基 础 篇

本篇主要通过幂函数来讲解微积分的主要思想和方法. 首先在第 1 章中, 将与微积分相关的中小学内容, 进行简单的回顾与复习, 接下来讲解幂函数的微分学和积分学.

如果你能顺利完成下面的测试题，你可以跳过第 1 章的学习，直接进入第 2 章的学习.否则，请你将这部分内容再重新复习一下.

测　试　题

1. 计算 $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} \div \dfrac{7}{3}$.

2. 将 x^3-12x^2-45x 进行因式分解.

3. 解方程 $0.52x-(1-0.52)x-80=0$.

4. 解方程 $x^3-12x^2-45x=0$.

5. 解不等式 $x^3-12x^2-45x>0$.

6. 求连接点 $P_1(5,-1)$ 和点 $P_2(3,4)$ 线段的中点坐标.

7.（1）两条均不垂直于 x 轴的直线相互平行的充分必要条件是它们的斜率________；

（2）两条均不垂直于 x 轴的直线相互垂直的充分必要条件是它们的斜率乘积等于________.

8. 直线通过一点 $P_0(x_0,y_0)$ 且斜率为 m，则该直线方程为________________.

9. 解方程组 $\begin{cases} 2x+y=2, \\ x+3y=4. \end{cases}$

10. 解方程组 $\begin{cases} y=x^2, \\ y=x. \end{cases}$

11.求下列集合运算：

（1）$(0,1)\cup(\frac{1}{2},2)$；　（2）$(0,1)\cap(\frac{1}{2},2)$；　（3）$(0,1)\cap\{1\}$；　（4）$(0,1)\cup\{1\}$；

（5）$(-3,+\infty)\cup[-2,0)$；　（6）$(-3,+\infty)\cap[-2,0)$.

12. 找出将区间 $[1,2]$ 分为 3 等份的两个点.

第 1 章　预备知识

本章介绍与幂函数微积分有关的中小学知识，便于没有学好的同学进行复习和巩固. 内容主要包括：数和代数式、方程的求解、集合和区间、解析几何.

第 1 节　数和代数式

一、实数及其运算性质

我们学习数学是先从认识数字开始的，经历了从自然数、整数到分数、小数、百分数，再到负数、有理数、实数的过程，用图 1-1 来表示这种演化可以看得更清楚.

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\0\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\end{cases}\\\text{无理数}\end{cases}$$

图 1-1

通过在水平线上选择原点（0 点）和单位长度，可以将实数表示在这条水平线上（如图 1-2 所示）. 如果实数 r 是正数，则放在 0 点的右边 r 个单位的地方；如果实数 r 是负数，则放在 0 点的左边 $-r$ 个单位的地方. 这条水平线称为数轴，也称为坐标轴. 每一个实数都对应这条线上的一点，这条线上的每一点都对应一个实数.

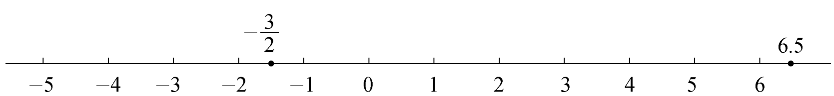


图 1-2

实数与小数有着密切的关系. 一方面，每一个小数都表示一个实数，如正的小数

$$n.a_1a_2a_3\cdots = n+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\frac{a_3}{1000}+\cdots$$

负的小数

$$-n.a_1a_2a_3\cdots = -n-\frac{a_1}{10}-\frac{a_2}{100}-\frac{a_3}{1000}-\cdots$$

其中，n 为整数，$a_1,a_2,a_3,\cdots$ 为 0 到 9 之中的数.

例如，$2.135=2+\frac{1}{10}+\frac{3}{100}+\frac{5}{1000}$，右侧为若干个实数相加，结果仍为实数. 再如，$-5.453=-5-\frac{4}{10}-\frac{5}{100}-\frac{3}{1000}$，右侧为若干个实数相减，结果仍为实数.

另一方面，每一个实数都可以用小数表示. 整数可以表示为小数点后是零的小数. 例

如，2 可以表示为 2. 0，-5 可以表示为-5.0，等等. 分数可以表示为小数，例如，$\frac{1}{10}=0.1$，$\frac{1}{3}=0.3333\cdots$. 无理数可以表示为小数，例如，$\pi=3.1415\cdots$ 是无限不循环小数.

微积分中涉及的数量都是实数，所以我们应该对实数的运算性质非常熟练. 为此将实数的运算性质进行归纳，如表 1-1 所示。

表 1-1　实数的运算性质与举例

运算性质	举　　例
$a+b=b+a$	$3+5=5+3$
$a+(b+c)=(a+b)+c$	$2+(3+7)=(2+3)+7$
$a+0=a$	$6+0=6$
$a+(-a)=0$	$4+(-4)=0$
$ab=ba$	$2\cdot3=3\cdot2$
$a(bc)=(ab)c$	$2(3\cdot4)=(2\cdot3)4$
$a\cdot1=1\cdot a=a$	$5\cdot1=1\cdot5=5$
$a(\frac{1}{a})=1(a\neq0)$	$5\cdot\frac{1}{5}=1$
$\frac{1}{\frac{1}{a}}=a(a\neq0)$	$\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$
$a(b+c)=ab+ac$	$2(4+5)=2\cdot4+2\cdot5$
$-(-a)=a$	$-(-5)=5$
$(-a)b=-ab=a(-b)$	$(-3)5=-3\cdot5=3(-5)$
$(-a)(-b)=ab$	$(-3)(-4)=3\cdot4$
$(-1)a=-a$	$(-1)4=-4$
$a\cdot0=0$	$6\cdot0=0$
如果 $ab=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$	
$a\div b=\frac{a}{b}$	$5\div6=\frac{5}{6}$
$a\cdot b=ab$	$3\cdot4=3(4)$
如果 $ad=bc$，则 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$（$b,d\neq0$）	$3\cdot4=2\cdot6$，则 $\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$
$\frac{ca}{cb}=\frac{a}{b}$（$b,c\neq0$）	$\frac{2\cdot3}{2\cdot5}=\frac{3}{5}$
$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$（$b\neq0$）	$\frac{3}{-4}=\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4}$
$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$（$b,d\neq0$）	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot2}{5\cdot7}$
$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$（$b,c,d\neq0$）	$\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{2\cdot7}{3\cdot5}$
$\frac{c}{\frac{a}{b}}=\frac{bc}{a}=\frac{b}{a}c$ $(a\neq0,b\neq0)$	$\frac{2}{\frac{3}{4}}=\frac{2\cdot4}{3}=\frac{8}{3}$

