第 3 章

非线性方程（组）解法

非线性在实际问题中经常出现，并且在科学与工程计算中的地位越来越重要，很多我们熟悉的线性模型都是在一定条件下由非线性问题简化得到的。为了得到更符合实际的答案，往往需要直接研究非线性模型，从而产生了非线性科学，它是 21 世纪科学技术发展的重要支柱。非线性问题的数学模型有无限维的，如微分方程；也有有限维的。但用计算机进行科学计算时，非线性问题的数学模型要转化为非线性的单个方程或方程组的求解，从线性到非线性是一个质的变化，方程的性质有本质的不同，求解方法也有很大差别。本章先讨论单个方程的解法，然后简单介绍非线性方程组的数值解法。

3.1 二分法

二分法也称为逐次分半法，它的基本思想是：先确定方程 $f(x)=0$ 的根的区间 (a,b)，再把区间逐次二等分。

3.1.1 判别有根区间

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么由零点定理可知，方程 $f(x)=0$ 在开区间 (a,b) 上至少有一个实根。同时若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调的，那么方程 $f(x)=0$ 在开区间 (a,b) 上有唯一实根。

3.1.2 用二分法求方程 $f(x)$=0 的实根近似值 x_k 的步骤

步骤 1 若对于 $a<b$，有 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在 (a,b) 上 $f(x)=0$ 至少有一个实根。

步骤 2 取 (a,b) 的中点 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$，计算 $f(x_0)$。

步骤 3 若 $f(x_0)=0$，则 x_0 是 $f(x)=0$ 的实根，停止计算，输出结果，实根近似值为 x_0。若 $f(a)\cdot f(x_0)<0$，则在 (a,x_0) 上 $f(x)=0$ 至少有一个实根，取 $a_1=a$，$b_1=x_0$。若 $f(a)\cdot f(x_0)>0$，则取 $a_1=x_0$，$b_1=b$。

步骤 4 若 $\frac{1}{2}|b_k-a_k|\leqslant\varepsilon$（$\varepsilon$ 为预先给定的要求精度），退出计算，输出结果，近似值为 $\frac{a_k+b_k}{2}$；反之，重复步骤 2 和步骤 3。

假设方程 $f(x)=0$ 的实根为 x^*，第 k 次二分后所得的近似值为 x_k，其误差一定满足下式：

$$|x^*-x_k|\leqslant\frac{b_k-a_k}{2}=\frac{b-a}{2^{k+1}}$$

上述二分法的优点是算法简单，且是收敛的；缺点是收敛太慢，故一般不单独将其用于求根，只用于求得一个根的较好的近似值。

例 1 求方程

$$f(x)=x^3-x-1=0$$

在区间 $[1.0,1.5]$ 上的一个实根，要求精确到小数点后第 2 位。

解： 由题意可知，$a=1.0$，$b=1.5$，且 $f(a)<0$，$f(b)>0$。取 $[a,b]$ 的中点 $x_0=1.25$，将区间二等分，由于 $f(x_0)<0$，即 $f(x_0)$ 与 $f(a)$ 同号，所以所求的根必在 x_0 右侧，这时令 $a_1=x_0=1.25$，$b_1=b=1.5$，得到新的有根区间 $[a_1,b_1]$。

如此反复二分下去，二分过程不再赘述。现在我们预估所要二分的次数，由误差估计式可知，只要二分 6 次（k=6），便能达到预定的精度，即

$$|x^*-x_6|\leqslant 0.005$$

二分法的计算结果如下所示。

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$ 符号
0	1.0	1.5	1.25	−
1	1.25		1.375	+
2		1.375	1.3125	−
3	1.3125		1.3438	+
4		1.3438	1.3281	+
5		1.3281	1.3203	−
6	1.3203		1.3242	−

