

第3章 经济分析的基本工具—— 导数、微分

【本章概要】

微分学是微积分的两大分支之一,它的核心概念是导数和微分.导数反映了函数相对于自变量变化而变化的快慢程度,即函数的变化率,使得人们能够用这一数学工具来描述事物变化的快慢及解决一系列与之相关的问题.因此,导数在经济领域也有极其广泛的应用.微分则指当自变量有微小改变时,函数大体上改变了多少.

【学习目标】

知识目标:

- 导数的概念;
- 导数的运算:和、差、积、商的导数,复合函数求导法;
- 隐函数求导法;
- 二阶导数.

能力目标:

- 理解导数的概念及其几何意义,会用导数描述一些简单的实际问题;
- 熟练掌握基本初等函数的求导公式和四则运算法则;
- 熟练掌握复合函数求导法,了解隐函数求导法;
- 了解微分及高阶导数的概念,掌握二阶导数的求法.

微积分,或者数学分析,是人类思维的伟大成果之一,它处于自然科学与人文科学之间的地位,使它成为高等教育的一种特别有效的工具.遗憾的是,微积分的数学方法有时流行于机械,不能体现出这门学科乃是撼人心灵的智力奋斗的结晶;这种奋斗已经历 2500 多年之久,它深深扎根于人类活动的许多领域,并且,只要人们认识自己和认识自然的努力一日不止,这种奋斗就将继续不已.

——R. 柯朗

3.1 函数的局部变化率——导数

3.1.1 微积分的创立

常量数学(如算术、代数、几何和三角等)可以有效地描述事物和现象的相对稳定状态,却

对描述运动和变化无能为力. 16 世纪和 17 世纪, 自然科学提出了大量的数学问题, 大体可分为以下 4 种类型.

(1) 非匀速运动的速度与加速度问题. 近代天文学、力学涉及的天体、落体、抛体等的运动都是非匀速的, 常量数学对此无能为力.

(2) 平面曲线的切线问题. 例如, 望远镜的光程设计必须知道光线射入透镜的角度以便应用反射定律, 光线的入射角与曲线的法线有关, 而法线垂直于切线. 又如, 运动物体在它的轨迹上任一点处的运动方向就是轨迹的切线方向.

(3) 函数的最大值与最小值问题. 寻找行星轨道的近日点和远日点, 确定炮弹的最大射程等问题都涉及函数最大值和最小值的计算.

(4) 曲线长度、曲边形面积和物体重心等问题. 例如, 行星沿轨道运动的路程、行星矢径扫过的面积等.

这些实际问题都要求创造新的数学工具来解决. 17 世纪, 数学研究由常量数学阶段进入变量数学阶段, 直到 17 世纪下半叶, 在前人工作成果的基础上, 英国的牛顿(Isaac Newton, 1643—1727) 和德国的莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646—1716) 各自独立地研究和完成了微积分的创立工作, 建立起微积分学的体系. 微积分是继欧几里得几何学之后, 整个数学发展史上伟大的创造, 特别是微积分基本定理, 把求切线(微分学的中心问题)与求和(积分学的中心问题)这两个貌似无关的问题联系在了一起, 使得微分和积分成为一个整体, 促进了一门崭新的数学学科——微积分的形成.

3.1.2 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数——导数值

引例 3-1 【汽车行驶的速度】

某人驾车到 120km 外的一个旅游景点, 共用 2h, 汽车在这段路程的平均速度 $\bar{v} = \frac{120}{2} = 60\text{km/h}$, 然而汽车仪表盘上的速度(瞬时速度)指针却在不断地摆动, 也就是说汽车的速度每时每刻都在改变, 如图 3-1 所示, 汽车此时的瞬时速度为 100km/h, 如何理解呢?



图 3-1 汽车仪表盘上的速度指针

预备知识: 导数的定义, 函数的导数.

1. 导数的定义

定义 3.1【导数】 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的附近有意义, 当自变量 x 在点 x_0 处有改变量 $\Delta x (\Delta x \neq 0)$ 时, 函数 $y=f(x)$ 取得相应的改变量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

如果当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称此极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$, 也记为

$$y' \Big|_{x=x_0} \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} \quad \text{或} \quad \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0}$$

即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

若上述函数的极限不存在,则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

2. 点 x_0 的导数定义的运算模式

$y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数定义为

$$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \square) - f(x_0)}{\square} = f'(x_0)$$

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数表示:

① $f'(x_0)$; ② $y'|_{x=x_0}$; ③ $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$; ④ $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$.

【例 3-1】 根据定义求函数 $y=x^2$ 在 $x=2$ 处的导数 $y'|_{x=2}$.

解: (1) $\Delta y = (2 + \Delta x)^2 - 2^2 = 4\Delta x + (\Delta x)^2$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x$

(3) $y'|_{x=2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4$

从而 $y'|_{x=2} = 4$, 如图 3-2 所示.

【思考题】 判断式子 $f'(2) = [f(2)]'$ 是否正确, 为什么?

引例 3-1 的分析

分析: 在实际问题中, 运动往往是非匀速的, 要描述物体的任何时刻的运动状态, 就要讨论物体在运动过程中任一时刻的速度, 即瞬时速度.

设 s 表示一物体从某时刻开始到 t 时刻进行直线运动所经过的路程, 则 s 是 t 的函数 $s=s(t)$. 现在来确定物体在某一给定时刻 t_0 的速度(瞬时速度).

当时间由 t_0 改变到 $t_0 + \Delta t$ 时, 物体在 Δt 时间内的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

如图 3-3 所示.

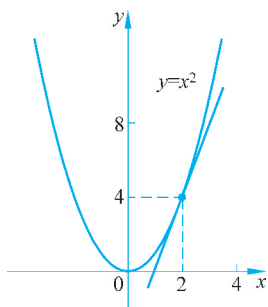


图 3-2 $y=x^2$ 在 $x=2$ 处的导数

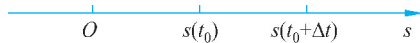


图 3-3 物体在 Δt 时间内的平均速度示意图

很明显, Δt 越小, $\bar{v}$ 就越接近物体在 t_0 时刻的瞬时速度. 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 如果极限 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ 存在, 则此极限为物体在 t_0 时刻的瞬时速度, 即

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

3.1.3 平面曲线的斜率及切线问题

引例 3-2 【制作圆形的餐桌玻璃】

一张圆形餐桌需要加装玻璃,如图 3-4 所示.根据餐桌的直径,工艺店的师傅会在一块方形的玻璃上画出一个同样大的圆形,然后沿着圆形的边缘切掉多余的玻璃,最后用砂轮在边缘上不断地打磨.当玻璃的边缘非常光滑时,一块圆形的餐桌玻璃就做好了.从数学的角度讲,工艺店的师傅打磨的过程就是在圆周上不断地进行切线的过程.曲线的切线与圆周的切线有什么关系?



图 3-4 圆形餐桌

预备知识：导数的几何意义,曲线在已知点的切线和法线.

1. 导数的几何意义

在中学的数学学习中,我们知道圆周的切线是与圆有唯一交点的直线,但是曲线 $y=f(x)$ 在某点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线是什么样的直线?

在曲线 $y=f(x)$ 上取一点 $M_0(x_0, f(x_0))$,在曲线上再取一点 $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, M_0M_1 作为割线.当动点 M_1 沿曲线移动而趋向于 M_0 时,割线 M_0M_1 的位置也随之变动.当点 M_1 沿曲线无限接近于 M_0 时,若割线 M_0M_1 有极限位置 M_0T ,则直线 M_0T 为曲线 $y=f(x)$ 在点 M_0 处的切线,如图 3-5(a) 所示.割线 M_0M_1 的斜率为

$$k_{M_0M_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, M_1 沿曲线 L 趋于 M_0 ,如图 3-5(b) 所示,从而得到切线 M_0T 的斜率为

$$k_{M_0T} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率.

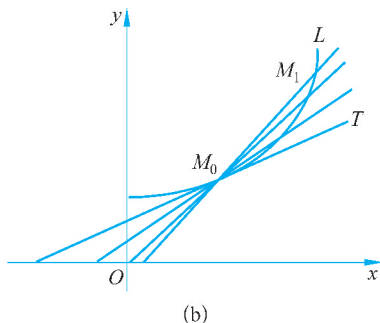
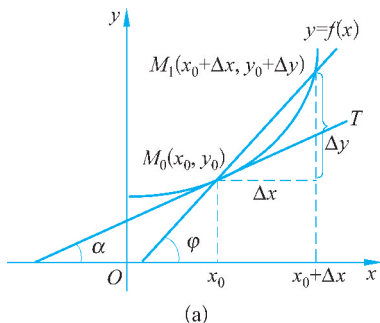


图 3-5 曲线 $y=f(x)$

2. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程

求解曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程和法线方程的过程.

(1) 找切点: $(x_0, f(x_0))$;

(2) 求斜率: 先求 y' , 再确定切线的斜率;

(3) 写切线方程和法线方程:

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

则有曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的法线方程为

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

【例 3-2】 求曲线 $y=x^2$ 在 $x=2$ 处的切线方程.

解: (1) 找切点: $x=2$ 在曲线 $y=x^2$ 上的对应点即切点 $(2, 4)$;

(2) 求斜率: 由例 3-1 可知, $y'|_{x=2}=4$, 即切线的斜率 $k=y'|_{x=2}=4$;

(3) 写切线: 由直线的点斜式, 给出曲线 $y=x^2$ 在 $(2, 4)$ 点处的切线方程为

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

即

$$y - 4x + 4 = 0$$

3.1.4 函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内的导数——导函数

1. 导函数的定义

定义 3.2【函数 $y=f(x)$ 的导数】 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内任一点处都是可导的, 即对每一个 $x \in (a, b)$, 均有对应的导数值 $f'(x)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导, 称 $f'(x)$ 为函数 $y=f(x)$ 的导函数, 简称导数.