续表

运算性质	举　　例
$\dfrac{\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}}=\dfrac{bc}{ad}\ (a\neq 0,b\neq 0,d\neq 0)$	$\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{2\cdot 5}{3\cdot 4}=\dfrac{5}{6}$
$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+cb}{bd}$（$b,d\neq 0$）	$\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{9}=\dfrac{3\cdot 9+5\cdot 4}{4\cdot 9}$
$\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad-cb}{bd}$（$b,d\neq 0$）	$\dfrac{5}{3}-\dfrac{4}{7}=\dfrac{5\cdot 7-4\cdot 3}{3\cdot 7}$
$a-b=a+(-b)$	$5-4=5+(-4)$
$a-(-b)=a+b$	$4-(-3)=4+3$
$\dfrac{a}{b}=a\cdot\dfrac{1}{b}$	$\dfrac{2}{3}=2\cdot\dfrac{1}{3}$
$a=a^1$， $a\cdot a=a^2$， $\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}^{n}=a^n$ $\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}^{n}=a^n$	$\overbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdots 3}^{10}=3^{10}$
$a^0=1$， a 为不等于零的实数	$(-3)^0=1$
$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$， 当 n 为奇数时， a 为任意实数； 当 n 为偶数时， a 为非负实数	$(-8)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{(-8)}=-2$； $16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2$
$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$	
$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$	
$1^{\alpha}=1$， α 为任意实数	$1^{-\frac{2}{3}}=1$
$0^{\alpha}=0$， α 为大于零的实数	$0^{\frac{2}{5}}=0$
$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$， $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$， $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$， $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=a^{-\frac{m}{n}}$	
$a^b\cdot a^c=a^{b+c}$	
$\dfrac{a^b}{a^c}=a^{b-c}$	
$a^{bc}=(a^b)^c$	
$(ab)^c=a^cb^c$	
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	
$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$	
$\lvert a\rvert=\begin{cases}-a,a<0\\ a,a\geqslant 0\end{cases}$	
$0!=1$， $1!=1$， $n!=n\cdot(n-1)\cdots(2)(1)$	$6!=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

课堂练习：请针对上面的实数运算性质举出自己的例子.

二、多项式的因式分解

1. 多项式

我们已经知道 $a=a^1$， $a\cdot a=a^2$， $a\cdot a\cdot a=a^3$， $\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}^{n}=a^n$.

形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的式子称为多项式，其中 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_0$ 为常数.

例如， $3x^4+5x^2+1$ 就是一个多项式.

2. 多项式分解

对于多项式，质因式是指在整数系数的范围内不能表示成两个或两个以上整数系数的多项式乘积. 多项式分解就是将多项式分解成几个质因式的乘积.

如何分解一个多项式呢？常用的方法有提取公因式法、公式法和分组分解法. 对于二次三项式可以采用十字相乘法. 下面分别加以介绍.

（1）提取公因式法

例如， $4a^2x+6ax+2a=2a\cdot 2ax+2a\cdot 3x+2a\cdot 1=2a(2ax+3x+1)$.

（2）公式法

常见的公式有:

① $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$， ② $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，

③ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$， ④ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$，

⑤ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

利用上述公式，我们可以进行一些因式分解.

例如， $16x^2-9y^2=(4x)^2-(3y)^2=(4x+3y)(4x-3y)$.

（3）分组分解法

把一个多项式适当地分组，使分组后各组之间有公因式，这种利用分组来分解因式的方法叫作分组分解法.

例如， $x^3+x+x^2+1=x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+(x+1)=(x+1)(x^2+1)$.

对于比较复杂的多项式，往往需要多次分解.

例如，

$x^4-16=\left(x^2\right)^2-4^2=(x^2+4)(x^2-4)=(x^2+4)(x^2-2^2)=(x^2+4)(x+2)(x-2)$.

再如， $x^3-12x^2-45x=x(x^2-12x-45)=x(x-15)(x+3)$.

（4）二次三项式 px^2+qx+r 的分解

如果 px^2+qx+r 可以分解，则应该分解成 $px^2+qx+r=(ax+b)(cx+d)$ 的形式.

因为 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$，所以 px^2+qx+r 的分解归结为选择合

适的 a、c、b、d，使得 $ac=p$，$bd=r$，并且满足 $ad+bc=q$，这就是所谓的十字相乘法. 那如何选择合适的 a、c、b、d 呢？这主要通过尝试来实现.

例如，要对 x^2+6x+5 进行分解，通过分析可以看出，要分解的两个一次式中的系数 a,c 均应为 1，即 $1\times1=1$. 接下来把 5 进行分解，可以分解为 $1\times5=5$，这样再看交叉相乘后是否等于 6，经检验恰好满足，所以 x^2+6x+5 可以分解为 $(x+1)(x+5)$.

多项式因式分解可以概括为四句话："先看有无公因式，再看能否套公式，十字相乘试一试，分组分解要合适".