3.2　不动点迭代法

3.2.1　不动点与不动点迭代法

将方程 $f(x)=0$ 改写成等价的形式：

$$x=\varphi(x) \tag{3.2.1}$$

若 x^* 满足 $f(x^*)=0$，则 $x^*=\varphi(x^*)$；反之亦然。我们称 x^* 为函数 $\varphi(x)$ 的一个不动点。求 $f(x)$ 的零点等价于求 $\varphi(x)$ 的不动点，选择一个初始近似值 x_0，将它代入式（3.2.1）右端，即可求得

$$x_1=\varphi(x_0)$$

如此反复迭代计算可得

$$x_{k+1}=\varphi(x_k) \quad (k=0,1,\cdots) \tag{3.2.2}$$

$\varphi(x)$ 称为迭代函数。如果对任何 $x_0\in[a,b]$，由式（3.2.2）得到的序列 $\{x_k\}$ 有极限，即

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x^*$$

则称迭代方程（3.2.2）收敛，且 $x^*=\varphi(x^*)$ 为 $\varphi(x)$ 的不动点，故称上述方法为不动点迭代法。

例 2　求方程

$$f(x)=x^3-x-1=0 \tag{3.2.3}$$

在 $x_0=1.5$ 附近的根 x^*。

解：设将方程（3.2.3）改写成如下形式：

$$x=\sqrt[3]{x+1}$$

据此建立如下迭代公式：

$$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+1} \quad (k=0,1,\cdots)$$

各步迭代的结果如下所示。由各步迭代的结果可知，如果仅取 6 位有效数字，那么结果 x_7 与 x_8 完全相同，这时可以认为 x_7 实际上已满足方程（3.2.3），即所求的根。

k	x_k	k	x_k
0	1.5	5	1.32476
1	1.35721	6	1.32473
2	1.33086	7	1.32472
3	1.32588	8	1.32472
4	1.32494		

应当指出的是，迭代法的效果并不是总能令人满意。譬如，设由方程（3.2.3）的另一种等价形式：

$$x = x^3 - 1$$

建立迭代公式

$$x_{k+1} = x_k^3 - 1$$

迭代初值仍取 $x_0 = 1.5$，则有

$$x_1 = 2.375\text{，}\quad x_2 = 12.39$$

此时继续迭代下去已经没有必要，因为结果会越来越大，不可能趋于某个极限。这种不收敛的迭代过程是发散的。一个发散的迭代过程即使进行了千百次迭代，其结果也是毫无价值的。

例 2 表明，原方程转化为式（3.2.1）的形式不同，所产生的迭代序列也不同，有的收敛，有的发散，只有收敛的迭代过程（3.2.2）才有意义，因此我们需要研究 $\varphi(x)$ 的不动点的存在性及迭代法（3.2.2）的收敛性。

3.2.2　不动点迭代法的收敛性

现在，我们考察 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不动点存在唯一性。

定理 1　设 $\varphi(x) \in C[a,b]$，且满足如下两个条件：

（1）对任意 $x \in [a,b]$ 有 $a \leqslant \varphi(x) \leqslant b$；

（2）存在正常数 $L < 1$，使对任意 $x, y \in [a,b]$ 都有

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant L|x - y| \tag{3.2.4}$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一的不动点 x^*。

证明　首先，证明不动点的存在性。若 $\varphi(a) = a$ 或 $\varphi(b) = b$，显然 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在不动点。因为 $a \leqslant \varphi(x) \leqslant b$，所以设 $\varphi(a) > a$ 及 $\varphi(b) < b$，定义函数

$$f(x) = \varphi(x) - x$$

显然 $f(x) \in C[a,b]$，且满足 $f(a) = \varphi(a) - a > 0$，$f(b) = \varphi(b) - b < 0$，由连续函数性质

可知，存在 $x^* \in (a,b)$ 使 $f(x^*)=0$，即 $x^*=\varphi(x^*)$，且 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点。

其次，证明不动点的唯一性。设 $x_1^*, x_2^* \in [\mathrm{a},\mathrm{b}]$，且都是 $\varphi(x)$ 的不动点，由式（3.2.4）可得

$$|x_1^*-x_2^*|=|\varphi(x_1^*)-\varphi(x_2^*)|\leqslant L|x_1^*-x_2^*|<|x_1^*-x_2^*|$$