$y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内的导(函)数的记号:

$$\textcircled{1} f'(x); \textcircled{2} y'; \textcircled{3} \frac{dy}{dx}; \textcircled{4} \frac{df}{dx}.$$

【注 1】【导函数的直观描述】 函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导, 几何上即表示曲线 $y=f(x)$ 在此区间内是一条光滑的曲线.

【注 2】【关于变化率】 常常把导数 $f'(x)$ 称为局部变化率, 变化率反映了因变量随着自变量在某处的变化而变化的快慢程度.

【注 3】【关于导数符号】 符号 y' (或 $f'(x)$ 或 $\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df}{dx}$) 表示函数 $y=f(x)$ 的因变量 y 关于自变量 x 的导数, 为强调对自变量 x 求导数, 常常记为 y'_x . 例如, 函数 $u=\varphi(t)$ 的导数可以表示成 u' 或 $\varphi'(t)$, 为强调对自变量 t 求导数, 可记为 u'_t .

2. 根据导数的定义求 $f'(x)$

根据导数的定义, 函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的导数可归纳为以下三个步骤:

(1) 当自变量 x 的改变量为 Δx 时, 函数 $y=f(x)$ 的相应改变量 Δy 为

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

(2) 求两个改变量的比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(3) 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限就是函数 $y=f(x)$ 的导数. 即

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

导数定义的运算模式

$$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{f(x + \square) - f(x)}{\square} = f'(x)$$

【例 3-3】 设 $y=C$ (常数), 根据定义求 y' .

解: 因为 (1) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$;

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0;$$

$$(3) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0;$$

所以 $(C)' = 0$, 常数的导数为 0.

【例 3-4】 设 $y = \ln x$, 根据定义求 y' .

解: (1) $\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$;

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}};$$

(3) 由重要极限公式 2 可得

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

即

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

【例 3-5】 根据导函数的定义求线性函数 $y=ax+b$ 的导数 y'_x .

解: (1) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [a(x + \Delta x) + b] - (ax + b) = a\Delta x$;

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a;$$

$$(3) y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a = a;$$

即 $y'_x = (ax + b)' = a$.

同样, 还可以证明:

指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a \neq 1$) 的导数为 $(a^x)' = a^x \ln a$; 特别地, $(e^x)' = e^x$.

对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a \neq 1$) 的导数为 $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; 特别地, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

3. 可导与连续的关系

定理 3.1 若函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导, 则 $y=f(x)$ 在点 x 处连续.

定理 3.1 的逆命题不一定成立,即在点 x 处连续的函数未必在点 x 处可导. 例如, $y=|x|$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处都连续但不可导.

【注】 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数是无穷大
 $\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty, \text{此时 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处不可导}\right)$, 则在曲线 $y=f(x)$ 上的点 (x_0, y_0) 处的切线垂直于 x 轴, 其切线方程为 $x=x_0$.

例如, 函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x_0=0$ 处的导数为无穷大, 则在 $x_0=0$ 处的切线方程为 $x=0$. 如图 3-6 所示.

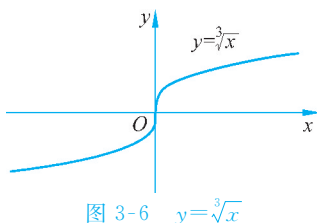


图 3-6 $y=\sqrt[3]{x}$

【能力训练 3.1】

1. 根据定义求下列函数的导数或导数值.

(1) $y=3x+2$, 求 y' ; (2) $f(x)=\sqrt{x}$, 求 $f'(4)$.

2. 在抛物线 $y=x^2$ 上求一点, 该点处的切线平行于直线 $y=4x$, 并求该点的切线方程.

3. 求下列曲线在指定点的切线方程, 并画图.

(1) 双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 处;

(2) 曲线 $y=\ln x$ 在 $(e, 1)$ 处.

3.2 求导数的方法

数学公式有其自身的独立存在性与智慧, 它们比我们聪明, 甚至比它们的发现者也聪明, 并且我们从它们中得到的比原来注入的更多.

——赫兹(H. Hertz, 1857—1894), 德国物理学家

虽然我们知道了求导数的方法与步骤, 能够通过定义求导数. 然而, 对于一般的初等函数, 我们仍然需要探索简化求导过程的一般方法, 即常数和基本初等函数的求导公式与导数的运算法则.

3.2.1 导数基本公式

1. 导数基本公式(原形)

根据导数的定义, 可以求出常数及基本初等函数的导数, 作为求导的基本公式.

由导数的记号 $\frac{dy}{dx}$ 可知, 所有函数的导数都是关于自变量求导的, 认识这一点是非常重要的. 为了便于理解和应用, 以标示下标为 x 的方式表示基本公式的原形即关于自变量 x 的导数.

导数基本公式(原形)

(1) 常数.

$$(C)'_x = 0 (C \text{ 为常数}).$$

(2) 幂函数.

$$(x^a)'_x = ax^{a-1} (a \text{ 为实数}).$$

特别地:

$$\textcircled{1} (x)'_x = 1; \quad \textcircled{2} \left(\frac{1}{x}\right)'_x = -\frac{1}{x^2}; \quad \textcircled{3} (\sqrt{x})'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(3) 指数函数.

$$(e^x)'_x = e^x, \text{一般地}, (a^x)'_x = a^x \ln a (a > 0, a \neq 1).$$

(4) 对数函数.

$$(\ln x)'_x = \frac{1}{x}, \text{一般地}, (\log_a x)'_x = \frac{1}{x \ln a} (a > 0, a \neq 1).$$

(5) 三角函数.

$$\textcircled{1} (\sin x)'_x = \cos x;$$

$$\textcircled{2} (\cos x)'_x = -\sin x;$$

$$\textcircled{3} (\tan x)'_x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x; \quad \textcircled{4} (\cot x)'_x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

(6) 反三角函数.

$$\textcircled{1} (\arcsin x)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \textcircled{2} (\arccos x)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\textcircled{3} (\arctan x)'_x = \frac{1}{1+x^2}; \quad \textcircled{4} (\operatorname{arccot} x)'_x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

【思考题】 基本公式中的导数是关于谁求导的? 即基本公式中导数是什么变量的导数?

2. 导数本质公式

我们已经知道基本公式中的导数都是关于自变量 x 求导的, 为什么上述导数公式成立呢? 从运算结构的角度来解释, 可以说明常数和基本初等函数的导数本质公式(基本公式的推广形式).

导数本质公式

(1) 常数.

$$(C)'_{\square} = 0 (C \text{ 为常数}).$$

(2) 幂函数.

$$(\square^a)'_{\square} = a \square^{a-1} (a \text{ 为实数}).$$

一般地:

$$\textcircled{1} \left(\frac{1}{\square}\right)'_{\square} = -\frac{1}{\square^2}; \quad \textcircled{2} (\sqrt{\square})'_{\square} = \frac{1}{2\sqrt{\square}}.$$

(3) 指数函数.

$$(e^{\square})'_{\square} = e^{\square}, \text{一般地}, (a^{\square})'_{\square} = a^{\square} \ln a (a > 0, a \neq 1).$$

(4) 对数函数.

$$(\ln \square)'_{\square} = \frac{1}{\square}, \text{一般地, } (\log_a \square)'_{\square} = \frac{1}{\square \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1).$$

(5) 三角函数.

$$\textcircled{1} (\sin \square)'_{\square} = \cos \square;$$

$$\textcircled{2} (\cos \square)'_{\square} = -\sin \square;$$

$$\textcircled{3} (\tan \square)'_{\square} = \frac{1}{\cos^2 \square} = \sec^2 \square;$$

$$\textcircled{4} (\cot \square)'_{\square} = -\frac{1}{\sin^2 \square} = -\csc^2 \square.$$

(6) 反三角函数.

$$\textcircled{1} (\arcsin \square)'_{\square} = \frac{1}{\sqrt{1-\square^2}};$$

$$\textcircled{2} (\arccos \square)'_{\square} = -\frac{1}{\sqrt{1-\square^2}};$$

$$\textcircled{3} (\arctan \square)'_{\square} = \frac{1}{1+\square^2};$$

$$\textcircled{4} (\operatorname{arccot} \square)'_{\square} = -\frac{1}{1+\square^2}.$$

【注】理解上述公式需要把握两点:

① 每个公式中的“ $\square$ ”表示变量的位置,这个位置可以是单位变量,也可以是函数;

② 公式的本质体现在公式内的函数的变量位置“ $\square$ ”和公式外的下标中对“ $\square$ ”必须是一致的,基本公式才成立并可以使用.

3.2.2 导数的四则运算法则

利用导数的定义,可以证明导数的四则运算法则.

定理 3.2 设函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 在点 x 处可导,则其和、差、积、商 $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ ($v(x) \neq 0$) 在点 x 处可导,且有:

$$(1) (u \pm v)'_x = u'_x \pm v'_x;$$

$$(2) (u \cdot v)'_x = u'_x \cdot v + u \cdot v'_x;$$

$$(3) \left(\frac{u}{v}\right)'_x = \frac{u'_x \cdot v - u \cdot v'_x}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

推论 1 由定理 3.2(2), 当 $u(x) = c$ 时, $(c \cdot v)'_x = c \cdot v'_x$ (c 为常数);

推论 2 由定理 3.2(2), $(u \cdot v \cdot w)'_x = u'_x \cdot v \cdot w + u \cdot v'_x \cdot w + u \cdot v \cdot w'_x$;

推论 3 由定理 3.2(3), 当 $u(x) = c$ 时, $\left(\frac{c}{v}\right)'_x = -\frac{c \cdot v'_x}{v^2}$ ($v \neq 0$).

