

第三章 n 维向量与向量空间

本章包含 n 维向量及其运算、向量组的线性相关性、向量组的秩和向量空间等内容。

所谓 n 维向量就是由 n 个有次序的数组成的有序数组。 n 维向量的概念来源于现实生活及科研中的实际问题。由若干个结构相同的 n 维向量构成的集合称为 n 维向量组。 n 维向量组的线性相关、线性无关及秩的概念是线性代数的重要内容。

全体 n 维向量构成的集合称为 n 维向量空间，向量空间的基与维数刻画了向量空间的本质结构。

§ 3.1 n 维向量及其运算

1. n 维向量的概念

n 维向量的概念来源于现实生活中的许多事例。例如，要确定平面上一点的位置，需要 2 个有次序的实数 (x, y) ；确定空间中一个点的位置，需要 3 个有次序的实数 (x, y, z) 。又如，空间中一个球的位置和大小可以用 4 个有次序的数 (x, y, z, r) 来刻画：前 3 个数刻画球心的坐标，第 4 个数刻画球的半径。在经济问题中，也会碰到这样的情况，例如，一个工厂生成 n 种产品，设第 i 种产品的年产量为 a_i 个单位，则这 n 种产品的产量可用 n 个有次序的数组成的数组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 来表达。

以上例子中，都包含一个核心的数据类型： n 个有次序的数所组成的数组。一般 n 维向量的定义如下。

定义 1 n 个有次序的数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 所组成的数组称为 **n 维向量**。其中，第 i 个数 a_i 称为向量的第 i 个分量。

分量全为实数的向量称为**实向量**，分量为复数的向量称为**复向量**，如无特别说明，本书只讨论实向量。 n 维向量一般用希腊字母 α 、 β 、 γ 等表示。

n 维向量可以写成一列，也可以写成一行。如果写成一列，则称为 **n 维列向量**，简称**列向量**，如

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

如果写成一行，则称为 n 维行向量，简称行向量，如

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

列向量与行向量的区别只是写法的不同，本质上是一样的。本书中，若未特别指明，所说的向量都是指列向量。

分量全为 0 的向量

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

称为零向量，记为 $\mathbf{0}$ 。

向量 $\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$ 称为向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 的负向量，记为 $-\alpha$ 。

用矩阵的观点来看， n 维列向量就是 n 行 1 列的矩阵， n 维行向量就是 1 行 n 列的矩阵。

类似于矩阵相等的定义，我们有：

定义 2 如果 n 维向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ， $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的对应分量都相等，即 $a_i = b_i$ ，

$i=1, 2, \dots, n$ ，则称向量 α 与 β 相等，记作 $\alpha = \beta$ 。

当 $n \leq 3$ 时，向量有直观的几何意义。例如，在三维空间中引入坐标系以后，空间中任一点的坐标 (x, y, z) 就是一个三维向量；反之，任意一个三维向量都可以对应三维空间中的一个点。当 $n \geq 4$ 时，向量没有直观的几何意义。

2. n 维向量的线性运算

定义 3 设向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 、 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ， k 为一个实数，

(1) 向量

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

称为向量 α 与 β 的和, 记作 $\alpha + \beta$;

(2) 向量

$$\begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

称为数 k 与向量 α 的积, 记作 $k\alpha$.

称 $\alpha + \beta$ 为向量的加法运算, 称 $k\alpha$ 为向量的数乘运算. 向量的加法运算与向量的数乘运算统称为向量的线性运算.

设 α 、 β 、 γ 是三个向量, k 、 l 是两个实数, 由定义 3 立即可以推出, 向量的线性运算具有以下性质:

- (1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
- (2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
- (3) $\alpha + 0 = \alpha$;
- (4) $\alpha + (-\alpha) = \alpha - \alpha = 0$;
- (5) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$;
- (6) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;
- (7) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$;
- (8) $1\alpha = \alpha$.

例 1 设向量 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, 求 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ 及 $3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$.

解 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0-3 \\ 3+2-4 \\ 0+2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

例 2 设 $\alpha_1 = (2, -4, 1, -1)$, $\alpha_2 = (-3, -1, 2, -\frac{5}{2})$, 如果向量 β 满足 $3\alpha_1 - 2(\beta + \alpha_2) = 0$, 求向量 β .

解 由已知条件, 有 $3\alpha_1 - 2\beta - 2\alpha_2 = \mathbf{0}$, 推出

$$\begin{aligned}\beta &= -\frac{1}{2}(2\alpha_2 - 3\alpha_1) = -\alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_1 \\ &= -(-3, -1, 2, -\frac{5}{2}) + \frac{3}{2}(2, -4, 1, -1) \\ &= (6, -5, -\frac{1}{2}, 1).\end{aligned}$$

§ 3.2 向量组的线性相关性

1. 线性相关性的概念

若干个同维数的向量所组成的集合称为向量组.

例如, 对 3 行 4 列的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, 若记矩阵 A 的列向量分别为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是 3 维列向量, 且矩阵 A 可以记为

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

称 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组.

同理, 若记 A 的行向量分别为

$$\beta_1 = (1, 2, 3, 4), \quad \beta_2 = (5, 6, 7, 8), \quad \beta_3 = (9, 10, 11, 12)$$

则矩阵 A 可以记为

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

称 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为矩阵 A 的行向量组.

由上可知, 一个矩阵的列向量组和行向量组都是只含有限个向量的向量组; 反之, 给定一个含有限个向量的向量组, 总可以构成一个矩阵. 因此, 矩阵与含有限个向量的行(列)向量组一一对应.

定义 4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是一个含 m 个向量的向量组, $k_1, k_2, \dots, k_m$ 是任意给定的 m 个实数, 则表达式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m \quad (1)$$

称为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的一个线性组合, $k_1, k_2, \dots, k_m$ 称为这个线性组合的系数.

例 3 设有向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$, 求向量组在系数 $k_1 = 1$,

$k_2 = 2, k_3 = 3, k_4 = 4$ 下的线性组合.

解 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 在系数 $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3, k_4 = 4$ 下的线性组合为

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \\ 110 \end{pmatrix}$$

当然, 给定不同的系数, 就可以得到不同的线性组合.

定义 5 给定向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和向量 β , 如果存在一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m \quad (2)$$

则称向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出.

例如, 在例 3 中, 若记向量 $\beta = \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \\ 110 \end{pmatrix}$, 则有

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 70 \\ 110 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

即

$$\beta = 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4$$

故向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出.

例 4 设有 n 维向量组 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 和 n 维向量 α 如下:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

问向量 α 能否由向量组 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 线性表出?

解 对向量 α , 总有

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

故 $\alpha = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n$, 即 α 可以由向量组 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 线性表出.

由例 4 可知: 任一 n 维列向量组总可以由向量组 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 线性表出. 以后, 我

们称向量组 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ 为 n 维单位向量组.

