一般形式。实际上，在进行光学元件或电磁元件设计仿真和计算过程中，针对不同实际问题的需要，首先必须选择合适的材料，也就是光学介质或电磁介质，并给定描述材料特性的物理参数的具体形式。例如，均匀电介质介电常数取实常数，$\varepsilon_{\mathrm{r}}=C$，实常数$C$必须给定；非均匀电介质介电常数取函数形式，$\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})=f(\mathbf{r})$，函数$f(\mathbf{r})$形式必须给定。

介质特性参数的获取可通过查阅材料手册，也可根据经典或量子微观物理模型进行求解，或者根据设计要求进行人工制备。由此可以看出，描述介质特性物质方程的形式决定求解电磁场问题的难易程度和复杂性，也是设计光学或电磁元件成败的关键一环。对于电磁理论研究，描述电磁材料特性的物质方程是其出发点，不同的材料特性体现在麦克斯韦方程中就构成了限定形式的麦克斯韦方程，也就是实际问题所满足的波动微分方程或积分方程。

1.4　时谐形式的麦克斯韦方程

麦克斯韦方程中的源项$\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$和$\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$可以是时间的任意函数。但在实际应用中，时变电磁场问题中最常见的是源随时间做正弦或余弦变化，因而空间任意点的电场强度和磁场强度也随时间做正弦或余弦变化，这类电磁场称为时谐电磁场。从傅里叶变换的角度看，任何时变场都可以分解为无穷多个谐波成分的叠加。因此，引用复数表示讨论时谐电磁场不仅方便，而且具有重要的实际应用价值。

1.4.1　时谐量的复数表示

设电场强度矢量$\mathbf{E}(\mathbf{r};t)$的每个分量都是频率为ω的余弦函数，用复数可表示为

$$\begin{cases}E_x(\mathbf{r};t)=E_{x\mathrm{m}}(\mathbf{r})\cos(\omega t+\varphi_x)=\mathrm{Re}[E_{x\mathrm{m}}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{\tilde{E}}_{x\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\\ E_y(\mathbf{r};t)=E_{y\mathrm{m}}(\mathbf{r})\cos(\omega t+\varphi_y)=\mathrm{Re}[E_{y\mathrm{m}}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{\tilde{E}}_{y\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\\ E_z(\mathbf{r};t)=E_{z\mathrm{m}}(\mathbf{r})\cos(\omega t+\varphi_z)=\mathrm{Re}[E_{z\mathrm{m}}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{\tilde{E}}_{z\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\end{cases} \tag{1-149}$$

式中

$$\begin{cases}\tilde{E}_{x\mathrm{m}} = E_{x\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_x} \\ \tilde{E}_{y\mathrm{m}} = E_{y\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_y} \\ \tilde{E}_{z\mathrm{m}} = E_{z\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_z}\end{cases} \tag{1-150}$$

称为复振幅。将以上各分量合写在一起，有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r};t) &= \mathrm{Re}[\tilde{E}_{x\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\mathbf{e}_x + \mathrm{Re}[\tilde{E}_{y\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\mathbf{e}_y + \mathrm{Re}[\tilde{E}_{z\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\mathbf{e}_z \\ &= \mathrm{Re}[(\tilde{E}_{x\mathrm{m}}\mathbf{e}_x + \tilde{E}_{y\mathrm{m}}\mathbf{e}_y + \tilde{E}_{z\mathrm{m}}\mathbf{e}_z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\end{aligned} \tag{1-151}$$

令

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{E}_{x\mathrm{m}}\mathbf{e}_x + \tilde{E}_{y\mathrm{m}}\mathbf{e}_y + \tilde{E}_{z\mathrm{m}}\mathbf{e}_z \tag{1-152}$$

则

$$\mathbf{E}(\mathbf{r};t) = \mathrm{Re}[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{1-153}$$

式中，$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ 称为 $\mathbf{E}(\mathbf{r};t)$ 的复振幅矢量，仅是空间坐标 $\mathbf{r}$ 的函数，与时间 t 无关。Re[•]表示取实部。如果场量是时间 t 的正弦函数，在式（1-153）中应该取虚部，即 Im[•]。

对于其他时谐量，也可以写成复振幅的形式

$$\mathbf{D}(\mathbf{r};t) = \mathrm{Re}[\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{1-154}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r};t) = \mathrm{Re}[\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{1-155}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r};t) = \mathrm{Re}[\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{1-156}$$

$$\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t) = \mathrm{Re}[\tilde{\mathbf{J}}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{1-157}$$

$$\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t) = \mathrm{Re}[\tilde{\rho}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{1-158}$$

由此可见，只要把已知时谐量的复振幅与时间因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 相乘，并取实部，就可得到该量的瞬时值表达式。

1.4.2　时谐形式的麦克斯韦方程

将相关时谐量的复数表达式（1-153）～式（1-158）代入时域形式的麦克斯韦方程（1-5）～方程（1-8），便得到麦克斯韦方程组的时谐形式

$$\begin{cases}\nabla\times\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{J}}_{\mathrm{V}} + \mathrm{j}\omega\tilde{\mathbf{D}} & (1\text{-}159) \\ \nabla\times\tilde{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega\tilde{\mathbf{B}} & (1\text{-}160) \\ \nabla\cdot\tilde{\mathbf{B}} = 0 & (1\text{-}161) \\ \nabla\cdot\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\rho}_{\mathrm{V}} & (1\text{-}162)\end{cases}$$

由式（1-92）可写出电流连续性方程的时谐形式为

$$\nabla\cdot\tilde{\mathbf{J}}_{\mathrm{V}} = -\mathrm{j}\omega\tilde{\rho}_{\mathrm{V}} \tag{1-163}$$

1.5　介质中的麦克斯韦方程及波动方程

在实际应用中，当描述介质特性的物质方程给定以后，将其代入麦克斯韦方程就是介质中的麦克斯韦方程，与初始条件和边界条件一起构成一个定解问题。由于物质方程的形式不同，介质中的麦克斯韦方程的形式也多种多样，求解的方法也不相同。下面给出几种实际问题中常用的麦克斯韦方程以及与之相对应的波动方程。

1.5.1 真空中的麦克斯韦方程

当在电介质、磁介质或导电介质中求解电磁场问题时，如果需要采用真空中的物质方程［见式（1-96）和式（1-97）］，则麦克斯韦方程的源项不仅包含自由电流体密度$\mathbf{J}_{\mathrm{V}}$和自由电荷体密度ρ_{V}，还应包含由磁化而产生的束缚电流体密度$\mathbf{J}_{\mathrm{V_{bm}}}$和由极化而产生的束缚电荷体密度$\rho_{\mathrm{V_b}}$。在时变电磁场的情况下，极化产生的束缚电荷体密度$\rho_{\mathrm{V_b}}$随时间变化会产生极化电流体密度$\mathbf{J}_{\mathrm{V_{be}}}$，由此可写出真空形式的麦克斯韦方程组的微分形式

$$\begin{cases}\nabla\times\dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0}=\mathbf{J}_{\mathrm{V}}+\mathbf{J}_{\mathrm{V_{bm}}}+\mathbf{J}_{\mathrm{V_{be}}}+\varepsilon_0\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} & (1\text{-}164)\\ \nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} & (1\text{-}165)\\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0 & (1\text{-}166)\\ \nabla\cdot(\varepsilon_0\mathbf{E})=\rho_{\mathrm{V}}+\rho_{\mathrm{V_b}} & (1\text{-}167)\end{cases}$$

式中，下标“$\mathrm{V_{be}}$”表示由束缚电荷产生的电流源，称为电性源；下标“$\mathrm{V_{bm}}$”表示由束缚电流产生的电流源，称为磁性源。

1.5.2 无源均匀各向同性线性理想介质中的麦克斯韦方程及波动方程

在无源均匀各向同性线性理想介质中，介电常数ε和磁导率μ为常数，$\sigma=0$，$\mathbf{J}_{\mathrm{V}}=0$，$\rho_{\mathrm{V}}=0$，将物质方程（1-98）和方程（1-99）代入基本形式的麦克斯韦方程（1-5）～方程（1-8），有

$$\begin{cases}\nabla\times\mathbf{H}=\varepsilon\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} & (1\text{-}168)\\ \nabla\times\mathbf{E}=-\mu\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} & (1\text{-}169)\\ \nabla\cdot\mathbf{H}=0 & (1\text{-}170)\\ \nabla\cdot\mathbf{E}=0 & (1\text{-}171)\end{cases}$$

这就是无源均匀各向同性线性理想介质中的麦克斯韦方程。方程（1-168）和方程（1-169）构成关于$\mathbf{H}$和$\mathbf{E}$的一阶偏微分方程组。如果对方程（1-168）和方程（1-169）两边取旋度，就可化为关于$\mathbf{H}$和$\mathbf{E}$的二阶偏微分方程。

对方程（1-168）两边取旋度，有

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{H}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{E} \tag{1-172}$$

利用矢量恒等式

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A} \tag{1-173}$$

有

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{H})-\nabla^2\mathbf{H}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{E} \tag{1-174}$$

将方程（1-169）和方程（1-170）代入式（1-174），得到

$$\nabla^2\mathbf{H}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}=0 \tag{1-175}$$

同理，可得

$$\nabla^2\mathbf{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0 \tag{1-176}$$

显然，式（1-175）和式（1-176）是齐次矢量波动方程，也称为矢量亥姆霍兹（Helmholtz）方程。该方程表明无源均匀各向同性线性理想介质中时变电磁场是以波动形式传播的，其传播速度为

$$\upsilon=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{1-177}$$

将式（1-177）代入式（1-175）和式（1-176），得到

$$\nabla^2\mathbf{H}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}=0 \tag{1-178}$$

$$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0 \tag{1-179}$$

式（1-178）和式（1-179）就是标准的齐次矢量波动方程。

在真空中，$\varepsilon_\mathrm{r}=1$，$\mu_\mathrm{r}=1$，电磁波在真空中的传播速度即为光速 c，将真空介电常数 ε_0 和真空磁导率 μ_0 代入式（1-177）得到

$$\upsilon=c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\approx 3.0\times10^8\,(\mathrm{m/s}) \tag{1-180}$$

如果采用介质折射率更一般的定义

$$n=\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\mu_\mathrm{r}} \tag{1-181}$$

则波速 υ 可表示为

$$\upsilon=\frac{c}{n} \tag{1-182}$$

需要强调的是，介质折射率 n 不管相对介电常数 ε_r 和相对磁导率 μ_r 取何值，都不可能取负值。如果介质折射率取负值，必然的结果是光速 c 取负值或波速 υ 取负值，这是一个基本物理概念的错误。