引出矛盾，故 $\varphi(x)$ 的不动点只能是唯一的。证毕。

在 $\varphi(x)$ 的不动点存在唯一性的情况下，得到迭代法（3.2.2）收敛的一个充分条件。

定理 2　设 $\varphi(x)\in C[a,b]$，且满足定理 1 的两个条件，对任意 $x_0\in[a,b]$，由式（3.2.2）得到的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 x^*，并且误差估计式为

$$|x_k-x^*|\leqslant\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \tag{3.2.5}$$

证明　设 $x^*\in[a,b]$ 是 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的唯一不动点，由条件（1）可知，$\{x_k\}\subset[a,b]$，再由式（3.2.4）得

$$|x_k-x^*|=|\varphi(x_{k-1})-\varphi(x^*)|\leqslant L|x_{k-1}-x^*|\leqslant\cdots\leqslant L^k|x_0-x^*|$$

因为 $0<L<1$，所以当 $k\to\infty$ 时，序列 $\{x_k\}$ 收敛到 x^*。

下面再证明误差估计式（3.2.5）。由式（3.2.4）可得

$$|x_{k+1}-x_k|=|\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})|\leqslant L|x_k-x_{k-1}| \tag{3.2.6}$$

由此反复递推得

$$|x_{k+1}-x_k|\leqslant L^k|x_1-x_0|$$

于是对任意正整数 p 有

$$|x_{k+p}-x_k|\leqslant\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

令 $p\to\infty$，则 $\lim\limits_{p\to\infty}x_{k+p}=x^*$，即得式（3.2.5）。证毕。

迭代过程是一个极限过程，当用迭代法进行实际计算时，必须按精度要求控制迭代次数。误差估计式（3.2.5）在原则上可用于确定迭代次数，但它由于含有信息 L 而不便于实际应用。根据式（3.2.6），对任意正整数 p 有

$$|x_{k+p}-x_k|\leqslant\frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|$$

令 $p\to\infty$，则有

$$|x^*-x_k|\leqslant\frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|$$

由此可见，只要相邻两次计算结果的偏差$\left|x_{k+1}-x_k\right|$足够小，就可以保证近似值x_k具有足够的精度。

如果$\varphi(x)\in C^1\left[a,b\right]$且对任意$x\in\left[a,b\right]$，则有

$$\left|\varphi'(x)\right|\leqslant L<1 \qquad (3.2.7)$$

由中值定理可知，对$\forall x,y\in\left[a,b\right]$有

$$\left|\varphi(x)-\varphi(y)\right|=\left|\varphi'(\xi)(x-y)\right|\leqslant L\left|x-y\right| \qquad (\xi\in(a,b))$$

它表明在实际应用中定理 1 的条件（2）可用式（3.2.7）代替。

在例 2 中，当$\varphi(x)=\sqrt[3]{x+1}$时，$\varphi'(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$，在区间$\left[1,2\right]$中，$\left|\varphi'(x)\right|\leqslant\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}<1$，故式（3.2.7）成立。又因为$1\leqslant\sqrt[3]{2}\leqslant\varphi(x)\leqslant\sqrt[3]{3}\leqslant 2$，所以定理 1 的条件（1）也成立，所以迭代法是收敛的。而当$\varphi(x)=x^3-1$时，$\varphi'(x)=3x^2$，在区间$\left[1,2\right]$中$|\varphi'(x)|>1$不满足定理的条件。

上面给出了x_0取自区间$\left[a,b\right]$时所产生的迭代序列$\{x_k\}$的收敛性，它通常被称为全局收敛性，有时不易检验定理的条件，在实际应用中通常只在不动点x^*的邻近考察其收敛性，即局部收敛性。

定义 1　设$\varphi(x)$有不动点x^*，如果存在x^*的某个邻域R使$\left|x-x^*\right|\leqslant\delta$，对任意$x_0\in R$，迭代法（3.2.2）产生的序列$\{x_k\}\subset R$，且收敛到$x^*$，则称迭代方程局部收敛。

定理 3　设x^*为$\varphi(x)$的不动点，$\varphi'(x)$在x^*的某个邻域连续，且$\left|\varphi'(x^*)\right|<1$，则迭代法（3.2.2）局部收敛。