现在, 我们讨论“线性表出”的概念与线性方程组之间的关系.

设有向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{\alpha}_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

由定义不难看出, 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出, 等价于由向量构成的方程

$$x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + x_m \boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\beta} \quad (3)$$

有实数解.

特别地, 当向量 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ 时, 总有

$$0\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

因此, n 维零向量可以由任意 n 维向量组线性表出.

在方程 (3) 中, 将向量的分量具体写出, 并利用向量的数乘和加法运算, 有

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_m a_{1m} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_m a_{2m} \\ \vdots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_m a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

再由向量相等的定义, 有

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_m a_{1m} = b_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_m a_{2m} = b_2 \\ \vdots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_m a_{nm} = b_n \end{cases} \quad (4)$$

所以, 我们也可以说: 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出, 等价于线性方程组 (4) 有解.

这就是“线性表出”的概念与线性方程组的关系.

例 5 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, 向量 $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$, 问 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出?

解 设数 x_1, x_2, x_3 , 使得 $x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + x_3 \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}$, 按分量形式写出, 得方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

方程组有一个解为 $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$, 故 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表

出, 表达式为 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

如果向量 γ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中的每个向量 α_i 都可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 则向量 γ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出. 这一性质, 称为线性表出的传递性.

事实上, 设

$$\gamma = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_i, \quad \alpha_i = \mu_{i1} \beta_1 + \mu_{i2} \beta_2 + \dots + \mu_{is} \beta_s = \sum_{k=1}^s \mu_{ik} \beta_k$$

$$\text{则有 } \gamma = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\sum_{k=1}^s \mu_{ik} \beta_k \right) = \sum_{k=1}^s \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \mu_{ik} \right) \beta_k$$

故向量 γ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出.

定义 6 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中的每一个向量都可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 能由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出. 如果两个向量组能相互线性表出, 则称这两个向量组等价.

例 6 设有向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

问向量组 α_1, α_2 与向量组 β_1, β_2 是否等价?

解 由观察可知, $\beta_1 = -\alpha_1 + 3\alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$, 故向量组 β_1, β_2 可以由向量组 α_1, α_2 线性表出;

又 $\alpha_1 = \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{3}{2}\beta_2$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2$, 故向量组 α_1, α_2 也可以由向量组 β_1, β_2 线性表出.

因此, 向量组 α_1, α_2 与向量组 β_1, β_2 等价.

由定义不难看出, 向量组之间的等价关系具有以下性质.

- (1) **反身性**: 任一向量组都可以由它自身线性表出.
- (2) **对称性**: 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 等价.
- (3) **传递性**: 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价, 而向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 与向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$ 等价, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$ 等价.

定义 7 给定向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 如果存在不全为 0 的实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0 \quad (5)$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 否则称它线性无关.

换言之, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 等价于要使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$, 必须 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 全等于 0.

特别地, 对于只含一个向量的向量组 α , 当 $\alpha = \mathbf{0}$ 时是线性相关的, 当 $\alpha \neq \mathbf{0}$ 时是线性无关的. 对于含两个向量 α, β 的向量组, 线性相关的充要条件是向量 α 与 β 的分量对应成比例.

用方程的观点来看, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 等价于方程 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$ 存在非零解; 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 等价于方程 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$ 只有零解.

例 7 判断下列向量组线性相关或线性无关.

$$(1) \alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$(2) \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$(4) e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解 (1) 由于向量 α_1 与 α_2 的分量对应不成比例, 即 $2:1 \neq 5:3$, 故向量组 α_1, α_2 线性无关.

(2) 方法一: 观察法

经观察可知, 有

$$\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3-4 \\ -2+2-0 \\ 3-5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

按定义, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

方法二: 解方程组法

设有实数 x_1, x_2, x_3 , 使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \mathbf{0}$, 具体写出来就是

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

利用消元法可将方程化为

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

得 $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}k \\ x_2 = -\frac{1}{2}k \\ x_3 = k \end{cases}$ (k 为任意常数). 故此方程存在无穷多组非零解, 例如取 $x_3 = -2$, 则得

$x_1 = x_2 = 1$, 因此, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(3) 设有实数 x_1, x_2, x_3 , 使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \mathbf{0}$, 具体写出来就是

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

解此方程, 得 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, 即方程只存在零解. 因此, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(4) 设有实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 使得 $x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n = \mathbf{0}$, 具体写出来就是

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, 故 n 维单位向量组 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 线性无关.

例 8 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s+1}$ 线性无关, 而向量 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_{s+1}, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_{s+1}, \dots, \beta_s = \alpha_s + \alpha_{s+1}$, 证明: 向量的 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关.

证明 设有实数 $x_1, x_2, \dots, x_s$, 使得 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_s\beta_s = \mathbf{0}$, 具体写出就是

$$x_1(\alpha_1 + \alpha_{s+1}) + x_2(\alpha_2 + \alpha_{s+1}) + \dots + x_s(\alpha_s + \alpha_{s+1}) = \mathbf{0}$$

推出

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s + (x_1 + x_2 + \dots + x_s)\alpha_{s+1} = \mathbf{0}$$

由题设, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s+1}$ 线性无关, 因此, 必有

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_s = 0, x_1 + x_2 + \dots + x_s = 0$$

也就是说, 方程 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_s\beta_s = \mathbf{0}$ 只有零解, 因此, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关.

2. 线性相关性定理

定理 1 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关, 等价于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

中, 至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表出.

证明 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则按定义, 有不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

因为 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 不全为 0, 不妨设 $k_1 \neq 0$, 则有 $\alpha_1 = \frac{-1}{k_1}(k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m)$, 即向量 α_1 可以由向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$ 线性表出.

反之, 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中, 至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表出, 不妨设 α_1 可以由 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$ 线性表出, 则存在数 $k_2, k_3, \dots, k_m$, 使得

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \dots + k_m\alpha_m$$

则有

$$(-1)\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

由于 $-1, k_2, k_3, \dots, k_m$ 不全为 0 (至少 -1 不为 0), 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

由于零向量可以由任一向量组线性表出, 由以上结论可知, 含有零向量的向量组一定线性相关.

推论 1 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性无关, 等价于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中, 任何一个向量都不能由其余 $m-1$ 个向量线性表出.

定理 2 如果一向量组的一部分组线性相关, 则这个向量组就线性相关.

证明 设向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_r$, 因为此向量组的其中一部分组线性相关, 不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \leq r)$ 线性相关, 即存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$$

根据上式, 显然有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s + 0\alpha_{s+1} + \dots + 0\alpha_r = \mathbf{0}$, 因为 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 不全为 0, 所以 $k_1, k_2, \dots, k_s, 0, \dots, 0$ 也不全为 0, 因此, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关.

推论 2 如果一向量组线性无关, 那么它的任何一个非空的部分组也线性无关.