【例 3-6】 设 $y = x^3 + \frac{1}{x} - \sqrt{x} + \ln 2$, 求 y'_x .

$$\begin{aligned} \text{解: } y'_x &= \left(x^3 + \frac{1}{x} - \sqrt{x} + \ln 2\right)'_x \\ &= (x^3)'_x + \left(\frac{1}{x}\right)'_x - (\sqrt{x})'_x + (\ln 2)'_x \\ &= 3x^2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

【例 3-7】 设 $y = \sqrt{x} \cos x + 3 \ln x$, 求 y'_x .

$$\begin{aligned}\text{解: } y'_x &= (\sqrt{x} \cos x)'_x + (3 \ln x)'_x \\ &= (\sqrt{x})'_x \cos x + \sqrt{x} (\cos x)'_x + 3 (\ln x)'_x \\ &= \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \sin x + \frac{3}{x}\end{aligned}$$

【例 3-8】 求 $y = \cot x$ 的导数 y'_x .

$$\begin{aligned}\text{解: } y'_x &= (\cot x)'_x = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)'_x = \frac{(\cos x)'_x \sin x - \cos x (\sin x)'_x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x\end{aligned}$$

即

$$(\cot x)'_x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

用类似的方法可得

$$(\tan x)'_x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

【例 3-9】 设 $f(x) = \frac{x \sin x}{1 + \cos x}$, 求 f'_x .

$$\begin{aligned}\text{解: } f'_x(x) &= \frac{(x \sin x)'_x (1 + \cos x) - x \sin x (1 + \cos x)'_x}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{(\sin x + x \cos x)(1 + \cos x) - x \sin x (-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{(\sin x)(1 + \cos x) + x \cos x + x \cos^2 x + x \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{(\sin x)(1 + \cos x) + x(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\sin x + x}{1 + \cos x}\end{aligned}$$

3.2.3 复合函数求导法则

引例 3-3 【谣言传播的速率】

在传播学中,有这样一个规律:在一定条件下,谣言的传播符合函数关系

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

其中, $p(t)$ 是 t 时刻人群中知道此谣言的人数比例, a 和 k 为正数.

求: (1) $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$; (2) 找出谣言传播的速率; (3) 若 $a = 10, k = \frac{1}{2}$, 且时间用小时(h)计算, 画出函数 $p(t)$ 的图像, 并确定需要多长时间人群中有 80% 的人知道此谣言.

预备知识: 复合函数的求导公式.

我们已经掌握了导数的基本公式, 清楚了导数公式的本质, 关键是把握两点: 第一, 对谁求导; 第二, 公式内外变量是否一致. 若一致就可用公式原形. 若不一致, 如何计算导数? 这就涉及复合函数的导数问题.

为了便于理解复合函数的求导, 我们再一次回顾求导公式的本质形式, 从复合函数的求导

角度进行描述,得出复合函数的求导公式.

复合函数的求导公式

(下列公式中的 u 是 x 的函数 $u=u(x)$)

(1) 幂函数.

$$(u^a)'_x = (u^a)'_u \cdot u'_x = au^{a-1} \cdot u'_x \quad (a \text{ 为实数}).$$

$$\text{特别地: ① } \left(\frac{1}{u}\right)'_x = \left(\frac{1}{u}\right)'_u \cdot u'_x = -\frac{1}{u^2} \cdot u'_x; \text{② } (\sqrt{u})'_x = (\sqrt{u})'_u \cdot u'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x.$$

(2) 指数函数.

$$(e^u)'_x = (e^u)'_u \cdot u'_x = e^u \cdot u'_x.$$

$$\text{一般地, } (a^u)'_x = (a^u)'_u \cdot u'_x = a^u \ln a \cdot u'_x \quad (a > 0, a \neq 1).$$

(3) 对数函数.

$$(\ln u)'_x = (\ln u)'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u} \cdot u'_x.$$

$$\text{一般地, } (\log_a u)'_x = (\log_a u)'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'_x \quad (a > 0, a \neq 1).$$

(4) 三角函数.

$$\text{① } (\sin u)'_x = (\sin u)'_u \cdot u'_x = u'_x \cdot \cos u.$$

$$\text{② } (\cos u)'_x = (\cos u)'_u \cdot u'_x = -u'_x \cdot \sin u.$$

$$\text{③ } (\tan u)'_x = (\tan u)'_u \cdot u'_x = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x = u'_x \cdot \sec^2 u.$$

$$\text{④ } (\cot u)'_x = (\cot u)'_u \cdot u'_x = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x = -u'_x \cdot \csc^2 u.$$

(5) 反三角函数.

$$\text{① } (\arcsin u)'_x = (\arcsin u)'_u \cdot u'_x = \frac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$\text{② } (\arccos u)'_x = (\arccos u)'_u \cdot u'_x = -\frac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$\text{③ } (\arctan u)'_x = (\arctan u)'_u \cdot u'_x = \frac{u'_x}{1+u^2}.$$

$$\text{④ } (\operatorname{arccot} u)'_x = (\operatorname{arccot} u)'_u \cdot u'_x = -\frac{u'_x}{1+u^2}.$$

综合上述公式,我们给出复合函数求导法则.

定理 3.3 【复合函数求导法则】 设 $y=f(u)$ 在 u 处可导, $u=\varphi(x)$ 在 x 处可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处也可导,且它的导数为

$$\frac{dy}{dx} = [f(u)]'_u \cdot [\varphi(x)]'_x, \quad \text{或记为} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad \text{或记为} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

复合函数求导公式的一般形式

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \left\{ f(\boxed{\varphi(x)}) \right\}'_{\boxed{\varphi(x)}} \cdot [\varphi(\boxed{x})]'_{\boxed{x}}$$

在确定了复合函数的结构后,从外到内逐层求导. 接下来,通过几个例子来说明复合函数

求导的一般方法.

【例 3-10】 求 $y=e^{\sqrt{x}}$ 的导数 y'_x .

解: $y'_x = (e^{\sqrt{x}})'_x$ 利用本质公式(3)知 $(e^{\sqrt{x}})'_{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}$

$= (e^{\sqrt{x}})'_{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})'_x$ 利用基本公式(2)的③

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

【例 3-11】 求 $y=(2x+1)^{30}$ 的导数 y'_x .

解: $y'_x = [(2x+1)^{30}]'_x = [(2x+1)^{30}]'_{(2x+1)} \cdot (2x+1)'_x$ 利用本质公式(2)

$= 30(2x+1)^{29} \cdot 2 = 60(2x+1)^{29}$

【例 3-12】 求 $y=\ln \cos x$ 的导数 y'_x .

解: $y'_x = (\ln \cos x)'_x = (\ln \cos x)'_{\cos x} \cdot (\cos x)'_x$ 利用本质公式(4)

$= \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

【例 3-13】 求 $y=\frac{1}{1-x^2}$ 的导数 y'_x .

解: $y'_x = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)'_x = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)'_{(1-x^2)} \cdot (1-x^2)'_x$ 利用本质公式(2)的②

$= \frac{-1}{(1-x^2)^2} \cdot (-2x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

【例 3-14】 求函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 的导数 y'_x .

解: $y'_x = (\sqrt{a^2-x^2})'_x = (\sqrt{a^2-x^2})'_{(a^2-x^2)} \cdot (a^2-x^2)'_x$ 利用本质公式(2)的③

$= \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

【例 3-15】 求函数 $y=\ln|x|$ 的导数 y'_x .

解: 方法 1.

当 $x>0$ 时, $y=\ln|x|=\ln x$, 则 $y'_x = \frac{1}{x}$;

当 $x<0$ 时, $y=\ln|x|=\ln(-x)$, 则

$$\begin{aligned} y'_x &= [\ln(-x)]'_x = [\ln(-x)]'_{-x} \cdot (-x)'_x \\ &= \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

所以 $y'_x = (\ln|x|)'_x = \frac{1}{x}$.

方法 2.

$$y'_x = (\ln |x|)'_x = (\ln \sqrt{x^2})'_x = (\ln \sqrt{x^2})'_{\sqrt{x^2}} \cdot (\sqrt{x^2})'_{x^2} \cdot (x^2)'_x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2}} \cdot 2x = \frac{1}{x}$$

利用本质公式(4)

利用本质公式(2)的③

掌握复合函数求导方法的两个关键步骤:

① 确定对什么变量求导. 若是对变量 x 求导, 则用下标 x 来标识; 若是对变量 u 求导, 则用下标 u 来标识.

② 判别函数变量与其下标是否相同. 如果相同, 则应用基本(或本质)公式求导; 如果不同, 则应用复合函数的求导公式从外到内求导.

【例 3-16】 求下列函数的导数 y'_x .

(1) $y = e^{-x^2} + \sin \frac{1}{x}$;

(2) $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(3) $y = \cos nx \cdot \sin^n x$.

解: (1) $y'_x = (e^{-x^2} + \sin \frac{1}{x})'_x$

$$= (e^{-x^2})'_x + (\sin \frac{1}{x})'_x$$

$$= (e^{-x^2})'_{-x^2} \cdot (-x^2)'_x + (\sin \frac{1}{x})'_{\frac{1}{x}} \cdot (\frac{1}{x})'_x$$

$$= e^{-x^2}(-2x) + (\cos \frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) = -2xe^{-x^2} - \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$$

应用运算法则 $(u+v)'_x = u'_x + v'_x$

分别应用复合函数求导法则

(2) $y'_x = (\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})'_x$

$$= \frac{x'_x \sqrt{1+x^2} - x(\sqrt{1+x^2})'_x}{(\sqrt{1+x^2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - x(\sqrt{1+x^2})'_{(1+x^2)} \cdot (1+x^2)'_x}{1+x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - x \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x}{1+x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

应用运算法则 $(\frac{u}{v})'_x = \frac{u'_x \cdot v - u \cdot v'_x}{v^2}$

应用复合函数求导法则

$$(3) y'_x = (\cos nx \cdot \sin^n x)'_x$$

$$= (\cos nx)'_x \cdot \sin^n x + \cos nx \cdot (\sin^n x)'_x$$

$$= (\cos nx)'_{nx} (nx)'_x \cdot \sin^n x + \cos nx \cdot (\sin^n x)'_{\sin x} \cdot (\sin x)'_x$$

$$= -(\sin nx) \cdot n \cdot \sin^n x + (\cos nx) \cdot n \sin^{n-1} x \cdot \cos x$$

$$= -n \sin nx \cdot \sin^n x + n \cos nx \sin^{n-1} x \cdot \cos x$$

$$= n \sin^{n-1} x (-\sin nx \cdot \sin x + \cos nx \cdot \cos x)$$

$$= n \sin^{n-1} x \cos (n+1)x$$

应用运算法则 $(u \cdot v)'_x = u'_x \cdot v + u \cdot v'_x$

分别应用复合函数求导法则

引例 3-3 的求解

解: (1) $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+ae^{-kt}} = 1$ (这意味着最终所有人都将知道此谣言).

$$(2) p'(t) = \left(\frac{1}{1+ae^{-kt}} \right)'_t = - \left(\frac{1}{1+ae^{-kt}} \right)'_{(1+ae^{-kt})} (1+ae^{-kt})'_t$$

$$= - \frac{1}{(1+ae^{-kt})^2} (-ake^{-kt})' = \frac{ake^{-kt}}{(1+ae^{-kt})^2}$$

$$(3) \text{把 } p=0.8, a=10, k=\frac{1}{2}, \text{代入 } p(t) = \frac{1}{1+ae^{-kt}}$$

得

$$0.8 = \frac{1}{1+10e^{-\frac{1}{2}t}}$$

则

$$1+10e^{-\frac{1}{2}t} = 1.25$$

$$10e^{-\frac{1}{2}t} = 0.25$$

两边取对数, $-\frac{1}{2}t = \ln 0.025$.

