

第 3 章 Lyapunov 稳定性

在这一章中, 将研究 Lyapunov 稳定性的理论基础. 内容主要包括 Lyapunov 稳定性的基本概念、Lyapunov 函数和用 Lyapunov 方法研究系统解的稳定性等重要性质, 并用适当的例子来阐明各种概念和理论之间的细微区别.

3.1 基本概念

3.1.1 Lyapunov 稳定性的基本概念

稳定性是系统的一个基本结构特性, 稳定性问题是系统控制理论研究的一个重要课题. 对大多数情形, 稳定是系统能够正常运行的前提, 系统运动的稳定性实质上归结为系统原点平衡状态的稳定性. 直观上, 系统原点平衡状态的稳定性问题就是偏离原点平衡状态的受扰运动能不能只依赖于系统内部的结构因素, 或使之限制在原点平衡状态附近, 或使之同时最终回到原点平衡状态. 系统运动稳定性可分为基于输入输出 (I/O, input-output) 描述的外部稳定性和基于状态空间描述的内部稳定性. 在一定条件下, 外部稳定性和内部稳定性才存在等价关系.

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), \\ y = g(t, x) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

与其自由系统

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \quad (3.1.2)$$

定义 3.1.1 对零初始状态, 若任意有界输入对应的输出也是有界的, 则称系统 (3.1.1) 是外部稳定的 (externally stable). 外部稳定性也常称为有界输入有界输出稳定的 (Bounded Input Bounded Output Stable), 简称 BIBO 稳定的 (BIBO stable).

定义 3.1.2 对非零初始状态和零输入对应的解是有界的, 并且趋于零, 则称系统 (3.1.1) 是内部稳定的 (internally stable).

在本章, 下面一般考虑内部稳定性.

定义 3.1.3 (1) 若对任意的 $\varepsilon > 0$, $\tau \geq 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $t \geq \tau$, $\|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}\| < \delta$, 使得 $\|\mathbf{x}(t, \tau, \boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\varphi}(t, \tau, \boldsymbol{\xi})\| < \varepsilon$, 则称系统 (3.1.2) 的特解 $\boldsymbol{\varphi}(t, \tau, \boldsymbol{\xi})$ 是稳定的 (stable);

(2) 若存在 $\varepsilon_0 > 0$, $\tau_0 \geq 0$, 对任意的 $\delta > 0$, 存在 $t_0 \geq \tau_0$, $\|\boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\xi}_0\| < \delta$, 使得 $\|\mathbf{x}(t_0, \tau_0, \boldsymbol{\eta}_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_0, \tau_0, \boldsymbol{\xi}_0)\| \geq \varepsilon_0$, 则称系统 (3.1.2) 的特解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是不稳定的 (unstable).

系统 (3.1.2) 特解 $\bar{\mathbf{x}}(t)$ 的稳定性是在有限区间上对初值的连续依赖性在无穷区间上的推广.

在以下的讨论中, 只考虑系统 (3.1.2) 零解的稳定性问题. 事实上, 这并不失一般性, 因为对系统任一特解 $\bar{\mathbf{x}}(t)$ 的稳定性问题, 可通过变换 $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ 化为关于 $\mathbf{y}$ 的系统 $\mathbf{y}' = \mathbf{x}' - \bar{\mathbf{x}}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(t, \bar{\mathbf{x}}) \triangleq \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ 零解的稳定性问题. 于是定义 3.1.3 可修改为

定义 3.1.4 (1) 若对任意的 $\varepsilon > 0$, $\tau \geq 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $t \geq \tau$, $\|\boldsymbol{\xi}\| < \delta$, 使得 $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$, 则称系统 (3.1.2) 是稳定的;

(2) 若存在 $\varepsilon_0 > 0$, $\tau_0 \geq 0$, 对任意的 $\delta > 0$, 存在 $t_0 \geq \tau_0$, $\boldsymbol{\xi}_0$ 满足 $\|\boldsymbol{\xi}_0\| < \delta$, 使得 $\|\mathbf{x}(t_0, \tau_0, \boldsymbol{\xi}_0)\| \geq \varepsilon_0$, 则称系统 (3.1.2) 是不稳定的.

例 3.1.1 试研究单摆运动 $\varphi'' = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi$ 的稳定性, 如图 3.1 所示.

解 引入变量 $\varphi = \varphi_1$, $\varphi' = \varphi_2$ 得 $\begin{cases} \varphi_1' = \varphi_2, \\ \varphi_2' = -\omega^2 \sin \varphi_1, \end{cases}$ 其中, ℓ 表示摆长, φ 表示摆与垂直方向之间的角度, $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$. 由力学知识知, 系统的总能量为

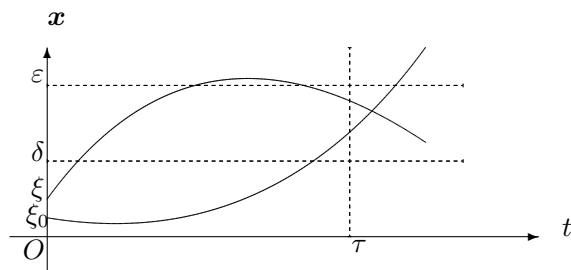


图 3.1 稳定性和不稳定性示意图

$V(\varphi) = \omega^2 (1 - \cos \varphi_1) + \frac{\varphi_2^2}{2}$. 注意到系统是能量守恒的, 对系统的解 φ 有

$$\omega^2 (1 - \cos \varphi_1) + \frac{\varphi_2^2}{2} = \omega^2 (1 - \cos \xi_1) + \frac{\xi_2^2}{2}. \quad (3.1.3)$$

注意到 $V(\varphi) = C$ 在 $\varphi_1\varphi_2$ 平面上表示的是对应不同 C 值的一族曲线, 而在 C 值很小时对应的曲线是封闭的, 由于 V 是 φ 的连续函数并且 $V(\mathbf{0}) = 0$, 于是, 系统的平衡位置是稳定的.

对式 (3.1.3), 若取 $\xi_2 = 0$ 所对应的解, 则有

$$\frac{(\varphi'_1(t, \tau, \xi_1, 0))^2}{2} = \omega^2 (\cos \varphi_1(t, \tau, \xi_1, 0) - \cos \xi_1),$$

其中 ξ_1 是单摆运动所对应的振幅. 于是 $dt = \frac{d\varphi_1(t, \tau, \xi_1, 0)}{\sqrt{2\omega\sqrt{\cos \varphi_1(t, \tau, \xi_1, 0) - \cos \xi_1}}}$. 所以对应的振动周期为

$$T_{\xi_1} = \frac{4}{\omega} \int_0^{\xi_1} \frac{d\varphi_1(t, \tau, \xi_1, 0)}{\sqrt{2\omega\sqrt{\cos \varphi_1(t, \tau, \xi_1, 0) - \cos \xi_1}}} = \frac{2}{\omega} \int_0^{\xi_1} \frac{\sqrt{2}d\varphi_1(t, \tau, \xi_1, 0)}{\sqrt{\cos \varphi_1(t, \tau, \xi_1, 0) - \cos \xi_1}}.$$

易证当 $\xi_1 > \xi'_1$ 时有 $T_{\xi_1} > T_{\xi'_1}$, 表明系统的任一特解 $\varphi_1(t, \tau, \xi_1, 0) \neq \mathbf{0}$ 在其附近都存在与其周期不等的振动. 这种不等的周期性将使其不满足定义 3.1.3 的要求, 从而是不稳定的. 解毕.

1933 年, K. Persidsky^① 首先指出了稳定性与初始时刻的关系, 并且提出了一致稳定性的概念.

定义 3.1.5 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $\tau \geq 0, t \geq \tau$, $\|\xi\| < \delta$, 使得 $\|x(t)\| < \varepsilon$, 则称系统 (3.1.2) 是一致稳定的 (uniformly stable).

① Konstantin Petrovich Persidsky, 俄罗斯人. 俄文: Константин Петрович Персидский.

定理 3.1.1 $x' = f(t, x)$, $f(t + \omega, x) \equiv f(t, x)$ 稳定的充要条件是它是一致稳定的.

证明 显然只需证必要性. 由于系统是稳定的, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 对任意的 $t \geq \omega$, $\eta = x(\omega, \tau, \xi)$, $\|\eta\| < \delta_1$, 使得 $\|x(t, \omega, \xi)\| < \varepsilon$.

由解对初值的连续依赖性 (定理 2.4.1) 知, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $t \geq \tau$, $0 \leq \tau < \omega$, ξ , $\|\xi\| < \delta$, 使得 $\|x(\omega, \tau, \xi)\| < \delta_1$. 所以对任意的 $\varepsilon > 0$, $0 \leq \tau < \omega$, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $t \geq \tau$, $\|\xi\| < \delta$, 使得 $\|x(t, \omega, \xi)\| < \varepsilon$.

由周期性知, 当 $k\omega \leq \tau < (k+1)\omega$ 时, $x(t, \tau, \xi)$, $x(t, \tau - k\omega, \xi)$ 有相同性态, 故若 $\|\xi\| < \delta$, 则对任意的 $\tau \geq 0$ 有 $\|x(t, \omega, \xi)\| < \varepsilon$, 即系统是一致稳定的. 证完.

自治系统作为周期系统的特殊情形有下面的推论.

推论 3.1.1 自治系统稳定的充要条件是它是一致稳定的.

稳定性问题中, 无论在理论上还是在应用上, 渐近稳定性往往更有意义, 是工程意义下的稳定性. 为建立渐近稳定性的概念, 先给出吸引性的定义.

定义 3.1.6 (1) 若对任意的 $\tau \geq 0$, 存在 $\eta > 0$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, $\|\xi\| < \eta$, 存在 $T \geq 0$, 当 $t \geq \tau + T$ 时有 $\|x(t)\| < \varepsilon$, 则称系统 (3.1.2) 是吸引的 (attractive);

(2) 若对任意的 $\tau \geq 0$, 存在 $\eta > 0$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T \geq 0$, 对任意的 $\|\xi\| < \eta$, 当 $t \geq \tau + T$ 时有 $\|x(t)\| < \varepsilon$, 则称系统 (3.1.2) 是等度吸引的 (equi-attractive);

(3) 若存在 $\eta > 0$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T \geq 0$, 对任意的 $\tau \geq 0$, $\|\xi\| < \eta$, 当 $t \geq \tau + T$ 时有 $\|x(t)\| < \varepsilon$, 则称系统 (3.1.2) 是一致吸引的 (uniformly attractive).

有关各种吸引性定义中的 T 称为衰减时间 (decay time), 而解趋于零时初始状态的范围称为吸引域 (domain of attraction). 一般来讲, 吸引域的寻找是十分困难的, 只能寻找其子集以满足充分条件的要求.

下面的例子说明吸引性并不蕴含着稳定性.

例 3.1.2 试研究 $x' = -x^2$.

解 容易求出系统的通解为 $x(t) = \frac{\xi}{1 + \xi(t - \tau)}$, 故对任意的 ξ , 当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $x(t) \rightarrow 0$, 所以系统是吸引的.

另外, 系统是不稳定的. 事实上, 当 $\xi < 0$ 时, 不论 ξ 多么小, 当 $t \rightarrow \tau - \frac{1}{\xi}$ 时有 $x(t) \rightarrow \infty$. 解毕.

但是有下面的结论.

定理 3.1.2 若系统 (3.1.2) 初始状态有界的解都一致地趋于零, 则满足该条件的所有解都是稳定的.

证明 设 $X = \{x \mid x' = f(t, x), x(\tau) = \xi, \|\xi\| < M\}$. 易见 X 是开的, 故对系统的任一解 $\psi(t, \tau, \eta)$, 任意的 $\varphi(t, \tau, \xi) \in X$, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $\|\eta - \xi\| < \delta_1$ 时有 $\psi(t, \tau, \eta) \in X$. 又由假设, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T \geq 0$, 当 $t \geq \tau + T$ 时有 $\|\varphi(t, \tau, \xi)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\|\psi(t, \tau, \eta)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. 在区间 $[\tau, \tau + T]$ 上, 由解对初值的连续依赖性 (定理 2.4.1), 存在 $\delta_2 > 0$, 当 $\|\eta - \xi\| < \delta_2$ 时有

$$\|\psi(t, \tau, \eta) - \varphi(t, \tau, \xi)\| < \varepsilon. \quad (3.1.4)$$

而在无穷区间 $[\tau + T, \infty)$ 上有

$$\|\psi(t, \tau, \eta) - \varphi(t, \tau, \xi)\| \leq \|\psi(t, \tau, \eta)\| + \|\varphi(t, \tau, \xi)\| < \varepsilon.$$

综上, 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. 则当 $\|\eta - \xi\| < \delta$ 时, 对任意的 $t \geq \tau$ 有式 (3.1.4) 成立, 所以 $\varphi(t, \tau, \xi)$ 是稳定的. 证完.

下面的例子说明吸引力不蕴含着一致吸引力.

例 3.1.3 试研究 $x' = -\frac{x}{1+t}$ 的吸引力.

解 易求出系统的通解为 $x(t, \tau, \xi) = \frac{1+\tau}{1+t}\xi$. 显然系统是吸引的, 并且对任意的 τ, ξ 都是单调的. 设对任意的 $\varepsilon, \eta > 0$, 取 $\xi = \eta$ 时有 $x(t, \tau, \eta) = \frac{1+\tau}{1+\tau+T}\eta < \varepsilon$, 故 $T > (1+\tau)\left(\frac{\eta}{\varepsilon} - 1\right)$, 即衰减时间 T 随着 τ 的增加而增加. 所以系统不是一致吸引的. 解毕.

定理 3.1.3 一阶系统吸引的充要条件是它是等度吸引的.

证明 只需证必要性. 若系统是吸引的, 则对任意的 $x(\tau) = \pm\alpha, \alpha \leq \eta$ 所对应的两个解 $x_+(t, \tau, \alpha), x_-(t, \tau, -\alpha)$ 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\pm}(t, \tau, \pm\alpha) = 0$, 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T \geq 0$, 当 $t \geq \tau + T$ 时有 $\varepsilon > x_+(t, \tau, \alpha) > 0, 0 > x_-(t, \tau, -\alpha) > -\varepsilon$. 由 Cauchy-Picard 解的存在惟一性 (定理 2.2.1) 和 Chaplygin 第一比较定理 (定理 2.3.1) 知, 对任意的 $|\xi| < \alpha$, 当 $t \geq \tau + T$ 时有

$$\varepsilon > x_+(t, \tau, \alpha) > x(t, \tau, \xi) > x_-(t, \tau, -\alpha) > -\varepsilon$$

或 $|x(t, \tau, \xi)| < \varepsilon$. 于是, 系统是等度吸引的. 证完.

现在给出各种渐近稳定性的概念.