定理 3 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 则向量 β 必能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出, 且表示方法是唯一的.

证明 由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 故存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_m, k_{m+1}$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m + k_{m+1}\beta = \mathbf{0}$$

如果 $k_{m+1} = 0$, 则必有 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 不全为 0, 且上式变为

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

这就与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关相矛盾. 因此, 必有 $k_{m+1} \neq 0$, 由此可得

$$\beta = \frac{-1}{k_{m+1}}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m)$$

即 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出.

下面证明表示方法的唯一性.

设 $\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_m\alpha_m$, 且 $\beta = h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \dots + h_m\alpha_m$, 则

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_m\alpha_m - (h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \dots + h_m\alpha_m) = \beta - \beta = 0$$

$$(l_1 - h_1)\alpha_1 + (l_2 - h_2)\alpha_2 + \dots + (l_m - h_m)\alpha_m = 0$$

由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 因此, 必有

$$l_1 - h_1 = 0, \quad l_2 - h_2 = 0, \quad \dots, \quad l_m - h_m = 0$$

即 $l_1 = h_1, \quad l_2 = h_2, \quad \dots, \quad l_m = h_m$. 因此, 表示方法是唯一的.

定理 4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 是两个向量组, 如果

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 能由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出;
- (2) $s > t$,

则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 必然线性相关.

此定理的证明需要用到第五章(线性方程组)的有关知识, 此处略去.

推论 3 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $s \leq t$.

推论 4 任意 $n+1$ 个 n 维向量必然线性相关.

证明 由于任意 $n+1$ 个 n 维向量都可以由 n 维单位向量 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 线性表出, 而 $n+1 > n$, 故由定理 4 可知, $n+1$ 个 n 维向量必然线性相关.

由推论 4 和定理 1, 可以得出一个更一般的结论.

m 个 n 维向量组成的向量组, 当向量个数 m 大于向量的维数 n 时, 此向量组必然线性相关.

推论 5 两个线性无关的等价的向量组, 必然含有相同个数的向量.

事实上, 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价, 且都线性无关, 则由向量组等价的定义, 此两个向量组能相互线性表出, 由推论 3 可知, 同时有 $s \leq t$ 和 $t \leq s$, 故必有 $s = t$, 即两个向量组的向量个数相同.

例 9 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. 求证:

- (1) α_1 能由 α_2, α_3 线性表出;
- (2) α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

证明 (1) 因为 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 由推论 2 可知, α_2, α_3 线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 由定理 3 可知, α_1 能由 α_2, α_3 线性表出.

(2) 用反证法. 假设 α_4 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 而由 (1) 知, α_1 能由 α_2, α_3 线性表出, 因此 α_4 可以由 α_2, α_3 线性表出. 根据定理 1 知, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 这与条件 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关相矛盾. 故 α_4 不能由 α_2, α_3 线性表出.

例 10 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出. 求证: 在向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 中, 至少存在一个向量 β_j , 使得向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s, \beta_j$ 线性无关.

证明 用反证法. 假设对于 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 中的每个向量 β_j , 都使向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s, \beta_j$ 线性相关, 则由定理 3 知, $\beta_j (j=1, 2, \dots, t)$ 可由向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s$ 线性表出. 又由题设, α_1 可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 由线性表出的传递性可知, α_1 可以由 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 这就与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关矛盾. 因此, 必存在 β_j , 使得向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s, \beta_j$ 线性无关.

§ 3.3 向量组的秩

1. 向量组的极大线性无关组

定义 8 设有向量组 A , 如果在 A 中能选出 r 个向量构成的部分组 $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 满足:

(1) 向量组 A_0 线性无关;

(2) 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量 (如果 A 中有多于 r 个向量的话) 都线性相关, 则称部分组 $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为向量组 A 的一个极大线性无关组, 简称极大无关组.

例如, 在向量组 $A: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ 中, 因为 α_1, α_2 的分量不对应

成比例, 因此 α_1, α_2 线性无关, 而由于 $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = \mathbf{0}$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 按极大线性无关组的定义可知, α_1, α_2 就是向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组. 容易看出, α_1, α_3 或 α_2, α_3 也是向量组 A 的极大无关组.

由极大线性无关组的定义可知, 一个线性无关的向量组的极大线性无关组就是它本身.

极大无关组的一个基本性质就是: 一个向量组 A 与它的极大无关组 A_0 等价.

事实上, 不妨设极大无关组 A_0 为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 因向量组 A_0 是向量组 A 的一个部分组, 故向量组 A_0 一定可以由向量组 A 线性表出; 而对于向量组 A 中任一向量 α , 因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha$ 线性相关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 故 α 一定可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出, 即向量组 A 可以由向量组 A_0 线性表出, 所以, 向量组 A 与它的极大无关组 A_0 等价.

一个向量组的极大无关组一般不唯一,但是每一个极大无关组都等价于向量组自身,由等价关系的传递性可知,一个向量组的任意两个极大无关组都是等价的.

我们也可以以下定义判断是否为极大线性无关组.

推论 6 (极大无关组的等价定义) 设向量组 $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量组 A 的一个部分组,且满足

(1) 向量组 A_0 线性无关;

(2) 向量组 A 中的任一向量都能由 A_0 线性表出,

则向量组 A_0 就是向量组 A 的一个极大线性无关组.

证明 只需证明向量组 A 中的任意 $r+1$ 个向量都线性相关即可.

设 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r+1}$ 是向量组 A 中的任意 $r+1$ 个向量. 由条件 (2) 可知, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r+1}$ 能由向量组 A_0 线性表出, 而 $r+1 > r$, 故由定理 4 可知, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r+1}$ 一定线性相关. 因此, 向量组 A_0 就是向量组 A 的一个极大线性无关组.

2. 向量组的秩及其求法

我们知道, 一个向量组的极大线性无关组可能不是唯一的. 同时, 一个向量组的任意两个极大线性无关组等价, 由推论 5 可知, 向量组的任意两个极大线性无关组都含有相同个数的向量. 这就表明, 一个向量组的极大无关组所含向量的个数与极大无关组的选择无关, 而是由向量组本身所决定的, 它直接反映了向量组本身的性质, 为此, 我们引入向量组的秩的概念.

定义 9 向量组 A 的极大线性无关组 $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩, 记作 $R(A)$ 或 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$.

例如, 在向量组

$$A: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

中, 由于 α_1, α_2 是向量组 A 的一个极大线性无关组, 而 α_1, α_2 含有 2 个向量, 故向量组 A 的秩为 2, 即 $R(A) = 2$ 或 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$.

只含零向量的向量组没有极大无关组, 规定它的秩为 0.

例 11 记全体 n 维向量构成的向量组为 $\mathbf{R}^n$, 求 $\mathbf{R}^n$ 的一个极大无关组及 $\mathbf{R}^n$ 的秩.