对于时谐电磁场，无源区域各向同性线性理想介质中的电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 和磁场强度矢量 $\mathbf{H}$ 随时间做正弦或余弦变化，将式（1-153）和式（1-155）分别代入式（1-176）和式（1-175），有

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{E}}+k^2\tilde{\mathbf{E}}=0 \tag{1-183}$$

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{H}}+k^2\tilde{\mathbf{H}}=0 \tag{1-184}$$

式中

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{1-185}$$

称为波数，也称为空间圆频率。式（1-183）和式（1-184）就是时谐电磁场强度复振幅矢量 $\tilde{\mathbf{E}}$ 和 $\tilde{\mathbf{H}}$ 在无源各向同性线性理想介质中所满足的复矢量波动方程，也称为齐次复矢量亥姆霍兹方程。

依据式（1-177）、式（1-181）、式（1-182）和式（1-185），可导出波速 υ、波数 k、圆频率（也称为角频率）ω 及介质折射率 n 之间的关系为

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\frac{\omega}{\upsilon}=\frac{\omega}{c}n \tag{1-186}$$

由此也可写出描述波动特征的基本物理量波数 k、波长 λ（也称为空间周期）、空间频率 ν、

圆频率 ω、周期 T 和频率 f 之间的关系为

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=2\pi\nu \tag{1-187}$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f \tag{1-188}$$

$$\upsilon=\lambda f \tag{1-189}$$

波动方程（1-183）和方程（1-184）是研究电磁波传播最基本的方程，其应用十分广泛，涉及光学、通信等众多领域。

1.5.3 无源均匀各向同性线性导电介质中的麦克斯韦方程及波动方程

在无源均匀各向同性线性导电介质中，介电常数 ε、磁导率 μ 和电导率 σ 均为常数，将物质方程（1-98）、方程（1-99）和方程（1-103）代入基本形式的麦克斯韦方程（1-5）～方程（1-8）]，有

$$\begin{cases}\nabla\times\mathbf{H}=\sigma\mathbf{E}+\varepsilon\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} & (1\text{-}190)\\ \nabla\times\mathbf{E}=-\mu\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} & (1\text{-}191)\\ \nabla\cdot\mathbf{H}=0 & (1\text{-}192)\\ \nabla\cdot\mathbf{E}=0 & (1\text{-}193)\end{cases}$$

这就是无源均匀各向同性线性导电介质中的麦克斯韦方程。同样，无源均匀各向同性线性导电介质中的一阶麦克斯韦方程也可以简化为二阶波动方程形式。

对方程（1-190）两边取旋度，有

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{H}=\sigma\nabla\times\mathbf{E}+\varepsilon\nabla\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{1-194}$$

利用矢量恒等式（1-173）有

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{H})-\nabla^2\mathbf{H}=\sigma\nabla\times\mathbf{E}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{E} \tag{1-195}$$

将方程（1-191）和方程（1-192）代入式（1-195），得到

$$\nabla^2\mathbf{H}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}=0 \tag{1-196}$$

同理，可得

$$\nabla^2\mathbf{E}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0 \tag{1-197}$$

式（1-196）和式（1-197）就是无源均匀各向同性线性导电介质中的齐次波动方程，与无源均匀各向同性线性理想介质中的波动方程［见式（1-175）和式（1-176）］相比较，导电介质中存在电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 和磁场强度矢量 $\mathbf{H}$ 随时间变化的一次导数项，此项表明介质存在损耗。

需要强调的是，在无源区域，为了反映导电介质电磁波能量传输的损耗，麦克斯韦方程中应该包含感应源项 $\mathbf{J}_\mathrm{V}=\sigma\mathbf{E}$，但麦克斯韦方程中的感应电荷源 $\rho_\mathrm{V}=0$，这种近似与实际有很大的差别，详见后面章节的讨论。如果在真实辐射源区，则麦克斯韦方程不仅应该包括真实源项 $\mathbf{J}_\mathrm{V}(\mathbf{r};t)$，也应该包括与之相对应的电荷源 $\rho_\mathrm{V}(\mathbf{r};t)$，且必须给出具体的变化形式。

在时谐电磁场的情况下，将式（1-153）和式（1-155）分别代入式（1-197）和式（1-196），得到

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{E}} - \mathrm{j}\omega\mu\sigma\tilde{\mathbf{E}} + \omega^2\mu\varepsilon\tilde{\mathbf{E}} = \nabla^2\tilde{\mathbf{E}} + (\omega^2\mu\varepsilon - \mathrm{j}\omega\mu\sigma)\tilde{\mathbf{E}} = 0 \tag{1-198}$$

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{H}} - \mathrm{j}\omega\mu\sigma\tilde{\mathbf{H}} + \omega^2\mu\varepsilon\tilde{\mathbf{H}} = \nabla^2\tilde{\mathbf{H}} + (\omega^2\mu\varepsilon - \mathrm{j}\omega\mu\sigma)\tilde{\mathbf{H}} = 0 \tag{1-199}$$

令

$$\tilde{k}_{\mathrm{c}} = \omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}\right)} \tag{1-200}$$

则有

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{k}_{\mathrm{c}}^2\tilde{\mathbf{E}} = 0 \tag{1-201}$$

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{k}_{\mathrm{c}}^2\tilde{\mathbf{H}} = 0 \tag{1-202}$$

式（1-201）和式（1-202）就是无源均匀各向同性线性导电介质中复振幅矢量 $\tilde{\mathbf{E}}$ 和 $\tilde{\mathbf{H}}$ 所满足的齐次波动方程。由此可以看出，无源均匀各向同性线性导电介质与无源均匀各向同性线性理想介质中的波动方程形式完全相同，使求解过程得以简化。

如果引入复折射率 $\tilde{N}$，复波数 $\tilde{k}_{\mathrm{c}}$ 与实波数 k 具有相同形式。由式（1-200）有

$$\tilde{k}_{\mathrm{c}} = \omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}\right)} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_{\mathrm{r}}\varepsilon_{\mathrm{r}}\left(1 - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}\omega}\right)} \tag{1-203}$$

令

$$\tilde{N} = n - \mathrm{j}\alpha = \sqrt{\mu_{\mathrm{r}}\varepsilon_{\mathrm{r}}\left(1 - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}\omega}\right)} \tag{1-204}$$

则有

$$\tilde{k}_{\mathrm{c}} = \frac{\omega}{c}\tilde{N} \tag{1-205}$$

令式（1-204）的实部和虚部相等，可得

$$n = \left[\frac{\mu_{\mathrm{r}}\varepsilon_{\mathrm{r}}}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} + 1\right)\right]^{1/2} \tag{1-206}$$

$$\alpha = \left[\frac{\mu_{\mathrm{r}}\varepsilon_{\mathrm{r}}}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 1\right)\right]^{1/2} \tag{1-207}$$

显然，导电介质中的复折射率 $\tilde{N}$ 的实部折射率 n 和虚部消光系数 α 与圆频率 ω 有关，表明在导电介质中电磁波传播，不仅存在能量衰减，而且存在色散。导电介质折射率定义式（1-206）和消光系数定义式（1-207）与实际测量值存在很大差异，这就给理论计算带来了困难。

在大多数关于电磁场与电磁波的教材中，通常采用衰减常数和相位常数来描述导电介质的特性，而不是光学中采用的折射率和消光系数。实际上，折射率和消光系数与圆频率 ω 相乘就是相位常数和衰减常数。

1.5.4　无源各向同性线性非均匀理想介质中的麦克斯韦方程及波动方程

在无源各向同性线性非均匀理想介质中，假设介质介电常数非均匀 $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})$，介质相对磁导率 $\mu_{\mathrm{r}} \approx 1$（光学介质），且 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}} = 0$，$\rho_{\mathrm{V}} = 0$，由式（1-104）和式（1-105）有

$$\begin{cases}\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})\mathbf{E}\\\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}\end{cases}\tag{1-208}$$

将上式代入麦克斯韦方程（1-5）～方程（1-8）得到

$$\begin{cases}\nabla\times\mathbf{H}=\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} & (1\text{-}209)\\\nabla\times\mathbf{E}=-\mu_0\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} & (1\text{-}210)\\\nabla\cdot\mathbf{H}=0 & (1\text{-}211)\\\nabla\cdot[\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})\mathbf{E}]=0 & (1\text{-}212)\end{cases}$$

式（1-209）～式（1-212）为无源各向同性线性非均匀理想介质中的一阶麦克斯韦方程组时域形式。

令式（1-209）两边同除以$\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})$，得到

$$\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})}\nabla\times\mathbf{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\tag{1-213}$$

对上式两边取旋度，并将式（1-210）代入其中，得到

$$\nabla\times\left[\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})}\nabla\times\mathbf{H}\right]=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}\tag{1-214}$$

同理，可得

$$\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})}\nabla\times[\nabla\times\mathbf{E}]=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}\tag{1-215}$$

式（1-214）和式（1-215）是与麦克斯韦方程（1-209）～方程（1-212）相对应的无源各向同性线性非均匀理想介质中二阶波动方程的时域形式。

如果将式（1-153）和式（1-155）代入式（1-215）和式（1-214），则得到无源各向同性线性非均匀理想介质中波动方程的时谐形式为

$$\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})}\nabla\times[\nabla\times\tilde{\mathbf{E}}]=\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\mathbf{E}}\tag{1-216}$$

$$\nabla\times\left[\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})}\nabla\times\tilde{\mathbf{H}}\right]=\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\mathbf{H}}\tag{1-217}$$

式（1-214）和式（1-215）是研究光子晶体的时域方程，而式（1-216）和式（1-217）是研究光子晶体的频域方程。

利用矢量恒等式（1-173），由式（1-216）得到

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{E}}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})\tilde{\mathbf{E}}-\nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{E}})=0\tag{1-218}$$

利用矢量关系式

$$\nabla\cdot[\varphi(\mathbf{r})\mathbf{A}(\mathbf{r})]=\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\nabla\varphi(\mathbf{r})+\varphi(\mathbf{r})\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})\tag{1-219}$$

并由式（2-212）得到

$$\nabla\cdot[\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})\tilde{\mathbf{E}}]=\tilde{\mathbf{E}}\cdot\nabla\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})+\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})\nabla\cdot\tilde{\mathbf{E}}=0\tag{1-220}$$

有

$$\nabla\cdot\tilde{\mathbf{E}}=-\frac{\tilde{\mathbf{E}}\cdot\nabla\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})}{\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})}\tag{1-221}$$