定义 3.1.7 (1) 若系统 (3.1.2) 是稳定和吸引的, 则称其为渐近稳定的 (asy-stable);

(2) 若系统 (3.1.2) 是稳定和等度吸引的, 则称其为等度渐近稳定的 (equi-asy-stable);

(3) 若系统 (3.1.2) 是一致稳定和一致吸引的, 则称其为一致渐近稳定的 (uniformly asy-stable).

渐近稳定性示意图如图 3.2 所示.

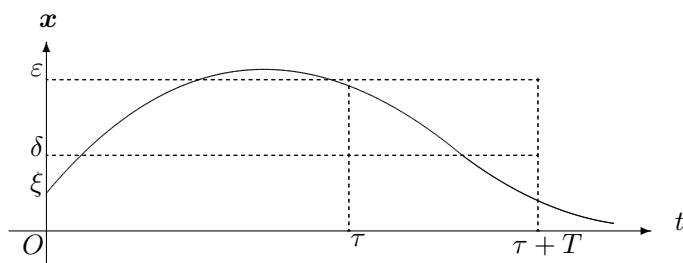


图 3.2 渐近稳定性示意图

等度渐近稳定性概念是 J. Massera^①引进的. 而一致渐近稳定性的概念是 E. Barbashin^②和 N. Krasovsky^③最早提出的. 此时, 人们认识到 A. Lyapunov 已经给出了一致渐近稳定性的判定.

定理 3.1.1、推论 3.1.1 和定理 3.1.3 可加强如下.

定理 3.1.4 (1) 周期系统 (渐近) 稳定的充要条件是它是一致 (渐近) 稳定的;

(2) 自治系统 (渐近) 稳定的充要条件是它是一致 (渐近) 稳定的;

(3) 一阶系统渐近稳定的充要条件是它是等度渐近稳定的.

例 3.1.4 试研究 $[A]$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

解 (1) 原点是中心的情况, 是稳定的. 事实上, 其通解为 $\varrho(t) = \varrho_0$,

① José Luis Massera (1915.06.08-2002.09.09), 乌拉圭人.

② Evgenii Alekseevich Barbashin (1918-1969), 俄罗斯人. 俄文: Евгений Алексеевич Барбашин.

③ Nikolai Nikolaevich Krasovsky (1924.09.07-2012.04.04), 俄罗斯人, N. Chetaev 的学生, 1964 年当选为苏联科学院通讯院士 (1968 年为正式院士), 1976 年获列宁奖, 1984 年获国家奖, 1988 年当选为匈牙利科学院外籍院士, 1992 年获 Lyapunov 金奖, 1996 年获 Lomorosov 金奖. 俄文: Николай Николаевич Красовский.

$\varphi(t) = \alpha t + \varphi_0$, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $\varrho_0 < \delta$ 时, 对任意的 $t \geq 0$ 有 $\varrho(t, \varrho_0, \varphi_0) < \varepsilon$.

(2) 由定理 3.1.4 知, 系统还是一致稳定的.

(3) 系统不是渐近稳定的. 这是因为 $\varrho(t, \varrho_0, \varphi_0) \not\rightarrow 0$. 解毕.

例 3.1.5 试研究 $[A]$, 其中 $A = -\lambda I_2$, 其中, $\lambda \neq 0$.

解 原点是临界结点的情况, 解为 $x(t) = e^{-\lambda t} \xi$.

(1) 当 $\lambda > 0$ 时, 系统是渐近稳定的. 事实上, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$. 则当 $\|\xi\| < \delta$ 时, 对任意的 $t \geq 0$ 有 $\|x(t)\| < \varepsilon$, 所以系统是稳定的. 又因为 $x(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$, 所以系统是渐近稳定的.

(2) 显然, 系统是等度渐近稳定和一致渐近稳定的.

(3) 当 $\lambda < 0$ 时, 系统是不稳定的. 这是因为 $\|x(t)\| \rightarrow \infty (t \rightarrow \infty)$. 解毕.

例 3.1.6 试研究 $x' = (6t \sin t - 2t)x$.

解 (1) 系统是稳定的. 事实上, 其通解为

$$x(t) = \xi \exp \{6 \sin t - 6t \cos t - t^2 - 6 \sin \tau + 6t \cos \tau + \tau^2\},$$

而当 $t \geq \tau$ 时有 $|x(t)| \leq \xi \exp\{\tau^2 + 6\tau + 21\}$.

(2) 系统不是一致稳定的. 考虑 $\xi \neq 0, \tau = 2n\pi$. 则当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$|x((2n+1)\pi, \tau, \xi)| = \xi \exp\{(4n+1)\pi(6-\pi)\} \rightarrow \infty.$$

解毕.

有时, 还需要用到 I. Malkin^①在 1935 年给出的指数渐近稳定性定义.

定义 3.1.8 若存在 $\eta, M, \alpha > 0$, 使得对任意的 $\tau \geq 0, \|\xi\| < \eta$, 当 $t \geq \tau$ 时有 $\|x(t)\| \leq M\|\xi\|e^{-\alpha(t-\tau)}$, 则称系统 (3.1.2) 是指数渐近稳定的 (exponentially asy-stable).

3.1.2 Dini 导数

X 在 t_0 的 Dini 导数 (Dini derivative) 有下列 4 种:

(1,2) 上右 (上左)Dini 导数: $D^\pm X(t_0) = \limsup_{t \rightarrow t_0^\pm} \frac{X(t) - X(t_0)}{t - t_0}$;

(3,4) 下右 (下左)Dini 导数: $D_\pm X(t_0) = \liminf_{t \rightarrow t_0^\pm} \frac{X(t) - X(t_0)}{t - t_0}$.

若适当阶的矩阵函数 Y 是可导的, 则 Dini 导数有下列运算法则:

^① Ioel Gilevich Malkin, 俄罗斯人. 俄文: Иосел Гилевич Малкин.

- (1) $D^+(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) \leq (D^+\mathbf{X}_1 + D^+\mathbf{X}_2)$;
 (2) $D^+(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) \geq (D^+\mathbf{X}_1 + D_+\mathbf{X}_2)$;
 (3) 若 $\mathbf{Y}(t) \geq \mathbf{O}$, 则 $D^+(\mathbf{Y}(t)\mathbf{X}(t)) = \mathbf{Y}'(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{Y}(t)D^+\mathbf{X}(t)$;
 (4) 若 $\mathbf{Y}(t) \leq \mathbf{O}$, 则 $D^+(\mathbf{Y}(t)\mathbf{X}(t)) = \mathbf{Y}'(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{Y}(t)D_+\mathbf{X}(t)$.

定理 3.1.5 连续 $\mathbf{X}$ 在一个区间上不减的充要条件是 $D^+\mathbf{X} \geq 0$.

证明 只需证充分性. 先设 $D^+\mathbf{X}(t) > 0$. 若存在 $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$, $t_1 < t_2$, 但 $\mathbf{X}(t_1) > \mathbf{X}(t_2)$, 则存在 μ , 使得 $\mathbf{X}(t_1) > \mu > \mathbf{X}(t_2)$.

令 $\xi = \sup\{t \mid \mathbf{X}(t) > \mu\}$. 则 $\xi \in (\alpha, \beta)$, 且由 x 的连续性有 $\mathbf{X}(\xi) = \mu$. 故对任意的 $t \in [\xi, \beta)$ 有 $\frac{\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(\xi)}{t - \xi} < 0$, 从而 $D^+\mathbf{X}(\xi) \leq 0$. 矛盾.

现设 $D^+\mathbf{X} \geq 0$. 则对任意的 $\varepsilon > 0$ 有 $D^+(\mathbf{X}(t) + \varepsilon t) \geq D^+\mathbf{X}(t) + \varepsilon > 0$. 所以 $\mathbf{X}(t) + \varepsilon t$ 是不减的. 证完.

引理 3.1.1 (单调收敛准则, monotone convergence criterion) 单调有界序列 (函数) 是收敛的.

引理 3.1.2 对任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, 定义 $F(t) = \|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\| (t \in \mathbb{R})$, 则 $D_{\pm}F(0)$ 存在, 满足 $-\|\mathbf{y}\| \leq D_{\pm}F(0) \leq \|\mathbf{y}\|$.

证明 由三角不等式知, 对任意的 $u, v \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 有

$$\begin{aligned} F(\lambda_1 u + \lambda_2 v) &= \|\lambda_1(\mathbf{x} + u\mathbf{y}) + \lambda_2(\mathbf{x} + v\mathbf{y})\| \\ &\leq \|\lambda_1(\mathbf{x} + u\mathbf{y})\| + \|\lambda_2(\mathbf{x} + v\mathbf{y})\| \\ &= \lambda_1\|\mathbf{x} + u\mathbf{y}\| + \lambda_2\|\mathbf{x} + v\mathbf{y}\| \\ &= \lambda_1 F(u) + \lambda_2 F(v). \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

设 $t_1 < t_2 < t_3$. 则 $t_2 = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}t_1 + \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}t_3$. 于是, 由式 (3.1.5) 有

$$F(t_2) \leq \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}F(t_1) + \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}F(t_3).$$

故 $\frac{F(t_2) - F(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{F(t_3) - F(t_1)}{t_3 - t_1} \leq \frac{F(t_3) - F(t_2)}{t_3 - t_2}$. 所以当 $0 < h_1 < h_2$ 时有

$$\begin{aligned} &\frac{F(t) - F(t - h_2)}{h_2} \\ &\leq \frac{F(t) - F(t - h_1)}{h_1} \leq \frac{F(t + h_1) - F(t)}{h_1} \leq \frac{F(t + h_2) - F(t)}{h_2}. \end{aligned}$$

定义 $\varphi(h) = \frac{F(t) - F(t-h)}{h}$, $\psi(h) = \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$. 则它们在 $h \rightarrow 0^+$ 时是单调有界的, 故由单调收敛准则 (引理 3.1.1), $D_{\pm}F$ 存在. 特别地, $D_{\pm}F(0)$ 存在. 又由三角不等式有

$$-|t|\|\mathbf{y}\| = -\|t\mathbf{y}\| \leq F(t) - F(0) = \|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\| \leq \|t\mathbf{y}\| = |t|\|\mathbf{y}\|.$$

证完.

引理 3.1.3 若 $\mathbf{x}$ 在 t 处存在左导数和右导数. 则 $D_{\pm}\|\mathbf{x}(t)\|$ 存在, 并且

$$- \|D_{\pm}\mathbf{x}(t)\| \leq D_{\pm}\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|D_{\pm}\mathbf{x}(t)\|. \quad (3.1.6)$$

证明 当 $\Delta t \neq 0$ 时有 $\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + D_{\pm}\mathbf{x}(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t)$, 其中, 当 $\Delta t > 0$ 时取 D_+ , 当 $\Delta t < 0$ 时取 D_- . 于是, 由三角不等式有

$$\frac{\|\mathbf{x}(t + \Delta t)\| - \|\mathbf{x}(t)\|}{\Delta t} = \frac{\|\mathbf{x}(t) + D_{\pm}\mathbf{x}(t)\Delta t\| - \|\mathbf{x}(t)\|}{\Delta t} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

再由引理 3.1.2, 分别以 $\mathbf{x}$, $D_{\pm}\mathbf{x}$ 代替 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, 上式右端第一项当 $\Delta t \rightarrow 0^{\pm}$ 时存在. 从而上式左端当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时存在, 并满足式 (3.1.6). 证完.

3.1.3 Lie 导数、Lie 括号与 Lie 代数

考虑向量场 $\mathbf{f}$ 和一个标量函数 h , 其中 $\mathbf{x}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$. 定义标量函数 h 关于向量场 $\mathbf{f}$ 的 Lie 导数 (Lie derivative) 为 $L_{\mathbf{f}}h = \langle \nabla h, \mathbf{f} \rangle$. 递推地, 定义

$$L_{\mathbf{f}}^0 h = h, \quad L_{\mathbf{f}}^i h = L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}^{i-1} h) = \langle \nabla L_{\mathbf{f}}^{i-1} h, \mathbf{f} \rangle, \quad i = 1, 2, \dots.$$

注记 3.1.1 Lie 导数实际上就是 h 沿着向量场 $\mathbf{f}$ 的方向导数.

对向量场 $\mathbf{g}$, 定义 $L_{\mathbf{g}}(L_{\mathbf{f}}h) = \langle \nabla(L_{\mathbf{f}}h), \mathbf{g} \rangle$. 定义向量场 $\{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ 的 Lie 括号 (Lie bracket) 为 $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = (\nabla \mathbf{g})\mathbf{f} - (\nabla \mathbf{f})\mathbf{g}$, 并记

$$[\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{k-1}, \mathbf{f}_k] = [\mathbf{f}_1, \dots, [\mathbf{f}_{k-2}, [\mathbf{f}_{k-1}, \mathbf{f}_k]] \dots].$$

例 3.1.7 若 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2x_1 + ax_2 + \sin x_1 \\ -x_2 \cos x_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x_1 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}, \mathbf{g}] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 \sin 2x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_1 + ax_2 + \sin x_1 \\ -x_2 \cos x_1 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} -2 + \cos x_1 & a \\ x_2 \sin x_1 & -\cos x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} a \cos 2x_1 \\ \cos x_1 \cos 2x_1 - 2(-2x_1 + ax_2 + \sin x_1) \sin 2x_1 \end{pmatrix}.$$

Lie 括号有下面三个基本性质:

(1) 双线性性 (bilinearity):

$$[c_1 \mathbf{f}_1 + c_2 \mathbf{f}_2, \mathbf{g}] = c_1 [\mathbf{f}_1, \mathbf{g}] + c_2 [\mathbf{f}_2, \mathbf{g}], \quad [\mathbf{f}, c_1 \mathbf{g}_1 + c_2 \mathbf{g}_2] = c_1 [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1] + c_2 [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2];$$

(2) 反交换性 (skew commutativity): $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = -[\mathbf{g}, \mathbf{f}]$;

(3) Jacobi 恒等式 (Jacobi identity): $[\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}] + [\mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{f}] + [\mathbf{h}, \mathbf{f}, \mathbf{g}] = \mathbf{0}$.