习题 1–1

1. 化简下列各式：

（1）$(x-y+1)-(2x-y-3)$；（2）$x^2-\left[x^2-x-(2x+5)\right]$；

（3）$6\left[\frac{1}{2}(a+b)-\frac{2}{3}(a-b)\right]$.

2. 计算 $\dfrac{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5})}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}\div\frac{7}{3}$.

3. 因式分解下列各式：

（1）$5x^2-30x+45$；（2）$81x^2+72xy+16y^2$；（3）$(4x-3)^2-(x-3)^2$；

（4）x^2-x-2；（5）$x^2-12x+35$.

第 2 节　方程的求解

方程是指含有未知量的等式. 如 $2x+3=7$，$3x^2+4x=7$ 等，都是方程. 下面主要讨论一元方程.

一、一元一次方程的求解

形如 $ax+b=0$ 的方程称为一元一次方程，其中 a,b 为实数，且 $a\neq0$. 下面通过一个例子来说明此类方程的解法.

例 1　解方程 $0.52x-(1-0.52)x-80=0$.

解　方程左边去括号，可得 $0.52x-0.48x-80=0$.

上式两边同时加上 80，可得

$$0.04x-80+80=80,$$

$$0.04x=80.$$

上式两边乘以$\dfrac{100}{4}$，可得

$$(\frac{100}{4})0.04x = 80(\frac{100}{4}),\quad x = 2000.$$

我们将$x = 2000$代入到原方程中，很容易验证方程两边相等. 像$x = 2000$这样，使方程两边相等的未知数的值称为方程的解. 只含一个未知数的方程的解，也称为方程的根.

二、一元二次方程的求解

形如$px^2 + qx + r = 0$的方程，称为一元二次方程. 其中p,q,r为实数，且$p \neq 0$. 求解此类方程主要有下列三种方法，下面分别说明.

1. 通过因式分解求解方程

如果我们能够将$px^2 + qx + r$分解，则很容易求出解来.

例 2 解方程$3x^2 + 13x + 4 = 0$.

解 $3x^2 + 13x + 4 = (3x+1)(x+4)$，原方程可以写成$(3x+1)(x+4) = 0$. 因为乘积等于 0 当且仅当因子之一等于 0，所以有

$$3x + 1 = 0,\quad 此时\ x = -\frac{1}{3};$$

或

$$x + 4 = 0,\quad 此时\ x = -4.$$

所以，$-\dfrac{1}{3}$和-4都是方程的解.

我们可以通过将这两个数代入原方程进行验证. 因为

$$3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 13\cdot(-\frac{1}{3}) + 4 = \frac{1}{3} - \frac{13}{3} + 4 = 0,$$

$$3(-4)^2 + 13\cdot(-4) + 4 = 48 - 52 + 4 = 0.$$

所以这两个数是方程的解.

2. 通过配方求解

当二次三项式不容易分解时，我们可以采用配方法求解. 对于$x^2 + Ax$，我们可以通过增加一项$\left(\dfrac{1}{2}A\right)^2$，来实现完全平方. 即

$$x^2 + Ax + \left(\frac{1}{2}A\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}A\right)^2.$$

下面通过例子加以说明此种求解一元二次方程的方法.

例 3 求解$20x^2 + 31x + 12 = 0$.

解　$x^2+\frac{31}{20}x+\frac{12}{20}=0$，$x^2+\frac{31}{20}x=-\frac{12}{20}$，$x^2+\frac{31}{20}x+\left(\frac{31}{40}\right)^2=-\frac{12}{20}+\left(\frac{31}{40}\right)^2$，

$\left(x+\frac{31}{40}\right)^2=\frac{1}{1600}$，$x+\frac{31}{40}=\pm\sqrt{\frac{1}{1600}}=\pm\frac{1}{40}$，$x=-\frac{31}{40}\pm\frac{1}{40}$.

所以 $x=-\frac{31}{40}+\frac{1}{40}=-\frac{3}{4}$ 或 $x=-\frac{31}{40}-\frac{1}{40}=-\frac{4}{5}$. 因此方程的解为 $-\frac{3}{4}$ 和 $-\frac{4}{5}$.

3. 公式法

应用前面的配方法，可以很容易地得到一般的公式.

假设二次方程为 $ax^2+bx+c=0$，其中 $a\neq 0$，则有

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,\quad x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a},$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

当 $b^2-4ac>0$ 时，有两个实根；当 $b^2-4ac=0$ 时，有一个实根；当 $b^2-4ac<0$ 时，没有实根.

根据上面的公式，可以直接求解.

例 4　求解方程 $3x^2+5x-1=0$.

解　此时 $a=3,b=5,c=-1$，所以 $b^2-4ac=5^2-4\cdot 3\cdot(-1)=37$，且

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{37}}{6}$.

三、线性方程组的求解

对于线性方程组，可以采用一般的方法求解. 先以两个未知数的线性方程组为例说明.

例 5　解线性方程组 $\begin{cases}5x+3y-21=0\\2x-7y+8=0\end{cases}$.

解　可以通过将其化为等价的三角形方程组来解，步骤如下：

$$\begin{cases}5x+3y-21=0 & (1)\\2x-7y+8=0 & (2)\end{cases}\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)}\begin{cases}2x-7y+8=0 & (3)\\5x+3y-21=0 & (4)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{2\times(4)-5\times(3)}\begin{cases}2x-7y+8=0 & (5)\\41y-82=0 & (6)\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}2x-7y+8=0 & (7)\\y=2 & (8)\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$$

对于含有三个及三个以上未知数的方程组，此方法同样适用.

例 6 解线性方程组 $\begin{cases} 3x-y+2z=-1 \\ 4x+y-5z=11 \\ 2x+3y-2z=10 \end{cases}$.