解 由例 7 可知, n 维单位向量组 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 线性无关, 而任意一个 n 维向量都可以由 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 线性表出, 由极大线性无关组的等价定义知, n 维单位向量组 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 就是 $\mathbf{R}^n$ 的一个极大无关组.

由于向量组 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 包含 n 个向量, 故向量组 $\mathbf{R}^n$ 的秩为 n .

不难看出:

(1) 如果一个向量组 A 的秩为 r , 则向量组 A 中的任意 $r+1$ 个向量都线性相关, 因此, 向量组 A 中的任意 r 个线性无关的向量都是向量组 A 的一个极大线性无关组.

(2) 设向量组 A 包含 m 个向量, 由于向量组 A 的极大线性无关组 A_0 是向量组 A 的一个部分组 (从向量组 A 中挑选出的一部分向量), 因此, 向量组 A_0 中向量的个数一定小于等于 m , 即 $R(A) \leq m$. 且有如下结论:

设向量组 A 包含 m 个向量, 则 (I) 向量组 A 线性相关的充要条件是 $R(A) < m$, 即向量组 A 的秩小于向量的个数. (II) 向量组 A 线性无关的充要条件是 $R(A) = m$, 即向量组 A 的秩等于向量的个数.

(3) 因为向量组与它的极大无关组等价, 由等价关系的传递性可知, 任意两个等价的向量组的极大无关组也等价. 而由推论 5 可知, 两个等价的线性无关向量组, 必然含有相同个数的向量, 因此, 等价的向量组的秩相同.

例 12 已知向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 能由向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 求证 $R(A) \leq R(B)$.

证明 要证 $R(A) \leq R(B)$, 就是要证向量组 A 的极大无关组中向量的个数小于等于向量组 B 的极大无关组中向量的个数.

设 $R(A) = r$, 且 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 为向量组 A 的一个极大无关组; 设 $R(B) = k$, 且 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_k}$ 为向量组 B 的一个极大无关组.

由于向量组 A 可以由向量组 B 线性表出, 故 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 可以由 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_k}$ 线性表出, 而 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性无关, 由推论 3 可知 $r \leq k$, 即 $R(A) \leq R(B)$.

例 13 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r , 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 的秩为 t . 求证 $R(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_s + \beta_s) \leq r + t$.

证明 设 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大无关组, $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_t}$ 是向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 的一个极大无关组.

那么, 对任一 $i (1 \leq i \leq s)$, α_i 可以由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出, β_i 可以由 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_t}$ 线性表出, 所以, $\alpha_i + \beta_i$ 可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_t}$ 线性表出, 从而有

$$R(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_s + \beta_s) \leq R(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_t}) \leq r + t.$$

向量组的秩的定义并没有给出求向量组的秩的方法. 前面我们说过, 一个含有限个向量的向量组与矩阵一一对应, 而由第一章知, 任何一个矩阵都可以用初等行变换化为行阶梯形矩阵. 由于行阶梯形矩阵的行向量组的秩比较容易求出, 因此, 我们可以借助矩阵和矩阵的初等变换来求出向量组的秩.

首先, 我们回顾一下矩阵的初等行变换.

矩阵的初等行变换包含以下三种变换:

- (1) 互换两行;
- (2) 将某一行中的所有元素乘以一个不为 0 的常数;
- (3) 将某一行的所有元素的 k 倍加到另一行的对应元素上去.

其中, 每一种变换都是可逆的.

设矩阵 A 的行向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 即

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

现将矩阵 A 进行一次初等行变换, 记变换以后的矩阵的行向量组为 $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m$, 即

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_m \end{pmatrix}$$

由初等行变换的定义可知, 向量组 $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出; 又由于三种初等行变换都是可逆的, 因此, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 也可以由向量组 $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m$ 线性表出. 也就是说, 向量组 $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 等价, 即

矩阵经过一次初等行变换以后, 行向量组等价.

由等价关系的传递性可知, 经过有限次初等行变换后, 矩阵的行向量组仍然等价. 也就是说, 矩阵的初等行变换将矩阵的行向量组变为一个与之等价的行向量组. 又因为等价的向量组的秩相同, 因此, 我们得出一个重要结论.

矩阵的初等行变换不会改变行向量组的秩.

下面, 我们研究行阶梯形矩阵中行向量组的秩的问题.

设有如下行阶梯形矩阵, 其中非零行的行数为 r :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, r) \quad (6)$$

显然, 在行阶梯形矩阵的 r 个非零行中, 任何一行都不能由其余非零行线性表出, 由推论 1 可知, 这 r 个非零行必线性无关; 而由于任意 $r+1$ 个行向量必然含有零向量,

故任意 $r+1$ 个行向量必线性相关. 因此, 行向量组的秩就是 r .

也就是说: 在行阶梯形矩阵中, 行向量组的秩就是非零行的行数.

同时, 我们不加证明地指出:

矩阵的列向量组的秩等于矩阵的行向量组的秩.

由此, 我们得出求向量组的秩的一般方法.

将向量组按行(或按列)排列成一个矩阵, 然后将矩阵用初等行变换变为阶梯形矩阵, 其中非零行的行数就是该向量组的秩.

求出了向量组的秩, 同时也就可以判断出此向量组的线性相关性.

例 14 求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ 的秩, 并判断此向量组是否线性

相关.

解: 将向量组按列排列成一个矩阵, 然后使用初等行变换将矩阵变为行阶梯形矩阵.

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 + 2r_1]{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由于行阶梯形矩阵中, 非零行的行数为 2, 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2, 因此, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

至此我们可以看出, 判断一个给定的向量组是否线性相关, 有三种基本方法, 即例 7 中的直接观察法、解方程组法, 以及例 14 中的初等变换法. 其中, 初等变换法首先用矩阵的初等行变换求出向量组的秩, 然后判断此向量组的线性相关性.

下面给出“线性表出”和“向量组等价”的两个充要条件.

定理 5 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出的充分必要条件是 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$.

证明 首先, 设 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r$, 且设 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组.

(1) 必要性. 因向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 能由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出, 由线性表出的传递性可知, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 能由向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出, 因此, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 能由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出, 而 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性无关, 由极大无关组的等价定义, 可知 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 也是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 的一个极大无关组, 所以 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = r$, 即有

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$$

(2) 充分性. 因为 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$, 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 的秩也等于 r , 因此, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 中的任意 r 个线性无关的向量组都是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 的极大线性无关组. 所以, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 也是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 的一个极大线性无关组, 按极大线性无关组的等价定义, 可知向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出, 由于 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的部分组, 故向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出.

当向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 只包含一个向量 β 时, 得到:

推论 7 向量 β 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出的充分必要条件是 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$.

利用定理 5, 我们可以得出向量组等价的充要条件:

推论 8 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 等价的充分必要条件是 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$.