Lie 括号 $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ 也可记 $\text{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}$. 递推地, 记 $\text{ad}_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g} = \mathbf{g}$, $\text{ad}_{\mathbf{f}}^i \mathbf{g} = [\mathbf{f}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^{i-1} \mathbf{g}] (i = 1, 2, \dots)$. 注意到

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} h - L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h &= \nabla(L_{\mathbf{g}} h) \mathbf{f} - \nabla(L_{\mathbf{f}} h) \mathbf{g} \\ &= \nabla((\nabla h) \mathbf{g}) \mathbf{f} - \nabla((\nabla h) \mathbf{f}) \mathbf{g} \\ &= (\nabla h \nabla \mathbf{g} + \mathbf{g}^T \nabla^2 h) \mathbf{f} - (\nabla h \nabla \mathbf{f} + \mathbf{f}^T \nabla^2 h) \mathbf{g} \\ &= \nabla h ((\nabla \mathbf{g}) \mathbf{f} - (\nabla \mathbf{f}) \mathbf{g}) \\ &= \nabla h [\mathbf{f}, \mathbf{g}], \end{aligned}$$

即 $L_{\text{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}} h = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} h - L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h$, 也称为 Jacobi 恒等式. 进一步, 还有

$$\begin{aligned} L_{\text{ad}_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g}} h &= L_{\text{ad}_{\mathbf{f}}(\text{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g})} h \\ &= L_{\mathbf{f}} L_{\text{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}} h - L_{\text{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h \\ &= L_{\mathbf{f}} (L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} h - L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h) - (L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} - L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}) L_{\mathbf{f}} h \\ &= L_{\mathbf{f}}^2 L_{\mathbf{g}} h - 2L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h + L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^2 h. \end{aligned}$$

下面定义 F 为向量场 $\mathbf{f}$ 中任意有限个元素的线性组合构成的集. 易证 F 是一个线性空间. 显然, $[\cdot, \cdot]: F \times F \mapsto F$. 令

$$\mathcal{F} = \left\{ \sum_{\lambda=1}^k r_{\lambda} [\mathbf{f}_1^{\lambda}, \dots, \mathbf{f}_{s_{\lambda}}^{\lambda}] \mid r_{\lambda} \in \mathbb{R}, \mathbf{f}_j^{\lambda} \in F, j = 1, \dots, s_{\lambda} \right\},$$

即 $\mathcal{F}$ 为 F 中任意有限个元素 $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s$ 作成的 Lie 括号 $[\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s]$ 的线性组合构成的集, 称为向量场生成的 Lie 代数 (Lie algebra). 易证 $\mathcal{F}$ 是一个线性空间.

3.1.4 Lyapunov 函数

研究非线性系统的稳定性, 主要采用 Lyapunov 直接方法, 这是由于求解非线性系统有严重的困难. A. Lyapunov 受力学系统中渐近稳定平衡位置附近总能量一定逐步减少这一物理现象的启发, 引入了一个作为工具的辅助函

数-Lyapunov 函数. 通过它及它对系统全导数的性质就可判断系统的稳定性等, 这一方法的优点在于避开了十分困难的非线性系统求解. 对非线性系统, 由于可由其变分方程等来构造 Lyapunov 函数, 而 Lyapunov 方法又同最优控制、自适应控制和系统设计等领域有密切的关系.

下面考虑一个函数沿系统 (3.1.2) 解的 Dini 导数.

定理 3.1.6 设 V 定义在 $I \times G$ 上, 并且对 $\mathbf{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件. 则其沿系统 (3.1.2) 解的上右导数

$$D^+V(t, \mathbf{x}(t)) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(t+h, \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))) - V(t, \mathbf{x}(t))}{h}.$$

证明 由 Taylor 公式, 并注意到 Lipschitz 条件有

$$\begin{aligned} & V(t+h, \mathbf{x}(t+h)) - V(t, \mathbf{x}(t)) \\ &= V(t+h, \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) + h\boldsymbol{\varepsilon}) - V(t, \mathbf{x}(t)) \\ &\leq V(t+h, \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))) + Lh\|\boldsymbol{\varepsilon}\| - V(t, \mathbf{x}(t)), \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0, h \rightarrow 0$. 故

$$\begin{aligned} D^+V(t, \mathbf{x}(t)) &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(t+h, \mathbf{x}(t+h)) - V(t, \mathbf{x}(t))}{h} \\ &\leq \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(t+h, \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))) + Lh\|\boldsymbol{\varepsilon}\| - V(t, \mathbf{x}(t))}{h} \\ &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(t+h, \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))) - V(t, \mathbf{x}(t))}{h}. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

另一方面有

$$\begin{aligned} & V(t+h, \mathbf{x}(t+h)) - V(t, \mathbf{x}(t)) \\ &= V(t+h, \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) + h\boldsymbol{\varepsilon}) - V(t, \mathbf{x}(t)) \\ &\geq V(t+h, \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))) - Lh\|\boldsymbol{\varepsilon}\| - V(t, \mathbf{x}(t)). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} |D^+V(t, \mathbf{x}(t))| &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(t+h, \mathbf{x}(t+h)) - V(t, \mathbf{x}(t))}{h} \\ &\geq \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(t+h, \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))) - V(t, \mathbf{x}(t))}{h}. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

由式 (3.1.7) 和式 (3.1.8) 得

$$D^+V(t, \mathbf{x}(t)) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(t+h, \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))) - V(t, \mathbf{x}(t))}{h}.$$

证完.

定理 3.1.6 的重要意义在于求 V 沿系统 (3.1.2) 解的上右导数时, 不必知道解本身.

若 V 是一阶可导的, 则对应的 Dini 导数就是通常的导数. 事实上, 此时有 V 沿系统 (3.1.2) 解的导数为

$$\frac{dV(t, \mathbf{x}(t))}{dt} = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \nabla V(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + L_{\mathbf{f}}V(t, \mathbf{x}).$$

定义 3.1.9 若设 V 定义在 $I \times G$ 上, 并满足

(1) V 是分段可微的;

(2) $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$.

则称其是 Lyapunov 函数 (Lyapunov function).

定义 3.1.10 (1) 若 $W(\mathbf{x}) \geq 0, W(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$, 则称其为正定的 (positive);

(2) 若 $W(\mathbf{x}) \leq 0, W(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$, 则称其为负定的 (negative);

(3) 若存在正定函数 W , 使得 $V(t, \mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x})$, 则称 V 是正定的;

(4) 若存在负定函数 W , 使得 $V(t, \mathbf{x}) \leq W(\mathbf{x})$, 则称 V 是负定的;

(5) 若 $V(t, \mathbf{x}) \geq 0, V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, 则称其为半正定的 (semipositive);

(6) 若 $V(t, \mathbf{x}) \leq 0, V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, 则称其为半负定的 (seminegative).

例 3.1.8 若 $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$, 则 $V(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{x} \rangle$ 正定的 (负定的, 半正定的, 半负定的) 充要条件是 $\mathbf{P}$ 是正定的 (负定的, 半正定的, 半负定的), 记 $\mathbf{P} > \mathbf{O} (\mathbf{P} < \mathbf{O}, \mathbf{P} \geq \mathbf{O}, \mathbf{P} \leq \mathbf{O})$.

这样, 对称矩阵的全体构成了一个半序集, 但当 $n > 1$ 时并不能构成一个格.

例 3.1.9 $V(\mathbf{x}) = 13x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_2^4 + x_2^6 - 10x_1x_2 - 4x_1x_2^3$ 是正定的.

事实上, $V(\mathbf{x}) = (-3x_1 + x_2)^2 + (2x_1 - x_2 - x_2^3)^2$.

例 3.1.10 $V(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{1+t^2} \|\mathbf{x}\|^2$ 是半正定的, 但不是正定的.

例 3.1.11 $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2$ 既非正定又非负定的.

下面给出 H. Hahn^①在 1926 年引进的 $\mathcal{K}$ 类函数的概念.

^① Hans Hahn (1879.09.27-1934.07.24), 奥地利人, von Escherich (Gustav Ritter von Escherich, 1849.06.01-1935.01.28, 奥地利人) 的学生, 开拓集论和泛函分析, 奥地利科学院院士.

定义 3.1.11 若 $\alpha(\mu)(\mu \geq 0)$ 满足

(1) $\alpha(\mu) \geq 0, \alpha(\mu) = 0 \iff \mu = 0$;

(2) 若 $\mu_2 > \mu_1 \geq 0$, 则 $\alpha(\mu_2) > \alpha(\mu_1)$.

则称其为 $\mathcal{K}$ 类函数 ($\mathcal{K}$ class function), 记 $\alpha \in \mathcal{K}$.

定义 3.1.12 (1) 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $t \geq 0, \|\mathbf{x}\| < \delta$ 时有 $|V(t, \mathbf{x})| < \varepsilon$, 则称 V 有无穷小上界 (infinitesimally upper bound);

(2) 若存在正定函数 W , 使得 $|V(t, \mathbf{x})| \leq W(\mathbf{x})$, 则称 V 有正定界 (positive bound).

显然, 若 V 有正定界, 则其有无穷小上界; 若 V 有无穷小上界, 则 $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$.

注记 3.1.2 函数正定和有无穷小上界这类概念与 $\mathcal{K}$ 类函数这类概念在利用 Lyapunov 函数研究稳定性方面是一样的, 但对不同的问题有时会有方便和不方便之分. 前者较多见于俄文文献, 而后者较多见于西文文献.

下面来刻画这些概念之间的联系.

定理 3.1.7 (1) V 正定的充要条件是存在 $\alpha \in \mathcal{K}$, 使得 $V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|)$;

(2) V 有正定界的充要条件是存在 $\beta \in \mathcal{K}$, 使得 $|V(t, \mathbf{x})| \leq \beta(\|\mathbf{x}\|)$.

证明 (1) 只需证必要性. 由 V 正定性存在正定函数 W , 使得 $V(t, \mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x})$.

令 $\varphi(\mu) = \inf_{\|\mathbf{x}\|=\mu} W(\mathbf{x})$. 若 $\mu = 0$, 则 $\|\mathbf{x}\| = 0$. 从而 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 所以 $W(\mathbf{0}) = 0$. 易见 $\varphi(0) = 0$. 若 $\mu \neq 0$, 则 $\|\mathbf{x}\| \neq 0$. 从而 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. 所以 $W(\mathbf{x}) \neq 0$. 又 $\|\mathbf{x}\| = \mu$ 是闭的, 所以 $\inf_{\|\mathbf{x}\|=\mu} W(\mathbf{x}) > 0$, 即 $\varphi(\mu) > 0$.

定义 $\alpha(\mu) = \inf_{\|\mathbf{x}\| \geq \mu} W(\mathbf{x})$. 显然, $\alpha(0) = 0$. 当 $\mu \neq 0$ 时有 $\alpha(\mu) \geq \varphi(\mu) > 0$. 而 α 的严格增加性是显然的.

(2) 只需证必要性. 由 V 有正定界, 故存在正定函数 W , 使得 $|V(t, \mathbf{x})| \leq W(\mathbf{x})$.

令 $\beta(\mu) = \sup_{0 \leq \|\mathbf{x}\| \leq \mu} W(\mathbf{x}) + \varepsilon\mu$, $\varepsilon > 0$. 显然 $\beta(0) = 0$, 当 $\mu \neq 0$ 时有 $\beta(\mu) > 0$. 而 $|V(t, \mathbf{x})| \leq \beta(\|\mathbf{x}\|)$, β 的严格增加性也是显然的. 证完.

定义 3.1.13 (1) 对任意的常数 λ , 若 $V(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^m V(\mathbf{x})$, 则称其是 m 次型 (m -th form);

(2) 对任意的 $t \geq 0$, 常数 λ , 若 $V(t, \lambda \mathbf{x}) = \lambda^m V(t, \mathbf{x})$, 则称其是变系数 m 次型 (m -th form with variable coefficient).

定理 3.1.8 若 V 是变系数 m 次型, 则

- (1) 它正定的充要条件是存在 $\alpha > 0$, 使得 $V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha \|\mathbf{x}\|^m$;
- (2) 它有正定界的充要条件是存在 $\beta > 0$, 使得 $|V(t, \mathbf{x})| \leq \beta \|\mathbf{x}\|^m$.

事实上, 令 $\alpha = \inf_{t \geq 0, \|\mathbf{x}\|=1} |V(t, \mathbf{x})|$, $\beta = \sup_{t \geq 0, \|\mathbf{x}\|=1} |V(t, \mathbf{x})|$, 注意到 $V(t, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^m V\left(t, \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right)$ 即可.

定理 3.1.9 设 $V = U + W$, 其中 U 是变系数 m 次型, $W(t, \mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x}\|^m)$ 对 $t \geq 0$ 一致成立, 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $t \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| < \delta$ 时有 $|W(t, \mathbf{x})| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|^m$. 若 U 是正定的, 则存在 $\eta > 0$, 当 $t \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| < \eta$ 时, V 是正定的.

定理 3.1.10 设 $V = U + W$, 其中 U 是变系数 m 次型, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, $\|\mathbf{x}_1\|, \|\mathbf{x}_2\| < \delta$, $t_1, t_2 \geq 0$, 使得 $U(t_1, \mathbf{x}_1)U(t_2, \mathbf{x}_2) < 0$, 而 $W(t, \mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x}\|^m)$ 对 t 一致成立. 则对任意的 $\eta, \varepsilon > 0$, 存在 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$, $\|\mathbf{y}_1\|, \|\mathbf{y}_2\| < \eta$, $t_1, t_2 \geq 0$, 使得 $V(t_1, \mathbf{y}_1)V(t_2, \mathbf{y}_2) < 0$.

推论 3.1.2 设 $\mathbf{P} > \mathbf{O}$. 设 $V(t, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{x} \rangle + W(t, \mathbf{x})$. 若存在 $\eta > 0$, α , $0 < \alpha < \lambda_{\min}(\mathbf{P})$, $\lambda_{\min}(\mathbf{P})$ 表示 $\mathbf{P}$ 的最小特征值, 当 $t \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| < \eta$ 时有 $|W(t, \mathbf{x})| \leq \alpha \|\mathbf{x}\|^2$, 则对任意的 $t \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| < \eta$, V 是正定的.

例 3.1.12 $V(t, \mathbf{x}) = (1+t)\|\mathbf{x}\|^2$ 是正定的, 但没有无穷小上界.

例 3.1.13 设

$$V(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|^2, & \|\mathbf{x}\| \leq 1, \\ \left(1 + t\sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 - 1}\right) \|\mathbf{x}\|^2, & \|\mathbf{x}\| > 1. \end{cases}$$

则 V 是正定的, 并有无穷小上界, 但没有时不变正定界.

例 3.1.14 当 $|x| < \sqrt[3]{2}$ 时, $V(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 - x_1^3 + x_2^5$ 是正定的.

例 3.1.15 $V(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2 + x_1^4 + x_2^4$ 既不是正定又不是负定的.

定义 3.1.14 若对任意的 $M \geq 0$, $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x} \in \partial G$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 对任意的 $n \geq N$ 有 $W(\mathbf{x}_n) > M$, 则称其在 G 上有无穷大下界 (infinitely lower bound).

定义 3.1.15 若 $\varphi \in \mathcal{K}$, 并且 $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \varphi(\mu) = \infty$, 则称其为 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数 ($\mathcal{K}_\infty$ class function), 记 $\varphi \in \mathcal{K}_\infty$.

定理 3.1.11 W 正定的充要条件是存在 $\varphi \in \mathcal{K}_\infty$, 对任意的 $\mathbf{x}$ 有 $W(\mathbf{x}) \geq \varphi(\|\mathbf{x}\|)$.