解

$$\begin{cases} 3x-y+2z=-1 & (1) \\ 4x+y-5z=11 & (2) \\ 2x+3y-2z=10 & (3) \end{cases} \xrightarrow[3\times(3)-2\times(1)]{3\times(2)-4\times(1)} \begin{cases} 3x-y+2z=-1 & (4) \\ 7y-23z=37 & (5) \\ 11y-10z=32 & (6) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{7\times(6)-11\times(5)} \begin{cases} 3x-y+2z=-1 & (7) \\ 7y-23z=37 & (8) \\ 183z=-183 & (9) \end{cases} \xrightarrow[(9)\div 183]{} \begin{cases} 3x-y+2z=-1 & (10) \\ 7y-23z=37 & (11) \\ z=-1 & (12) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 3x-y+2z=-1 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}.$$

此种方法可以概括为：①将方程组中第一个未知数前面系数不为零的方程调整为方程组的第一个方程，并将后面其他方程通过与第一个方程进行运算，消去第一个未知数；②从得到的不含有第一个未知数的方程中，将第二个未知数前面系数不为零的方程调整为方程组的第二个方程，并将后面其他方程通过与第二个方程进行运算，消去第二个未知数；③重复上面的过程，直到最后一个方程中只含有一个未知数为止；④求解最后的方程，并将此结果代入倒数第二个方程中，求解相应的方程，得出另一个未知数，并将这两个未知数的解，同时代入到倒数第三个方程中，……，依此类推，可以求出全部未知数的解.

习题 1–2

1. 通过因式分解来解下列方程：

（1）$x^2-12x+35=0$；（2）$8x^2+31x-4=0$；（3）$3t^2+14t-5=0$.

2. 通过配方法求解下列方程：

（1）$x^2-12x+35=0$；（2）$2x^2+8x-6=0$；（3）$t^2+4t+5=0$.

3. 利用公式求解下列方程：

（1）$2x^2-3x+2=0$；（2）$3x^2+10x+8=0$；（3）$t^2-5t-25=0$.

4. 解下列方程组：

（1）$\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 4x-5y+3z=7 \\ 2x+4y-5z=-3 \end{cases}$；（2）$\begin{cases} 12x-5y+3z=1 \\ 6x+2y-3z=0 \\ 4x+5y-6z=14 \end{cases}$.

第 3 节　集合与区间

一、寓意箭头

很多数学上的叙述具有下面的形式

"如果 A 命题成立，则 B 命题成立"，

它的另一种形式是"A 命题推出 B 命题"，经常写作"$\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$"，符号"$\Rightarrow$"称为寓意箭头.

有时，我们也使用双寓意箭头"$\Leftrightarrow$"，其含义为

$$\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B} \text{ 意味着 } \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B} \text{ 并且 } \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}.$$

例如，对于"如果 $x \neq 0$，则 $x^2 > 0$"，我们可以表示为"$x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$".

又如， 对于"$x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$，且 $x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$"，可以表示为"$x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$".

由双箭头表示的命题也称为等价命题.

因为，一方面"当 B 成立 A 成立"表示 $\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}$；另一方面"A 成立仅当 B 成立"意味着只有 B 成立，A 才会成立，或者说没有 B 成立就不会有 A 成立，即 $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$. 所以"$\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}$"也意味着"A 成立当且仅当 B 成立".

二、集合

1. 集合的概念

集合是由一些对象聚集在一起组成的，集合中的每个对象称为元素. 通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.

如果元素 x 在集合 A 中，记作 $x \in A$；如果元素 x 不在集合 A 中，记作 $x \notin A$. 例如，$0 \in \{0,1,2\}$，$1 \in \{0,1,2\}$，$2 \in \{0,1,2\}$，但是 $3 \notin \{0,1,2\}$.

集合可以用大括号表示. 例如，仅包含元素 a 的集合可以表示为 $\{a\}$，包含元素 a,b 的集合可以表示为 $\{a,b\}$，包含元素 a,b,c 的集合可以表示为 $\{a,b,c\}$，依此类推.

我们也可以用大括号表示无限集合. 例如，$\{1,2,3,\cdots\}$ 表示正整数集合，$\{-1,-2,-3,\cdots\}$ 表示负整数集合.

集合经常被一条性质所定义. 例如，$\{x | x > 2\}$ 表示所有大于 2 的实数组成的集合，$\{x | 1 < x < 2\}$ 表示介于 1 和 2 之间的所有实数组成的集合.

设 A、B 为两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，或称 B 包含 A（A 包含于 B），记作 $A \subset B$.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

把没有任何元素的集合称为空集，记作Φ.

2. 集合的运算

（1）集合的交。由所有属于集合A且属于集合B的元素组成的集合称为A与B的交，记作$A\cap B$，可用图 1-3 表示. 用数学符号表示上述的定义为：$x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A$且$x\in B$.

例如，如果$A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{c,d,e,f\}$，则$A\cap B=\{c,d,e\}$.

（2）集合的并. 由所有属于集合A或集合B的元素组成的集合称为A与B的并，记作$A\cup B$，可用图 1-4 表示. 用数学符号表示上述定义为:$x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A$或$x\in B$.

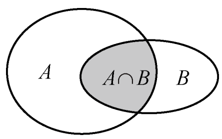


图 1-3

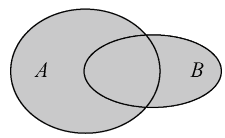


图 1-4

例如，如果$A=\{3,4,5,6\}$，$B=\{5,6,7,8\}$，则$A\cup B=\{3,4,5,6,7,8\}$.

如果两个集合A和B没有公共元素，则称集合A与集合B不相交，记作$A\cap B=\Phi$.

对于空集Φ，$A\cap\Phi=\Phi$，$A\cup\Phi=A$.

三、区间

区间是用得较多的一类数集. 在数轴上取两点a和b，且$a<b$，如图 1-5 所示.

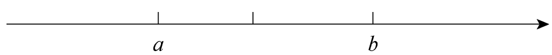


图 1-5

用开区间(a,b)表示介于a和b之间的所有实数，即$(a,b)=\{x|a<x<b\}$，可用图 1-6 表示.