在介质相对介电常数 $\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})$ 变化比较缓慢的情况下，可取近似

$$\nabla\left(\frac{\tilde{\mathbf{E}}\cdot\nabla\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})}{\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})}\right)\approx 0 \tag{1-222}$$

由此得到电场强度复振幅矢量满足的方程为

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{E}}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})\tilde{\mathbf{E}}=0 \tag{1-223}$$

此方程就是变系数复矢量亥姆霍兹方程。

在介质相对介电常数 $\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r})$ 变化较快的情况下，式（1-218）中的最后一项不能忽略，否则会造成错误。如果要将式（1-218）化为标准的波动方程，就需要利用电标量位 u 和磁矢量位 $\mathbf{A}$ 。电标量位 u 和磁矢量位 $\mathbf{A}$ 的讨论详见 1.6 节。

1.5.5　无源双各向同性线性理想介质中的矩阵波动方程

在无源双各向同性线性理想介质中，$\mathbf{J}_{\mathrm{V}}=0$，$\rho_{\mathrm{V}}=0$，介电常数和磁导率均为常数，由式（1-159）～式（1-162）可写出麦克斯韦方程的时谐形式为

$$\begin{cases}\nabla\times\tilde{\mathbf{H}}=\mathrm{j}\omega\tilde{\mathbf{D}} & (1\text{-}224)\\ \nabla\times\tilde{\mathbf{E}}=-\mathrm{j}\omega\tilde{\mathbf{B}} & (1\text{-}225)\\ \nabla\cdot\tilde{\mathbf{B}}=0 & (1\text{-}226)\\ \nabla\cdot\tilde{\mathbf{D}}=0 & (1\text{-}227)\end{cases}$$

在直角坐标系下，将式（1-224）和式（1-225）两个旋度方程写成分量形式，用矩阵方程表示为

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&-\partial/\partial z&\partial/\partial y\\0&0&0&\partial/\partial z&0&-\partial/\partial x\\0&0&0&-\partial/\partial y&\partial/\partial x&0\\0&\partial/\partial z&-\partial/\partial y&0&0&0\\-\partial/\partial z&0&\partial/\partial x&0&0&0\\\partial/\partial y&-\partial/\partial x&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\\tilde{E}_y\\\tilde{E}_z\\\tilde{H}_x\\\tilde{H}_y\\\tilde{H}_z\end{bmatrix}=\mathrm{j}\omega\begin{bmatrix}\tilde{D}_x\\\tilde{D}_y\\\tilde{D}_z\\\tilde{B}_x\\\tilde{B}_y\\\tilde{B}_z\end{bmatrix} \tag{1-228}$$

记矩阵方程的微分算子矩阵为

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&-\partial/\partial z&\partial/\partial y\\0&0&0&\partial/\partial z&0&-\partial/\partial x\\0&0&0&-\partial/\partial y&\partial/\partial x&0\\0&\partial/\partial z&-\partial/\partial y&0&0&0\\-\partial/\partial z&0&\partial/\partial x&0&0&0\\\partial/\partial y&-\partial/\partial x&0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{1-229}$$

由此，矩阵方程可简写为

$$\mathsf{A}\tilde{\mathsf{G}}=\mathrm{j}\omega\tilde{\mathsf{C}} \tag{1-230}$$

式中，$\tilde{\mathsf{G}}$ 和 $\tilde{\mathsf{C}}$ 是与列向量 G［见式（1-139）］和列向量 C［见式（1-138）］相对应的复振幅列向量。

将双各向同性物质方程（1-130）和方程（1-131）写成时谐形式，有

$$\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon\tilde{\mathbf{E}} - \mathrm{j}\omega\kappa\tilde{\mathbf{H}} \tag{1-231}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathrm{j}\omega\gamma\tilde{\mathbf{E}} + \mu\tilde{\mathbf{H}} \tag{1-232}$$

与其对应的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \tilde{D}_x \\ \tilde{D}_y \\ \tilde{D}_z \\ \tilde{B}_x \\ \tilde{B}_y \\ \tilde{B}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & -\mathrm{j}\omega\kappa & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & -\mathrm{j}\omega\kappa & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & -\mathrm{j}\omega\kappa \\ \mathrm{j}\omega\gamma & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}\omega\gamma & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{j}\omega\gamma & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \\ \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \\ \tilde{H}_z \end{bmatrix} \tag{1-233}$$

记极化和磁化耦合系数矩阵为

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & -\mathrm{j}\omega\kappa & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & -\mathrm{j}\omega\kappa & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & -\mathrm{j}\omega\kappa \\ \mathrm{j}\omega\gamma & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}\omega\gamma & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{j}\omega\gamma & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{1-234}$$

则物质方程可写成向量形式

$$\tilde{\mathsf{C}} = \mathsf{M}\tilde{\mathsf{G}} \tag{1-235}$$

在介质介电常数 ε、磁导率 μ、极化和磁化耦合系数 κ 和 γ 为常数的情况下，将式（1-235）代入式（1-230），可得

$$\mathsf{A}\tilde{\mathsf{G}} = \mathrm{j}\omega\mathsf{M}\tilde{\mathsf{G}} \tag{1-236}$$

式（1-236）就是双各向同性线性理想介质中电磁场量复振幅所满足的矩阵波动方程。

1.5.6 无源各向异性线性理想介质中的矩阵波动方程

在无源各向异性线性理想介质中，$\mathbf{J}_{\mathrm{V}} = 0$，$\rho_{\mathrm{V}} = 0$，由方程（1-5）～方程（1-8）可写出时域形式的麦克斯韦方程为

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{H} = \dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} & (1\text{-}237) \\ \nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} & (1\text{-}238) \\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 & (1\text{-}239) \\ \nabla\cdot\mathbf{D} = 0 & (1\text{-}240) \end{cases}$$

在直角坐标系下，由微分算子矩阵［见式（1-229）］，可将两个旋度方程（1-237）和方程（1-238）写成分量形式，用矩阵方程表示为

$$\mathsf{A}\mathsf{G} = \frac{\partial\mathsf{C}}{\partial t} \tag{1-241}$$

式中，列向量 G 见式（1-139），列向量 C 见式（1-138）。

将双各向异性线性理想介质物质方程（1-141）代入矩阵方程（1-241），得到无源区域时域形式的矩阵波动方程为

$$\mathsf{AG} = \mathsf{Q}\frac{\partial \mathsf{G}}{\partial t} \tag{1-242}$$

式中，矩阵 Q 见式（1-140）。

在时谐场情况下，场量采用复振幅列向量表示，式（1-242）可改写为

$$\mathsf{A}\tilde{\mathsf{G}} = \mathrm{j}\omega \mathsf{Q}\tilde{\mathsf{G}} \tag{1-243}$$

这就是无源各向异性线性理想介质中电磁场量复振幅所满足的矩阵波动方程。该方程适用于电磁波在一般各向异性介质中传播的情况，也适用于特殊的层状各向异性介质薄膜。

1.5.7　无源各向同性均匀非线性理想介质中的波动方程

在无源各向同性均匀非线性理想介质中，介电常数 ε 为常数、相对磁导率 $\mu_{\mathrm{r}} \approx 1$，电导率 $\sigma = 0$， $\mathbf{J}_{\mathrm{V}} = 0$， $\rho_{\mathrm{V}} = 0$，麦克斯韦方程与式（1-237）～式（1-240）的形式完全相同。为了体现电极化非线性项，物质方程采用如下形式：

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases} \tag{1-244}$$

对式（1-238）两边取旋度，并将式（1-237）和式（1-244）代入其中，得到

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \tag{1-245}$$

利用矢量恒等式（1-173），有

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \tag{1-246}$$

在介电常数 ε 为常数的情况下，由式（1-240）和式（1-221）可知

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{1-247}$$

则式（1-245）化简为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \tag{1-248}$$

该方程反映的是电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 与电极化强度矢量 $\mathbf{P}$ 之间的关系。在各向同性的情况下，描述 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{P}$ 之间的非线性关系式（1-34）可以化简为矢量形式，取其线性项和二阶非线性项，有

$$\mathsf{P} = \varepsilon_0 \overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(1)} \mathsf{E}^{(1)} + \varepsilon_0 \overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(2)} \mathsf{E}^{(2)} \tag{1-249}$$

写成矢量式，记为

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{NL} \tag{1-250}$$

式中，极化强度矢量 $\mathbf{P}$ 的三个分量与向量 P 的三个分量相对应，线性项矢量 $\mathbf{P}^{(1)}$ 的三个分量与向量 $\varepsilon_0 \overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(1)} \mathsf{E}^{(1)}$ 的三个分量相对应，二次项矢量 $\mathbf{P}^{NL}$ 的三个分量与向量 $\varepsilon_0 \overline{\overline{\chi}}_{\mathrm{e}}^{(2)} \mathsf{E}^{(2)}$ 的三个分量相对应。将式（1-250）代入式（1-248），有

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \frac{\partial^2 (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}^{(1)})}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{NL}}{\partial t^2} \tag{1-251}$$

又由 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{E}$ 的线性关系式（1-25），有

$$\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}^{(1)} = \varepsilon_0 (1 + \chi_{\mathrm{e}}) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}} \mathbf{E} \tag{1-252}$$

将上式代入式（1-251），得到

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{NL}}{\partial t^2} \tag{1-253}$$

此式就是无源各向同性均匀非线性理想介质中的波动方程。它是研究光波耦合非线性效应的基本出发点，不仅具有理论意义，而且具有重要的实用价值。

对于导电介质，$\sigma \neq 0$，与式（1-197）相对应，可写出无源各向同性均匀非线性导电介质中的波动方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{NL}}{\partial t^2} \tag{1-254}$$

1.5.8 有源均匀各向同性线性理想介质中的非齐次波动方程

在均匀各向同性理想介质中，介质介电常数 ε 和磁导率 μ 取常数，电导率 $\sigma = 0$。在有源区域 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t) \neq 0$，$\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t) \neq 0$（源项已知）。将各向同性线性理想介质中的物质方程［见式（1-98）和式（1-99）］代入麦克斯韦方程（1-5）～方程（1-8），可得在有源均匀各向同性线性理想介质中的麦克斯韦方程为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\mathrm{V}} + \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & (1\text{-}255) \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & (1\text{-}256) \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 & (1\text{-}257) \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho_{\mathrm{V}}}{\varepsilon} & (1\text{-}258) \end{cases}$$

对麦克斯韦方程（1-255）两边取旋度，有

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J}_{\mathrm{V}} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{J}_{\mathrm{V}} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \tag{1-259}$$