定义 3.1.16 若存在 $\varphi \in \mathcal{K}_\infty$, 对任意的 $t \geq 0, \mathbf{x}$, 使得 $V(t, \mathbf{x}) \geq \varphi(\|\mathbf{x}\|)$, 则称其为径向无界的 (radially unbounded).

由于 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的 n 个特征值均为实数, 不妨设它们从小到大排列为 $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

例 3.1.16 若 $\mathbf{P} > \mathbf{O}$, 则 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{x} \rangle$ 是径向无界的.

事实上, 由 Rayleigh-Ritz 定理 (定理 1.4.6), 立即有 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{x} \rangle \geq \lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2$.

3.2 稳定性与不稳定性

3.2.1 稳定性与一致稳定性

定理 3.2.1 (Lyapunov 稳定性定理, Lyapunov stability theorem) 若存在 Lyapunov 函数 V , $\alpha \in \mathcal{K}$, 对任意的 $t \geq 0, \|\mathbf{x}\| < \varrho$, 使得

$$(1) V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|);$$

$$(2) \frac{d}{dt} V(t, \mathbf{x}) \leq 0.$$

则系统 (3.1.2) 是稳定的.

证明 由 V 的连续性知, 对任意的 $\tau \geq 0, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $\|\xi\| < \delta$ 有 $V(\tau, \xi) \leq \alpha(\varepsilon)$. 而由 (2), 对任意的 $t \geq \tau, \|\xi\| < \delta$ 有 $V(t, \mathbf{x}) \leq V(\tau, \xi) \leq \alpha(\varepsilon)$, 从而有 $\alpha(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq V(\tau, \xi) \leq \alpha(\varepsilon)$, 即当 $t \geq \tau$ 时有 $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$, 所以系统 (3.1.2) 是稳定的. 证完.

例 3.2.1 试研究 $x'' + p(t)x' + e^{-t}x = 0$ 的稳定性.

解 令 $x = x_1, x' = x_2$, 则有 $\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -e^{-t}x_1 - p(t)x_2. \end{cases}$ 取 Lyapunov 函

数 $V(t, \mathbf{x}) = x_1^2 + e^t x_2^2$. 则有 $x_1^2 + e^t x_2^2 \geq \|\mathbf{x}\|^2$. 又 $\frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) = e^t x_2^2(-2p+1)$, 所以由 Lyapunov 稳定性定理 (定理 3.2.1), 当 $p(t) \geq \frac{1}{2}$ 时, 系统是稳定的. 解毕.

例 3.2.2 刚体绕固定点转动的稳定性: 设刚体重心与固定点 O 重合, 刚体连体坐标系的指向与其惯性主轴一致, 惯性主轴的转动惯量为 α, β, γ , $\boldsymbol{\omega}$ 是其瞬时转动的角速度向量, 它在惯性主轴上的投影分别为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, 则其转动方程为

$$\begin{cases} \alpha\omega_1' = (\beta - \gamma)\omega_2\omega_3, \\ \beta\omega_2' = (\gamma - \alpha)\omega_3\omega_1, \\ \gamma\omega_3' = (\alpha - \beta)\omega_1\omega_2. \end{cases}$$

试研究其绕一固定轴做等速时不变转动 $\omega_1 = \omega_{10}, \omega_2 = \omega_3 = 0$ 的稳定性.

解 令 $\xi_1 = \omega_1 - \omega_{10}, \xi_2 = \omega_2, \xi_3 = \omega_3$, 则有

$$\begin{cases} \xi_1' = \frac{\beta - \gamma}{\alpha} \xi_2 \xi_3, \\ \xi_2' = \frac{\gamma - \alpha}{\beta} (\omega_{10} + \xi_1) \xi_3, \\ \xi_3' = \frac{\alpha - \beta}{\gamma} (\omega_{10} + \xi_1) \xi_2, \end{cases}$$

取 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{\xi}) = \beta(\beta - \alpha)\xi_2^2 + \gamma(\gamma - \alpha)\xi_3^2 + (\beta\xi_2^2 + \gamma\xi_3^2 + \alpha(\xi_1^2 + 2\omega_{10}\xi_1))^2.$$

易验证, 当 $\alpha < \min\{\beta, \gamma\}$ 时, V 是正定的, 并且 $L_{\boldsymbol{\xi}'}V(\boldsymbol{\xi}) = 0$, 所以由 Lyapunov 稳定性定理 (定理 3.2.1) 可知, 原系统对应绕最小转动惯量惯性主轴的转动是稳定的.

若 $\alpha > \min\{\beta, \gamma\}$, 则可取 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{\xi}) = \beta(\alpha - \beta)\xi_2^2 + \gamma(\alpha - \gamma)\xi_3^2 + (\beta\xi_2^2 + \gamma\xi_3^2 + \alpha(\xi_1^2 + 2\omega_{10}\xi_1))^2,$$

同样由 Lyapunov 稳定性定理 (定理 3.2.1) 可证, 原系统对应绕最小转动惯量的惯性主轴的转动是稳定的. 解毕.

例 3.2.3 试研究飞机纵向运动稳定性: 设飞机的对称面与惯性坐标系的铅直面重合, 其质心在 G 点, 质心速度 v 与水平线夹角为 ϑ , 飞机的攻角为 α , 如图 3.3 所示.

解 飞机受下述力的作用:

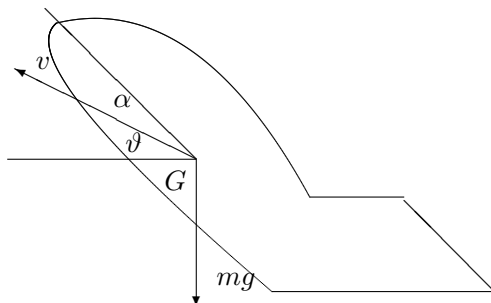


图 3.3 飞机受力示意图

- (1) 重力 mg , 其中 g 为重力加速度;
- (2) 升力 $c_L v^2$, 其中 v 为飞行速度, c_L 为升力系数;
- (3) 阻力 $c_D v^2$, 其中 c_D 为阻力系数.

而其动态方程为

$$\begin{cases} mv' = -mg \sin \vartheta - c_D(\alpha)v^2, \\ mv\vartheta' = -mg \cos \vartheta + c_L(\alpha)v^2. \end{cases}$$

引入新的无量纲变量 $v_0^2 = \frac{mg}{c_L}$, $\tau = \frac{gt}{v_0}$, $\eta = \frac{v}{v_0}$, $\beta = \frac{c_D}{c_L}$, 则有

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{d\tau} = -\sin \vartheta - \beta\eta^2, \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{-\cos \vartheta + \eta^2}{\eta}. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

系统 (3.2.1) 实际上是描述飞机质心的运动方程.

设 $\beta = 0$, 即阻力为零. 于是匀速 $\eta = 1$ 与零姿态角 $\vartheta = 0$ 的飞行是系统的一个时不变运动. 令 $V(\eta, \vartheta) = \frac{\eta^3}{3} - \eta \cos \vartheta + \frac{2}{3}$, 则 $\frac{d}{dt}V(\eta, \vartheta) = 0$.

令 $\eta = 1 + \zeta$, $\cos \vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2} + o(\vartheta^2)$, 则

$$V(1 + \zeta, \vartheta) = \zeta^2 + \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\zeta^3}{3} + \frac{\zeta\vartheta^2}{2} + o(\vartheta^2)$$

是正定的. 于是, 由 Lyapunov 稳定性定理 (定理 3.2.1), 匀速 $\eta = 1$ 与零姿态角 $\vartheta = 0$ 的飞行系统是稳定的. 解毕.

定理 3.2.2 (Persidsky 一致稳定性定理, Persidsky uniform stability theorem) 若存在 Lyapunov 函数 V , $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$, 对任意的 $t \geq 0$, $\|\xi\| < \varrho$, 使得

- (1) $\beta(\|\mathbf{x}\|) \geq V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|)$;

$$(2) \frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) \leq 0.$$

则系统 (3.1.2) 是一致稳定的.

证明 由 (2) 可知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \beta^{-1}(\alpha(\varepsilon))$, 对任意的 $\tau \geq 0$, $\|\xi\| < \delta$, $t \geq \tau$ 有 $V(t, \mathbf{x}) \leq V(\tau, \xi) \leq \beta(\delta) = \alpha(\varepsilon)$. 由 Lyapunov 稳定性定理 (定理 3.2.1) 的证明有 $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$. 所以系统 (3.1.2) 是一致稳定的. 证完.

例 3.2.4 试研究 $\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2, \\ x_2' = x_1 \cos t - x_2. \end{cases}$

解 显然它有零解. 令 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$, 则有

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{x}'}V(\mathbf{x}(t)) &= x(t)(-x(t) + y(t)) + y(t)(x(t) \cos t - y(t)) \\ &= -\|\mathbf{x}(t)\|^2 + 2x(t)y(t) \cos^2 \frac{t}{2} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

所以由 Persidsky 一致稳定性定理 (定理 3.2.2) 可知, 系统是一致稳定的. 解毕.

例 3.2.5 试研究 $x'' + x' + (2 + \sin t)x = 0$.

解 令 $x = x_1$, $x' = x_2$, 则有 $\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_2 - (2 + \sin t)x_1. \end{cases}$

取 Lyapunov 函数 $V(t, \mathbf{x}) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{2 + \sin t}$, 则有

$$L_{\mathbf{x}'}V(t, \mathbf{x}(t)) = -x_2^2(t) \frac{4 + 2 \sin t + \cos t}{(2 + \sin t)^2} \leq 0.$$

所以由 Persidsky 一致稳定性定理 (定理 3.2.2) 可知, 系统是一致稳定的. 解毕.

3.2.2 关于部分变元的稳定性

关于部分变元的稳定性 (partial stability) 是 V. Rumyantsev^①于 1957 年提出的. 事实上, A. Lyapunov 最初的工作就有这样一个注记. 这样的工作是有意义的, 例如, 高阶系统可等价地化为方程组, 从而只对一个变元的稳定性进行研究. 还有些实际问题, 人们只对其中的部分变元有兴趣, 或由于技术上的

^① Vladimir Vital'yevich Rumyantsev (1921.07.19-2007.06.10), 俄罗斯人, 1992 年当选为俄罗斯科学院院士. 俄文: Владимир Витальевич Румянцев.

原因, 对另一部分的变元无法控制和观测. 适当地修改稳定性定义, Lyapunov 函数定义和稳定性定理, 就可得关于部分变元稳定性的结果. 下面只举例性地给出关于部分变元的稳定性概念定义, Lyapunov 函数定义和稳定性定理.

将系统 (3.1.2) 分成两个部分

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_1 = \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}'_2 = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}), \end{cases} \quad (3.2.2)$$

其中 $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$.

定义 3.2.1 (1) 若对任意的 $\varepsilon > 0$, $\tau \geq 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $t \geq \tau$, $\|\xi\| < \delta$, 使得 $\|\mathbf{x}_1(t)\| < \varepsilon$, 则称系统 (3.2.2) 关于 $\mathbf{x}_1$ 是稳定的;

(2) 若存在 $\varepsilon_0 > 0$, $\tau_0 \geq 0$, 对任意的 $\delta > 0$, 存在 $t_0 \geq \tau_0$, ξ_0 满足 $\|\xi_0\| < \delta$, 使得 $\|\mathbf{x}_1(t_0, \tau_0, \xi_0)\| \geq \varepsilon_0$, 则称系统 (3.2.2) 关于 $\mathbf{x}_1$ 是不稳定的;

(3) 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $\tau \geq 0$, $t \geq \tau$, $\|\xi\| < \delta$, 使得 $\|\mathbf{x}_1(t)\| < \varepsilon$, 则称系统 (3.2.2) 关于 $\mathbf{x}_1$ 是一致稳定的;

(4) 若对任意的 $\tau \geq 0$, 存在 $\eta > 0$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, $\|\xi\| < \eta$, 存在 $T \geq 0$, 当 $t \geq \tau + T$ 时有 $\|\mathbf{x}_1(t)\| < \varepsilon$, 则称系统 (3.2.2) 关于 $\mathbf{x}_1$ 是吸引的;

(5) 若存在 $\eta > 0$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T \geq 0$, 对任意的 $\tau \geq 0$, $\|\xi\| < \eta$, 当 $t \geq \tau + T$ 时有 $\|\mathbf{x}_1(t)\| < \varepsilon$, 则称系统 (3.2.2) 关于 $\mathbf{x}_1$ 是一致吸引的;

(6) 若系统 (3.2.2) 关于 $\mathbf{x}_1$ 是稳定和吸引的, 则称其关于 $\mathbf{x}_1$ 是渐近稳定的;

(7) 若系统 (3.2.2) 关于 $\mathbf{x}_1$ 是一致稳定和一致吸引的, 则称其关于 $\mathbf{x}_1$ 是一致渐近稳定的.

定义 3.2.2 (1) 若存在正定函数 W , 使得 $V(t, \mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x}_1)$, 则称 V 关于 $\mathbf{x}_1$ 是正定的;

(2) 若存在负定函数 W , 使得 $V(t, \mathbf{x}) \leq W(\mathbf{x}_1)$, 则称 V 关于 $\mathbf{x}_1$ 是负定的.

定理 3.2.3 (1) V 关于 $\mathbf{x}_1$ 正定的充要条件是存在 $\alpha \in \mathcal{K}$, 使得 $V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}_1\|)$;

(2) V 关于 $\mathbf{x}_1$ 有正定界的充要条件是存在 $\beta \in \mathcal{K}$, 使得 $|V(t, \mathbf{x})| \leq \beta(\|\mathbf{x}_1\|)$.

定理 3.2.4 若存在 Lyapunov 函数 V , $\alpha \in \mathcal{K}$, 对任意的 $t \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| < \varrho$, 使得

(1) $V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}_1\|)$;

电子工业出版社版权所有
盗版必究

$$(2) \frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) \leq 0.$$

则系统 (3.2.2) 关于 $\mathbf{x}_1$ 是稳定的.

证明 由 V 的连续性知, 对任意的 $\tau \geq 0, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $\|\xi\| < \delta$ 有 $V(\tau, \xi) \leq \alpha(\varepsilon)$. 而由 (2), 对任意的 $t \geq \tau, \|\xi\| < \delta$ 有 $V(t, \mathbf{x}) \leq V(\tau, \xi) \leq \alpha(\varepsilon)$. 从而有 $\alpha(\|\mathbf{x}_1\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq V(\tau, \xi) \leq \alpha(\varepsilon)$, 即当 $t \geq \tau$ 时有 $\|\mathbf{x}_1(t)\| < \varepsilon$. 所以系统 (3.2.2) 关于 $\mathbf{x}_1$ 是稳定的. 证完.