证明　由连续函数的性质可知，存在x^*的某个邻域 R 使$\left|x-x^*\right|\leqslant\delta$，使对于任意$x\in R$，$\left|\varphi'(x)\right|\leqslant L<1$成立。

此外，对于任意$x\in R$，总有$\varphi(x)\in R$，这是因为

$$\left|\varphi(x)-x^*\right|=\left|\varphi(x)-\varphi(x^*)\right|\leqslant L\left|x-x^*\right|<\left|x-x^*\right|\leqslant\delta$$

于是依据定理 2 可以判断迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$对于任意初值$x_0\in R$均收敛。证毕。

下面讨论迭代序列的收敛速度问题。

例 3　用不同方法求方程$x^2-3=0$的根$x^*=\sqrt{3}$。

解：$f(x)=x^2-3$可改写为各种不同的等价形式，即$x=\varphi(x)$，其不动点为$x^*=\sqrt{3}$。由此构造不同的迭代法：

（1）$x_{k+1}=x_k^2+x_k-3$，$\varphi(x)=x^2+x-3$，$\varphi'(x)=2x+1$，$\varphi'(x^*)=\varphi'(\sqrt{3})=2\sqrt{3}+1>1$。

（2）$x_{k+1}=\dfrac{3}{x_k}$，$\varphi(x)=\dfrac{3}{x}$，$\varphi'(x)=-\dfrac{3}{x^2}$，$\varphi'(x^*)=-1$。

（3）$x_{k+1}=x_k-\dfrac{1}{4}\left(x_k^2-3\right)$，$\varphi(x)=x-\dfrac{1}{4}\left(x^2-3\right)$，$\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{2}x$，

$\varphi'(x^*)=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.134<1$。

（4）$x_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_k+\dfrac{3}{x_k}\right)$，$\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{3}{x}\right)$，$\varphi'(x)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)$，$\varphi'(x^*)=\varphi'\left(\sqrt{3}\right)=0$。

取 $x_0=2$，对上述 4 种迭代法，计算三步所得的结果，如下所示。

k	x_k	迭代法（1）	迭代法（2）	迭代法（3）	迭代法（4）
0	x_0	2	2	2	2
1	x_1	3	1.5	1.75	1.75
2	x_2	9	2	1.734 75	1.732 143
3	x_3	87	1.5	1.732 361	1.732 051
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

注意　由 $\sqrt{3}=1.732\,050\,8\cdots$ 及计算结果可知，迭代法（1）及（2）均不收敛，且它们均不满足定理 3 的局部收敛条件；迭代法（3）和（4）均满足局部收敛条件，且迭代法（4）比迭代法（3）收敛快，因为迭代法（4）的 $\varphi'(x^*)=0$，其比迭代法（3）的 $\varphi'(x^*)\approx 0.134$ 小。为了衡量迭代法（3.2.2）收敛速度的快慢给出以下定义。

定义 2　设迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛于方程 $x=\varphi(x)$ 的根 x^*，如果当 $k\to\infty$ 时迭代误差 $e_k=x_k-x^*$ 满足如下渐近关系式：

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p}\to C \quad（常数 C\neq 0）$$

则称该迭代过程是 p 阶收敛的。特别地，当 $p=1$（$|C|<1$）时，该迭代过程为线性收敛；当 $p>1$ 时，该迭代过程为超线性收敛；当 $p=2$ 时，该迭代过程为平方收敛。

定理 4　对于迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 及正整数 p，如果 $\varphi^{(p)}(x)$ 在所求根 x^* 的邻近连续，并且

$$\begin{cases}\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0\\ \varphi^{(p)}(x^*)\neq 0\end{cases} \tag{3.2.8}$$

则该迭代过程在点 x^* 附近是 p 阶收敛的。

证明　由于 $\varphi'(x^*)=0$，据定理 3 立即可以判断迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 具有局部收敛性。再将 $\varphi(x_k)$ 在根 x^* 处进行泰勒展开，利用条件式（3.2.8），则有

$$\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}\left(x_k-x^*\right)^p$$