对方程（1-256）两边取旋度，有

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} = -\mu \frac{\partial \mathbf{J}_{\mathrm{V}}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{1-260}$$

利用矢量恒等式（1-173），并利用方程（1-257）和方程（1-258），得到

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{J}_{\mathrm{V}} \tag{1-261}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{J}_{\mathrm{V}}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho_{\mathrm{V}} \tag{1-262}$$

式（1-261）和式（1-262）就是有源均匀各向同性线性理想介质中的非齐次矢量波动方程。由于式（1-261）右边为源项 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}$ 取旋度，而式（1-262）右边为源项 ρ_{V} 取梯度，且两个源项相耦合，给求解带来了困难。通常的做法是用位函数 u 和 $\mathbf{A}$ 表示场量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$（或 $\mathbf{B}$），把式（1-261）和式（1-262）化为位函数波动方程。

1.6 位函数、位函数波动方程及格林函数

在电磁场与电磁波问题的求解过程中，对于介质中的麦克斯韦方程及波动方程，有时直接求解电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 和磁场强度矢量 $\mathbf{H}$ 较为复杂，通常需要引入间接辅助量使问题得以简化，如电标量位、磁矢量位和赫兹矢量位等。另外，对于有源分布场方程的求解需要引入点源函数——格林函数，把源分布问题的求解转化为格林函数的积分方程求解问题。

1.6.1　电标量位和磁矢量位

1．电标量位

如图 1-11（a）所示，假设在空间存在一体电荷分布，电荷体密度为 $\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r}')$，利用点电荷电场叠加可计算空间任意一点 $\mathbf{r}$ 处的电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$，有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{(V')}\frac{\rho_{\mathrm{V}'}(\mathbf{r}')}{R^3}\mathbf{R}\mathrm{d}V' \tag{1-263}$$

式中，R 为距离矢量 $\mathbf{R}$ 的大小；$\mathbf{r}'$ 为源点位置矢量，而 $\mathbf{r}$ 为场点位置矢量。

利用关系

$$\nabla\frac{1}{R}=-\frac{\mathbf{R}}{R^3} \tag{1-264}$$

式（1-263）可化简为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\nabla\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{(V')}\frac{\rho_{\mathrm{V}'}(\mathbf{r}')}{R}\mathrm{d}V'\right] \tag{1-265}$$

显然，式（1-265）中梯度算子内的表达式就是点电荷电位电场叠加的计算公式，即

$$u(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{(V')}\frac{\rho_{\mathrm{V}'}(\mathbf{r}')}{R}\mathrm{d}V' \tag{1-266}$$

式（1-265）表明，电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 与电位 $u(\mathbf{r})$ 之间存在关系

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\nabla u(\mathbf{r}) \tag{1-267}$$

另一方面，根据静电场基本方程的微分形式

$$\begin{cases}\nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r})=\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r}) & (1\text{-}268)\\ \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})=0 & (1\text{-}269)\end{cases}$$

可知，电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 的旋度为零，那么，因为梯度的旋度恒为零，即

$$\nabla\times[\nabla u(\mathbf{r})]\equiv 0 \tag{1-270}$$

所以电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 可以用标量函数 $u(\mathbf{r})$ 的梯度来表示。

2．磁矢量位

如图 1-11（b）所示，假设在空间存在一体电流分布，电流体密度为 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r}')$，利用微电流源磁场叠加可计算空间任意一点 $\mathbf{r}$ 处的磁场强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$，有

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(V)}\frac{\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r}')\times\mathbf{R}}{R^3}\mathrm{d}V' \tag{1-271}$$

式中，R 为距离矢量 $\mathbf{R}$ 的大小；$\mathbf{r}'$ 为源点位置矢量，而 $\mathbf{r}$ 为场点位置矢量。

利用关系式（1-264），式（1-271）可化简为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\nabla\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(V)}\frac{\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r}')}{R}\mathrm{d}V'\right) \tag{1-272}$$

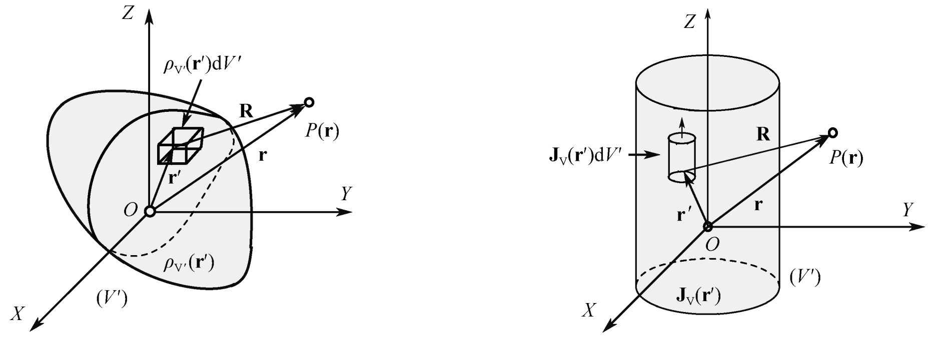
式中，旋度内的表达式就是磁矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$，即

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(V)}\frac{\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r}')}{R}\mathrm{d}V' \tag{1-273}$$

两者之间满足关系

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \tag{1-274}$$

在国际单位制中，**A** 的单位为韦伯/米（Wb/m）。



（a）体电荷分布　　（b）体电流分布

图 1-11　静电场和恒定电流磁场的计算

另一方面，由麦克斯韦方程（1-5），可得恒定电流磁场的基本方程

$$\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r})=\mathbf{J}_V \tag{1-275}$$

在各向同性线性均匀介质的情况下，将式（1-99）代入式（1-274），然后代入式（1-275），得到磁矢量位 **A** 所满足的方程为

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\mu\mathbf{J}_V \tag{1-276}$$

利用矢量恒等式（1-173），有

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}=\mu\mathbf{J}_V \tag{1-277}$$

矢量微分方程（1-277）的特解应该与式（1-273）相同，所以在方程（1-277）中，令

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=0 \tag{1-278}$$

方程（1-277）化简为

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J}_V \tag{1-279}$$

这就是磁矢量位满足的矢量泊松方程，其特解为式（1-273）。约定条件式（1-278）就是库仑规范，这种约定具有物理上的实际意义。

1.6.2　有源均匀各向同性线性理想介质中的位函数波动方程

1.6.1 节引入的电标量位 $u(\mathbf{r})$ 和磁矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$，可用于间接计算电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 和磁场强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$，两者之间没有直接的关系。在时变电磁场的情况下，同样可以引入电标量位 $u(\mathbf{r};t)$ 和磁矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$。由于电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r};t)$ 和磁场强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$ 同时存在，电标量位 $u(\mathbf{r};t)$ 和磁矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ 也必然存在关系，称这种关系为洛伦兹规范。

将式（1-274）代入麦克斯韦方程（1-256），有

$$\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0 \tag{1-280}$$

由于梯度的旋度恒为零［见式（1-270）］，无旋场可表示为一标量函数 $u(\mathbf{r};t)$ 的负梯度，有

$$-\nabla u=\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{1-281}$$

即

$$\mathbf{E} = -\nabla u - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{1-282}$$

式中，$u(\mathbf{r};t)$ 是标量电位，$\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ 是磁矢量位。引入位函数后，求解描述电磁场的六个场分量函数 $E_x(\mathbf{r};t)$、$E_y(\mathbf{r};t)$、$E_z(\mathbf{r};t)$、$B_x(\mathbf{r};t)$、$B_y(\mathbf{r};t)$、$B_z(\mathbf{r};t)$ 缩减为求解四个位函数 $u(\mathbf{r};t)$ 和 $A_x(\mathbf{r};t)$、$A_y(\mathbf{r};t)$、$A_z(\mathbf{r};t)$，使求解过程得以化简，且位函数满足的方程也更为简单。

在有源各向同性均匀线性理想介质的情况下，将式（1-274）和式（1-282）代入麦克斯韦方程（1-255），并利用式（1-99）有

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}_{\mathrm{V}} + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla u - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \tag{1-283}$$

利用矢量恒等式（1-173），得到

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_{\mathrm{V}} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}\right) \tag{1-284}$$

如果对 $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ 和 $u(\mathbf{r};t)$ 做如下变换：

$$\begin{cases} \mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla U \\ u \to u' = u - \dfrac{\partial U}{\partial t} \end{cases} \tag{1-285}$$

则变换后，新的位函数 $\mathbf{A}'(\mathbf{r};t)$ 和 $u'(\mathbf{r};t)$ 描述的场为

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla U) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \tag{1-286}$$

$$\mathbf{E}' = -\nabla u' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla u - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \tag{1-287}$$

显然，变换后的场与原来的场相等，这种特性被称为规范不变性，式（1-285）被称为规范变换。规范变换说明对于场 $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$ 和 $\mathbf{E}(\mathbf{r};t)$，用于表示 $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$ 和 $\mathbf{E}(\mathbf{r};t)$ 的位函数 $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ 和 $u(\mathbf{r};t)$ 并不是唯一确定的，这就为按需要选择位函数提供了可能性。

但是，利用位函数 $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ 和 $u(\mathbf{r};t)$ 求解有源均匀各向同性线性理想介质中的磁场 $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$ 和电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r};t)$，要使 $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ 与 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 具有相同形式［见式（1-273）］，且 $u(\mathbf{r};t)$ 与 $u(\mathbf{r})$ 具有相同形式［见式（1-266）］，那么这种选择又是唯一的，即

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1-288}$$

这就是洛伦兹规范条件。

在洛伦兹规范条件下，有源均匀各向同性线性理想介质中的位函数波动方程（1-284）化简为

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_{\mathrm{V}} \tag{1-289}$$

将式（1-282）代入麦克斯韦方程（1-258），并利用式（1-98），有

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon \nabla \cdot \left(-\nabla u - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\varepsilon \nabla^2 u - \varepsilon \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = \rho_{\mathrm{V}} \tag{1-290}$$

再利用洛伦兹规范条件式（1-288），得到

$$\nabla^2 u - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\rho_{\mathrm{V}}}{\varepsilon} \tag{1-291}$$

式（1-289）和式（1-291）就是在洛伦兹规范条件下得到的有源均匀各向同性线性理想

介质中的位函数波动方程，与磁场强度矢量波动方程（1-261）和电场强度矢量波动方程（1-262）相比较，位函数波动方程的求解要简单得多。

在已知源 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 和 $\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 分布的情况下，根据场的叠加性原理，可得位函数波动方程（1-289）和方程（1-291）的特解分别为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r};t)=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{(V)}\frac{\mathbf{J}_{\mathrm{V}}\left(\mathbf{r}';t-\dfrac{R}{\upsilon}\right)}{R}\mathrm{d}V' \tag{1-292}$$