定理 3.2.5 若存在 Lyapunov 函数 $V, \alpha, \beta \in \mathcal{K}$, 对任意的 $t \geq 0, \|\xi\| < \rho$, 使得

$$(1) \beta(\|\mathbf{x}\|) \geq V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}_1\|);$$

$$(2) \frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) \leq 0.$$

则系统 (3.2.2) 关于 $\mathbf{x}_1$ 是一致稳定的.

证明 由 (2), 对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \beta^{-1}(\alpha(\varepsilon))$, 对任意的 $\tau \geq 0, \|\xi\| < \delta, t \geq \tau$ 有 $V(t, \mathbf{x}) \leq V(\tau, \xi) \leq \beta(\delta) = \alpha(\varepsilon)$. 由定理 3.2.4 的证明有 $\|\mathbf{x}_1(t, \tau, \xi)\| < \varepsilon$, 所以系统 (3.2.2) 关于 $\mathbf{x}_1$ 是一致稳定的. 证完.

例 3.2.6 设电感、电阻和电容分别为 $L_1, L_{23}, R_1, C_{12}, C_3$, 对应回路中电流和电荷分别为 i_s, q_s , 满足 $i_s = q'_s$, 试研究如图 3.4 所示的电路.

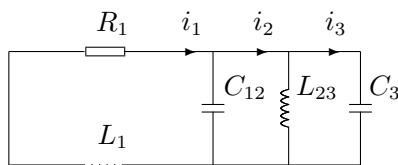


图 3.4 LRC 电路图

解 类似于动力学的分析方法, 该回路系统的动能、势能和耗散函数分别为

$$T = \frac{1}{2} (L_1 q_1'^2 + L_{23} (q_2' - q_3')^2), \quad U = \frac{1}{2} \left(\frac{q_3^2}{C_3} + \frac{(q_1 - q_2)^2}{C_{12}} \right), \quad R = R_1 q_1'^2.$$

利用 Lagrange 第二类方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_s'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial q_s} + \frac{\partial R}{\partial q_s'} = 0$ 得回路系

统的运动方程

$$\begin{cases} L_1 q_1'' + R_1 q_1' - \frac{1}{C_{12}} (q_2 - q_1) = 0, \\ L_{23} (q_2'' - q_3'') + \frac{1}{C_{12}} (q_2 - q_1) = 0, \\ L_{23} (q_3'' - q_2'') + \frac{q_3^2}{C_3} = 0. \end{cases}$$

这是一个 6 阶线性系统, 以总能量作为 Lyapunov 函数, 即

$$V = T + U = \frac{1}{2} (L_1 q_1'^2 + L_{23} (q_2' - q_3')^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{q_3^2}{C_3} + \frac{(q_1 - q_2)^2}{C_{12}} \right),$$

则有

$$\begin{aligned} V' &= L_1 q_1' q_1'' + L_{23} (q_2' - q_3') (q_2'' - q_3'') + \frac{1}{C_3} q_3 q_3' + \frac{1}{C_{12}} (q_1 - q_2) (q_1' - q_2') \\ &= -R_1 q_1' + \frac{1}{C_3} q_2' q_3 - \frac{1}{C_{12}} (q_1 - q_2) q_2'. \end{aligned}$$

通过运动方程的后两个方程知 $C_3 (q_1 - q_2) = C_{12} q_3$, 于是, $V' = -R_1 q_1' \leq 0$. 由于 Lyapunov 函数 V 可视为 $q_1 - q_2, q_3, q_1'$ 的正定函数, 故回路系统对这些量作为输出时有部分变元稳定性. 解毕.

3.2.3 不稳定性

系统本身不稳定的情况是大量存在的, 例如, 要在小初始扰动下产生一个稳定的自激振动 (钟表), 它就是不稳定的. 再有, 自行车本身也是不稳定的, 但经人的反馈控制后, 它就有很好的动态稳定性, 并且有很好的操纵性. 还有, 近代飞机已经要求设计空气不稳定的构件以确保提高操纵性. 所以研究一个系统的不稳定性是非常有意义的.

关于不稳定性, 给出 N. Chetaev^①的不稳定性定理.

定理 3.2.6 (Chetaev 不稳定性定理, Chetaev instability theorem) 若存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon \subseteq G$, 其中 $B_\varepsilon = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| < \varepsilon\}$, 存在开集 $P \subseteq B_\varepsilon$, 使得 $\mathbf{0} \in \partial P$, 存在 $\alpha \in \mathcal{K}$, Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x} \in B_\varepsilon)$, 使得

- (1) 存在 $k \geq 0$, 当 $\mathbf{x} \in P$ 时有 $0 < V(t, \mathbf{x}) \leq k$;
- (2) $\frac{d}{dt} V \geq \alpha(V)$;
- (3) 当 $\mathbf{x} \in \partial P \cap B_\varepsilon$ 时有 $V(t, \mathbf{x}) = 0$.

则系统 (3.1.2) 是不稳定的.

^① Nikolai Gur'yevich Chetaev (1902.11.23-1959.10.17), 俄罗斯人, Dmitri Nikolayevich Seiliger 的学生, 1960 年获列宁奖. 俄文: Николай Гуревич Четаев.

证明 由 $\mathbf{0} \in \partial P$, 对任意的 $\delta > 0$, 存在 $\tau \geq 0$, $\xi \in P \cap B_\delta$, 使得 $V(\tau, \xi) > 0$.

设当 $t \geq \tau$ 时有 $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$. 再由 $\xi \in P$, (2) 和 (3), 当 $t \geq \tau$ 时有 $\mathbf{x}(t) \in P$. 从而当 $t \geq \tau$ 时, 注意到 $V(t, \mathbf{x}(t)) \geq V(\tau, \xi)$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时有

$$k \geq V(t, \mathbf{x}(t)) = V(\tau, \xi) + \int_{\tau}^t \frac{d}{ds} V(s, \mathbf{x}(s)) ds \geq V(\tau, \xi) + \alpha(V(\tau, \xi))(t - \tau) \rightarrow \infty.$$

这表明 $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ 不成立. 所以系统 (3.1.2) 是不稳定的. 证完.

例 3.2.7 试继续研究例 3.2.2, 但转动轴将是转动惯量居中的主轴, 此时转动仍然是 $\omega_1 = \omega_{10}$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$, 而转动惯量改设为 $\gamma > \alpha > \beta$.

解 取 Lyapunov 函数 $V(\xi) = \xi_2 \xi_3$, 则有

$$L_{\xi} V(\xi) = (\omega_{10} + \xi_1) \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta} \xi_3^2 + \frac{\alpha - \beta}{\gamma} \xi_2^2 \right).$$

取 $P = \{\xi \mid \xi_2, \xi_3 > 0, \|\xi\| < \varepsilon\}$, 则易证

- (1) 存在 $k > 0$, 使得对任意的 $\xi \in P$ 有 $0 < V(\xi) \leq k$;
- (2) 存在 $\mu > 0$, $\xi \in B_\varepsilon$, 使得 $L_{\xi} V \geq \mu V(\xi)$;
- (3) 当 $\mathbf{0} \in P$, $\xi \in \partial P \cap B_\varepsilon$ 时有 $V(t, \xi) = 0$.

从而由 Chetaev 不稳定性定理 (定理 3.2.6) 可知, 绕转动惯量居中主轴的匀速转动是不稳定的. 解毕.

推论 3.2.1 (Lyapunov 第一不稳定性定理, Lyapunov first instability theorem) 若存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon \subseteq G$, 存在开集 $P \subseteq B_\varepsilon$, 使得 $\mathbf{0} \in \partial P$, 存在 $\alpha \in \mathcal{K}$, Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x} \in B_\varepsilon)$, 使得

- (1) 存在 $\beta \in \mathcal{K}$, 当 $\mathbf{x} \in P$ 时有 $0 < V(t, \mathbf{x}) \leq \beta(\|\mathbf{x}\|)$;
- (2) $\frac{d}{dt} V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|)$;
- (3) 当 $\mathbf{x} \in \partial P \cap B_\varepsilon$ 时有 $V(t, \mathbf{x}) = 0$.

则系统 (3.1.2) 是不稳定的.

例 3.2.8 试研究
$$\begin{cases} x_1' = tx_1 + e^t x_2 + x_1^2 x_2, \\ x_2' = \frac{t+2}{t+1} x_1 - tx_2 + x_1 x_2^2. \end{cases}$$

解 取 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x}) = x_1 x_2$, 则有

$$L_{\mathbf{x}'} V(\mathbf{x}(t)) = \frac{t+2}{t+1} x_1^2(t) + e^t x_2^2(t) + 2x_1^2(t)x_2^2(t) > \|\mathbf{x}(t)\|^2 + 2x_1^2(t)x_2^2(t),$$

这是正定函数. 取 $\varepsilon = 1$, $P = \{\mathbf{x} \mid x_1 x_2 > 0, \|\mathbf{x}\|^2 < 1\}$, 则由 Lyapunov 第一不稳定性定理 (推论 3.2.1) 可知, 系统是不稳定的. 解毕.

例 3.2.9 试研究 $\begin{cases} x_1' = x_2^3 + x_1^5, \\ x_2' = x_1^3 + x_2^5. \end{cases}$

解 取 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x}) = x_1^4 - x_2^4$, 则有

$$L_{\mathbf{x}'} V(\mathbf{x}) = 4(x_1^8 - x_2^8) = 4(x_1^4 + x_2^4)V(\mathbf{x}).$$

取 $\varepsilon = 1$, $P = \{\mathbf{x} \mid x_1^2 - x_2^2 > 0, \|\mathbf{x}\|^2 < 1\}$, 则由 Lyapunov 第一不稳定性定理 (推论 3.2.1) 可知, 系统是不稳定的. 解毕.

推论 3.2.2 (Lyapunov 第二不稳定性定理, Lyapunov second instability theorem) 若存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon \subseteq G$, 存在开集 $P \subseteq B_\varepsilon$, 使得 $0 \in \partial P$, 存在 $\alpha \in \mathcal{K}$, Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x} \in B_\varepsilon)$, 使得

(1) 存在 $\beta \in \mathcal{K}$, 当 $\mathbf{x} \in P$ 时有 $0 < V(t, \mathbf{x}) \leq \beta(\|\mathbf{x}\|)$;

(2) 存在 $c \geq 0$, 连续函数 W , 当 $\mathbf{x} \in P$ 时有 $W(t, \mathbf{x}) \geq 0$, 使得 $\frac{d}{dt}V = cV + W$;

(3) 当 $\mathbf{x} \in \partial P \cap B_\varepsilon$ 时有 $V(t, \mathbf{x}) = 0$.

则系统 (3.1.2) 是不稳定的.

不稳定性定理的本质在于给出一个条件, 使得能够确定在平衡位置的任意邻域内一种偏离平衡位置的解总是存在的. 上述定理及推论中的 P 就是为了保证这样的情况发生区域. 另外, 偏离平衡位置解的集维数对不稳定性来讲是无关紧要的, 故 P 的维数还可低一些.

例 3.2.10 试研究 $[\mathbf{A}]$ 的不稳定性, 其中 $\mathbf{A} = \text{diag}(-1, 1)$.

解 这是鞍点的情形. 取 $P = \{k\mathbf{e}_2 \mid k \geq 0\}$, 这是一个一维的情况. 若取 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$, 则 $L_{[\mathbf{A}]}V(\mathbf{x}) = -x_1^2 + x_2^2$. 由于在 P 上, $x_1 = 0$, 于是在 P 上有 $L_{[\mathbf{A}]}V(\mathbf{x}) = 2V(\mathbf{x})$, 并且 $\mathbf{0} \in \partial P$, 从而满足了 Chetaev 不稳定性定理 (定理 3.2.6) 的条件. 解毕.

3.3 渐近稳定性

3.3.1 一致渐近稳定性

定理 3.3.1 (Lyapunov 一致渐近稳定性定理, Lyapunov uniform asymptotic stability theorem) 若存在 Lyapunov 函数 V , $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{K}$, 使得

$$(1) \beta(\|\mathbf{x}\|) \geq V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|);$$

$$(2) \frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) \leq -\gamma(\|\mathbf{x}\|).$$

则系统 (3.1.2) 是一致渐近稳定的.

证明 由 Persidsky 一致稳定性定理 (定理 3.2.2) 知系统 (3.1.2) 是一致稳定的, 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 对任意的 $\tau \geq 0$, $\|\xi\| < \eta$, 当 $t \geq \tau$ 时有 $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$.

往证系统 (3.1.2) 是一致吸引的. 设对任意的 $\nu > 0$, 使得 $B_\nu \subseteq G$. 定义

$$A_{t,\nu} = \{\mathbf{x} \mid V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha(\nu), \mathbf{x} \in G\}.$$

则由 (2) 及 $B_\nu \subseteq G$, 对任意的 $\tau \geq 0$, $\xi \in A_{\tau,\nu}$ 有 $V(t, \mathbf{x}) \leq V(\tau, \xi) \leq \alpha(\nu)$. 于是由 (1) 有 $\|\mathbf{x}(t)\| < \nu$. 定义 $T_{\nu,\varepsilon} = \frac{\beta(\nu) - \alpha(\eta)}{\gamma(\eta)}$.

任取 $\sigma > T_{\nu,\varepsilon}$. 设对任意的 τ' 有 $\|\mathbf{x}(\tau')\| \geq \eta$. 因为 $\|\mathbf{x}(t)\| < \nu$, 所以有 $V(\tau, \xi) \leq \beta(\|\xi\|) < \beta(\nu)$. 又因为 $\|\mathbf{x}(\tau', \tau, \xi)\| \geq \eta$, 所以有 $V(\tau + \sigma, \mathbf{x}(\tau + \sigma)) \geq \alpha(\|\mathbf{x}(\tau + \sigma)\|) > \alpha(\eta)$. 则有

$$\begin{aligned} \beta(\nu) - \alpha(\eta) &> V(\tau, \xi) - V(\tau + \sigma, \mathbf{x}(\tau + \sigma)) \\ &= \int_{\tau}^{\tau + \sigma} -\frac{d}{d\tau'} V(\tau', \mathbf{x}(\tau')) d\tau' \\ &\geq \int_{\tau}^{\tau + \sigma} \gamma(\eta) d\tau' \\ &= \sigma \gamma(\eta) \\ &> \beta(\nu) - \alpha(\eta). \end{aligned}$$

矛盾. 所以 $\|\mathbf{x}(\tau')\| \geq \eta$ 不成立, 即存在 $\tau \leq \tau'' \leq \tau + \sigma$, 使得 $\|\mathbf{x}(\tau'')\| < \eta$, 故存在 $T = T_{\nu,\varepsilon}$, 对任意的 $\tau \geq 0$, $\xi \in A_{\tau,\nu}$, $t \geq \tau + T$ 有 $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$.