解得 $t = \ln 1600 \approx 7.38(\text{h})$.

$a=10, k=5, p(t)$ 的图形如图 3-7 所示, 这条曲线也称为 Logistic 曲线.

应用复合函数求导法则

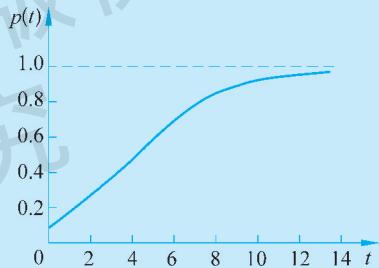


图 3-7 $p(t)$ 的图形

3.2.4 隐函数求导法

引例 3-4 【海面上油层的扩散问题】

从一艘破裂的油轮中渗漏出来的油在海面上逐渐扩散形成油层. 设在扩散的过程中, 油层的形状一直是一个厚度均匀的膜状圆柱体, 其体积也始终保持不变. 已知油层的厚度 h 的减少率与 h^3 成正比, 试证明其半径 r 的增加率与 r^3 成反比.

预备知识: 隐函数求导法.

如果变量 x, y 之间的函数关系 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的, 则称函数 $y = y(x)$ 为由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数. 下面介绍隐函数的求导方法.

1. 隐函数求导法

方程 $F(x, y) = 0$ 两边对 x 求导, 遇到含有 y 的项, 把 y 看作中间变量, 先对 y 求导, 再乘

以 y 对 x 的导数 y'_x , 得到一个含有 y'_x 的方程, 从中解出 y'_x 即可.

【例 3-17】 求由单位圆的方程 $x^2 + y^2 = 1$ 确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 y'_x , 并求在点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处的切线方程.

解: (1) 方程两边对 x 求导, 得

$$\begin{aligned}(x^2)'_x + (y^2)'_x &= 1'_x \\ 2x + (y^2)'_y \cdot y'_x &= 1'_x \\ 2x + 2yy'_x &= 0\end{aligned}$$

解得 $y'_x = -\frac{x}{y}$.

(2) 切线的斜率为

$$k = y'_x \Big|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -1$$

(3) 由点斜式给出切线方程

$$\begin{aligned}y - \frac{\sqrt{2}}{2} &= -\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ x + y &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

【思考题】 例 3-17 中的曲线和切线的图像是怎样的?

【例 3-18】 求由方程 $x \ln y + y \ln x = 0$ 确定的隐函数的导数 y'_x .

解: 方程两边对 x 求导, 得

$$\begin{aligned}x'_x \ln y + x(\ln y)'_x + y'_x \ln x + y(\ln x)'_x &= 0 \\ \ln y + x(\ln y)'_y \cdot y'_x + y'_x \ln x + y \frac{1}{x} &= 0 \\ \ln y + x \cdot \frac{1}{y} y'_x + y'_x \ln x + y \cdot \frac{1}{x} &= 0\end{aligned}$$

解出 y'_x , 得

$$y'_x = -\frac{y^2 + xy \ln y}{x^2 + xy \ln x}$$

引例 3-4 的分析和证明

分析: 由条件知油层的体积 $V = \pi r^2 h$, 半径 r 和厚度 h 均为时间 t 的函数, 即 $r = r(t)$, $h = h(t)$. 在等式 $V = \pi r^2 h$ 两边同时对 t 求导, 由于 π 和 V 都是常数, 所以有

$$2rh \frac{dr}{dt} + r^2 \frac{dh}{dt} = 0$$

证明: 将条件 $\frac{dh}{dt} = -k_1 h^3$ 代入上式, 可得

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{2h} \cdot \frac{dh}{dt} = -\frac{r}{2h} (-k_1 h^3) = \frac{k_1 r h^2}{2}$$

再将 $h = \frac{V}{\pi r^2}$ 代入上式, 又可得

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k_1 r h^2}{2} = \frac{k_1 r}{2} \left(\frac{V}{\pi r^2}\right)^2 = \frac{k_1 V^2}{2\pi^2 r^3} = \frac{k_2}{r^3} \quad \left(k_2 = \frac{k_1 V^2}{2\pi^2}\right)$$

即半径 r 的增加率与 r^3 成反比.

【例 3-19】 求曲线 $x^2 + xy + y^2 = 4$ 在点 $(2, -2)$ 处的切线方程.

解: (1) 找切点, 已知曲线的切点为 $(2, -2)$;

(2) 求切线的斜率, 方程两边对 x 求导, 得

$$\begin{aligned}(x^2)'_x + (xy)'_x + (y^2)'_x &= 4'_x \\ (x^2)'_x + x'_x y + xy'_x + (y^2)'_y \cdot y'_x &= 0 \\ 2x + y + xy'_x + 2yy'_x &= 0\end{aligned}$$

解出 y'_x , 得

$$y'_x = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

则切线的斜率为

$$k = y'_x|_{(2, -2)} = 1$$

(3) 求切线, 在点 $(2, -2)$ 处的切线方程是

$$y - (-2) = 1 \cdot (x - 2)$$

即

$$y - x + 4 = 0$$

2. 幂指函数的取对数求导法

通常将形如 $y = u(x)^{v(x)}$ 的函数称为幂指函数. 不能直接利用公式及运算法则求出这类函数的导数. 还有另一类因子之幂的连乘积的函数, 直接求导很烦琐. 对这两类函数, 可以利用对数的性质将其化简, 先将函数两边取以 e 为底的对数, 转化成隐函数形式, 然后用隐函数求导方法求出导数, 这种方法称为取对数求导法. 现举例说明.

【例 3-20】 求函数 $y = x^x$ 的导数 y'_x .

解: 函数 $y = x^x$ 为形如 $y = u(x)^{v(x)}$ 的幂指函数. 先将函数两边取以 e 为底的对数, 得

$$\ln y = x \ln x$$

两边对 x 求导, 得

$$\begin{aligned}(\ln y)'_y \cdot y'_x &= x' \ln x + x(\ln x)'_x \\ \frac{1}{y} y'_x &= \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\end{aligned}$$

即有

$$y'_x = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

【例 3-21】 求 $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}}$ 的导数 y'_x .

解: 若直接求导计算过程较烦琐, 则先取以 e 为底的对数并化简, 得

$$\ln y = \frac{1}{2} [\ln(x-1) + \ln(x-2) - \ln(x-3)]$$

两边同时对 x 求导, 得

$$\begin{aligned}(\ln y)'_x &= \frac{1}{2} \{ [\ln(x-1)]'_x + [\ln(x-2)]'_x - [\ln(x-3)]'_x \} \\ (\ln y)'_y \cdot y'_x &= \frac{1}{2} \{ [\ln(x-1)]'_{(x-1)} \cdot (x-1)'_x + [\ln(x-2)]'_{(x-2)} \cdot (x-2)'_x \\ &\quad - [\ln(x-3)]'_{(x-3)} \cdot (x-3)'_x \} \\ \frac{1}{y} y'_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} \right)\end{aligned}$$

$$y'_x = \frac{1}{2}y \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} \right)$$

因此

$$y'_x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} \right)$$

3.2.5 高阶导数

1. 二阶导数

定义 3.3 【二阶导数】 若函数 $y=f(x)$ 的一阶导数 $y'=f'(x)$ 在 x 处也可导, 则将一阶导数 $f'(x)$ 的导数 $[f'(x)]'$ 称为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数. 记为

$$f''(x) \quad \text{或} \quad y'' \quad \text{或} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{或} \quad \frac{d^2 f}{dx^2}$$

即

$$y'' = (y')' \quad \text{或} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

【例 3-22】 设 $f(x)=x^4-3x^3+2x^2+x-1$, 求 $f''(x)$.

解: 因为

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x + 1$$

所以

$$f''(x) = 12x^2 - 18x + 4$$

【思考题】 $f''(x_0)$ 与 $[f'(x_0)]'$ 是否相等?

【例 3-23】 设 $y=e^{-x^2}$, 求 y'' .

解: 因为

$$\begin{aligned} y'_x &= (e^{-x^2})'_x = (e^{-x^2})'_{-x^2} \cdot (-x^2)'_x \quad (\text{复合函数求导}) \\ &= -2xe^{-x^2} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} y'_x &= (-2xe^{-x^2})'_x = (-2x)'_x \cdot e^{-x^2} - 2x(e^{-x^2})'_x \quad (\text{四则运算和复合函数混合}) \\ &= -2e^{-x^2} + (-2x) \cdot (-2xe^{-x^2}) \\ &= 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \end{aligned}$$

2. n 阶导数

定义 3.4 【 n 阶导数】 若函数 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数仍在 x 处可导, 则 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 n 阶导数 ($n=3, 4, \dots, n-1, n$) 分别记为

$$f'''(x), f^{(4)}(x), \dots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x)$$

或

$$y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$$

或

$$\frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^4 y}{dx^4}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}$$

【注】 二阶及二阶以上的导数称为高阶导数.