证明 因向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 能相互线性表出, 由定理 5, 有

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$$

$$\text{和} \quad R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s).$$

由于 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, 故有

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$$

有了推论 7, §3.2 中的例 5 也可采用如下的一种新解法.

$$\text{解 令 } A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

用初等行变换将 A 化为行阶梯形矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & 3 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可以看出 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = 2$, 由推论 7, 向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

例 15 设向量组 $A: \alpha_1 = (0, 1, 2)$, $\alpha_2 = (1, 3, 5)$, $\alpha_3 = (2, 1, 0)$, 向量组

$B: \beta_1 = (1, 2, 3), \beta_2 = (-1, 0, 1)$, 试证明向量组 A 与向量组 B 等价.

证明 方法一 (利用初等行变换) 由于初等行变换前后的矩阵的行向量组等价, 同时, 任一矩阵都可以用初等行变换化为行最简形矩阵, 而一个矩阵的行最简形矩阵是唯一的, 因此, 我们可以利用矩阵的初等行变换证明向量组的等价.

$$\text{记 } A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + 5r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B_1$$

由于矩阵 A_1 与 B_1 行向量组等价, 而矩阵 A 与 A_1 行向量组等价、矩阵 B 与 B_1 行向量组等价, 故由等价关系的传递性可知, 矩阵 A 与 B 行向量组等价, 即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 β_1, β_2 等价.

方法二 (利用向量组等价的充要条件)

$$\text{令 } A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \beta_1^T, \beta_2^T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可知 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2) = 2$

$$\text{又 } (\beta_1^T, \beta_2^T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $R(\beta_1, \beta_2) = 2$, 因此 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R(\beta_1, \beta_2) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2)$.

由推论 8 可知, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 β_1, β_2 等价.

3. 极大线性无关组的求法

向量组的极大线性无关组的定义, 并没有提供具体求出一个向量组的极大线性无关组的方法. 与求向量组的秩类似, 我们可以利用矩阵的初等行变换, 求出向量组的极大线性无关组.

例 16 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的列向量组的秩与一个极大

无关组.

解 记矩阵 A 的列向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, 即

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$$

用初等行变换将矩阵 A 化为行阶梯形矩阵.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3+2r_1 \\ r_4-3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_2 \times \frac{1}{2} \\ r_3-r_2 \\ r_4+3r_2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 \times \frac{1}{5} \\ r_4-r_3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

由于阶梯形矩阵 B 中共有 3 个非零行, 故 A 的列向量组的秩等于 3.

要找出矩阵 A 的列向量组的极大无关组, 只需在 A 的列向量组中, 任意找出 3 个线性无关的向量.

注意到, 在阶梯形矩阵 B 中, 三个非零行主元所在的列分别为 1、3、5 列. 单独观察矩阵 A 的 1、3、5 列, 有

$$(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此, 向量组 $R(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5) = 3$, 即向量组 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ 线性无关, 因此, 向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

就是矩阵 A 的列向量组的一个极大无关组.

由此例我们可以得出求向量组的极大无关组的一般方法:

将向量组按列排列成一个矩阵, 然后用初等行变换将矩阵化为行阶梯形矩阵, 其中, 非零行的行数就是向量组的秩, 非零行的主元所在的列对应的原向量, 就构成此向量组的一个极大无关组.

例 17 设有向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

求此向量组的一个极大无关组, 并将不属于极大无关组中的向量用极大无关组线性表出.

解 首先将向量组按列排列成一个矩阵, 即令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 然后对 A 施行初等行变换, 化为行阶梯形矩阵.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_1]{\begin{matrix} r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_4 - 5r_2]{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因为在行阶梯形矩阵中, 非零行的行数为 3, 因此, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩等于 3.

注意到, 在行阶梯形矩阵中, 3 个非零行的主元所在的列为 1、2、4 列, 与之对应的原向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 就是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组.

为将不属于极大无关组的向量 α_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 表示, 我们进一步将阶梯形矩阵用初等行变换变为行最简形矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \times \frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + 2r_3]{r_1 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

将此行最简形矩阵记为

$$B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$$

由于矩阵的初等行变换对应线性方程组的同解变换, 因此, 方程

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = 0$$

与

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4 = 0$$

同解. 也就是说, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 之间具有相同的线性关系, 通过观察 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, 有

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\beta_1 - \beta_2 + 0\beta_4$$

所以 $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 0\alpha_4$.

由此题我们也可以得出一个一般结论: 矩阵的初等行变换不改变列向量组的线性关系.

* § 3.4 向量空间

1. 向量空间的概念

定义 10 设 V 为 n 维向量的集合, 若 V 非空, 且 V 对于 n 维向量的加法与数乘两种运算封闭, 即

(1) 若 $\alpha \in V$, $\beta \in V$, 则 $\alpha + \beta \in V$;

(2) 若 $\alpha \in V$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 则 $\lambda\alpha \in V$,

则称集合 V 为 $\mathbf{R}$ 上的向量空间.

从以上定义不难看出, 向量空间是对加法与数乘运算封闭的向量组.

例 18 全体 n 维向量的集合 $\mathbf{R}^n$,

(1) 因 $\mathbf{R}^n$ 至少包含一个零向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, 故 $\mathbf{R}^n$ 非空;

(2) 因为两个 n 维向量的和仍是 n 维向量, 实数 λ 乘 n 维向量也仍然是 n 维向量, 故 $\mathbf{R}^n$ 对加法与数乘运算封闭.

因此, 全体 n 维向量的集合 $\mathbf{R}^n$ 就是一个向量空间, 称为 n 维向量空间.

注: 当 $n=3$ 时, 三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 表示几何立体空间;

当 $n=2$ 时, 二维向量空间 $\mathbf{R}^2$ 表示平面;

当 $n=1$ 时, 一维向量空间 $\mathbf{R}$ 表示数轴;

当 $n>3$ 时, $\mathbf{R}^n$ 没有直观的几何意义.

例 19 判断下列集合是否为向量空间

$$V = \{x = (0, x_2, \dots, x_n) \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

解 (1) 因为 V 至少含有一个向量 $x = (0, 0, \dots, 0)$, 因此, 集合 V 非空.

(2) 设 $\alpha = (0, a_2, a_3, \dots, a_n) \in V$, $\beta = (0, b_2, b_3, \dots, b_n) \in V$, $\lambda \in \mathbf{R}$,

则有

$$\alpha + \beta = (0, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n) \in V$$

$$\lambda \alpha = (0, \lambda a_2, \lambda a_3, \dots, \lambda a_n) \in V$$

即集合 V 对于加法与数乘运算封闭. 因此, 集合 V 是一个向量空间.

例 20 判断下列集合是否为向量空间

$$V = \{x = (1, x_2, \dots, x_n) \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}.$$

解 (1) 由于 V 至少包含一个向量 $x = (1, 0, \dots, 0)$, 因此, 集合 V 非空.