和

$$u(\mathbf{r};t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{(V)}\frac{\rho\left(\mathbf{r}';t-\dfrac{R}{\upsilon}\right)}{R}\mathrm{d}V' \tag{1-293}$$

式中，R 为源点到场点距离矢量 $\mathbf{R}$ 的大小，υ 为电磁波传播的速度。显然，式（1-292）具有和式（1-273）相同的形式，而式（1-293）具有和式（1-266）相同的形式，这就是洛伦兹规范条件选择的必然依据。

与位函数波动方程（1-289）和方程（1-291）相对应的齐次波动方程为

$$\nabla^2\mathbf{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=0 \tag{1-294}$$

$$\nabla^2 u-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{1-295}$$

特解式（1-292）与磁矢量位方程（1-294）的齐次解构成方程（1-289）的通解，特解式（1-293）与电标量位方程（1-295）的齐次解构成方程（1-291）的通解。

将规范变换式（1-285）代入洛伦兹规范条件式（1-288），有

$$\nabla\cdot\mathbf{A}'+\mu\varepsilon\frac{\partial u'}{\partial t}-\left(\nabla^2 U-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)=0 \tag{1-296}$$

如果选择 U 满足

$$\nabla^2 U-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0 \tag{1-297}$$

显然，规范变换后的磁矢量位 $\mathbf{A}'(\mathbf{r};t)$ 和电标量位 $u'(\mathbf{r};t)$ 也满足洛伦兹变换关系。所以变换关系式（1-285）和齐次方程（1-297）是洛伦兹变换的另一种形式。

引入磁矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ 后，磁场强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$ 可表示为磁矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ 的旋度［见式（1-274）］。实际上，规范变换选择合适的 $U(\mathbf{r};t)$，电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r};t)$ 也可由磁矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ 表示。在无源区域，电标量位满足齐次方程（1-295），而洛伦兹变换标量函数 $U(\mathbf{r};t)$ 满足齐次方程（1-297），两方程具有相同的形式。不妨选择 $U(\mathbf{r};t)$ 为

$$\frac{\partial U}{\partial t}=u \tag{1-298}$$

则标量电位

$$u'(\mathbf{r};t)=0 \tag{1-299}$$

也即可取 $u(\mathbf{r};t)=0$，代入式（1-282），有

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{1-300}$$

将 $u(\mathbf{r};t)=0$ 代入洛伦兹规范条件式（1-288），有 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$，表明在无源区域磁矢量位的散度为零，符合库仑规范条件。

在数学物理方法中，位函数波动方程（1-289）和方程（1-291）被称为达朗贝尔方程。与式（1-261）和式（1-262）相比较，两个位函数方程相互独立，$\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ 仅与电流体密度 $\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 有关，而 $u(\mathbf{r};t)$ 仅与电荷体密度 $\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r};t)$ 有关，且两个位函数波动方程的形式完全相同，从而使计算大为简化。将式（1-292）和式（1-293）代入式（1-288），不难验证，解 $u(\mathbf{r};t)$ 和 $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ 满足洛伦兹规范条件。如果将式（1-292）和式（1-293）代入式（1-282）和式（1-274），就可得到电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r};t)$ 和磁场强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$，即

$$\begin{cases}\mathbf{E}=-\nabla u-\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\\ \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}\end{cases}\tag{1-301}$$

位函数波动方程的特解式（1-292）和式（1-293）的重要意义还在于电磁波传播具有一定的传播速度 υ。由式（1-292）和式（1-293）可以看出，空间点 $\mathbf{r}$ 在某时刻 t 的场值不是依赖于同一时刻的电荷电流分布，而是取决于较早时刻 $t-R/\upsilon$ 的电荷电流分布。反过来讲，就是电荷电流产生的电磁波不是立即传至观察点，而是滞后（推迟）R/υ 的时间，υ 是电磁波在介质中的传播速度。所以特解式（1-292）和式（1-293）也称为滞后位或推迟势。

1.6.3　赫兹矢量位及位函数波动方程

引入磁矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ 和电标量位 $u(\mathbf{r};t)$，在洛伦兹规范条件下简化了有源均匀各向同性线性理想介质中电磁场问题的求解。但针对不同实际电磁场求解问题，还可以引入其他形式的位函数，最常用的就是赫兹矢量位。

当真空中的麦克斯韦方程（1-164）中仅包含电性源 $\mathbf{J}_{\mathrm{V_{be}}}$ 时，有

$$\begin{cases}\nabla\times\dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0}=\mathbf{J}_{\mathrm{V_{be}}}+\varepsilon_0\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} & (1\text{-}302)\\ \nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} & (1\text{-}303)\\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0 & (1\text{-}304)\\ \nabla\cdot(\varepsilon_0\mathbf{E})=\rho_{\mathrm{V_b}} & (1\text{-}305)\end{cases}$$

将式（1-274）代入式（1-302），并利用式（1-282）有

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_0\mathbf{J}_{\mathrm{V_{be}}}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla u-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)\tag{1-306}$$

利用矢量恒等式（1-173），得到

$$\nabla^2\mathbf{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\mathbf{J}_{\mathrm{V_{be}}}+\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial u}{\partial t}\right)\tag{1-307}$$

在洛伦兹规范条件［式（1-288）］下，得到

$$\nabla^2\mathbf{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\mathbf{J}_{\mathrm{V_{be}}}\tag{1-308}$$

这就是电性源 $\mathbf{J}_{\mathrm{V_{be}}}$ 产生的磁矢量位满足的非齐次波动方程。由于描述介质极化特性的物理量是极化强度矢量 $\mathbf{P}(\mathbf{r};t)$，而不是极化束缚电流密度 $\mathbf{J}_{\mathrm{V_{be}}}(\mathbf{r};t)$，因此需要进一步简化。

在时变电磁场的情况下，$\mathbf{P}(\mathbf{r};t)$ 和 $\rho_{\mathrm{V_b}}(\mathbf{r};t)$ 仍然满足式（1-49），即

$$\rho_{V_b}(\mathbf{r};t) = -\nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r};t) \tag{1-309}$$

束缚电荷体密度 $\rho_{V_b}(\mathbf{r};t)$ 和束缚电流体密度 $\mathbf{J}_{V_{be}}(\mathbf{r};t)$ 同样满足电流连续性方程（1-92），有

$$\nabla\cdot\mathbf{J}_{V_{be}}(\mathbf{r};t) = -\frac{\partial\rho_{V_b}(\mathbf{r};t)}{\partial t} \tag{1-310}$$

将式（1-309）代入式（1-310），有

$$\nabla\cdot\mathbf{J}_{V_{be}}(\mathbf{r};t) = \nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{P}(\mathbf{r};t)}{\partial t} \tag{1-311}$$

由此得到

$$\mathbf{J}_{V_{be}}(\mathbf{r};t) = \frac{\partial\mathbf{P}(\mathbf{r};t)}{\partial t} \tag{1-312}$$

这就是极化强度矢量 $\mathbf{P}(\mathbf{r};t)$ 与束缚电流体密度 $\mathbf{J}_{V_{be}}(\mathbf{r};t)$ 之间的关系。

将式（1-312）代入式（1-308），得到

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} \tag{1-313}$$

该方程是极化强度矢量 $\mathbf{P}(\mathbf{r};t)$ 与磁矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ 相关的非齐次波动方程。由于该方程右边项是 $\mathbf{P}(\mathbf{r};t)$ 随时间的一阶偏导数，给方程求解带来不便，为此需要引入一个新的位函数 $\mathbf{\Pi}_e(\mathbf{r};t)$，称为电赫兹矢量位，它与磁矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ 的关系定义为

$$\mathbf{A} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{\Pi}_e}{\partial t} \tag{1-314}$$

将式（1-314）代入式（1-313），整理可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla^2\mathbf{\Pi}_e - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}_e}{\partial t^2}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}\right] \tag{1-315}$$

由此可得

$$\nabla^2\mathbf{\Pi}_e - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}_e}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \tag{1-316}$$

这就是电赫兹矢量位 $\mathbf{\Pi}_e$ 所满足的非齐次波动方程。

将式（1-314）代入洛伦兹规范条件式（1-288），可得电标量位为

$$u = -\nabla\mathbf{\Pi}_e \tag{1-317}$$

将磁矢量位式（1-314）和电标量位式（1-317）代入式（1-301），可得电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 和磁通密度矢量 $\mathbf{B}$ 与电赫兹矢量位 $\mathbf{\Pi}_e$ 的关系为

$$\begin{cases}\mathbf{E} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_e) - \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\mathbf{\Pi}_e}{\partial t^2} & (1\text{-}318)\\[2ex] \mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\nabla\times\dfrac{\partial\mathbf{\Pi}_e}{\partial t} & (1\text{-}319)\end{cases}$$

求解 $\mathbf{\Pi}_e$ 所满足的波动方程（1-316），得到 $\mathbf{\Pi}_e$，然后代入式（1-318）和式（1-319）中，就可得到电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 和磁通密度矢量 $\mathbf{B}$。

当真空中的麦克斯韦方程（1-164）中仅包含磁性源 $\mathbf{J}_{V_{bm}}(\mathbf{r};t)$ 时，同样可得到磁矢量位 $\mathbf{A}$ 所满足的波动方程为

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{J}_{V_{bm}} \tag{1-320}$$

在时变电磁场的情况下，磁化电流体密度矢量 $\mathbf{J}_{V_{bm}}(\mathbf{r};t)$ 与描述介质磁化特性的物理量磁化强度矢量 $\mathbf{M}(\mathbf{r};t)$ 仍然满足式（1-84），即

$$\mathbf{J}_{V_{bm}}(\mathbf{r};t)=\nabla\times\mathbf{M}(\mathbf{r};t) \tag{1-321}$$

代入式（1-320），得到

$$\nabla^2\mathbf{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\nabla\times\mathbf{M} \tag{1-322}$$

这就是磁化强度矢量 $\mathbf{M}(\mathbf{r};t)$ 与磁矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ 相关的非齐次波动方程。该方程右边项是关于 $\mathbf{M}(\mathbf{r};t)$ 的旋度，给方程求解带来不便，为此需要引入一个新的位函数 $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r};t)$，称为磁赫兹矢量位，它与磁矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r};t)$ 的关系定义为

$$\mathbf{A}=\mu_0\nabla\times\mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}} \tag{1-323}$$