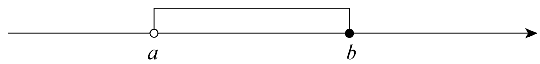
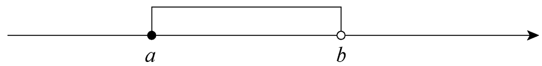
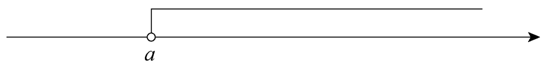
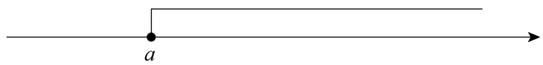
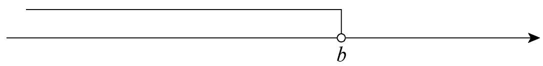
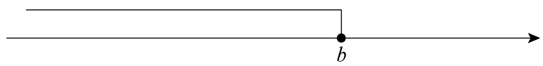
图 1-6

用闭区间$[a,b]$表示开区间(a,b)和两个端点，即$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，可用图 1-7 表示.

图 1-7

其他的区间如表 1-2 所示.

表 1-2　区间及图示

区间	图示
$(a,b]=\{x\|a<x\leqslant b\}$	
$[a,b)=\{x\|a\leqslant x<b\}$	
$(a,+\infty)=\{x\|a<x\}$	
$[a,+\infty)=\{x\|a\leqslant x\}$	
$(-\infty,b)=\{x\|x<b\}$	
$(-\infty,b]=\{x\|x\leqslant b\}$	

$(-\infty,+\infty)=R$，表示数轴上所有的点.

对区间可以进行交并运算. 例如，$(0,1)\cap[\frac{1}{2},3]=[\frac{1}{2},1)$，$(0,1)\cup[\frac{1}{2},3]=(0,3]$.

四、不等式

解关于 x 的方程就是找出使方程成立的数 x 的集合，解关于 x 的不等式就是找出使不等式成立的数 x 的集合. 解不等式类似于解方程，但也有差别.

类似之处有：

（1）不等式两边加上或减去同一个数不等号不改变. 例如，由 $x-2<7$ 可以得到 $x<9$，由 $x+2<7$ 可以得到 $x<5$.

（2）不等式两边同乘以一个正数不等号不改变. 例如，由 $\frac{1}{2}x<7$ 可以得到 $x<14$.

差别之处有：

不等式两边同乘以一个负数时不等式改变方向. 例如，由 $-\frac{1}{2}x<7$ 可以得到 $x>-14$.

1. 一次不等式的求解

例 1　解不等式 $-\frac{1}{2}(x+2)<9$.

解　不等式两边同乘以 -2，得 $x+2>-18$. 再从两边减去 2，得 $x>-20$. 所以不等式的解为 $(-20,+\infty)$.

2. 多项式不等式的求解

对于多项式不等式，我们采用分解因式法和符号表格方法来求解. 下面通过一个例

题来说明此种方法.

例 2 解不等式 $x^2-5x+6>0$.

解 （1）令 $x^2-5x+6=0$，得 $(x-3)(x-2)=0$，所以 x=2 或 x=3.

（2）列表讨论：

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$x-2$	−	0	+	+	+
$x-3$	−	−	−	0	+
$(x-2)(x-3)$	+	0	−	0	+

（3）得出结果：

从上表可以看出，原不等式的解为 $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$.

求解多项式不等式的因式分解与符号表格方法，可以概括为：先将多项式分解为实数范围内的一次因式和不能再分解的二次因式的乘积形式，求出对应的等式的实数根. 再用这些根将 $(-\infty,+\infty)$ 划分，列表讨论各个因式在各个范围上的正负号. 最后计算出相乘因子在各个范围上的正负号，由此确定不等式的解.

习题 1–3

1. 已知 $A=\{x|x>2\}$，$B=\{x|x\leqslant 4\}$，$C=\{x|x>3\}$，求下列集合：

（1）$A\cup C$；（2）$A\cap C$；（3）$B\cup C$；（4）$B\cap C$；（5）$A\cap(B\cap C)$；

（6）$A\cap(B\cup C)$.

2. 求出下列集合：

（1）$(0,1)\cup(\frac{1}{2},2)$；（2）$(0,1)\cap(\frac{1}{2},2)$；（3）$(0,1)\cap\{1\}$；（4）$(0,1)\cup\{1\}$；

（5）$[0,1]\cup(\frac{1}{2},2]$；（6）$[0,1]\cap(\frac{1}{2},2]$；（7）$(-3,+\infty)\cup[-2,0)$；

（8）$(-3,+\infty)\cap[-2,0)$；（9）$(-\infty,3)\cup[-2,+\infty)$；（10）$(-\infty,3)\cap[-2,+\infty)$.

3. 找出将区间 $[0,1]$ 细分 3 等份的两个点.

4. 求解下列不等式：

（1）$4x-7>1$；（2）$1-2x<8$；（3）$x^2-1<0$；（4）$x^2-5x+4<0$；

（5）$x^5-x^3-2x<0$；（6）$\dfrac{x-2}{x-5}>2$.

第 4 节 解析几何

一、平面直角坐标系

如图 1-8 所示，在平面内画出两条相交成直角并且原点重合的数轴，这两条数轴就

组成了平面直角坐标系. 水平的数轴称为 x 轴，习惯上取向右方向为正方向；垂直的数轴称为 y 轴，习惯上取向上方向为正方向；交点称为平面直角坐标系的原点，记作 0，它对应着两个数轴的原点.