(2) 设 $\alpha = (1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in V$, $\beta = (1, b_2, b_3, \dots, b_n) \in V$, 则有:

$$\alpha + \beta = (2, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n) \notin V$$

即集合 V 对于加法运算不封闭. 所以, 集合 V 不是一个向量空间.

例 21 设 α 、 β 是两个已知的 n 维向量, 集合 V 为所有能由 α 、 β 线性表出的 n 维向量的集合, 即

$$V = \{\xi = \lambda \alpha + \mu \beta \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$$

试判断集合 V 是否为向量空间.

解 (1) 由于集合 V 至少包含零向量, 故集合 V 非空.

(2) 设 $\xi_1 = \lambda_1 \alpha + \mu_1 \beta$, $\xi_2 = \lambda_2 \alpha + \mu_2 \beta$, $k \in \mathbf{R}$, 则有

$$\xi_1 + \xi_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) \alpha + (\mu_1 + \mu_2) \beta \in V, \text{ 且 } k\xi_1 = (k\lambda_1) \alpha + (k\mu_1) \beta \in V$$

即集合 V 对于加法与数乘运算封闭. 所以, 集合 V 是一个向量空间.

称 $V = \{\xi = \lambda \alpha + \mu \beta \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$ 为由向量 α 、 β 所生成的向量空间.

一般地, 由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 所生成的向量空间记为

$$V = \{\xi = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}\}$$

定义 11 设有向量空间 V_1 和 V_2 , 若 $V_1 \subset V_2$, 则称 V_1 是 V_2 的子空间.

例如, 设 α 、 β 、 γ 是三个已知的 n 维向量, 记

$$V_1 = \{\xi = \lambda \alpha + \mu \beta \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}, \quad V_2 = \{\xi = \lambda \alpha + \mu \beta + \psi \gamma \mid \lambda, \mu, \psi \in \mathbf{R}\}$$

则对于任一

$$\xi_1 = \lambda_1 \alpha + \mu_1 \beta \in V_1$$

有

$$\xi_1 = \lambda_1 \alpha + \mu_1 \beta + 0 \cdot \gamma \in V_2$$

因此 $V_1 \subset V_2$, 即 V_1 是 V_2 的子空间.

例 22 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 等价, 记

$$V_1 = \{\xi = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}\}$$

$$V_2 = \{\xi = \mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2 + \dots + \mu_s \beta_s \mid \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s \in \mathbf{R}\}$$

试证明: $V_1 = V_2$.

证明 设 $x \in V_1$, 则 x 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 故 x 可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 因此, $x \in V_2$, 即 $V_1 \subset V_2$.

同理可证: 若 $x \in V_2$, 则 $x \in V_1$, 即 $V_2 \subset V_1$, 所以, $V_1 = V_2$.

由例 22 可知, 等价的向量组生成的向量空间相同.

例 23 设由向量组 $\alpha_1 = (0, 1, 2)$, $\alpha_2 = (1, 3, 5)$, $\alpha_3 = (2, 1, 0)$ 生成的向量空间为 V_1 , 由向量组 $\beta_1 = (1, 2, 3)$, $\beta_2 = (-1, 0, 1)$ 生成的向量空间为 V_2 , 证明: $V_1 = V_2$.

证明 由例 15 可知, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 β_1, β_2 等价, 而等价的向量组生成的向量空间相同, 因此, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 β_1, β_2 生成的向量空间相同, 即 $V_1 = V_2$.

2. 向量空间的基与维数

定义 12 设 V 是向量空间, 若有 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in V$, 且满足:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关;

(2) V 中任一向量都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出,

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为向量空间 V 的一个基, 数 r 称为向量空间 V 的维数, 记为 $\dim V = r$, 并称 V 为 r 维向量空间.

由于向量空间 V 除零空间外实际上是含无穷多个向量的向量组, 则按向量组的极大线性无关组的等价定义可知, V 的基就是 V 的极大线性无关组, V 的维数就是 V 的秩.

零空间只有一个零向量, 没有基, 其维数为 0.

例 24 求全体 n 维向量构成的 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的基与维数.

解 由例 11 可知, n 维单位向量组

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

就是 $\mathbf{R}^n$ 的一个极大无关组, 所以, $e_1, e_2, \dots, e_n$ 就是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基, 且 $\mathbf{R}^n$ 的维数 $\dim \mathbf{R}^n = n$.

由于 $\mathbf{R}^n$ 的维数为 n , 因此, 任意 n 个线性无关的 n 维向量都是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的基.

例 25 求向量空间 $V = \{x = (0, x_2, \dots, x_n) \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}$ 的一个基与维数.

解 令 $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$, 则

(1) 将 $e_2, e_3, \dots, e_n$ 按行排列成一个矩阵, 得

$$\begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = A$$

可以看出, 矩阵 A 是一个阶梯形矩阵, 且非零行的行数为 $n-1$ 行, 即向量组 $e_2, e_3, \dots, e_n$ 的秩等于 $n-1$, 因此, 向量组 $e_2, e_3, \dots, e_n$ 线性无关.

(2) 对任一 $x = (0, x_2, \dots, x_n) \in V$, 总有 $x = x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, 即 x 可以由 $e_2, e_3, \dots, e_n$ 线性表出.

因此, 向量组 $e_2, e_3, \dots, e_n$ 就是向量空间 V 的一组基, 且 $\dim V = n-1$.

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为向量空间 V 的一个基, 则按定义, V 中的任一向量都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出, 另外, 由向量空间对加法与数乘运算的封闭性可知, 凡能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出的向量都属于向量空间 V , 因此, 向量空间 V 可以写为

$$V = \{ \xi = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_r \alpha_r \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbf{R} \}$$

也就是说, 任一向量空间 V 都可以由它的一个基生成, 这就比较清楚地显示出向量空间 V 的构造.

3. 向量在基下的坐标

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为向量空间 V 的一个基, 则按定义, V 中的任一向量 x 都可以唯一地由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出. 设表达式为

$$x = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_r \alpha_r$$

数组 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ 称为向量 x 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 下的坐标.

由坐标的定义可以看出, 向量 x 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 下的坐标 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, 就是向量 x 由基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出的系数构成的数组.

例 26 求 n 维向量空间中任一向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 在基 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 下的坐标.

$$\text{解 由于 } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

即向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 在基 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 下的坐标就是 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. 因此, 称 $e_1,$

$e_2, \dots, e_n$ 为 n 维向量空间的自然基.

例 27 给定向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, 试验证向量组 $\alpha_1,$

α_2, α_3 是三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个基, 并求出向量 β 在这组基下的坐标.