取 $\mu > 0$, 使得 $\beta(\mu) = \alpha(\nu)$. 则当 $\|\mathbf{x}\| < \mu$ 时有 $V(t, \mathbf{x}) \leq \beta(\mu) = \alpha(\nu)$. 于是, 对任意的 $\tau \geq 0$ 有 $B_\mu \subseteq A_{\tau,\nu}$. 从而 $B_\mu \subseteq A_\nu = \bigcap_{\tau \geq 0} A_{\tau,\nu}$. 所以由上面所述可知, 存在 $\mu > 0$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T \geq 0$, 对任意的 $\tau \geq 0$, $\xi \in B_\mu$, $t \geq \tau + T$ 有 $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$, 即系统 (3.1.2) 是一致吸引的. 证完.

1892 年, A. Lyapunov 的博士论文在定理的相同条件下只证了系统的渐近稳定性, 1933 年, K. Persidsky 给出了现在的结论. 他还给出了等度渐近稳定性定理.

Lyapunov 一致渐近稳定性定理 (定理 3.3.1)(2) 可修改为 $\frac{d}{dt}V \leq -\gamma(V)$. 这样, 又有下面的定理.

定理 3.3.2 若存在 Lyapunov 函数 $V, \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{K}$, 使得

$$(1) \beta(\|\mathbf{x}\|) \geq V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|);$$

$$(2) \frac{d}{dt}V \leq -\gamma(V).$$

则系统 (3.1.2) 是一致渐近稳定的.

Lyapunov 一致渐近稳定性定理 (定理 3.3.1)(1) 意味着 V 是正定并有无穷小上界. 若去掉 V 有无穷小上界的条件, 定理结论则不成立, 甚至连渐近稳定的结论也得不到.

1949 年, J. Massera 给出了一个反例.

例 3.3.1 (Massera 反例, Massera's counterexample) 构造可微函数 g , 满足

$$(1) g(i) = 1, i \in \mathbb{Z}^+;$$

$$(2) g^2(t) = e^{-t}, t \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \text{ 其中 } I_i = \left[i - \left(\frac{1}{2}\right)^i, i + \left(\frac{1}{2}\right)^i \right];$$

$$(3) 1 \geq g^2(t) \geq e^{-t}, t \in \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i.$$

J. Massera 的反例如图 3.5 所示.

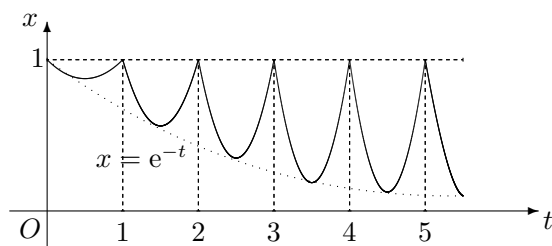


图 3.5 J. Massera 的反例

考虑方程 $x' = \frac{g'}{g}x$. 容易求出其通解为 $x(t) = \frac{g(t)}{g(\tau)}\xi$. 由此, 系统是稳定但不是渐近稳定的. 取 $V(t, x) = \frac{x^2}{g^2(t)} \left(3 - \int_0^t g^2(s)ds \right)$. 因为

$$\int_0^{\infty} g^2(s) ds < \int_0^{\infty} e^{-s} ds + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2,$$

所以 $V(t, x) \geq x^2$, 即为正定的. 但显然其没有无穷小上界, 而 $V'(t, x(t)) = -x^2(t)$.

事实上, J. Massera 的反例 (例 3.3.1) 原始是给出 g 的具体表达式的. 令

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^4(t-n)^2}.$$

则此级数及其逐项求导数所成的级数均在任何有限区间上是一致收敛的, 故 g 是可微的, 并且有

- (1) $g(n) > 1$;
- (2) $g(t) < 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = c, t \geq 0$.

余下的工作省略了.

定理 3.3.3 设 G 是开区域并且 $0 \in G$. 若存在 Lyapunov 函数 V , 正定函数 $W_1, W_2, \gamma \in \mathcal{K}$, 使得

- (1) $W_2(\mathbf{x}) \geq V(t, \mathbf{x}) \geq W_1(\mathbf{x})$;
- (2) $\frac{d}{dt} V(t, \mathbf{x}) \leq -\gamma(\|\mathbf{x}\|)$;
- (3) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \partial G} W_2(\mathbf{x}) = \infty$,

则系统 (3.1.2) 是一致渐近稳定的并且 G 为吸引区域.

证明 只需证 G 为吸引区域. 因为 $W_1(\boldsymbol{\xi})$ 是有限的, 所以存在 $k \geq 0$, 使得 $\{\mathbf{x} \mid W_1(\mathbf{x}) \leq k\} = G_{1k} \subseteq G$ 是含 $\boldsymbol{\xi}$ 的闭区域.

对任意的 $\varepsilon > 0$, 令 $\eta = \min\{W_2(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in G_{1k} \setminus B_\varepsilon\}$, 则对任意的 $\mathbf{x}$, $W_1(\mathbf{x}) \leq \eta$ 有 $\|\mathbf{x}\| < \varepsilon$.

令 $T = \frac{k-\eta}{\gamma}$, 其中 $\gamma = \inf_{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^+ \times G_{1k} \setminus B_\varepsilon} \left\{ -\frac{d}{dt} V(t, \mathbf{x}) \right\}$. 显然 $\gamma \geq 0$. 则当 $t \geq \tau + T$ 时有 $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$.

事实上, 由 (2), 只需证存在 $t_1 \in [\tau, \tau + T]$, 使得 $\|\mathbf{x}(t_1)\| < \varepsilon$. 若不然, 则对任意的 $t \in [\tau, \tau + T]$ 有 $\|\mathbf{x}(t)\| \geq \varepsilon$. 由 η 的定义有 $W_2(\mathbf{x}) \geq \eta$, 故

$$\begin{aligned} k - \eta &\geq W_1(\boldsymbol{\xi}) - W_2(\mathbf{x}(\tau + T)) \\ &> V(\tau, \boldsymbol{\xi}) - V(\tau + T, \mathbf{x}(\tau + T)) \\ &= - \int_{\tau}^{\tau+T} \frac{d}{dt} V(t, \mathbf{x}(t)) dt \\ &\geq \gamma T, \end{aligned}$$

电子工业出版社版权所有
盗版必究

这与 $T = \frac{k-\eta}{\gamma}$ 矛盾, 即 G 为吸引区域. 证完.

例 3.3.2 试研究有阻尼的单摆系统 $\varphi'' + \varphi' + \sin \varphi = 0$ 的一致渐近稳定性, 其中 φ 是摆相对于垂直轴的偏角.

解 令 $\varphi = \varphi_1, \varphi' = \varphi_2$ 得 $\begin{cases} \varphi_1' = \varphi_2, \\ \varphi_2' = -\varphi_2 - \sin \varphi_1. \end{cases}$

构造 Lyapunov 函数 $V(\varphi) = \varphi_2^2 + (\varphi_2 + \varphi_1)^2 + 4(1 - \cos \varphi_1)$, 则有

$$L_{\varphi} V(\varphi(t)) = -2(\varphi_2^2(t) + \varphi_1(t) \sin \varphi_1(t))$$

是负定的. 所以系统是一致渐近稳定的. 解毕.

在例 3.3.2 中, 若只取总能量 $V(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi_2^2 + 1 - \cos \varphi_1$ 作为 Lyapunov 函数, 则得 $L_{\varphi} V(\varphi) = -\varphi_2^2$, 不是负定的, 从而得不到一致渐近稳定性的结论.

例 3.3.3 试研究 $\begin{cases} x_1' = -(1 + \sin^2 t)x_1 + (1 - \sin t \cos t)x_2, \\ x_2' = -(1 - \sin t \cos t)x_1 + (1 + \cos^2 t)x_2. \end{cases}$

解 取 $V(x) = \|x\|^2$, 则 $L_f V(x(t)) = -2\|x(t)\|^2 - 2(x_1(t) \sin t + x_2(t) \cos t)^2$ 是负定的. 所以系统是一致渐近稳定的. 解毕.

为了研究周期系统的 (一致) 渐近稳定性, 给出下面的定义.

定义 3.3.1 若对任意的 $\delta > 0$, 存在 $t \geq \tau$, 使得 $\|x(t)\| < \delta$, 则称系统 (3.1.2) 是弱吸引的 (weakly attractive).

引理 3.3.1 若存在 $\alpha, \gamma \in \mathcal{K}$, 可微函数 $V, V(t, 0) = 0$, 使得

$$(1) V(t, x) \geq \alpha(\|x\|);$$

$$(2) \frac{d}{dt} V(t, x) \leq -\gamma(\|x\|).$$

则系统 (3.1.2) 是弱吸引的.

引理 3.3.2 若系统 (3.1.2) 是一致稳定和弱吸引的, 则是吸引的.

对周期系统有 N. Krasovsky 于 1959 年给出的一致渐近稳定性定理.

定理 3.3.4 (Krasovsky 一致渐近稳定性定理, Krasovsky uniform asymptotic stability theorem) 若存在 $\alpha \in \mathcal{K}$, Lyapunov 函数 $V(t, x), V(t + \omega, x) = V(t, x)$, 使得

$$(1) V(t, x) \geq \alpha(\|x\|);$$

电子工业出版社版权所有
盗版必究

$$(2) \frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}(t)) \leq 0;$$

(3) 在 $M \setminus \{(t, \mathbf{0})\}$ 中不存在任何系统的正半轨线, 其中

$$M = \left\{ (t, \mathbf{x}) \mid \frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) = 0 \right\}.$$

则 $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{f}(t + \omega, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 是渐近稳定的 (由定理 3.1.4 可知是一致渐近稳定的).

若 (1) 改为 (1)' 存在 $\tau \geq 0$, 对任意的 $\delta > 0$, 存在 $\|\xi\| < \delta$, 有 $V(\tau, \xi) < 0$; 则周期系统是不稳定的.

证明 由 Lyapunov 稳定性定理 (定理 3.2.1) 可知, 系统是稳定的, 由定理 3.1.4 可知, 系统是一致稳定的, 而由引理 3.3.2, 故只需证系统是弱吸引的.

若不然, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $t \geq \tau$ 有 $\|\mathbf{x}(t)\| \geq \delta$. 由 (1) 和 (2), 取 $\xi \in A_{\tau, \nu}$, 则当 $t \geq \tau$ 时有 $\alpha(\|\mathbf{x}(t, \tau, \xi)\|) \leq V(t, \mathbf{x}(t, \tau, \xi)) \leq V(\tau, \xi) \leq \alpha(\nu)$. 从而有 $\|\mathbf{x}(t, \tau, \xi)\| \leq \nu$. 故有 $\delta \leq \|\mathbf{x}(t, \tau, \xi)\| \leq \nu$. 因此由 Bolzano-Weierstraß 定理 (定理 1.2.13) 可知, $\{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(\tau + k\omega, \tau, \xi)\}$ 有收敛子序列. 简单起见, 记 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^*$.

由 (2), 注意到 $V(t, \mathbf{x})$ 的连续性和周期性有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, \mathbf{x}(t, \tau, \xi)) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(\tau + k\omega, \mathbf{x}(\tau + k\omega, \tau, \xi)) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(\tau, \mathbf{x}_k) = V(\tau, \mathbf{x}^*). \quad (3.3.1)$$

由 (3), 存在 $t^* > \tau$, 使得 $L_{\mathbf{f}}V(t^*, \mathbf{x}(t^*, \tau, \mathbf{x}^*)) < 0$, 从而

$$V(t^*, \mathbf{x}(t^*, \tau, \mathbf{x}^*)) \neq V(\tau, \mathbf{x}^*). \quad (3.3.2)$$

由 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 的周期性和解的存在惟一性有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t^*, \tau, \mathbf{x}_k) &= \mathbf{x}(t^* + k\omega, \tau + k\omega, \mathbf{x}_k) \\ &= \mathbf{x}(t^* + k\omega, \tau + k\omega, \mathbf{x}(\tau + k\omega, \tau, \xi)) \\ &= \mathbf{x}(t^* + k\omega, \tau, \xi). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

由式 (3.3.1) ~ 式 (3.3.3), 并注意到 $V(t, \mathbf{x})$ 的周期性有

$$\begin{aligned} V(\tau, \mathbf{x}^*) &= \lim_{k \rightarrow \infty} V(t^* + k\omega, \mathbf{x}(t^* + k\omega, \tau, \xi)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} V(t^*, \mathbf{x}(t^*, \tau, \xi)) \\ &= V(t^*, \mathbf{x}(t^*, \tau, \mathbf{x}^*)) \\ &\neq V(\tau, \mathbf{x}^*). \end{aligned}$$

矛盾. 所以系统是一致渐近稳定的.

至于后一个结论,可类似地使用反证法.证完.

Krasovsky 一致渐近稳定性定理 (定理 3.3.4) 对一般系统是无效的.例如,考虑 $x' = -p(t)x$, 其中, $p(t) > 0$, $\int_0^{\infty} p(t)dt < \infty$. 可验证 $V(x) = x^2$ 满足定理的 (1)~(3), 然而这个系统却不是渐近稳定的.

例 3.3.4 试研究在含有陀螺摆和单轨行驶火车的系统出现的三阶系统

$$\xi''' + \alpha\xi'' + \varphi(\xi') + \psi(\xi) = 0, \quad \alpha > 0,$$

其中, $\varphi(\xi'), \psi(\xi)$ 是可微的, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

解 做变换 $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \xi'$, $\xi_3 = \xi_2' + \alpha\xi_2$, 则系统变为

$$\begin{cases} \xi_1' = \xi_2, \\ \xi_2' = \xi_3 - \alpha\xi_2, \\ \xi_3' = -\varphi(\xi_2) - \psi(\xi_1), \end{cases}$$

它有零解. 取 Lyapunov 函数 $V(\xi) = \alpha\Psi(\xi_1) + \psi(\xi_1)\xi_2 + \Phi(\xi_2) + \frac{1}{2}\xi_3^2$, 其中,

$$\Phi(\xi_2) = \int_0^{\xi_2} \varphi(\tau)d\tau, \quad \Psi(\xi_1) = \int_0^{\xi_1} \psi(\sigma)d\sigma,$$

则 $L_{\xi'}V(\xi(t)) = \xi_2(t)(\psi'(\xi_1(t))\xi_2(t) - \alpha\varphi(\xi_2(t)))$.

令 $W(\xi_1, \xi_2) = \alpha\Psi(\xi_1) + \psi(\xi_1)\xi_2 + \Phi(\xi_2)$. 则 W, V 在正定性上是等价的. 设

- (1) $\xi_1\psi(\xi_1) > 0, \xi_1 \neq 0$;
- (2) $(\alpha\varphi(\xi_2) - \psi'(\xi_1)\xi_2)\xi_2 > 0, \xi_2 \neq 0$;
- (3) $\lim_{\xi_1^2 + \xi_2^2 \rightarrow \infty} W(\xi_1, \xi_2) = \infty$.