【例 3-24】 设 $f(x)=x^2 \ln x$, 求 $f'''(2)$.

解: 因为

$$f'(x) = 2x \ln x + x$$

$$f''(x) = 2 \ln x + 3$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x}$$

所以

$$f'''(2) = 1$$

【例 3-25】 设 $y = x^n, y = e^x$, 求 $y^{(n)}$.

解: 因为 $y = x^n, y' = nx^{n-1}, y'' = n(n-1)x^{n-2}, \dots$, 一般地, $y^{(n)} = n!$;

因为 $y = e^x, y' = (e^x)' = e^x, y'' = (y')' = e^x, \dots$, 一般地, $y^{(n)} = e^x$.

【例 3-26】 设 $y = \ln(1+x)$, 求 $y^{(n)}$.

解: 因为

$$y' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$y'' = -(1+x)^{-2}$$

$$y''' = 2(1+x)^{-3}$$

$$y^{(4)} = -2 \cdot 3(1+x)^{-4} = -3! (1+x)^{-4} = (-1)^{4-1} (4-1)! (1+x)^{-4}$$

$$y^{(5)} = 2 \cdot 3 \cdot 4(1+x)^{-5} = 4! (1+x)^{-5} = (-1)^{5-1} (5-1)! (1+x)^{-5}$$

.....

所以

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n}$$

3.2.6 反函数的导数

指数函数和对数函数, 三角函数和反三角函数都互为反函数, 它们的导数之间存在什么关系呢? 我们先看一个简单的例子, 设 $y = 2x - 1$, 则

$$y'_x = 2$$

而 $y = 2x - 1$ 的直接反函数是 $x = \frac{y+1}{2}$, 这里的 y 是自变量, x 是 y 的函数. $y = 2x - 1$ 的直接反函数 $x = \frac{y+1}{2}$ 对 y 求导, 得

$$x'_y = \frac{1}{2}$$

在这里我们得到 $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

一般地, 设函数 $y = f(x)$ 在点 x 处有不等于 0 的导数 $f'(x)$, 并且其直接反函数 $x = \varphi(y)$ 在相应点处连续, 则反函数的导数 $\varphi'(y)$ 存在, 并且有

反函数的导数公式

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{或} \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

【例 3-27】 利用反函数的导数公式, 证明 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

证明: 对数函数 $y = \ln x$ 与指数函数 $x = e^y$ 互为反函数, 而

$$x'_y = (e^y)'_y = e^y$$

根据反函数的导数公式 $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$, 得

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

【能力训练 3.2】

1. 求下列函数的导数 $\frac{dy}{dx}$ 及其在 $x=1$ 点处的导数值 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1}$.

(1) $y = x$;

(2) $y = \sqrt{x}$;

(3) $y = \frac{1}{x}$;

(4) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

2. 求下列函数的导数 y'_x .

(1) $y = x^3 + \frac{1}{x^3}$;

(2) $y = \sqrt{x} + \cos x - 5$;

(3) $y = x \sin x - \frac{1}{2} \cos x$;

(4) $y = x^2 (\ln x + \sqrt{x})$;

(5) $y = x \cdot e^x \cdot \sin x$;

(6) $y = \frac{\tan x}{x}$;

(7) $y = \frac{2x}{1-x^2}$;

(8) $y = \frac{1}{x + \sin x}$.

3. 填空题.

(1) $(e^{-x})'_x = (\quad)'_x, (e^{-x})'_x = (\quad)'_x \cdot (\quad)'_x$;

(2) $(\ln 2x)'_x = (\quad)'_x \cdot (\quad)'_x = (\quad)$;

(3) $(\cos 3x)'_{3x} = (\quad), (\cos 3x)'_x = (\quad)'_x \cdot (\quad)'_x$;

(4) $(e^{x^2})'_{x^2} = (\quad), (e^{x^2})'_x = (\quad)'_x \cdot (\quad)'_x$;

(5) $(\sin^4 x)'_x = (\sin^4 x)'_x \cdot (\sin x)'_x = 4\sin^3 x \cdot \cos x$.

4. 求下列函数的导数 y'_x .

(1) $y = (2x-5)^3$;

(2) $y = \sin x^2$;

(3) $y = \sqrt{1+x^2}$;

(4) $y = \cos^3 x$;

(5) $y = \frac{1}{1+2x}$;

(6) $y = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$;

(7) $y = \ln \sin x$;

(8) $y = e^{\sqrt{x}}$.

5. 求下列函数的导数 y'_x .

(1) $y = e^{x^2} + e^{-2x}$;

(2) $y = x^2 \cos \frac{1}{x}$;

(3) $y = \sin 2x \cdot \cos^2 x$;

(4) $y = \sin^2 x + \sin x^2$;

(5) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(6) $y = e^{\cos \frac{1}{x}}$;

(7) $y = \ln (\ln (\ln x))$;

(8) $y = \sin^2 (1+x^2)$;

(9) $y = \sqrt{x + \ln^2 x}$;

(10) $y = \ln(x + \sqrt{a + x^2})$.

6. 求下列隐函数的导数 y'_x .

(1) $x + xy - y^2 = 0$;

(2) $y^2 = 2px$;

(3) $y = 1 - e^y \cdot x$;

(4) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;

(5) $\sin y + e^x - xy^2 = 0$.

7. 用对数求导法求下列函数的导数 y'_x .

(1) $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

(2) $y = (\ln x)^x$;

(3) $y = \left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^x$;

(4) $x^y = y^x$.

8. 求下列函数的二阶导数.

(1) $y = x^3 + 3x^2 + 2$;

(2) $y = 4x^2 + \ln x$;

(3) $y = \sin x + \cos x$;

(4) $y = x \sin x$;

(5) $y = \ln(1 - x^2)$;

(6) $y = e^{-x} + e^x$.

9. 求下列函数的高阶导数或指定点的高阶导数.

(1) $y = xe^x$, 求 $y^{(n)}$;

(2) $y = \ln(1+x)$, 求 $y^{(4)}$;

(3) $y = x \cos x$, 求 $y'''(0)$;

(4) $y = e^{2x}$, 求 $y^{(n)}$.

10. 在同一个坐标系里, 画出下列函数及其导数的图像.

(1) $y = x^2, y' = 2x, y'' = 2$;

(2) $y = \ln x, y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$.

3.3 微分及其计算

3.3.1 微分的定义及其计算

引例 3-5 【金属薄片的面积的变化量】

设正方形的金属薄片受热或遇冷后边长由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$, 问它的面积变化为多少? 如何近似表示面积的变化?

预备知识: 微分的定义, 微分的计算.

1. 微分的定义

由前面的讨论可知, 导数记号 $\frac{dy}{dx}$ 被看成一个完整的符号, 而不是两个量的比值. 本节将介绍在微分的意义下, 导数 $\frac{dy}{dx}$ 可理解为微分之商.

定义 3.5【微分】 设函数 $f(x)$ 可导, 对自变量 x 取增量 Δx .

(1) 规定: 自变量的微分 dx 就是自变量的增量 Δx , 即 $dx = \Delta x$;

(2) 函数的微分 dy 或 $df(x)$ 定义为导数 $f'(x)$ 与 dx 的乘积, 即

$$dy = f'(x)dx \quad \text{或} \quad df(x) = f'(x)dx$$

【注】【导数另一种解释】 由微分公式 $dy = f'(x) \cdot dx$ 可得 $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, 说明函数的导数 $f'(x)$ 是函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 之商, 因此导数又称微商, 可以说导数是微分的系数.

2. 微分的计算

(1) $y = f(x)$ 在点 x_0 处的微分 (简称点微分).

由微分定义可知, 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处具有导数 $f'(x_0)$, 对于自变量 x 的增量 Δx , 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的微分记作 $dy|_{x=x_0}$ 或 $df(x_0)$, 即

$$dy \Big|_{x=x_0} = df(x_0) = f'(x_0) \Delta x \quad (3-1)$$

引例 3-5 的分析

分析: 事实上, 金属薄片的原面积 $A_0 = x_0^2$, 当金属受热或遇冷后面积 $A_1 = (x_0 + \Delta x)^2$, 面积的变化量为

$$\begin{aligned} \Delta A &= (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 \\ &\approx 2x_0 \Delta x = dy \end{aligned}$$

ΔA 近似表示为 dy , 如图 3-8 所示. 面积的变化量 ΔA 主要由 $2x_0 \Delta x$ 确定, 而其近似值 $2x_0 \Delta x$ 就是函数 $A = x^2$ 在 x_0 处的微分.

【注】 微分的几何意义.

取定 x_0 及 Δx , 以及曲线 $y = f(x)$ 上的两点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 和 $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, 则过点 M_0 作曲线的切线 M_0T 的方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. 由图 3-9 可得, $PN = \tan \alpha \cdot \Delta x = f'(x_0) \Delta x = dy$, 即 $dy = PN$. 因此在几何上, dy 表示函数 $y = f(x)$ 的增量 Δy . 在微分意义下, 曲线段 M_0M_1 由直线 M_0P 来近似表示.

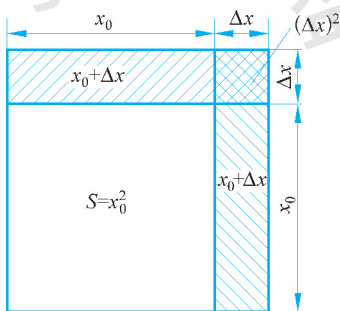


图 3-8 ΔA 近似表示为 dy

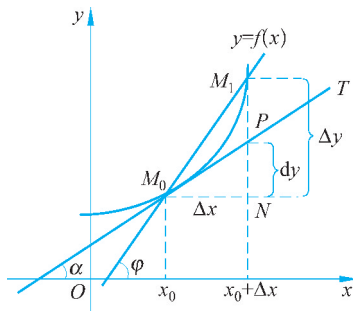


图 3-9 微分的几何意义

【例 3-28】 设函数 $y = x^2$, 求: ① 当 $\Delta x = 0.01$ 时, 该函数在 $x_0 = 1$ 处的改变量 Δy ; ② 微分.