解 由于任意 n 个线性无关的 n 维向量都是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的基, 因此, 要证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个基, 只需证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关; 要求向量 β 在这组基下的坐标, 只需将 β 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. 令

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

先用初等行变换将矩阵 A 化为行阶梯形矩阵:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + 2r_1]{r_2 - 4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -17 & -7 & -11 \\ 0 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_2 + 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 9r_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{由于} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

所以 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

为将 β 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 继续用初等行变换将行阶梯形矩阵化为行最简形矩阵

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \times (-\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 5r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 + 4r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因为

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

且由于初等行变换不会改变列向量组的线性关系, 所以 $\beta = 4\alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3$, 即向量 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(4, -1, 4)$.

习 题 三

1. 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, (1) 求 $2\alpha + \beta - 3\gamma$;

(2) 若有 χ , 满足 $3\alpha - \beta + 5\gamma + 2\chi = 0$, 求 χ .

2. 设有矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 9 & -1 \end{pmatrix}$, 写出矩阵 A 的列向量组和行向量组.

3. 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, 问向量 α_3 能否由向量 α_1 、 α_2 线性表

出?

4. 已知向量 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}$ 能由 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性表出, 求 a 的值.

5. 判断下列向量组是线性相关的还是线性无关的.

(1) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$;

(2) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

(3) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6. 判断下列命题是否正确, 正确的请给出证明, 错误的请举出反例:

(1) 若两个向量组的秩相等, 则这两个向量组等价.

(2) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 则必有 $s < t$.

(3) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ 都线性相关, 则 α_1 必不能由 $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出.

(4) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则对任意一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$.

- (5) 若 α_1, α_2 线性相关, β_1, β_2 线性相关, 则 $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2$ 也线性相关.
7. 若向量组 α, β, γ 线性无关, 证明向量组 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也线性无关.
8. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 中, $\alpha_1 \neq 0$, 且每个 $\alpha_i (i = 2, 3, \dots, s)$ 都不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性表出, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.
9. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是一组 n 维向量, 已知 n 维单位向量 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 能由它们线性表出, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.
10. 设非零向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 证明: 表示法唯一的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.
11. 设向量组 A 与向量组 B 有相同的秩, 且向量组 A 可以由向量组 B 线性表出, 证明向量组 A 与向量组 B 等价.
12. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r , 在其中任意取出 m 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}$, 若此向量组的秩为 r_1 , 证明 $r_1 \geq r + m - s$.
13. 设有向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 2, 3), \alpha_3 = (1, 3, t)$, 问 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关?
14. 已知向量组

$$A: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad B: \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

证明向量组 A 与向量组 B 等价.

15. 用初等行变换求下列向量组的秩, 并判断向量组的线性相关性.

$$(1) \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

16. 求下列向量组的秩和一个极大线性无关组.

$$(1) \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 100 \\ 10 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$(2) \alpha_1 = (1, -2, 0, 3), \alpha_2 = (2, -5, -3, 6), \alpha_3 = (0, 1, 3, 0), \alpha_4 = (2, -1, 4, -7).$$

17. 设向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

求此向量组的秩与一个极大线性无关组, 并将不属于极大无关组中的向量用极大无关组线性表出.

18. 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

求矩阵 A 的列向量组的一个极大线性无关组, 并将不属于极大无关组中的向量用极大无关组线性表出.

19. 以下向量集合是否构成向量空间, 为什么?

- (1) $V = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 x_2 = 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \}$;
 (2) $V = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 0, x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R} \}$;
 (3) $V = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 1, x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R} \}$.

20. 求由向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

所生成的向量空间的一个基与维数.

21. 由向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 0, 1, 1)$ 所生成的向量空间记为 V_1 , 由向量组 $\beta_1 = (2, -1, 3, 3)$, $\beta_2 = (0, 1, -1, -1)$ 所生成的向量空间记为 V_2 , 试证 $V_1 = V_2$.

22. 给定向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, 试验证向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

是三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个基, 并求出向量 β 在这组基下的坐标.

23. 已知 V_1, V_2 都是 $\mathbf{R}^3$ 的二维子空间, 证明 V_1 与 V_2 有非零的公共向量.

本章小结

一、教学要求

1. 理解 n 维向量的概念;
2. 理解向量组的线性组合、一个向量能由一个向量组线性表出的概念, 掌握一个向量能由一个向量组线性表出的判定方法;
3. 理解向量组 B 能由向量组 A 线性表示、向量组等价的概念, 掌握向量组之间的线



习题三参考答案

性表出和等价的判定方法;

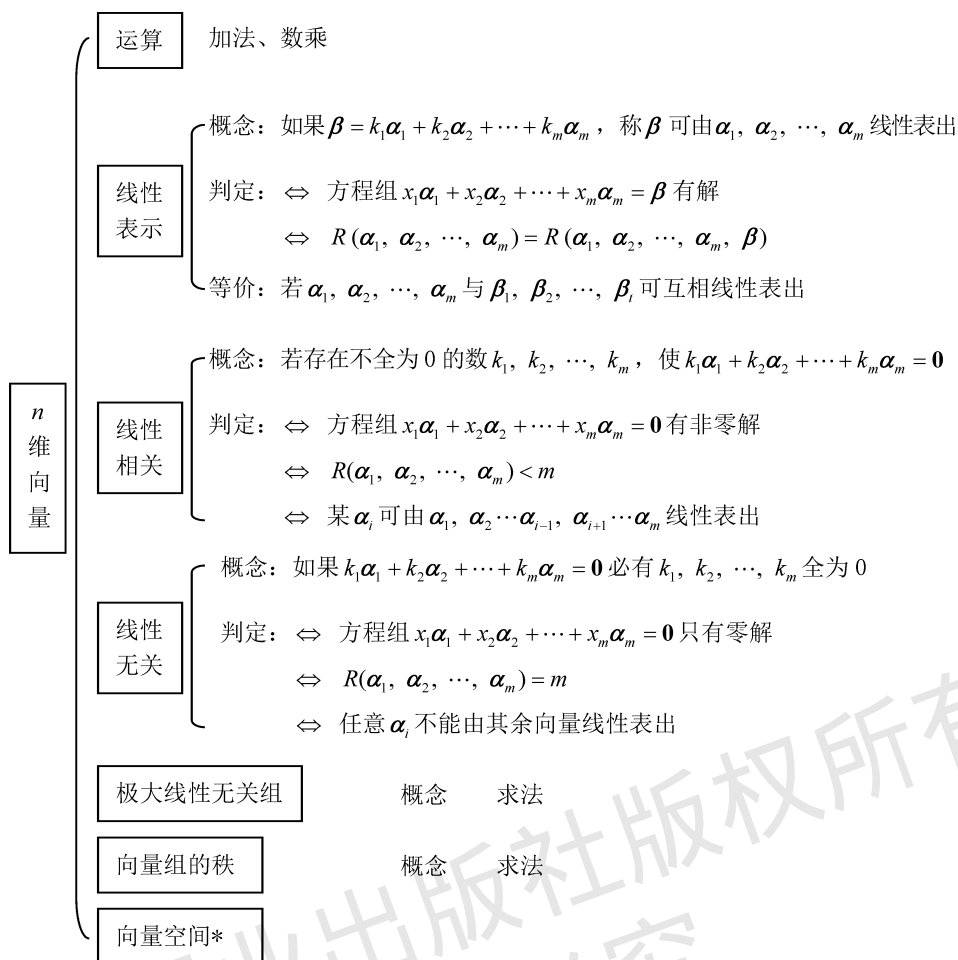
4. 理解向量组的线性相关和线性无关的概念, 掌握向量组线性相关性的判定方法;
5. 掌握向量组的秩的概念及其求法, 掌握向量组的极大无关组的概念及其求法;
6. 了解向量空间的相关概念.