代入式（1-322），得到

$$\nabla^2\mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}}}{\partial t^2}=-\mathbf{M} \tag{1-324}$$

该式就是磁赫兹矢量位 $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}}$ 所满足的非齐次波动方程。

由于旋度的散度恒为零，由式（1-323）可知，磁矢量位 $\mathbf{A}$ 满足库仑规范 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$。又由洛伦兹规范条件式（1-288），可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{1-325}$$

积分可得

$$u(\mathbf{r};t)=C\text{（常数）} \tag{1-326}$$

将式（1-323）和式（1-326）代入式（1-301），得到电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 和磁通密度矢量 $\mathbf{B}$ 与磁赫兹矢量位 $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}}$ 的关系为

$$\begin{cases}\mathbf{E}=-\mu_0\nabla\times\dfrac{\partial\mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}}}{\partial t} & (1\text{-}327)\\[2mm] \mathbf{B}=\mu_0\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}} & (1\text{-}328)\end{cases}$$

在极化和磁化同时存在的情况下，真空中的麦克斯韦方程（1-164）既包含电性源项 $\mathbf{J}_{V_{be}}$，也包含磁性源项 $\mathbf{J}_{V_{bm}}$。由于麦克斯韦方程是一阶线性方程，可将磁矢量位 $\mathbf{A}$ 分解为电性源产生的磁矢量位和磁性源产生的磁矢量位的叠加，由此可得磁矢量位 $\mathbf{A}$ 为式（1-314）和式（1-323）的叠加，即

$$\mathbf{A}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{\Pi}_{\mathrm{e}}}{\partial t}+\mu_0\nabla\times\mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}} \tag{1-329}$$

电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 为式（1-318）和式（1-327）的叠加，而磁通密度矢量 $\mathbf{B}$ 为式（1-319）和式（1-328）的叠加，即

$$\begin{cases}\mathbf{E}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_{\mathrm{e}})-\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\mathbf{\Pi}_{\mathrm{e}}}{\partial t^2}-\mu_0\nabla\times\dfrac{\partial\mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}}}{\partial t} & (1\text{-}330)\\[2mm] \mathbf{B}=\mu_0\varepsilon_0\nabla\times\dfrac{\partial\mathbf{\Pi}_{\mathrm{e}}}{\partial t}+\mu_0\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}} & (1\text{-}331)\end{cases}$$

在时谐情况下，场量可写成复振幅与时间因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 的乘积，即

$$\mathbf{P}=\tilde{\mathbf{P}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},\quad \mathbf{M}=\tilde{\mathbf{M}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},\quad \tilde{\mathbf{A}}=\tilde{\mathbf{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},\quad \mathbf{\Pi}_{\mathrm{e}}=\tilde{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},\quad \mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}}=\tilde{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{1-332}$$

将式（1-332）代入式（1-316）和式（1-324），有

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}+k_0^2\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}=-\frac{\tilde{\mathbf{P}}}{\varepsilon_0} \tag{1-333}$$

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m}+k_0^2\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m}=-\tilde{\mathbf{M}} \tag{1-334}$$

式中，$k_0=\omega/c$ 为真空中的波数；$\tilde{\mathbf{P}}$ 和 $\tilde{\mathbf{M}}$ 分别为电极化强度矢量 $\mathbf{P}$ 和磁化强度矢量 $\mathbf{M}$ 对应的复振幅；$\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}$ 和 $\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m}$ 分别为电赫兹矢量位 $\mathbf{\Pi}_\mathrm{e}$ 和磁赫兹矢量位 $\mathbf{\Pi}_\mathrm{m}$ 对应的复振幅。

将式（1-332）代入式（1-329），有

$$\tilde{\mathbf{A}}=\mathrm{j}\omega\mu_0\varepsilon_0\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}+\mu_0\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m} \tag{1-335}$$

将式（1-332）代入式（1-330）和式（1-331），有

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{E}}=\nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e})+k_0^2\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}-\mathrm{j}\omega\mu_0\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m} & (1\text{-}336)\\ \tilde{\mathbf{B}}=\mathrm{j}\omega\mu_0\varepsilon_0\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}+\mu_0\nabla\times\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m} & (1\text{-}337)\end{cases}$$

式中，$\tilde{\mathbf{A}}$ 为磁矢量位 $\mathbf{A}$ 对应的复振幅。

1.6.4 德拜位及位函数波动方程

如果在无源区域求解方程（1-333）和方程（1-334），$\tilde{\mathbf{P}}=0$，$\tilde{\mathbf{M}}=0$，则电赫兹矢量位 $\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}$ 和磁赫兹矢量位 $\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m}$ 满足矢量齐次亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}+k_0^2\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}=0 \tag{1-338}$$

和

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m}+k_0^2\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m}=0 \tag{1-339}$$

在无源区域，式（1-336）也可以化简。利用矢量恒等式（1-173），式（1-336）中的 $\nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e})$ 项可表示为

$$\nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e})=\nabla\times\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}+\nabla^2\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e} \tag{1-340}$$

代入式（1-336），有

$$\tilde{\mathbf{E}}=\nabla\times\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}+\nabla^2\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}+k_0^2\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}-\mathrm{j}\omega\mu_0\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m} \tag{1-341}$$

利用式（1-338），式（1-341）可化简为

$$\tilde{\mathbf{E}}=\nabla\times\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}-\mathrm{j}\omega\mu_0\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m} \tag{1-342}$$

式（1-342）和式（1-337）就是在无源区域用电赫兹矢量位 $\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}$ 和磁赫兹矢量位 $\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m}$ 计算电场强度复振幅矢量 $\tilde{\mathbf{E}}$ 和磁通密度复振幅矢量 $\tilde{\mathbf{B}}$ 的表达式。如果用磁场强度复振幅矢量 $\tilde{\mathbf{H}}$ 表示，则式（1-337）化简为

$$\tilde{\mathbf{H}}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}+\nabla\times\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m} \tag{1-343}$$

利用式（1-173）和齐次方程（1-339），无源区域磁场强度复振幅矢量 $\tilde{\mathbf{H}}$ 又可以表示为

$$\tilde{\mathbf{H}}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}+\nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m})+k_0^2\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m} \tag{1-344}$$

为了使用方便起见，无源区域电场强度复振幅矢量 $\tilde{\mathbf{E}}$ 和磁场强度复振幅矢量 $\tilde{\mathbf{H}}$ 的两组表达式重写如下：

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{E}}=\nabla\times\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}-\mathrm{j}\omega\mu_0\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m}\\ \tilde{\mathbf{H}}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}+\nabla\times\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m}\end{cases} \tag{1-345}$$

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{E}}=\nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e})+k_0^2\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}-\mathrm{j}\omega\mu_0\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m}\\ \tilde{\mathbf{H}}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\nabla\times\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{e}+\nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m})+k_0^2\tilde{\mathbf{\Pi}}_\mathrm{m}\end{cases} \tag{1-346}$$

在球坐标系下求解亥姆霍兹方程（1-338）和方程（1-339），由于基矢量 $\{\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\varphi\}$ 随空间坐标点变化，因此在球坐标系下赫兹矢量位 $\tilde{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{e}}$ 和 $\tilde{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{m}}$ 的分量 $\{\tilde{\Pi}_{\mathrm{e}r},\tilde{\Pi}_{\mathrm{e}\theta},\tilde{\Pi}_{\mathrm{e}\varphi}\}$ 和 $\{\tilde{\Pi}_{\mathrm{m}r},\tilde{\Pi}_{\mathrm{m}\theta},\tilde{\Pi}_{\mathrm{m}\varphi}\}$ 均不满足标量齐次亥姆霍兹方程。但在赫兹矢量位 $\tilde{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{e}}$ 和 $\tilde{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{m}}$ 仅有 $\mathbf{e}_r$ 分量的情况下，即取[10,11]

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{e}}=\tilde{\Pi}_{\mathrm{e}r}\mathbf{e}_r\\ \tilde{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{m}}=\tilde{\Pi}_{\mathrm{m}r}\mathbf{e}_r\end{cases}\tag{1-347}$$

将式（1-347）代入式（1-346），然后将球坐标系下电场强度复振幅矢量 $\tilde{\mathbf{E}}$ 和磁场强度复振幅矢量 $\tilde{\mathbf{H}}$ 的分量 $\{\tilde{E}_r,\tilde{E}_\theta,\tilde{E}_\varphi\}$ 和 $\{\tilde{H}_r,\tilde{H}_\theta,\tilde{H}_\varphi\}$ 代入无源区域电场强度复振幅矢量 $\tilde{\mathbf{E}}$ 和磁场强度复振幅矢量 $\tilde{\mathbf{H}}$ 之间的关系

$$\begin{cases}\nabla\times\tilde{\mathbf{H}}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}}\\ \nabla\times\tilde{\mathbf{E}}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}}\end{cases}\tag{1-348}$$

整理得到，电场强度复振幅矢量 $\tilde{\mathbf{E}}$ 和磁场强度复振幅矢量 $\tilde{\mathbf{H}}$ 可用两个标量函数

$$\varPhi_{\mathrm{e}}=\frac{\tilde{\Pi}_{\mathrm{e}r}}{r}\tag{1-349}$$

和

$$\varPhi_{\mathrm{m}}=\frac{\tilde{\Pi}_{\mathrm{m}r}}{r}\tag{1-350}$$

表示。式中，r 为球坐标系下空间点位置矢量的大小；$\varPhi_{\mathrm{e}}$ 和 $\varPhi_{\mathrm{r}}$ 满足球坐标系下标量齐次亥姆霍兹方程，即

$$\nabla^2\tilde{\Phi}_{\mathrm{e}}+k_0^2\tilde{\Phi}_{\mathrm{e}}=0\tag{1-351}$$

$$\nabla^2\tilde{\Phi}_{\mathrm{m}}+k_0^2\tilde{\Phi}_{\mathrm{m}}=0\tag{1-352}$$

$\varPhi_{\mathrm{e}}$ 和 $\varPhi_{\mathrm{m}}$ 分别称为电德拜位和磁德拜位。式（1-351）和式（1-352）就是德拜位满足的标量齐次亥姆霍兹方程。