解: ① 当 $\Delta x = 0.01$ 时, 该函数在 $x_0 = 1$ 处的改变量为

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(1 + 0.01) - f(1) = (1 + 0.01)^2 - 1^2 \\ &= 1.0201 - 1 = 0.0201 \end{aligned}$$

② 由式(3-1)得

$$dy \Big|_{\substack{x=1 \\ \Delta x=0.01}} = f'(1) \Delta x = 2x \Big|_{x=1} \cdot 0.01 = 0.02$$

(2) 函数 $y=f(x)$ 在任意点的微分(简称函数的微分).

由微分定义可知, 函数 $y=f(x)$ 的微分 dy 或 $df(x)$ 可用以下两种方法来计算.

第一种方法: 先计算函数的导数 $y'_x=f'_x(x)$, 再表示 $dy=f'_x(x)dx$;

第二种方法: 直接计算 $d[f(x)]=[f(x)]'_xdx$. 从运算模式来看微分

$$d[\boxed{f(x)}]=[\boxed{f(x)}]'_xdx$$

【例 3-29】 设 $y=x^3+3^x-\ln x+3^3+\ln 3$, 求 dy .

解: 用第一种方法求解,

因为

$$y'_x=(x^3+3^x-\ln x+3^3+\ln 3)'_x=3x^2+3^x\ln 3-\frac{1}{x}$$

所以

$$dy=y'_xdx=\left(3x^2+3^x\ln 3-\frac{1}{x}\right)dx$$

用第二种方法求解,

$$\begin{aligned} dy &= d(x^3+3^x-\ln x+3^3+\ln 3) \\ &= (x^3+3^x-\ln x+3^3+\ln 3)'_xdx \\ &= \left(3x^2+3^x\ln 3-\frac{1}{x}\right)dx \end{aligned}$$

【例 3-30】 设 $y=x^2\sin x$, 求 dy .

解: 用第一种方法求解,

因为

$$y'_x=(x^2\sin x)'_x=2x\sin x+x^2\cos x$$

所以

$$dy=y'_xdx=(2x\sin x+x^2\cos x)dx$$

用第二种方法求解,

$$\begin{aligned} dy &= d(x^2\sin x) = (x^2\sin x)'_xdx \\ &= (2x\sin x+x^2\cos x)dx \end{aligned}$$

【例 3-31】 在下列等式的括号中填入适当的函数.

(1) $d(x^2+1)=(\quad)dx$;

(2) $x dx=(\quad)d(x^2+1)$;

(3) $d(\quad)=\sin x dx$.

解: (1) 因为 $d(x^2+1)=(x^2+1)'_xdx=2xdx$, 所以 $d(x^2+1)=(2x)dx$;

(2) 由于 $d(x^2+1)=2xdx$, 对比等式左端可知, 括号中应填 $\frac{1}{2}$, 即

$$x dx = \left(\frac{1}{2}\right) d(x^2+1)$$

(3) 由于 $d(\cos x)=-\sin x dx$, 对比等式左端可知

$$d(-\cos x)=\sin x dx$$

又因为 $C'=0$, 因此

$$d(-\cos x + C) = \sin x dx$$

【例 3-32】 设 $y = \ln(1-x^2)$, 求 dy .

解: 用第一种方法求解,

因为

$$\begin{aligned} y'_x &= [\ln(1-x^2)]'_x = [\ln(1-x^2)]'_{(1-x^2)} \cdot (1-x^2)'_x \\ &= \frac{1}{1-x^2}(-2x) = \frac{-2x}{1-x^2} \end{aligned}$$

所以

$$dy = y'_x dx = \frac{-2x}{1-x^2} dx$$

用第二种方法求解,

$$\begin{aligned} dy &= d[\ln(1-x^2)] = [\ln(1-x^2)]'_x dx \\ &= [\ln(1-x^2)]'_{(1-x^2)} \cdot (1-x^2)'_x dx \\ &= \frac{1}{1-x^2}(-2x) dx = \frac{-2x}{1-x^2} dx \end{aligned}$$

【注 1】【微分法】 常把求导和求微分称为微分运算, 称计算函数微分的方法为微分法.

【注 2】【引进微分是多余的吗】 虽然可微与可导是等价的, 但是引进微分并不是多余的. 这是因为, 从定义可知, 微分 $f'(x_0)\Delta x$ 可近似表示函数的增量 Δy , 比直接计算 Δy 要方便和快捷; 在积分学中, 微分是表达“以直代曲”基本思想的基础, 也是表达和计算不定积分的重要工具.

* 3.3.2 微分的近似计算

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导且导数 $f'(x_0) \neq 0$, 当 $|\Delta x|$ 很小时, 有近似公式

$$\Delta y \approx dy$$

即函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处增量 Δy 的近似公式为 $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$, 函数值 $f(x_0+\Delta x)$ 的近似公式为 $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

在上式中, 令 $x = x_0 + \Delta x$, 则 $\Delta x = x - x_0$, 于是

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

当令 $x_0=0$ 时, 假定 $|x|$ 是较小的数, 则有函数 $f(x)$ 的近似公式 $f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x$ ($|x|$ 较小时).

应用上式容易推导出如下结果.

常用的近似公式(假定 $|x|$ 是较小的数)

- (1) $e^x \approx 1+x$;
- (2) $\ln(1+x) \approx x$;
- (3) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$;
- (4) $\sin x \approx x$ (x 用弧度表示);
- (5) $\tan x \approx x$ (x 用弧度表示).

【思考题】 $\Delta y \approx dy$ 成立的条件是什么?

【例 3-33】 求 $\sqrt[4]{1.02}$ 的近似值.

解: 根据函数值 $f(x_0 + \Delta x)$ 的近似公式, 令 $f(x) = \sqrt[4]{x}$, 则有 $x = 1.02$, 令 $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.02$, 则

$$f(x_0 + \Delta x) = \sqrt[4]{1.02}, \quad f(x_0) = f(1) = 1,$$

$$f'(x) = (\sqrt[4]{x})'_x = (x^{\frac{1}{4}})'_x = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}, \quad f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{4}$$

因为

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

所以

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{1.02} &= f(1 + 0.02) \approx f(1) + f'(1) \times 0.02 \\ &= 1 + \frac{1}{4} \times 0.02 = 1.005\end{aligned}$$

【例 3-34】【气球的体积近似值】 一个充满气的气球半径为 5m, 升空后, 因外部气压降低, 气球的半径增大了 10cm, 问气球的体积近似增加多少?

解: 气球的体积为 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, 当半径 r 由 5m 增加到 $(5+0.1)$ m 时, 体积的增量为 ΔV .

根据函数增量 Δy 的近似公式 $\Delta V \approx dV$.

而 $dV = V' \Delta r = 4\pi r^2 \Delta r$, 即 $\Delta V \approx dV = 4\pi r^2 \Delta r$, 此处 $\Delta r = 0.1$ m, $r = 5$ m, 代入上式得体积近似增加值

$$\Delta V \approx 4 \times 3.14 \times 5^2 \times 0.1 = 31.4(\text{m}^3)$$

【能力训练 3.3】

1. 求下列函数的微分 dy .

(1) $y = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x}$;

(2) $y = x \ln x$;

(3) $y = \frac{x}{1+x}$;

(4) $y = e^x \sin 2x$;

(5) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

(6) $y = [\ln(1-2x)]^2$.

2. 将适当的函数填入下列括号内, 使等式成立.

(1) $d(\quad) = 2dx$;

(2) $d(\quad) = xdx$;

(3) $d(\quad) = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$;

(4) $d(\quad) = \frac{1}{x^2}dx$;

(5) $d(\quad) = 2^x dx$;

(6) $d(\quad) = 2(x+1)dx$.

3. 利用微分的近似计算公式, 求下列各式的近似值(保留 3 位小数).

(1) $e^{1.01}$;

(2) $\sqrt[3]{998}$;

(3) $\sin 29^\circ$.

4. 设扇形的圆心角 $\alpha = 60^\circ$, 半径 $R = 100$ cm. 问:

(1) 如果 R 不变, α 减小 $30'$, 那么扇形的面积大约改变多少?

(2) 如果 α 不变, R 增大 1cm, 那么扇形的面积大约改变多少?

5. 【钟摆的周期缩短】一个机械挂钟的钟摆的周期为 1s, 在冬季, 摆长因热胀冷缩而缩短了 0.01cm, 已知钟摆的周期为 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 其中 $g=980\text{cm/s}^2$. 问: (1) 钟摆的周期缩短了多少? (2) 这个钟每天大约快了多少?

3.4 二元函数的偏导数

3.4.1 空间直角坐标系与二元函数

1. 空间直角坐标系的建立

将数轴(一维)、平面直角坐标系(二维)进一步推广建立空间直角坐标系(三维).

(1) 坐标轴.

过平面直角坐标系 Oxy 的原点 O 作一条垂直于 Oxy 平面的数轴—— z 轴. x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴)都以点 O 为原点, 且具有相同的长度单位.

在建立空间直角坐标系时, 通常将 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)安排在水平位置, 而将 z 轴(竖轴)放在铅直方向上.

(2) 右手系.

3 个坐标轴方向由右手法则确定: 用右手握住 z 轴, 当右手的 4 个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时, 大拇指的指向就是 z 轴的正向, 如图 3-10 所示.

(3) 坐标平面.

空间直角坐标系的任意两条坐标轴确定的平面称为坐标平面. 由 x 轴与 y 轴确定的平面称为 xOy 坐标面. 类似地, 有 yOz 坐标面和 zOx 坐标面. 3 个两两相互垂直的坐标平面把空间分成 8 个部分, 每一部分称为一个卦限. 8 个卦限分别用 I、II、III、…、VIII 表示, 如图 3-11 所示.