有了平面直角坐标系后，平面上的每一个点可以用一对数组表示. 如图 1-9 所示，如果点 P 在 x 轴上的投影有坐标 x_0，在 y 轴上的投影有坐标 y_0，则点 P 的坐标为 (x_0, y_0). 反过来，一对数组可以表示平面上的一点. 为了说明具有坐标 (x_0, y_0) 的点（我们将此点记作 $P(x_0, y_0)$），在 x 轴上取坐标为 x_0 的点，在 y 轴上取坐标为 y_0 的点，过这两点分别作垂直于所在坐标轴的垂线，二者的交点就是 $P(x_0, y_0)$.

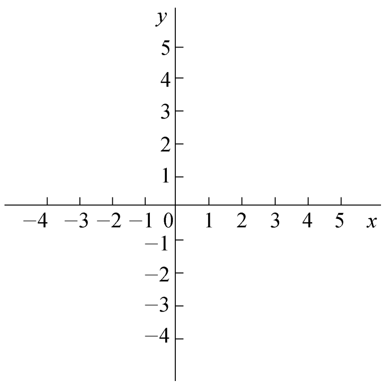


图 1-8

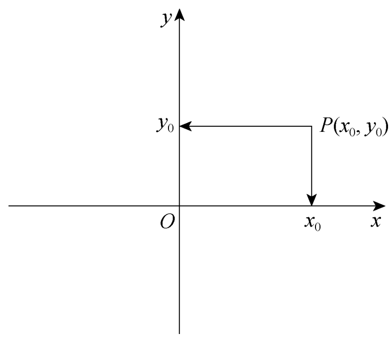


图 1-9

下面用例子来说明点与坐标的联系.

如图 1-10 所示，P_4 点和 P_8 点在 x 轴上，它们的坐标具有 $(a, 0)$ 的特点. P_2 点和 P_6 点在 y 轴上，它们的坐标具有 $(0, b)$ 的特点. 其余点的横、纵坐标均非零且位于 4 个象限中的一个. 4 个象限的位置如图 1-11 所示. 第一象限的点的两个坐标都是正的. 第二象限的点的 x 坐标是负的，y 坐标是正的. 第三象限的点的两个坐标均为负的. 第四象限的点的 x 坐标是正的，y 坐标是负的.

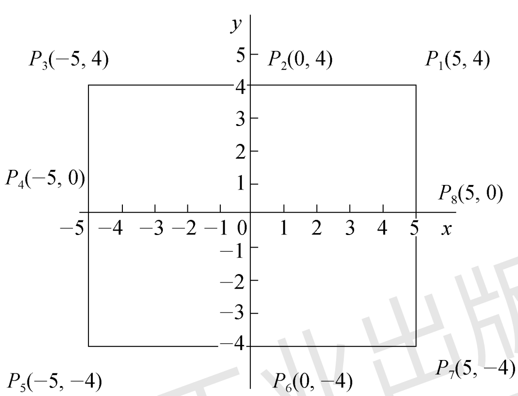


图 1-10

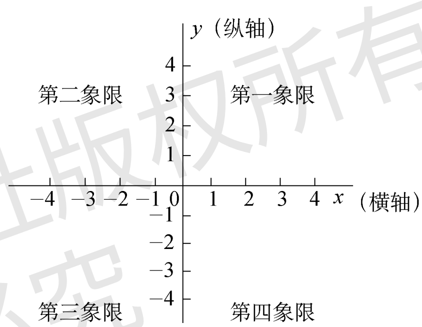


图 1-11

从图 1-10 中可以看出，$P_1(5,4)$ 和 $P_7(5,-4)$、$P_3(-5,4)$ 和 $P_5(-5,-4)$ 关于 x 轴对称；$P_1(5,4)$ 和 $P_3(-5,4)$、$P_5(-5,-4)$ 和 $P_7(5,-4)$ 关于 y 轴对称；$P_3(-5,4)$ 和 $P_7(5,-4)$、$P_1(5,4)$ 和 $P_5(-5,-4)$ 关于原点对称.

一般地，$P(a,b)$ 和 $P(a,-b)$ 关于 x 轴对称，$P(a,b)$ 和 $P(-a,b)$ 关于 y 轴对称，$P(a,b)$ 和 $P(-a,-b)$ 关于原点对称.

按照数轴的定义，闭区间 $[a,b]$ 的中点坐标为

$$a+\frac{1}{2}(b-a)=\frac{1}{2}(a+b).$$

利用上面的结论不难得到下面的定理.

定理 1　连接 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 的线段 $\overline{P_1P_2}$ 的中点坐标为

$$(\frac{1}{2}(x_1+x_2),\frac{1}{2}(y_1+y_2)).$$

例 1　求连接点 $P_1(5,-1)$ 和点 $P_2(3,4)$ 线段的中点坐标.

解　利用上面的定理，可知中点的横坐标为 $\frac{1}{2}(5+3)=4$，纵坐标为 $\frac{1}{2}(-1+4)=\frac{3}{2}$，于是，中点坐标为 $(4,\frac{3}{2})$.

二、直线斜率

图 1-12 给出了通过一点的几条直线，这些直线的倾斜率是不同的.

l_1：当 x 坐标增加 3 时 y 坐标增加 5，所以倾斜率为 $\frac{5}{3}$；

l_2：当 x 坐标增加 3 时 y 坐标增加 1，所以倾斜率为 $\frac{1}{3}$；

l_3：当 x 坐标增加时 y 坐标保持不变，所以倾斜率为 0；

l_4：当 x 坐标增加 3 时 y 坐标减小 5，所以倾斜率为 $-\frac{5}{3}$.

一般地，要确定一条不垂直于 x 轴的直线的倾斜率，需要知道两点坐标. 如图 1-13 所示，经过两点 $P_0(x_0,y_0)$ 和 $P_1(x_1,y_1)$ 的直线的倾斜率为 $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$，这个比值称为直线的斜率，一般用 k 表示.