则有

- (a) $\Psi(\xi_1) > 0, \xi_1 \neq 0$;
- (b) $L_{\xi'}V(\xi) \leq 0, M = \{\xi \mid L_{\xi'}V(\xi) = 0\} = \{\xi \mid \xi_2 = 0\}$;
- (c) $V(\xi)$ 有无限大下界.

由 (1), 在 $\xi_1 = 0$ 附近有 $\psi'(\xi_1) \geq 0$.

由 (2), $\varphi(\xi_2)\xi_2 > 0, \xi_2 \neq 0$, 且 $H(\xi_1, \xi_2) = \int_0^{\xi_2} (\alpha\varphi(\tau) - \psi'(\xi_1)\tau) d\tau > 0$.

于是 $\int_0^{\xi_1} \psi(\sigma)H(\sigma, \xi_2) d\sigma = \alpha\Psi(\xi_1)\Phi(\xi_2) - \frac{\xi_2^2}{4}\psi^2(\xi_1)$ 为 ξ_1, ξ_2 的正定函数. 注

意到 $\Phi(\eta) > 0$, 则 $W(\xi_1, \xi_2) = \frac{4\alpha\Psi(\xi_1)\Phi(\xi_2) - \xi_2^2\psi^2(\xi_1) + (2\Phi(\xi_2) + \xi_2\psi(\xi_1))^2}{4\Phi(\xi_2)}$

为 ξ_1, ξ_2 的正定函数. 所以 V 为 ξ 的正定函数.

因为 $M = \{\xi \mid \xi_2 = 0\}$, 若 $\xi' = 0, \xi_2 = 0$, 则 $\xi = 0$. 于是 $M \setminus \{0\}$ 中不含方程的任何正半轨线. 于是由 Krasovsky 一致渐近稳定性定理 (定理 3.3.4) 可知, 系统在假设 (1)~(3) 下是一致渐近稳定的. 解毕.

例 3.3.5 试研究受阻尼弹性系统 $x'' + Cx' + Kx = 0$ 的一致渐近稳定性, 其中 $C, K > O$.

解 取 Lyapunov 函数 $V(x) = \langle x, Kx \rangle + \|x'\|^2$ 有 $L_f V(x) = -2\langle x', Cx' \rangle$.

因为 $M = \{(x, x') \mid x' = 0\}$, 若 $x' = 0$, 则 $x = c$ 是常向量, 从而 $x'' = 0$. 由系统有 $Kx = 0$, 而 $K > O$, 所以 $x = 0$. 于是 $M \setminus \{0\}$ 中不含系统的任何正半轨线. 于是由 Krasovsky 一致渐近稳定性定理 (定理 3.3.4), 系统在假设 (1)~(3) 下是一致渐近稳定的. 解毕.

在这一节的最后, 给出关于部分变元的一致渐近稳定性定理.

定理 3.3.5 若存在 Lyapunov 函数 $V, \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{K}$, 使得

$$(1) \beta(\|x\|) \geq V(t, x) \geq \alpha(\|x_1\|);$$

$$(2) \frac{d}{dt}V(t, x) \leq -\gamma(\|x\|).$$

则系统 (3.2.2) 关于 x_1 是一致渐近稳定的.

证明 由 (1) 和定理 3.2.5 可知, 系统 (3.2.2) 关于 x_1 是一致稳定的, 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 对任意的 $\tau \geq 0, t \geq \tau, \|x_1\| < \eta$, 使得 $\|x_1(t)\| < \varepsilon$.

取 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 令 $T(\varepsilon) = \frac{\beta(\delta(\varepsilon))}{\gamma(\eta(\varepsilon))}$, $\|x_1\| < \delta(\varepsilon)$. 若 $\|x(t)\| \geq \eta(\varepsilon)$, 在区间 $(\tau, \tau + T(\varepsilon))$ 上对 (2) 积分得

$$0 \leq V(\tau + T(\varepsilon), x(\tau + T(\varepsilon))) \leq V(\tau) - \gamma(\eta(\varepsilon))T(\varepsilon) < \beta(\delta(\varepsilon)) - \gamma(\eta(\varepsilon))T(\varepsilon) = 0,$$

这是一个矛盾, 故存在 $t' \in (\tau, \tau + T(\varepsilon))$, 使得 $\|x(t')\| < \eta(\varepsilon)$. 所以当 $t > \tau + T(\varepsilon) > t'$ 时有 $\|x_1(t)\| < \varepsilon$. 证完.

推论 3.3.1 若存在 Lyapunov 函数 $V, \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{K}$, 使得

$$(1) \beta(\|x_1\|^2 + \|Cx_2\|^2) \geq V(t, x) \geq \alpha(\|x_1\|), C \text{ 为一矩阵};$$

$$(2) \frac{d}{dt}V(t, x) \leq -\gamma(\|x_1\|).$$

则系统 (3.2.2) 关于 x_1 是一致渐近稳定的.

3.3.2 渐近稳定性

下面给出 L. Salvadori^① 给出的一个渐近稳定性定理.

定理 3.3.6 (Salvadori 渐近稳定性定理, Salvadori asy-stability theorem) 若存在 Lyapunov 函数 V, W , $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{K}$, $M \geq 0$, 使得

- (1) $V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|)$, $W(t, \mathbf{x}) \geq \beta(\|\mathbf{x}\|)$;
- (2) $\frac{d}{dt}V \leq -\gamma(W)$;
- (3) $\frac{d}{dt}W(t, \mathbf{x}) \leq M$ 或 $\frac{d}{dt}W(t, \mathbf{x}) \geq -M$.

则系统 (3.1.2) 是渐近稳定的.

证明 采用一种 “Annulus Argument” 的证法.

设 $\nu \geq 0$, 使得 $B_\nu \subseteq G$. 令 $A_{\tau, \nu} = \{\mathbf{x} \mid V(\tau, \mathbf{x}) \leq \alpha(\nu), \mathbf{x} \in G\}$.

要证对任意的 $\xi \in A_{\tau, \nu}$ 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t, \mathbf{x}(t)) = 0$, 从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$.

若不然, 则存在 $\xi \in A_{\tau, \nu}$, 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t, \mathbf{x}(t)) = 0$ 不成立. 故有下面的两种情形:

情形 (1) 存在 $k, T \geq 0$, 当 $t \geq \tau + T$ 时有 $W(t, \mathbf{x}(t)) \geq k$;

情形 (2) 存在 $k \geq 0$, $T_i, T'_i \geq 0$, $T_i < T'_i < T_{i+1}$ ($i \in \mathbb{Z}^+$), 使得

$$W(T_i, \mathbf{x}(T_i)) = \frac{k}{2}, \quad W(T'_i, \mathbf{x}(T'_i)) = k,$$

并且对任意的 $T_i < T < T'_i$ 有 $\frac{k}{2} < W(T, \mathbf{x}(T)) < k$.

由于 $\xi \in A_{\tau, \nu}$, 故有 $V(\tau) \leq \alpha(\nu)$. 又 $\frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}(t)) < 0$, 所以当 $t \geq \tau$ 时有 $V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha(\nu)$. 故当 $t \geq \tau$ 时有 $\|\mathbf{x}(t)\| < \nu$.

若情形 (1) 发生, 则有 $\frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}(t)) \leq -\gamma(k)$, 从而当 $t \geq \tau$ 时有

$$0 \leq V(t, \mathbf{x}(t)) \leq V(\tau, \xi) - \gamma(k)(t - \tau).$$

这是不可能的.

若情形 (2) 发生, 不妨设 $\frac{d}{dt}W(t, \mathbf{x}(t)) \leq M$ 成立. 两端从 T_i 到 T'_i 积分得 $(T'_i - T_i)M \geq \frac{k}{2}$ 或 $T'_i - T_i \geq \frac{k}{2M}$.

^① Luigi Salvadori, 意大利人.

利用假设 (2) 和 (3) 有

$$V(T'_n, \mathbf{x}(T'_n)) \leq V(\tau, \boldsymbol{\xi}) + \sum_{i=1}^n \int_{T_i}^{T'_i} \frac{d}{ds} V(s, \mathbf{x}(s)) ds \leq V(\tau, \boldsymbol{\xi}) - n\gamma \left(\frac{k}{2}\right) \frac{k}{2M}.$$

这也是不可能的. 证完.

例 3.3.6 试研究时变阻尼单摆系统 $\xi'' + \nu(t)\xi' + \xi = 0$.

解 令 $\xi = \xi_1$, $\xi' = \xi_2$, 系统变为 $\begin{cases} \xi'_1 = \xi_2, \\ \xi'_2 = -\xi_1 - \nu(t)\xi_2. \end{cases}$

取 Lyapunov 函数 $V(t, \boldsymbol{\xi}) = (\alpha\xi_1 + \xi_2)^2 + \beta(t)\xi_1^2$. 则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, \boldsymbol{\xi}(t)) &= -(2\alpha - \beta'(t))\xi_1^2(t) - 2(\nu(t) - \alpha)\xi_2^2(t) \\ &= (2\beta(t) - 2 + 2\alpha(\alpha - \nu(t)))\xi_1(t)\xi_2(t). \end{aligned}$$

令 $\beta(t) = 1 - \alpha(\alpha - \nu(t))$, 则

$$\frac{d}{dt} V(t, \boldsymbol{\xi}(t)) = -\alpha(2 - \nu'(t))\xi_1^2(t) - 2(\nu(t) - \alpha)\xi_2^2(t).$$

设 $\nu(t) \geq \alpha_1 > \alpha$, $\nu'(t) \leq \beta_1 < 2$, 则 $V(t, \boldsymbol{\xi})$ 是正定的, 而 $\frac{d}{dt} V(t, \boldsymbol{\xi})$ 是负定的.

令 $W(\boldsymbol{\xi}) = \|\boldsymbol{\xi}\|^2$. 则 $L_{\boldsymbol{\xi}} W(\boldsymbol{\xi}(t)) = -2\nu(t)\xi_2^2(t)$ 是有上界的.

令 $k = \min\{\alpha(2 - \beta_1), 2(\alpha - \alpha_1)\}$. 则

$$\frac{d}{dt} V(t, \boldsymbol{\xi}) \leq -\alpha(2 - \beta_1)\xi_1^2 - 2(\alpha_1 - \alpha)\xi_2^2 \leq -k\|\boldsymbol{\xi}\|^2 = -kW(\boldsymbol{\xi}).$$

于是, 由 Salvadori 渐近稳定性定理 (定理 3.3.6) 可知, 只要阻尼 ν 满足 $\nu \geq \alpha_1 > \alpha$, $\nu' \leq \beta_1 < 2$, 则系统是渐近稳定的.

$\nu \geq \alpha_1 > \alpha$ 相当于真实的阻力, 而 $\nu' \leq \beta_1 < 2$ 则表明若阻尼增长过快有可能不保证渐近稳定性. 事实上, 令 $\nu(t) = 2 + e^t$ 显然不满足前面的式子, 此时的系统对任意的常数 μ , $\xi_1(t) = \mu(2 + e^{-t})$, $\xi_2(t) = -\mu e^{-t}$ 均为系统的解. 但因为 $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_1(t) = \mu$, 故系统不是渐近稳定的. 解毕.

下面给出 M. Marachkov^① 的渐近稳定性定理.

推论 3.3.2 (Marachkov 渐近稳定性定理, Marachkov asy-stability theorem) 若存在 $k \geq 0$, 使得 $\|f(t, \mathbf{x})\| \leq k$, Lyapunov 函数 V , $\alpha, \gamma \in \mathcal{K}$, 使得

^① M. Marachkov, 俄罗斯人. 俄文: M. Марачков.

- (1) $V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|)$;
 (2) $\frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) \leq -\gamma(\|\mathbf{x}\|)$.

则系统 (3.1.2) 是渐近稳定的.

事实上, 在 Salvadori 渐近稳定性定理 (定理 3.3.6) 中令 $W(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ 即可.

现将 Marachkov 渐近稳定性定理 (推论 3.3.2) 推广到部分变元的情形.

推论 3.3.3 若对任意的 $\tau \geq 0$, 存在 $\delta, k > 0$, 使得当 $t \geq \tau$, $\|\xi\| < \delta$ 时有 $\|f_1(t, \mathbf{x})\| \leq k$, Lyapunov 函数 V , $\alpha, \gamma \in \mathcal{K}$, 使得

- (1) $V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}_1\|)$;
 (2) $\frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) \leq -\gamma(\|\mathbf{x}_1\|)$.

则系统 (3.2.2) 关于 $\mathbf{x}_1$ 是渐近稳定的.

例 3.3.7 试继续研究例 3.2.6.

解 在例 3.2.6 中已得结论: 回路系统关于 $q_1 - q_2, q_3, q'_1$ 是稳定的. 由回路系统运动方程

$$\begin{cases} L_1 q_1'' + R_1 q_1' - \frac{1}{C_{12}}(q_2 - q_1) = 0, \\ L_{23}(q_2'' - q_3'') + \frac{1}{C_{12}}(q_2 - q_1) = 0, \\ L_{23}(q_3'' - q_2'') + \frac{q_3}{C_3} = 0 \end{cases}$$

中的第一个方程有 $q_1'' = -\frac{R_1}{L_1}q_1' - \frac{1}{L_1 C_{12}}(q_1 - q_2) = f_1(q_1', q_1 - q_2)$. 故对任意的 $\tau \geq 0$, 存在 $\delta, k > 0$, 使得当 $t \geq \tau$, $\|\xi\| < \delta$ 时有 $|f_1(q_1', q_1 - q_2)| \leq k$. 由推论 3.3.3 可知, 回路系统关于 q'_1 是渐近稳定的. 由于回路系统是时不变系统, 所以 q'_1 必然以指数趋向于零, 故回路系统必然关于 q_1 是稳定的, 即回路系统关于 $q_1 - q_2, q_3, q_1$ 是稳定的. 从而关于 q_1, q_2, q_3 是稳定的, 并且关于 q'_1 是渐近稳定的, 即三个回路的电荷是稳定的, 其中第一个回路的电荷是指数渐近稳定的.

下证平衡位置 $q_i = q'_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) 关于 q'_2, q'_3 并不是渐近稳定的. 事实上, 在平衡位置的任意邻域内, 均可取得平衡位置 $q_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), $q'_i = 0$, $q'_2 = q'_3 = \lambda \neq 0$, 故回路系统关于 q'_2, q'_3 均不是吸引的, 从而关于 q_1, q_2, q_3 也不是吸引的. 解毕.

J. Massera 的反例 (例 3.3.1) 是因为 $\|f(t, \mathbf{x})\| \leq k$ 不成立. 事实上, 他也

给出过一个渐近稳定性定理.

推论 3.3.4 (Massera 渐近稳定性定理, Massera asy-stability theorem) 若存在 Lyapunov 函数 V , $\alpha, \gamma \in \mathcal{K}$, 使得

$$(1) V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|);$$

$$(2) \frac{d}{dt}V \leq -\gamma(V).$$

则系统 (3.2.2) 关于 $\mathbf{x}_1$ 是渐近稳定的.