在球坐标系下求解方程（1-351）和方程（1-352），可得到 $\varPhi_{\mathrm{e}}$ 和 $\varPhi_{\mathrm{m}}$，由此得到 $\tilde{\Pi}_{\mathrm{e}r}$ 和 $\tilde{\Pi}_{\mathrm{m}r}$，再代入式（1-346），即可得到 $\tilde{\mathbf{E}}$ 和 $\tilde{\mathbf{H}}$ 在球坐标系下的分量表达式。由此可见，无源区域矢量齐次亥姆霍兹方程（1-338）和方程（1-339）的求解，在赫兹矢量位 $\tilde{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{e}}$ 和 $\tilde{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{m}}$ 仅有 $\mathbf{e}_r$ 分量的情况下，归结为标量齐次亥姆霍兹方程（1-351）和方程（1-352）的求解。

1.6.5　格林函数

格林函数是一种辅助函数，借助于格林函数可求解标量非齐次常系数线性常微分方程或标量非齐次常系数偏微分方程的解。在数学上，格林函数被定义为，非齐次微分方程的自由项为 δ 函数（也称为冲激函数）时，在一定条件下的解；而在物理上，通常用于描述线性系统的微分方程在一定条件下由点源（δ 函数）产生的响应。对于任意分布函数的非齐次项（源项），其解可通过点源函数的解与非齐次项的卷积积分得到。

1．δ 函数

在三维空间中，δ 函数在数学上被定义为

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\begin{cases}\infty, & \mathbf{r}=\mathbf{r}'\\ 0, & \mathbf{r}\neq\mathbf{r}'\end{cases}\tag{1-353}$$

且

$$\iiint_{(V)} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}V'=1 \tag{1-354}$$

式中，$\mathbf{r}$ 为场点坐标；$\mathbf{r}'$ 为源点坐标；V 为三维无穷空间。由定义可知，δ 函数在源点 $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ 为无限大，而在源点以外为零；但 δ 函数的体积分为有限值，所以 δ 函数具有空间点分布密度特性，通常称为点分布函数或广义函数。如果把三维 δ 函数看作空间一点的体密度函数，利用 δ 函数就可表达空间点电荷和空间线电流微元的体密度分布。例如，在空间点 $\mathbf{r}'$ 处放置点电荷 q，其电荷体密度可表示为

$$\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r})=q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{1-355}$$

对于空间点 $\mathbf{r}'$ 处的线电流微元 $I\mathrm{d}\mathbf{l}$，其电流体密度矢量可表示为

$$\mathbf{J}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r})=I\mathrm{d}\mathbf{l}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{1-356}$$

由于三维空间体积微元 $\mathrm{d}V$ 在直角坐标 $\{x,y,z\}$、柱坐标 $\{\rho,\varphi,z\}$ 和球坐标 $\{r,\theta,\varphi\}$ 中分别表示为

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1-357}$$

$$\mathrm{d}V=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \tag{1-358}$$

$$\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{1-359}$$

所以，三维 δ 函数在直角坐标、柱坐标和球坐标系下的表达式分别为

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \tag{1-360}$$

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')\delta(z-z')}{\rho} \tag{1-361}$$

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')}{r^2\sin\theta} \tag{1-362}$$

假设在空间存在三维体密度分布函数 $\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r})$，把点源分布推广到普通源分布，利用 δ 函数的筛选特性

$$\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{1-363}$$

有

$$\iiint_{(V)} \rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}V'=\begin{cases}\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r}), & \text{在源区}V'\text{内}\\ 0, & \text{在源区}V'\text{外}\end{cases}\quad V'\in V \tag{1-364}$$

式（1-364）就是用 δ 函数表达体分布函数 $\rho_{\mathrm{V}}(\mathbf{r})$ 的积分表达式，体现的是 δ 函数的取样特性。

2．格林函数

若 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 满足下列非齐次标量亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2G(\mathbf{r},\mathbf{r}')+k^2G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{1-365}$$

式中，k 为常数，$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ 为三维 δ 函数。则称 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 为对应于方程（1-365）的格林函数，也称为非齐次标量亥姆霍兹方程的格林函数。如果 $k=0$，则方程（1-365）化为标量泊松方程

$$\nabla^2G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{1-366}$$

而 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 被称为标量泊松方程的格林函数。

一般情况下，对于任何标量非齐次线性常系数微分方程都可以定义相应的格林函数，仅需要将非齐次项换成δ函数即可。现考虑一般标量非齐次线性常系数微分方程

$$Lu(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \tag{1-367}$$

式中，L为线性微分算子；$f(\mathbf{r})$为非齐次项，也即源项或激励项；$u(\mathbf{r})$为待求微分方程的解。

根据微分方程算子理论，微分方程（1-367）形式上的解可通过令方程两边同乘以微分逆算子L^{-1}得到，即

$$u(\mathbf{r}) = L^{-1} f(\mathbf{r}) \tag{1-368}$$

又由式（1-364）可知，任何源项分布函数都可以表示为关于$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$的积分，即

$$f(\mathbf{r}) = \iiint_{(V)} f(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}V' \tag{1-369}$$

将式（1-369）代入式（1-368）得到

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= L^{-1}\iiint_{(V)} f(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}V' \\ &= \iiint_{(V)} f(\mathbf{r}')L^{-1}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}V' \end{aligned} \tag{1-370}$$

而格林函数$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$满足方程

$$LG(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{1-371}$$

有

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = L^{-1}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{1-372}$$

将式（1-372）代入式（1-370）得到

$$u(\mathbf{r}) = \iiint_{(V)} f(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathrm{d}V' \tag{1-373}$$

式中，$\mathbf{r}'$为源点坐标；$\mathbf{r}$为场点坐标。式（1-373）表明，对于标量非齐次线性常系数微分方程或标量非齐次线性常系数偏微分方程，可先求对应于点源函数$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$的解的格林函数$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$，然后利用积分叠加式（1-373），即可得到微分方程的特解。

在直角坐标系下，电标量位波动方程（1-291）、磁矢量位波动方程（1-289）、电赫兹位波动方程（1-333）和磁赫兹位波动方程（1-334）的分量方程均满足非齐次标量亥姆霍兹方程，所以位函数方程的解可用格林函数$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$表示，有

$$\tilde{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon}\iiint_{(V)} \tilde{\rho}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathrm{d}V' \tag{1-374}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \mu\iiint_{(V)} \tilde{\mathbf{J}}_{\mathrm{V}}(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathrm{d}V' \tag{1-375}$$

$$\tilde{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{e}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{(V)} \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathrm{d}V' \tag{1-376}$$

$$\tilde{\mathbf{\Pi}}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r}) = \iiint_{(V)} \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathrm{d}V' \tag{1-377}$$

由于上述积分式的积分区域为无界空间（或称为全空间），相对应的格林函数$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$称为全空间格林函数。需要强调的是，如果式（1-323）定义为$\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}}$，则式（1-377）右边前面有系数$\mu_0$。

1.7 坡印廷定理

根据物理学的基本原理，不同形式的能量可以相互转化并满足能量守恒定律。坡印廷定理就是描述时变电磁场的电磁能量传播必须遵循的守恒定律。下面从麦克斯韦方程出发推导时变电磁场所满足的坡印廷定理，并引出坡印廷矢量及复坡印廷矢量。

1.7.1 时域坡印廷定理

对于各向同性线性介质，介质参数为ε、μ和σ，$\mathbf{J}_{\mathrm{V}}=\sigma\mathbf{E}$，由麦克斯韦方程（1-5）和方程（1-6）得到

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_{\mathrm{V}}+\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{1-378}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \tag{1-379}$$

由电场强度矢量$\mathbf{E}$点乘式（1-378），磁场强度矢量$\mathbf{H}$点乘式（1-379），然后两式相减，得到

$$\mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{H}=-\mu\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{V}}-\varepsilon\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{1-380}$$

利用矢量恒等式

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B} \tag{1-381}$$

式（1-380）可改写为

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=-\mu\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{V}}-\varepsilon\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{1-382}$$

又由式（1-13）～式（1-15）可知

$$\mu\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu H^2\right)=\frac{\partial}{\partial t}(w_{\mathrm{m}}) \tag{1-383}$$

$$\varepsilon\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right)=\frac{\partial}{\partial t}(w_{\mathrm{e}}) \tag{1-384}$$

$$\varepsilon\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mu\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(w_{\mathrm{e}}+w_{\mathrm{m}})=\frac{\partial w}{\partial t} \tag{1-385}$$

从而有

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=-\frac{\partial w}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{V}} \tag{1-386}$$

在电磁场存在的介质中任取一体积V，求积分并应用散度定理，有

$$\oiint_{(S)}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{(V)}w\,\mathrm{d}V-\iiint_{(V)}\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{V}}\mathrm{d}V \tag{1-387}$$

或者

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{(V)}w\,\mathrm{d}V=\iiint_{(V)}\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{V}}\mathrm{d}V+\oiint_{(S)}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{1-388}$$

此式就是时域坡印廷定理。式中，w为介质中的电磁能量密度。等式左边项表示体积V中电磁能量随时间变化的减小量；$\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{V}}$为电磁能量损耗体密度，右边第一项体积分表示电磁场能量在体积V中的焦耳损耗；右边第二项表示穿出体积V表面（S面）的能量流。该式表明，

单位时间内体积 V 中电磁场能量的减少量等于单位时间内体积 V 中损耗的能量与单位时间内穿出体积 V（即 S 面）的能量之和。

根据式（1-388），定义

$$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{1-389}$$

为坡印廷矢量，单位为瓦/米 ^{2}（$\mathrm{W/m^2}$）。由式（1-388）可知，$\mathbf{S}$ 表示的是单位时间内通过垂直于能量流动方向单位面积上的能量，因而也称为能流密度矢量或功率流密度矢量。坡印廷矢量 $\mathbf{S}$ 与电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{H}$ 满足右手法则，$\mathbf{S}$ 的方向就是电磁能量传输的方向。

当已知 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 时，欲求穿出某闭合面的电磁功率，求面积分

$$\oiint_{(S)}\mathbf{S}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\oiint_{(S)}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{1-390}$$

即可。如果 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 都是随时间变化的时谐周期函数，在一个周期 T 内求时间平均，可得平均坡印廷矢量为

$$\mathbf{S}_{\mathrm{av}}=\frac{1}{T}\int_0^T\mathbf{S}(\mathbf{r};t)\,\mathrm{d}t \tag{1-391}$$

1.7.2　复坡印廷矢量

坡印廷矢量［见式（1-389）］表示瞬时电磁能流密度。对于时谐场，电场和磁场都是时间的周期函数，研究在一个周期内的平均能流密度更具有实际意义。

由式（1-153）和式（1-155）可写出

$$\mathbf{E}(\mathbf{r};t)=\mathrm{Re}[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\frac{1}{2}[\tilde{\mathbf{E}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\tilde{\mathbf{E}}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}] \tag{1-392}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r};t)=\mathrm{Re}[\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\frac{1}{2}[\tilde{\mathbf{H}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\tilde{\mathbf{H}}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}] \tag{1-393}$$