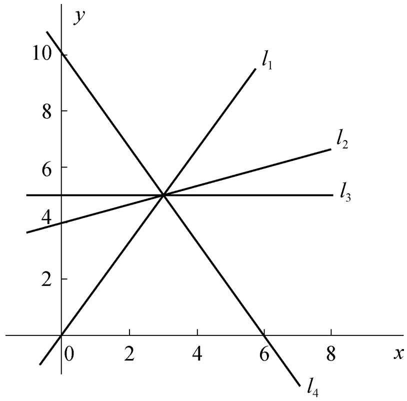


图 1-12

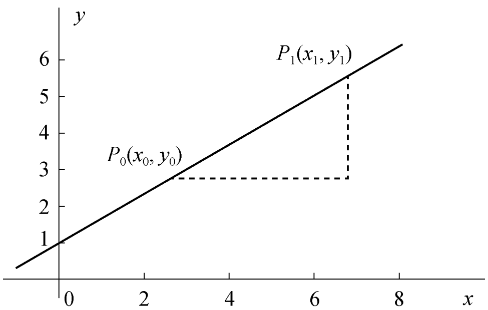
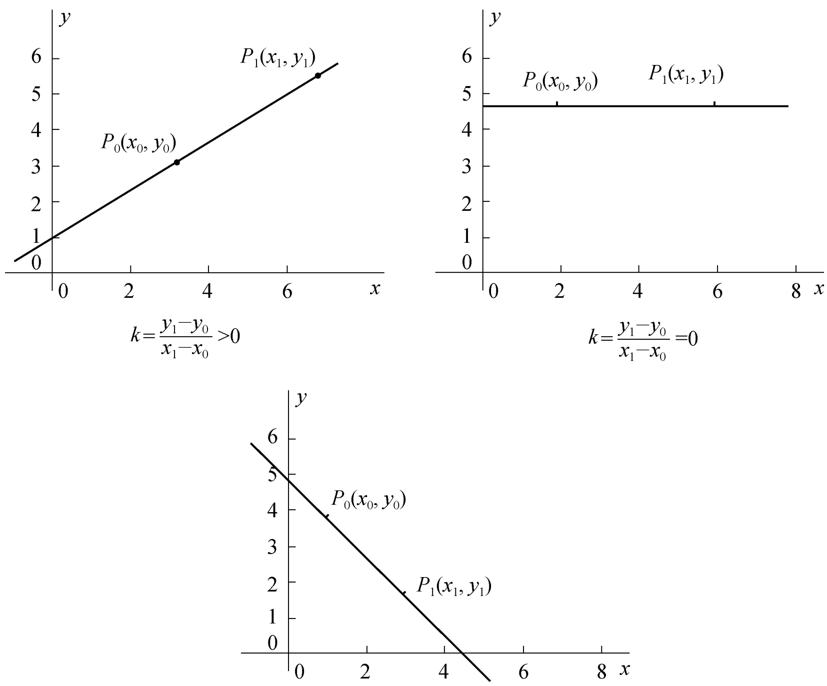


图 1-13

斜率的符号意义，如图 1-14 所示.



$k=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}>0$

$k=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=0$

$k=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}<0$

图 1-14

（1）斜率符号为正号：表示直线从左到右上升；

（2）斜率为 0：表示直线为水平线；

（3）斜率符号为负号：表示直线从左到右下降.

斜率的概念不适合垂直于 x 轴的直线，因为在该直线上点的横坐标相同，即 $x_1-x_0=0$，所以 $\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ 没有定义.

容易看出，两条均不垂直于 x 轴的直线相互平行的充分必要条件是它们的斜率相

等，即斜率之间的关系为

$$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 .$$

证明　在图 1-15 中画出两条均不垂直于 x 轴的直线 l_1, l_2. 由初等几何可以得到

$$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \angle A = \angle C \text{ 且 } \angle B = \angle D \Leftrightarrow \text{两个直角三角形相似} \Leftrightarrow k_1 = \frac{b}{a} = \frac{d}{c} = k_2 .$$

两条均不垂直于 x 轴的直线相互垂直的充分必要条件是它们的斜率乘积等于-1，即斜率之间的关系为

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 .$$

证明　在图 1-16 中，两条均不垂直于 x 轴的直线相交于 $P_0(x_0, y_0)$. 因为 $l_1 \perp l_2$，不难看出 $\angle A = \angle C$. 在图 1-16 中的两个直角三角形相似，所以对应边成比例，即

$$\frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{x_1 - x_0}{y_0 - y_2} .$$

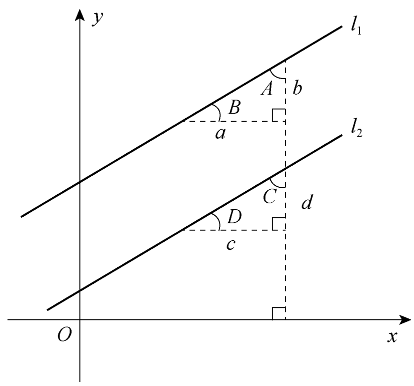


图 1-15

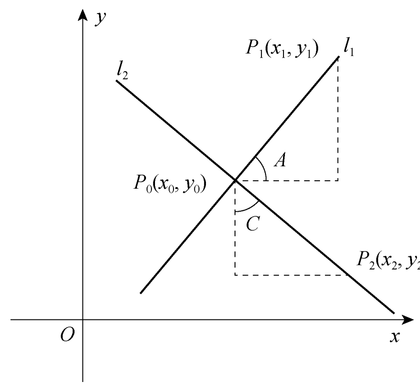


图 1-16

由上式可得
$$\frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{y_0 - y_2}{x_1 - x_0} = 1 ,$$

所以
$$\frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{y_2 - y_0}{x_1 - x_0} = -1 ,$$

变形可得
$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = -1$$

即
$$k_1 \cdot k_2 = -1 .$$

通过将上述证明过程倒推，可以得到：

如果 $k_1 \cdot k_2 = -1$，则 $l_1 \perp l_2$.