二、重点与难点

重点: 向量组的线性相关和线性无关的概念、向量组线性相关性的判定方法、向量组的极大线性无关组的求法.

难点: 向量组的线性相关和线性无关的概念、向量组线性相关性的判定方法.

三、知识框图



总 练 习 三

一、选择题

1. 设 A 为 n 阶方阵, 且 A 的列向量组的秩为 r , 已知 $r < n$, 则 A 中 ().
 A. 必有 r 个列向量线性无关
 B. 任意 r 个列向量线性无关
 C. 任意 r 个行向量都是 A 的行向量组的一个极大无关组
 D. $|A| \neq 0$
2. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($m \geq 2$) 线性无关的充分必要条件是 ().
 A. 当 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ 时, $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$ 能够成立
 B. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中不含零向量
 C. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中至少有一个向量不能由其余向量线性表示
 D. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中任意一个向量都不能由其余向量线性表示
3. 设 A 为 4×3 矩阵, 则下述说法中正确的是 ().
 A. A 的列向量组的秩至少是 3
 B. A 的列向量组线性无关
 C. A 的行向量组线性相关
 D. A 的列向量组线性相关
4. 以下说法中不正确的有 () 个.
 (1) 秩相同的两个向量组一定等价
 (2) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, α_{r+1} 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$ 也线性无关
 (3) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$ 也线性无关
 (4) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 则 α_r 一定可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$ 线性表出
 (5) 若两个向量组等价, 则它们所含的向量个数相同
 A. 1
 B. 2
 C. 3
 D. 4
5. 设向量 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)$, $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)$, $\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)$, $\alpha_4 = (1, -2, 2, 0)$, $\alpha_5 = (2, 1, 5, 10)$, 则以下都是该向量组的极大无关组, 除了 ().
 A. $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5$
 B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
 C. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
 D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$
6. 设 A 为 3 阶方阵, A 的列向量组记为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 则以下行列式中与 $|A|$ 值相等的是 ().
 A. $|\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3|$
 B. $|\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3|$
 C. $|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3|$
 D. $|\alpha_1, 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_3|$

7. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 x, y 满足 () 时, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = 4\alpha_1 + 5\alpha_2, \beta_3 = x\alpha_1 + 2\alpha_2 + y\alpha_3$ 也线性无关.

- A. $5x + 2y \neq 8$ B. $x \neq y$
C. $5x + 2y = 8$ D. $x = y$

8. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则以下向量组中线性无关的是 ().

- A. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$
B. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$
C. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$
D. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$

9. 对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 则以下结论中不正确的是 ().

- A. 若对于任意一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关
B. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则对于任意一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$
C. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充要条件是此向量组的秩为 s
D. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中若有零向量, 则向量组一定线性相关

10. 已知向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示, 则以下说法中正确的是 ().

- A. 若 $r > t$, 则向量组 B 线性相关
B. 若 $r > t$, 则向量组 A 线性无关
C. 若向量组 A 线性无关, 则 $r \leq t$
D. 若向量组 B 线性无关, 则 $r \leq t$

二、填空题

1. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2, 3)^T, \alpha_3 = (1, 3, t)^T$ 线性无关, 则 $t \neq$ _____.

2. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 4, 0)^T, \alpha_3 = (2, 1, 1)^T$, 则 $\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 =$ _____.

3. 已知向量组 $\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 - 3\alpha_3, \beta_3 = \alpha_1 + 6\alpha_3$, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性_____. (相关、无关)

4. 设向量 $\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4), \beta = (y_1, y_2, y_3, y_4), \gamma = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, 若行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$, 则 α, β, γ 线性_____. (相关、无关)

5. 设向量 $\alpha_1 = (2, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 7, 10)^T, \alpha_3 = (3, 1, -1, -2)^T, \alpha_4 = (8,$

5, 9, 11)^T, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性_____. (相关、无关)

6. 设向量 $\alpha_1 = (2, 1, 4, 1)^T, \alpha_2 = (-3, -2, -2, -1)^T, \alpha_3 = (1, -1, 14, 2)^T, \beta = (-5, -2, t, -3)^T$, 已知 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 则 $t =$ _____.

7. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 3, 2, -1)^T, \alpha_2 = (-5, 1, 6, -11)^T, \alpha_3 = (2, -1, -3, 5)^T$, 则 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$ _____, 此时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性_____. (相关、无关)

8. 设方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ -1 & -k & -1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 已知 A 的列向量组线性相关, 则 $k =$ _____.

9. 已知向量 α 满足 $5(0, 1, -2) - 5\alpha - (1, 0, 2) = (4, 0, -2)$, 则 $\alpha =$ _____.

10. 设 3 阶方阵 $A = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3), B = (\beta, \gamma_2, \gamma_3)$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3$ 均为 3 维列向量, $|A| = -2, |B| = 5$, 则行列式 $|A + B| =$ _____.

三、计算题

1. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \alpha_2 = (5, 6, 7, 8)^T, \alpha_3 = (7, 10, t, 16)^T$, 问 t 取何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

2. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 3)^T, \alpha_3 = (3, a, 0)^T, \alpha_4 = (2, 5, b)^T$, 问 a, b 取何值时, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$.

3. 设向量组

$$\alpha_1 = (1, 0, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, 3)^T, \alpha_3 = (1, -1, k+2)^T, \beta = (1, 2, k+3)^T,$$

(1) k 取何值时, β 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

(2) k 取何值时, β 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示法唯一?

4. 设向量组

$$\alpha_1 = (1, 0, 2, 1)^T, \alpha_2 = (2, 5, -1, 4)^T, \alpha_3 = (1, -1, 3, -1)^T, \alpha_4 = (2, 1, 3, 0)^T,$$

求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩, 一个极大无关组, 并将其余向量用极大无关组表示.

四、证明下列各题

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\beta_1 = 2\alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_2 - \alpha_3$, 证明: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

2. 已知向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 与向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性表示式为

$$\begin{cases} \beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ \beta_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, \\ \beta_3 = 3\alpha_1 + \alpha_3 \end{cases}$$

试证向量组 A 与向量组 B 等价.



总练习三参考答案



总练习三答案详解