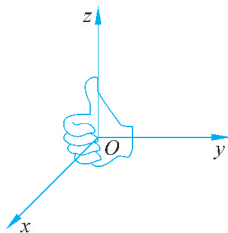


图 3-10 右手系

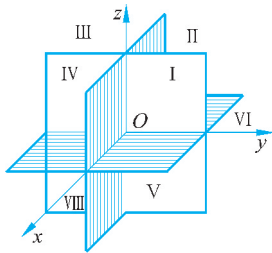


图 3-11 坐标平面

(4) 空间点的坐标.

空间任意一点 M 和一个三元有序实数组 (x, y, z) 之间建立了一一对应关系, 空间内任意点 M 的坐标记为 $M(x, y, z)$. 有序数组 (x, y, z) 称为点的坐标. x, y, z 分别称为点的横坐标、纵坐标、竖坐标.

【例 3-35】指出下列各点所在卦限: $(1, -3, 4), (-2, 1, -1), (-2, -1, 3)$.

解: 点 $(1, -3, 4)$ 在第四卦限, 点 $(-2, 1, -1)$ 在第六卦限, 点 $(-2, -1, 3)$ 在第三卦限.

2. 空间曲面介绍

(1) 两点间距离公式.

设空间任意两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 则两点间距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

特别地, 空间任意点 $M(x, y, z)$ 与原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离 $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(2) 球面.

设球心为 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 球半径为 R , 在球面上任取一点 $P(x, y, z)$, 根据两点间距离公式则该球面的方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

特别地, 球心在原点 $O(0, 0, 0)$, 半径为 R 的球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

(3) 柱面.

动直线 L 沿已知曲线 C 平行移动所形成的曲面称为柱面, 其中 L 称为柱面的母线, C 称为柱面的准线. 设准线是 xOy 平面内的曲线 C , 对应方程为 $F(x, y) = 0$, 母线 L 平行于 z 轴的柱面方程为 $F(x, y) = 0$. 如图 3-12 所示.

准线是二次曲线的柱面称为二次柱面. 常见的二次柱面有以下几种.

- ① 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (见图 3-13).

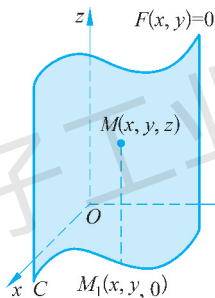


图 3-12 $F(x, y) = 0$

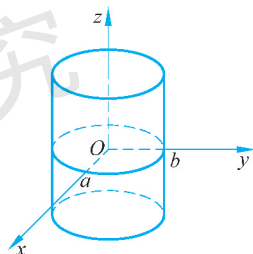


图 3-13 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- ② 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (见图 3-14).

- ③ 抛物柱面 $y = x^2$ (见图 3-15).

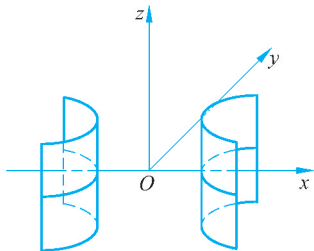


图 3-14 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

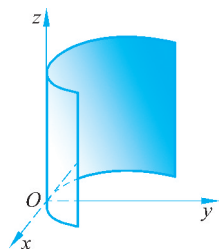


图 3-15 $y = x^2$

【例 3-36】 指出下列方程在平面直角坐标系和空间直角坐标系中所表示的图形。

- (1) $x^2 + y^2 = 1$; (2) $x^2 - y^2 = 1$; (3) $y^2 = 2px (p > 0)$.

解:(1) 方程 $x^2 + y^2 = 1$ 在平面表示单位圆周方程, 在空间表示圆柱面;

(2) 方程 $x^2 - y^2 = 1$ 在平面表示双曲线, 在空间表示双曲柱面;

(3) 方程 $y^2 = 2px (p > 0)$ 在平面表示抛物线, 在空间表示抛物柱面.

3. 二元函数

【例 3-37】 圆柱体的体积 V 和它的底半径 r 、高 h 之间的关系是

$$V = \pi r^2 h$$

这里, V 随着 r 和 h 的变化而变化, 当 r, h 在一定范围内 ($r > 0, h > 0$) 取定一组值时, V 的对应值就随之确定.

定义 3.6 设有三个变量 x, y 和 z , 当变量 x, y 在一定范围内任意取定一对数值时, 变量 z 按照一定的规律 f 总有确定的数值与它们对应, 则称 z 是 x, y 的二元函数记为

$$z = f(x, y)$$

其中, x, y 称为自变量, z 称为因变量. 自变量 x, y 的取值范围称为函数的定义域, 常用字母 D 来表示.

二元函数在点 (x_0, y_0) 处的函数值记为 $z \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$, 或 $z \Big|_{(x_0, y_0)}$, 或 $f(x_0, y_0)$.

研究二元函数, 就要利用空间直角坐标系. 二元函数的定义域比较复杂, 可以是整个 Oxy 坐标平面, 也可能是 Oxy 坐标平面上的一条曲线或平面的某部分等. 二元函数的图形是空间曲面. 例如, $z = x^2 + y^2$ 表示旋转抛物面.

【例 3-38】 设 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, 求 $f(1, 2)$.

解: $f(1, 2) = 1^2 + 1 \times 2 + 2^2 = 7$.

【例 3-39】 求下列函数 $z = f(x, y)$ 的定义域, 并画出定义域的图形.

(1) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$;

(2) $z = \ln(x + y)$;

(3) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \ln(x^2 + y^2 - 1)$.

解: (1) 由 $R^2 - x^2 - y^2 \geq 0$ 得 $x^2 + y^2 \leq R^2$, 则定义域为 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 如图 3-16 所示.

(2) 函数 z 必须满足 $x + y > 0$, 则定义域为 $D = \{(x, y) \mid x + y > 0\}$, 如图 3-17 所示.

(3) 由 $\begin{cases} 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 1 > 0 \end{cases}$ 得 $1 < x^2 + y^2 \leq 4$, 则定义域为 $D = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$, 如图 3-18 所示.

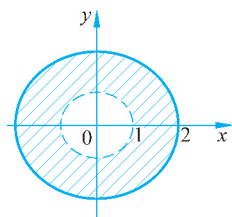
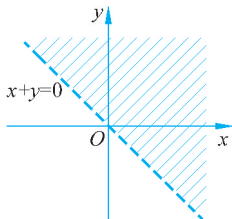
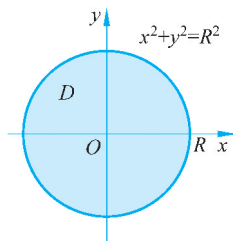


图 3-16 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 图 3-17 $D = \{(x, y) \mid x + y > 0\}$ 图 3-18 $D = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$

3.4.2 二元函数的偏导数

1. 二元函数的偏导数

一元函数的导数概念可类似地推广到二元函数. 在一元函数微分学中, 我们在研究函数的变化率的过程中引入了导数的概念.

定义 3.7【二元函数 $z=f(x,y)$ 对 x,y 的一阶偏导数】 设二元函数 $z=f(x,y), (x,y) \in D$, 若 x 变化, 自变量 y 固定, 此时关于 x 的一元函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的导数, 称为二元函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的一阶偏导函数, 简称偏导数, 记作

$$f'_x, z'_x \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ 或 } \frac{\partial z}{\partial x}$$

同理, 有二元函数 $z=f(x,y)$ 对 y 的一阶偏导函数, 记作

$$f'_y, z'_y \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ 或 } \frac{\partial z}{\partial y}$$

【例 3-40】 设 $z=x^y (x>0)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解: $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$ (将 y 看作常量, $z=x^y$ 为幂函数)

$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y \ln x$ (将 x 看作常量, $z=x^y$ 为指数函数)

由偏导数的定义可知, 在求二元函数对某一自变量的偏导数时, 只需要将其他自变量看成常数, 用一元函数求导法则(和、差、积、商、复合函数的求导法则)即可求得.

【例 3-41】 求 $z=x^2+3xy^3+e^{x+y}$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解: $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y^3+e^{x+y}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=9xy^2+e^{x+y}.$$

【例 3-42】 设 $f(x,y)=x^2y-\sqrt{x^2+y^2}$, 求 $f'_x(3,4), f'_y(0,5)$.

解: 因为

$$f'_x(x,y)=2xy-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f'_y(x,y)=x^2-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

所以

$$f'_x(3,4)=2 \times 3 \times 4 - \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=24 - \frac{3}{5}=23 \frac{2}{5}$$

$$f'_y(0,5)=0^2 - \frac{5}{\sqrt{0^2+5^2}}=-1$$

2. 一元隐函数求导的另一种方法

变量 x,y 之间的函数关系 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的, 方程两边对 x 求导, 则有

$$F'_x(x,y) + F'_y(x,y) \cdot y'_x = 0$$

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

因此,设有二元函数 $F(x,y)$, 只要将二元函数 $F(x,y)$ 分别对 x, y 求导, 则可由上式得到 y'_x .

【例 3-43】 用上述方法求由方程 $x \ln y + y \ln x = 0$ 所确定的隐函数的导数 y'_x .

解: 根据方程 $x \ln y + y \ln x = 0$, 设二元函数 $F(x,y) = x \ln y + y \ln x$, 由

$$F'_x(x,y) = \ln y + \frac{y}{x}, \quad F'_y(x,y) = \frac{x}{y} + \ln x$$

可得

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{\ln y + \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + \ln x} = -\frac{y^2 + xy \ln y}{x^2 + xy \ln x}$$

3.4.3 二元函数的二阶偏导数

定义 3.8【二阶偏导数】 二元函数 $z = f(x,y)$ 的偏导函数 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 仍是以 x, y 为自变量的二元函数, 如果它们关于 x, y 的偏导数存在, 则称这些偏导数为函数 $f(x,y)$ 的二阶偏导数. 记作:

- (1) $z = f(x,y)$ 关于 x 的二阶偏导数 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y) = z''_{xx}$;
- (2) $z = f(x,y)$ 关于 y 的二阶偏导数 $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y) = z''_{yy}$;
- (3) $z = f(x,y)$ 关于 x 和 y 的二阶混合偏导数 $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y) = z''_{xy}$;
- (4) $z = f(x,y)$ 关于 y 和 x 的二阶混合偏导数 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y) = z''_{yx}$.