三、直线方程

将直线分为垂直于 x 轴与不垂直于 x 轴两种情况. 下面分别讨论它们的方程.

1. 垂直于 x 轴的直线

如果l是一条垂直于x轴的直线，则l与x轴必在某点$P(a,0)$处相交，我们称a为直线l在x轴上的截距. 于是，垂直于x轴的直线l的方程为$x=a$.

2. 不垂直于 x 轴的直线

（1）斜截式方程。如果l是一条不垂直于x轴的直线（见图 1-17），则l必有斜率k且与y轴相交于$Q(0,b)$点，我们称b为直线l在y轴上的截距. 设点$P(x,y)$为在直线l上的不同于点$Q(0,b)$的任意一点，则通过点$P(x,y)$和点$Q(0,b)$的斜率为

$$\frac{y-b}{x-0}.$$

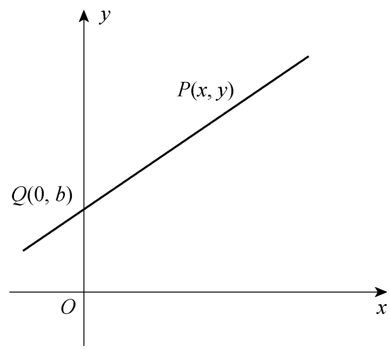


图 1-17

又因为点$P(x,y)$和$Q(0,b)$都在直线l上，所以此斜率应等于直线l的斜率，即

$$\frac{y-b}{x-0}=k.$$

上式两边同乘以x，得点$P(x,y)$满足的方程为

$$y=kx+b.$$

直线l上的所有点，包括$Q(0,b)$，都满足此方程. 此方程称为直线的斜截式方程. 它表示该直线具有斜率k且在y轴上的截距为b.

如果直线是水平的，则$k=0$，此时方程为$y=b$. 如果直线通过原点，则方程为$y=kx$.

以上几种情况的直线图形，如图 1-18 所示.

（2）线性方程。形如$Ax+By+C=0$（其中A,B不同时为 0）的方程称为关于x，y的线性方程.

定理 2　每条直线都具有形如$Ax+By+C=0$（其中A,B不同时为 0）的方程，每个这种形式的方程都表示直线.

（3）点斜式方程。如图 1-19 所示，如果直线通过一点$P_0(x_0,y_0)$且有斜率k，则该直线方程为

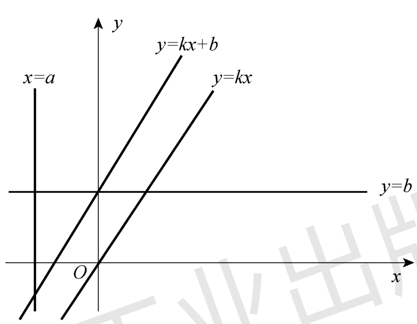


图 1-18

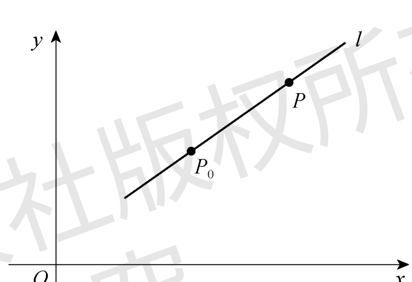


图 1-19

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

下面给出推导过程. 设通过点 $P_0(x_0, y_0)$ 且有斜率 k 的直线方程为 $y = kx + b$，由于点 $P_0(x_0, y_0)$ 在此直线上，所以

$$y_0 = kx_0 + b,$$

于是 $b = y_0 - kx_0$，代入 $y = kx + b$ 中，可得

$$y = kx + y_0 - kx_0,$$

整理可得

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

（4）两点式方程。如果直线通过两点 $P_0(x_0, y_0)$ 和 $P_1(x_1, y_1)$，则该直线方程为

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

上述结果很容易由点斜式方程推出，这里从略.

习题 1–4

1. 求出点 $P(2,-3)$ 关于① x 轴；② y 轴；③原点的对称点.

2. 求出端点为 $P_1(1,-2)$ 和 $P_2(2,-6)$ 的线段的中点坐标.

3. 已知点 M 平分线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$，如果 P_2 坐标为 $(4,8)$，点 M 坐标为 $(1,-5)$，求点 P_1 的坐标.

4. 已知等边三角形的两顶点分别为原点 O 和 $P(0,b)$，求第三个顶点的坐标.

5. 下列直线通过已给的两点：

l_1：$A(4,2)$，$B(7,1)$；　l_2：$C(2,5)$，$D(2,-1)$；

l_3：$E(0,0)$，$F(1,3)$；　l_4：$G(2,4)$，$H(1,0)$；

l_5：$I(-1,2)$，$J(5,2)$；　l_6：$K(3,2)$，$L(2,-1)$.

（1）哪条直线为水平线？（2）哪条直线与 x 轴垂直？（3）哪两条直线互相平行？（4）哪两条直线互相垂直？

6. 通过点 $P(-2,5)$ 和点 $Q(2,3)$ 的直线与 x 轴和 y 轴分别相交何处？

7. 已知直线 l_1 通过点 $A(2,-3)$ 和点 $B(7,7)$，直线 l_2 通过点 $C(5,-1)$ 和点 $D(6,y_0)$，求满足下列条件的 y_0：

（1）$l_1 /\!/ l_2$；　（2）$l_1 \perp l_2$.

8. 找出下列直线的斜率和 y 轴上的截距：

（1）$y = x + 4$；　（2）$4x = 1$；　（3）$x + y + 1 = 0$；　（4）$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

9. 求出通过点 $P(-2,-3)$ 且斜率为 3 的直线方程.