将以上两式代入式（1-389），得到坡印廷矢量的瞬时值为

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{r};t)=\mathbf{E}(\mathbf{r};t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r};t)&=\frac{1}{2}[\tilde{\mathbf{E}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\tilde{\mathbf{E}}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}]\times\frac{1}{2}[\tilde{\mathbf{H}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\tilde{\mathbf{H}}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}]\\&=\frac{1}{4}[\tilde{\mathbf{E}}\times\tilde{\mathbf{H}}^*+\tilde{\mathbf{E}}^*\times\tilde{\mathbf{H}}]+\frac{1}{4}[\tilde{\mathbf{E}}\times\tilde{\mathbf{H}}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega t}+\tilde{\mathbf{E}}^*\times\tilde{\mathbf{H}}^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega t}]\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\tilde{\mathbf{E}}\times\tilde{\mathbf{H}}^*]+\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\tilde{\mathbf{E}}\times\tilde{\mathbf{H}}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega t}]\end{aligned} \tag{1-394}$$

定义

$$\tilde{\mathbf{S}}=\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{E}}\times\tilde{\mathbf{H}}^* \tag{1-395}$$

为复坡印廷矢量，表示复功率流密度。根据定义式（1-391），将式（1-394）代入式（1-391），得到平均能流密度为

$$\mathbf{S}_{\mathrm{av}}=\frac{1}{T}\int_0^T\mathbf{S}(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{E}}\times\tilde{\mathbf{H}}^*\right]=\mathrm{Re}[\tilde{\mathbf{S}}] \tag{1-396}$$

显然，平均能流密度为复坡印廷矢量取实部。

1.8　电磁场边界条件

微分形式的麦克斯韦方程适用于介质参数ε、μ和σ连续变化的区域，而积分形式的麦克斯韦方程不仅适用于介质参数连续变化的区域，也适用于介质参数突变的边界。由微分形式的麦克斯韦方程可得到满足具体电磁场问题的微分方程，由积分形式的麦克斯韦方程可得到微分方程满足的边界条件，这样就构成对电磁场问题完整的数学描述。

1.8.1　边界条件的一般矢量形式

如图 1-12 所示，假设介质 1 和介质 2 的参数分别为ε_1、μ_1、σ_1和ε_2、μ_2、σ_2，两介质中的电磁场强度矢量分别为$\mathbf{E}_1$、$\mathbf{D}_1$、$\mathbf{H}_1$、$\mathbf{B}_1$、$\mathbf{J}_{V1}$和$\mathbf{E}_2$、$\mathbf{D}_2$、$\mathbf{H}_2$、$\mathbf{B}_2$、$\mathbf{J}_{V2}$，在介质分界面上存在自由电荷面密度分布ρ_S和自由电流面密度分布$\mathbf{J}_S$。利用积分形式的麦克斯韦方程和电流连续性方程，可得到两介质分界面上电磁场量满足的边界条件为

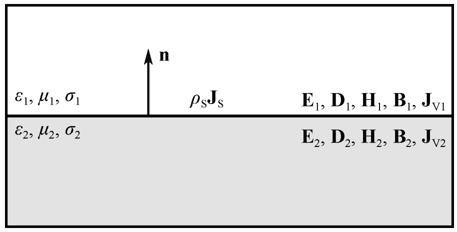


图 1-12　电磁场边界条件

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)=0 \tag{1-397}$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)=\mathbf{J}_S \tag{1-398}$$

$$\mathbf{n}\times\left(\frac{\mathbf{J}_{V1}}{\sigma_1}-\frac{\mathbf{J}_{V2}}{\sigma_2}\right)=0 \tag{1-399}$$

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2)=\rho_S \tag{1-400}$$

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2)=0 \tag{1-401}$$

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{J}_{V1}-\mathbf{J}_{V2})=-\frac{\partial\rho_s}{\partial t} \tag{1-402}$$

式中，$\mathbf{n}$为介质分界面法向单位矢量。式（1-397）、式（1-398）和式（1-399）分别为电场强度矢量$\mathbf{E}$、磁场强度矢量$\mathbf{H}$和自由电流体密度矢量$\mathbf{J}_V$切向分量边界条件；式（1-400）、式（1-401）和式（1-402）分别为电通密度矢量$\mathbf{D}$、磁通密度矢量$\mathbf{B}$和自由电流体密度矢量$\mathbf{J}_V$法向分量边界条件。

1.8.2　理想介质分界面上的边界条件

对于理想介质，电导率$\sigma=0$，$\mathbf{J}_V=0$，介质分界面不存在自由电荷面密度分布和自由电流面密度分布，$\rho_S=0$，$\mathbf{J}_S=0$。上述介质分界面上的边界条件化简为

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)=0 \tag{1-403}$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)=0 \tag{1-404}$$

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2)=0 \tag{1-405}$$

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2)=0 \tag{1-406}$$

式（1-403）和式（1-404）表明理想介质分界面上电场强度矢量$\mathbf{E}$和磁场强度矢量$\mathbf{H}$切向分量连续，式（1-405）和式（1-406）表明理想介质分界面上电通密度矢量$\mathbf{D}$和磁通密度矢量$\mathbf{B}$法向分量连续。

1.8.3　理想介质与理想导体分界面上的边界条件

如果介质 1 为理想介质，$\sigma_1 = 0$，介质 2 为理想导体，$\sigma_2 \to \infty$，如图 1-13 所示。在理想导体中，由欧姆定律的微分形式和麦克斯韦方程时变电场的旋度方程可知

$$\mathbf{E}_2 = 0, \quad \mathbf{B}_2 = 0 \tag{1-407}$$

代入边界条件式（1-397）、式（1-398）、式（1-400）和式（1-401），有

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = 0 \tag{1-408}$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_\mathrm{S} \tag{1-409}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \rho_\mathrm{S} \tag{1-410}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \tag{1-411}$$

对于时变电磁场，在理想导体与理想介质分界面上，电场总是与导体表面相垂直，而磁场总是与导体表面相切。导体内部既没有电场，也没有磁场。理想导体表面面电流的方向与磁场垂直。实际上，理想导体是不存在的，但在良导体和空气的分界面上，可近似用理想导体和理想介质的边界条件处理，使问题得到简化。

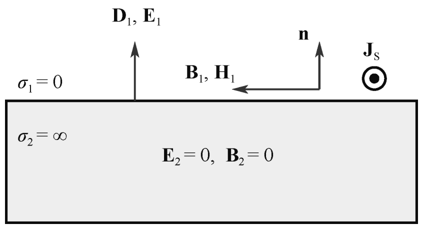


图 1-13　理想导体与理想介质分界面

参 考 文 献

[1] 马科斯・波恩，埃米尔・沃尔夫. 光学原理. 7 版. 杨葭荪，译. 北京：电子工业出版社，2009.
[2] 张克潜，李德杰. 微波与光电子学中的电磁理论. 北京：电子工业出版社，2001.
[3] 季家镕. 高等光学教程——光学的基本电磁理论. 北京：科学出版社，2007.
[4] 郑玉祥，陈良尧. 近代光学. 北京：电子工业出版社，2011.
[5] 葛德彪，魏兵. 电磁波理论. 北京：科学出版社，2013.
[6] 龚中麟. 近代电磁理论. 北京：北京大学出版社，2010.
[7] 曹建章，张正阶，李景镇. 电磁场与电磁波理论基础. 北京：科学出版社，2011.
[8] 曹建章，徐平，李景镇. 薄膜光学与薄膜技术基础. 北京：科学出版社，2014.
[9] 欧攀. 高等光学仿真（MATLAB 版）——光波导、激光. 北京：北京航空航天大学出版社，2011.
[10] 刘鹏程. 电磁场解析方法. 北京：电子工业出版社，1995.
[11] 杨儒贵，陈达章，刘鹏程. 电磁理论. 西安：西安交通大学出版社，1991.
[12] 钱士雄，王恭明. 非线性光学——原理与进展. 上海：复旦大学出版社，2001.
[13] GOVIND P AGRAWAL. 非线性光纤光学原理及应用. 贾东方，余震虹，等译. 北京：电子工业出版社，2002.
[14] 谭维翰. 非线性与量子光学. 北京：科学出版社，1996.
[15] 傅竹西. 固体光电子学. 合肥：中国科学技术大学出版社，1999.
[16] 刘公强，乐志强，沈德芳. 磁光学. 上海：上海科学技术出版社，2001.
[17] 王新久. 液晶光学和液晶显示. 北京：科学出版社，2006.

[18] 钱士雄，朱荣毅．非线性光学．上海：复旦大学出版社，2005.

[19] 洪伟，孙连友，尹雷，等．电磁场边值问题的区域分解算法．北京：科学出版社，2005.

[20] 马博琴，王霆．非线性光子晶体的研究．北京：北京理工大学出版社，2013.

[21] 叶卫民．光子晶体导论．北京：科学出版社，2010.

[22] 韦丹．材料的电磁基础．北京：科学出版社，2005.

[23] JOHN D JOANNOPOULOS, ROBERT D MEADE, JOSHUA N WINN. Photonic crystals—molding the flow of light. Princeton University Press, 1995.

[24] KAZUAKI SAKODA. Optical properties of photonic crystals. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[25] 丁君主．工程电磁场与电磁波．北京：高等教育出版社，2005.

[26] 周胜．反铁磁/电介质体系磁光学非线性研究．哈尔滨工业大学博士学位论文，2010.

[27] 刘杰．图案化介质记录性能的微磁学仿真研究．华中科技大学硕士学位论文，2012.

[28] JAKONG. Electromagnetic Wave Theory. Wiley，1986.

[29] 陈燊年，红清泉，王建成．介质为各向异性的电磁场．北京：科学出版社，2012.

[30] A I Borisenko, I E Tarapov. Vector and tensor analysis with applications. Dover Publications, Inc. New York. 1979.

[31] MUNK BA 著．超材料——批判与抉择．侯新宇，王超，侯鑫，译．北京：科学出版社，2012.

[32] Vadim A Markel. Correct definition of the Poynting vector in electrically and magnetically polarizable medium reveals that negative refraction is impossible. Optics Express, Vol.23, 2008.

[33] 程云鹏．线性代数．北京：国防工业出版社，1984.

[34] 李冬鹏，王明美，宋影，等．应用于大学物理教学的 MATLAB 图示模拟的示例．合肥师范学院学报，2012，30（6）.