二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 的区别在于先后次序不同, 它们也有可能不相等. 若函数 $f(x,y)$ 的二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 在区域 D 内连续, 则

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

【例 3-44】 求 $z = x^4 + y^4 - 4x^2y^3$ 的二阶偏导数 $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy}$.

$$\begin{aligned} \text{解: } z'_x &= 4x^3 - 8xy^3, & z'_y &= 4y^3 - 12x^2y^2, \\ z''_{xx} &= 12x^2 - 8y^3, & z''_{xy} &= -24xy^2, \\ z''_{yx} &= -24xy^2, & z''_{yy} &= 12y^2 - 24x^2y. \end{aligned}$$

【例 3-45】 求 $z = xe^x \sin y$ 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解: } \frac{\partial z}{\partial x} &= e^x \sin y + xe^x \sin y = (1+x)e^x \sin y, & \frac{\partial z}{\partial y} &= xe^x \cos y, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= e^x \sin y + (1+x)e^x \sin y, & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= (1+x)e^x \cos y, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= e^x \cos y + xe^x \cos y = (1+x)e^x \cos y, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -xe^x \sin y. \end{aligned}$$

【能力训练 3.4】

1. 求下列函数的定义域,并画图.

$$(1) z = \sqrt{x} + y;$$

$$(2) z = \ln(x + y);$$

$$(3) z = \sqrt{y - x^2};$$

$$(4) z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

2. 求下列函数的一阶偏导数.

$$(1) z = 15 + x^2 + 2xy + 3y^2;$$

$$(2) z = xy^2;$$

$$(3) z = e^{xy};$$

$$(4) z = \ln(x^2 + y^2);$$

$$(5) z = \sqrt{xy};$$

$$(6) z = \frac{x+y}{x-y}.$$

3. 求下列函数的二阶偏导数或指定点的二阶偏导数.

$$(1) z = x^2y^2 + x + y^2, \text{求 } z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy};$$

$$(2) z = xy - \ln xy, \text{求 } z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy};$$

$$(3) z = e^{xy} + x, \text{求 } z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy};$$

$$(4) z = x^3y + \ln(x^2 + y^2), \text{求 } z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy}, z''_{xy}(1, 1).$$

学 法 建 议

1. 本章重点介绍导数的概念及其几何意义、计算导数的方法,以及初等函数的二阶导数的求法,难点是求解复合函数和隐函数的导数.

2. 要正确理解导数与微分的概念,弄清各概念之间的区别与联系.例如,可导必连续,反之,不一定成立.可导与可微是等价的.这里等价的含义是:函数在某点 x 处可导必定得出在该点可微;反之,函数在某点 x 处可微,必能推出在该点可导.但并不意味着可导与可微是同一概念.导数是函数改变量 Δy 与自变量改变量 Δx 之比的极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$,微分是函数增量的线性主部 $\Delta y = dy + O(\Delta x) = A \cdot \Delta x + O(\Delta x)$,在概念上两者有着本质的区别.

3. 复合函数求导法既是重点,又是难点,不易掌握,怎样才能达到事半功倍的效果呢?

首先,熟记求导基本公式,理解本质公式.其次,对于求导公式 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$,必须弄清每一项是对哪个变量求导的.例如, $y = f[\varphi(x)]$, $y' \neq f'[\varphi(x)]$, 因为 $y' = \frac{dy}{dx}$, $f'[\varphi(x)] = \frac{dy}{d\varphi(x)}$. 理解公式的同时还要和微商结合起来,右边的微分约分之后必须等于左边的微商.另外,要想既迅速又准确地求导,必须多做题.最后,一定要牢记,导数是函数改变量与自变量改变量之比的极限,不能因为有了基本初等函数的求导公式及求导法则,就认为求导仅是利用这些公式与法则的某种运算而忘记导数的本质.

4. 利用导数解决实际问题,本章主要有三类题型.一类是几何应用,用来求切线,其关键是求出切线的斜率 $k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ 及切点的坐标;另一类是变化率模型,在求变化率时,一定要弄清是求解哪个变量的变化率,如速度 $v = \frac{ds}{dt}$, 加速度 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$. 再有一类是用微分近似求解

某个量的改变量,解决这类问题的关键是选择合适的函数关系 $y=f(x)$,以及正确选取 x_0 及 Δx ,切勿用中学数学方法求问题的准确值,那是不符合题意的.

5. 在由偏导数求解时,首先要确定是对哪一个自变量的偏导数,然后按一元函数的求导方法求解.

【综合能力训练 3】

(基础题)

1. 求下列函数的导数.

$$(1) y=x^3(1-\sqrt{x});$$

$$(2) y=\ln(1-2x^2);$$

$$(3) y=\sqrt{1+\ln^2 x};$$

$$(4) y=(x+\sin^2 x)^4;$$

$$(5) y=\frac{1}{1+\sqrt{x}}-\frac{1}{1-\sqrt{x}};$$

$$(6) y=\sin^2 x+\sin x^2;$$

$$(7) y=\ln\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{2+x}};$$

$$(8) y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

2. 求由下列方程所确定的函数的导数.

$$(1) xe^y+ye^x=0;$$

$$(2) e^{xy}+y\ln x=\cos 2x;$$

$$(3) e^{x+y}-xy^2=1.$$

3. 求下列函数的导数值.

$$(1) \text{ 设 } f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}, \text{ 求 } y'(4);$$

$$(2) \text{ 设 } y=x\ln(x+1), \text{ 求 } y''(1);$$

$$(3) \text{ 设 } y=y(x) \text{ 由方程 } x(1+y^2)-\ln(x^2+2y)=0 \text{ 确定, 求 } y'(0).$$

4. 求下列函数的微分 dy .

$$(1) y=x^2e^{-2x};$$

$$(2) y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x;$$

$$(3) y=e^{-3\sin^2\frac{1}{x}};$$

$$(4) y=(x^2-2x+3)e^{-x}.$$

5. 求下列函数的一阶偏导数.

$$(1) z=e^{\frac{y}{x}}+e^{\frac{x}{y}};$$

$$(2) z=\frac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2);$$

$$(3) z=\sqrt{\frac{y}{x}};$$

$$(4) z=x\ln\frac{x}{y}.$$

6. 求下列函数的二阶偏导数.

$$(1) z=x\ln(xy);$$

$$(2) z=e^{x^2-y^2}.$$

(应用题)

1. 【切线方程】求曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程.

2. 【金属圆管截面面积】金属管的内半径为 10cm , 当管壁厚度为 0.05cm 时, 利用微分来近似计算圆管截面面积.

3. 【球的体积的相对误差】已知测量的球的直径 D 有 1% 的相对误差, 问球的体积的相对

误差是多少?

【数学文化聚焦】

贝克莱悖论与第二次数学危机

当年牛顿在研究物体运动时,少不了要计算速度.例如,物体从0点出发,符合运动规律为 $s=t^2$ 的变速直线运动.其中 s 是物体走过的路程, t 是所需的时间.现在要求第2秒末的瞬时速度.按牛顿的算法,先给出一小段时间 Δt ,那么在 Δt 内物体走过的路程为

$$\Delta s = (2 + \Delta t)^2 - 2^2 = 4\Delta t + (\Delta t)^2$$

在 Δt 内物体运动的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 4 + \Delta t$$

牛顿很清楚,只要 Δt 不等于0,平均速度 $\bar{v}$ 总成不了瞬时速度 v ,于是牛顿大胆地令最后结果 $4 + \Delta t$ 中的 $\Delta t = 0$,求出了第2秒末的瞬时速度为4,令他兴奋的是这样处理求出的运动速度和实验结果相当吻合.

然而,英国哲学家贝克莱(George Berkeley, 1685—1753)在1734年将矛头指向微积分的基础——无穷小的问题,提出了贝克莱悖论.贝克莱质疑牛顿在求瞬时速度的过程中,一方面用 Δt 除等式两边(当然作为除数的 Δt 不能等于0);另一方面又令结果中的 Δt 等于0,这完全是自相矛盾的! Δt 既不等于0又等于0,招之即来,挥之即去,难道“ Δt 是逝去量的鬼魂”?

Δt 这个无穷小量究竟是不是0?无穷小及其分析是否合理?由此而引起了数学界甚至哲学界长达一个半世纪的争论,导致了数学史上的第二次数学危机.

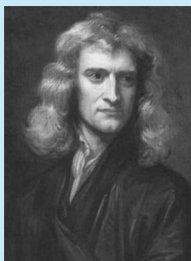
针对贝克莱的攻击,牛顿与莱布尼茨都曾试图通过完善自己的理论来解决,但都没有获得完全成功.这使数学家们陷入了尴尬境地.一方面微积分在应用中大获成功,另一方面其自身却存在着逻辑矛盾,即贝克莱悖论.



莱布尼茨

“向前进,向前进,你就会获得信念!”达朗贝尔吹起奋勇向前的号角,在此号角的鼓舞下,18世纪的数学家们开始抛开基础的不严格,论证的不严密,而是更多地依赖于直观去开创新的数学领地.于是一套又一套的创新方法、新结论及新分支纷纷涌现.经过一个多世纪的漫漫征程,微积分理论获得了空前丰富.然而,微积分理论的不严密也导致越来越多的谬误.

直到19世纪初,情况才有所变化,法国科学院的数学家以柯西(A. L. Cauchy, 1789—1857)为首,对微积分的理论进行认真研究,建立了极限理论.后来,经德国数学家维尔斯特拉斯(K. T. W. Weierstrass, 1815—1897)进一步严格化,极限理论成为微积分的坚实基础.所谓“ Δt 是逝去量的鬼魂”也得到了令人满意的解释.



牛顿



贝克莱