事实上, 在 Salvadori 渐近稳定性定理 (定理 3.3.6) 中令 $W = V$ 即可.

3.3.3 指数渐近稳定性

定理 3.3.7 系统 (3.1.2) 是指数渐近稳定的, 则必是一致渐近稳定的.

定义 3.3.2 若存在 $\mu_1, k_1, k_2 \geq 0$, 使得对任意的 $0 \leq \mu \leq \mu_1$, $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ 有

$$k_1\alpha(\mu) \geq \beta(\mu) \geq k_2\alpha(\mu),$$

则称 α, β 是同级增势的 (ascending in the same order).

定理 3.3.8 (指数渐近稳定性定理, exponentially asy-stability theorem) 若存在 Lyapunov 函数 V , $\sigma \geq 0$, 使得 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{K}$ 和 μ^σ 是同级增势的, $\beta(\|\mathbf{x}\|) \geq V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|)$, $\frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) \leq -\gamma(\|\mathbf{x}\|)$, 则系统 (3.1.2) 是指数渐近稳定的.

证明 因为 β, γ 是同级增势的, 则存在 $k_1 \geq 0$, 使得

$$\frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) \leq -\gamma(\|\mathbf{x}\|) \leq -k_1\beta(\|\mathbf{x}\|) \leq -k_1V(t, \mathbf{x}).$$

令 $A_{\tau, \nu} = \{\mathbf{x} \mid V(\tau, \mathbf{x}) \leq \alpha(\nu), \mathbf{x} \in G\}$, 则对任意的 $\xi \in A_{\tau, \nu}$, 当 $t \geq \tau$ 时有 $V(t, \mathbf{x}) \leq V(\tau, \xi)e^{-k_1(t-\tau)}$, 于是,

$$\alpha(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq V(\tau, \xi)e^{-k_1(t-\tau)} \leq \beta(\|\xi\|)e^{-k_1(t-\tau)}. \quad (3.3.4)$$

由于 $\alpha, \beta, \mu^\sigma$ 是同级增势的, 故存在 $\ell_1, \ell_2 \geq 0$, 对任意的 $0 \leq \mu \leq \mu_1$ 有 $(\ell_1\mu)^\sigma \leq \alpha(\mu), \beta(\mu) \leq (\ell_2\mu)^\sigma$. 由式 (3.3.4) 得 $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \frac{\ell_2}{\ell_1}\|\xi\| \exp\left\{-\frac{k_1}{\sigma}(t-\tau)\right\}$. 证完.

在指数渐近稳定性定理 (定理 3.3.8) 中, 若只是 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{K}$ 是同级增势的, 不足以保证定理的结论.

例 3.3.8 试研究 $x' = -x^3$.

解 显然系统是一致渐近稳定的. 但其解为 $x(t) = \frac{\xi}{\sqrt{1 + 2\xi^2(t - \tau)}}$, 故它不是指数渐近稳定的. 另一方面, 若令 $V(x) = \exp\left\{-\frac{1}{x^2}\right\}$, $V(0) = 0$, 则有 $V'(x) = -2V(x)$. 显然可令 $\alpha(\mu) = \beta(\mu) = \exp\left\{-\frac{1}{\mu^2}\right\}$, $\gamma(\mu) = 2\exp\left\{-\frac{1}{\mu^2}\right\}$, 它们都是同级增势的, 但系统却不是指数渐近稳定的. 解毕.

在这一节的最后, 对 $x' = f(x)$ 给出 Barbashin-Krasovsky 的渐近稳定性定理一个结果.

定理 3.3.9 (Barbashin-Krasovsky 渐近稳定性定理, Barbashin-Krasovsky asy-stability theorem) 若

- (1) 存在 Lyapunov 函数 V , $\alpha \in \mathcal{K}$, 使得 $V(x) \geq \alpha(\|x\|)$;
 - (2) $L_f V(x) \leq 0$, 并且除零解外的任意解都不恒为零,
- 则 $x' = f(x)$ 是渐近稳定的.

例 3.3.9 试研究 $\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -x_1 - x_2(1 + x_2)^2. \end{cases}$

解 当取 Lyapunov 函数 $V(x) = \|x\|^2$, 则有 $L_f V(x) = -2x_2^2(1 + x_2)^2$. 故为了使得 $L_f V(x) \equiv 0$, 只有两种情形: ① $(x_1(t), 0)^T$; ② $(x_1(t), -1)^T$.

- (1) 此时有 $x'_1(t) = 0$, $0 = x'_2(t) = -x_1(t)$, 故除零解外没有任何非平凡解;
- (2) 此时有 $x'_1(t) = -1$, $0 = x'_2(t) = -x_1(t)$, 这是个矛盾.

由 Barbashin-Krasovsky 渐近稳定性定理 (定理 3.3.9) 可知, 系统是渐近稳定的. 解毕.

习题

1. 设 $x' = f(x)$. 若 $\frac{df(x)}{dx} + \frac{df(x)}{dx^T} < O$, 试证系统为渐近稳定的.

2. 利用习题 3.3.3 的结论, 试判断 $\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + x_2, \\ x'_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$ 的渐近稳定性.

3.4 Lyapunov 函数的构造举例

先介绍 D. G. Schultz 和 J. E. Gibson 于 1962 年提出的变量梯度法 (variable gradient method). 考虑 $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. 令 $\nabla V(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

为了使得计算简单, 令 $\text{rot} \nabla V(\mathbf{x}) = 0$, 即梯度 ∇V 对应于有势场, 而此条件成立 $\iff$

$$\frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.4.1)$$

故可定出 $\mathbf{A}$. 再确定出

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1(x_2=\dots=x_n=0)} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1} dx_1 + \int_0^{x_2(x_1=x_1, x_3=\dots=x_n=0)} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2} dx_2 \\ + \dots + \int_0^{x_n(x_1=x_2=\dots=x_{n-1}=0)} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_n} dx_n.$$

若 V 为正定的, 则其为 Lyapunov 函数; 否则, 此方法失效.

例 3.4.1 试研究 $\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1^2 - x_2. \end{cases}$

解 令 $\nabla V(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$, 其中取 $a_{22} = 2$. 由式 (3.4.1) 可导出

$$a_{12} = \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 V(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = a_{21}.$$

又有

$$L_{\mathbf{f}} V(\mathbf{x}) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1^2 - x_2 \end{pmatrix} \\ = (a_{11} - a_{21} - 2x_1^2)x_1x_2 + (a_{12} - 2)x_2^2 - a_{21}x_1^4 \\ < 0.$$

由上述可取系数为 $a_{12} = a_{21}$, $a_{11} = a_{12} + 2x_1^2$, $0 < a_{12} < 2$. 由此可定出

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (a_{21} + 2x_1^2)x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{12}x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

再确定出

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int_0^{x_1(x_2=0)} (a_{21} + 2x_1^2) dx_1 + \int_0^{x_2(x_1=x_1)} (a_{12}x_1 + 2x_2) dx_2 \\ &= \frac{1}{2}x_1^4 + \frac{a_{12}}{2}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + x_2^2 \\ &= \frac{1}{2}x_1^4 + \left\langle \mathbf{x}, \begin{pmatrix} \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \right\rangle. \end{aligned}$$

容易判断 V 是正定的, 故为 Lyapunov 函数, 所以系统是渐近稳定的. 解毕.

下面介绍 N. Krasovsky 的方法. 考虑 $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{0}$ 是惟一平衡状态. 取 $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2$. 易证它是正定的. 记 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})$, 则

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{f}}V(\mathbf{x}) &= \frac{d\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2}{dt} \\ &= \left\langle \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{dt}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right\rangle + \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{dt} \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{x}', \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle + \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{x}' \rangle \\ &= \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), (\mathbf{F}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle. \end{aligned}$$

故若 $\mathbf{F}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x}) < \mathbf{O}$, 则 $L_{\mathbf{f}}V(\mathbf{x}) < 0$.

例 3.4.2 试研究非线性系统 $\begin{cases} x_1' = -3x_1 + x_2, \\ x_2' = 2x_1 - x_2 - x_2^3. \end{cases}$

解 取 $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2$ (参见例 3.1.9). 再来计算

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 - 3x_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -2 - 6x_2^2 \end{pmatrix} < \mathbf{O},$$

故系统是渐近稳定的. 解毕.

3.5 稳定性的比较定理

在这一节, 考虑系统 (3.1.2) 和 $u' = \omega(t, u)$ 稳定性的比较问题, 介绍 C. Corduneanu^① 的一个比较结果.

定理 3.5.1 (Corduneanu 比较定理, Corduneanu comparison theorem) 若存在 $\alpha \in \mathcal{K}$, 可微函数 V , 使得

$$(1) \quad V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|);$$

^① Constantin Corduneanu (1928.07.26-2018.12.27), 罗马尼亚人.

$$(2) \frac{d}{dt} V(t, \mathbf{x}) \leq \omega(t, V(t, \mathbf{x})).$$

则

(a) 若 $u = 0$ 是稳定的, 则 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是稳定的;

(b) 若 $u = 0$ 是渐近稳定的, 则 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是等度渐近稳定的.

若还有

(3) 存在 $\beta \in \mathcal{K}$, 使得 $V(t, \mathbf{x}) \leq \beta(\|\mathbf{x}\|)$.

则

(a) 若 $u = 0$ 是一致稳定的, 则 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是一致稳定的;

(b) 若 $u = 0$ 是一致渐近稳定的, 则 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是一致渐近稳定的.

证明 只证 (a) 和 (b). (a) 设对任意的 (τ, ξ) , 系统 (3.1.2) 和 $u' = \omega(t, u)$ 所确定的解分别为 $\mathbf{x}(t, \tau, \xi)$ 和 $u(t, \tau, \eta)$, 其中 $\eta = V(\tau, \xi)$. 则由 (1), (2) 和定理 2.3.3 有

$$\alpha(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq u(t, \tau, \eta). \quad (3.5.1)$$

因为 $u = 0$ 是稳定的, 则对任意的 $\tau \geq 0, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta^* > 0$, 对任意的 $t \geq \tau, \eta < \delta^*$ 有 $u(t, \tau, \eta) < \alpha(\varepsilon)$. 又由 V 的连续性可知, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $\|\xi\| < \delta$ 有 $\eta < \delta^*$.

注意到上述和式 (3.5.1) 有 $\|\mathbf{x}(t, \tau, \xi)\| < \varepsilon$ ($t \geq \tau$), 即 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是稳定的.

(b) 由定理 3.1.3, $u = 0$ 是等度渐近稳定的. 所以对任意的 $\tau \geq 0$, 存在 $\eta^* > 0$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T > 0$, 对任意的 $t \geq \tau + T, \eta < \eta^*$ 有 $u(t, \tau, \eta) < \alpha(\varepsilon)$. 又由 V 的连续性可知, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $\|\xi\| < \delta$ 有 $\eta < \eta^*$ ($t \geq \tau + T$).

注意到上述和式 (3.5.1) 有 $\|\mathbf{x}(t, \tau, \xi)\| < \varepsilon$ ($t \geq \tau + T$), 即 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是等度吸引的, 从而是等度渐近稳定的. 证完.

注记 3.5.1 (1) 若 $\omega(t, u) \equiv 0$, 则 Corduneanu 比较定理 (定理 3.5.1) 就成为 Lyapunov 稳定性定理 (定理 3.2.1) 和 Persidsky 一致稳定性定理 (定理 3.2.2);

(2) 若 $\omega(t, u) = -\gamma(u)$, $\gamma \in \mathcal{K}$, 且 $\int_0^\eta \frac{du}{\gamma(u)} = \infty$, 则 Corduneanu 比较定理 (定理 3.5.1) 就成为 Salvadori 渐近稳定性定理 (定理 3.3.6).

推论 3.5.1 若 $\varphi \in C$ 是正的, $\gamma \in \mathcal{K}$, 则 $u' = -\varphi(t)\gamma(u)$ 是一致稳定的. 若还有 $\int_\tau^\infty \varphi(t)dt = \infty$, 则系统是等度渐近稳定的.

推论 3.5.2 (1) 若对任意的 $\tau \geq 0$, 存在 $A \geq 0$, 使得 $\int_{\tau}^t \lambda(s)ds \leq A$, 其中 $\lambda \in C$, 则 $u' = \lambda(t)u$ 是稳定的;

(2) 若存在 $A \geq 0$, 对任意的 $\tau \geq 0$, 使得 $\int_{\tau}^t \lambda(s)ds \leq A$, 其中 $\lambda \in C$, 则系统是一致稳定的;

(3) 若对任意的 $\tau \geq 0$ 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\tau}^t \lambda(s)ds = -\infty$, 则系统是等度渐近稳定的.

习题

1. 若存在 $\lambda \in C$ 是非负的, Lyapunov 函数 $V, \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{K}$, 使得

$$(1) \alpha(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) < \beta(\|\mathbf{x}\|);$$

$$(2) \frac{d}{dt} V(t, \mathbf{x}) \leq -\lambda(t)\gamma(V(t, \mathbf{x})).$$

则系统 (3.1.2) 是一致稳定的.

2. 若存在 $\lambda \in C$, Lyapunov 函数 $V, \alpha \in \mathcal{K}$, 使得

$$(1) V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|);$$

$$(2) \frac{d}{dt} V(t, \mathbf{x}) \leq \lambda(t)\gamma(V(t, \mathbf{x}));$$

(3) 对任意的 τ , 存在 $A > 0$, 使得当 $t \geq \tau$ 时有 $\int_{\tau}^t \lambda(s)ds \leq A$.
则系统 (3.1.2) 是稳定的.

3. 若存在 $\lambda \in C$, Lyapunov 函数 $V, \alpha, \beta \in \mathcal{K}$, 使得

$$(1) \alpha(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) < \beta(\|\mathbf{x}\|);$$

$$(2) \frac{d}{dt} V(t, \mathbf{x}) \leq \lambda(t)\gamma(V(t, \mathbf{x}));$$

(3) 存在 $A > 0$, 对任意的 τ , 使得当 $t \geq \tau$ 时有 $\int_{\tau}^t \lambda(s)ds \leq A$.
则系统 (3.1.2) 是一致稳定的.

4. 若存在 $\lambda \in C$, Lyapunov 函数 $V, \alpha, \beta \in \mathcal{K}$, 使得

$$(1) \alpha(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) < \beta(\|\mathbf{x}\|);$$

$$(2) \frac{d}{dt} V(t, \mathbf{x}) \leq \lambda(t)\gamma(V(t, \mathbf{x}));$$

(3) 存在 $A > 0$, 对任意的 τ , 使得当 $t \geq \tau$ 时有 $\int_{\tau}^t \lambda(s)ds \leq -A(t - \tau)$.
则系统 (3.1.2) 是一致渐近稳定的.

电子工业出版社版权所有
盗版必究