式中，ξ 在 x_k 与 x^* 之间。

应注意到，$\varphi(x_k)=x_{k+1}$，$\varphi(x^*)=x^*$，由上式得

$$x_{k+1}-x^*=\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}\left(x_k-x^*\right)^p$$

因此对迭代误差，当 $k\to\infty$ 时，则有

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p}\to\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!} \tag{3.2.9}$$

这表明迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 是 p 阶收敛的。证毕。

上述定理告诉我们，迭代过程的收敛速度依赖于迭代函数 $\varphi(x)$ 的选取。如果当 $x\in[a,b]$ 时，$\varphi'(x)\neq 0$，则该迭代过程只可能是线性收敛的。

在例 3 中，迭代法（3）的 $\varphi'(x^*)\neq 0$，故它只是线性收敛的。而迭代法（4）的 $\varphi'(x^*)=0$，且 $\varphi''(x)=\dfrac{3}{x^3}$，$\varphi''(x^*)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\neq 0$。由定理 4 可知，当 $p=2$ 时，该迭代过程是二阶收敛的。

3.3　牛顿法

3.3.1　牛顿迭代公式的构造

1．牛顿迭代公式

设方程 $f(x)=0$ 的根 x^* 的近似根是 x_k，则 $f(x)$ 在点 x_k 处进行泰勒展开，去掉二阶及二阶以上项（线性化）后得

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

设 $f'(x_k)\neq 0$，用 x_{k+1} 代替右端的 x，由 $f(x)=0$ 得到如下迭代公式：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{3.3.1}$$

这相当于选择的迭代函数为

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{3.3.2}$$

称迭代公式（3.3.1）为牛顿迭代公式（简称牛顿公式），它是局部收敛的。用牛顿公式求

方程的根的方法被称为牛顿切线法（简称牛顿法）。

2．牛顿公式的几何意义

如果把牛顿公式写成下面的式子：

$$Y_k = f\left(x_k\right) + f'\left(x_k\right)\left(x - x_k\right) \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

则牛顿公式表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $\left(x_k, f(x_k)\right)$ 处的切线。所以，牛顿公式的几何意义如图 3-1 所示。设 x_0 是方程 $f(x)=0$ 的根的一个近似值，过点 $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线 MN，它与 x 轴交于点 x_1； x_1 作为根的新的近似值，过点 $\left(x_1, f(x_1)\right)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线 M_1N_1，它与 x 轴的交点为 x_2； x_2 作为根的新的近似值，如此继续下去得到序列 $x_1, x_2, \cdots$。当此点列 $\{x_k\}$ 收敛到方程 $f(x)=0$ 的根 x^* 时，可求出满足精度要求的近似根 x_k。这就是牛顿法名称的由来，它是线性化与迭代法的结合。

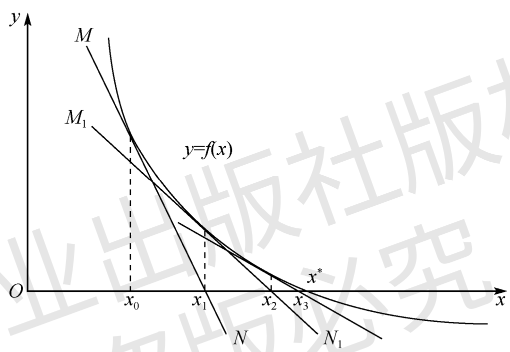

图 3-1

3.3.2　牛顿法的收敛性与收敛速度

定理 5　设 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的根，函数 $f(x)$ 在 x^* 的某一邻域 $U(x^*,\delta)$（其中 $0<\delta<1$）内具有二阶连续导数，迭代函数为 $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$，当 $x \in U(x^*,\delta)$ 时，$\varphi(x) \in U(x^*,\delta)$。对于 $x_0 \in U(x^*,\delta)$，牛顿迭代公式（3.3.1）产生的迭代序列为 $\{x_k\}$。

（1）如果

$$\left|\varphi'(x^*)\right| < 1 \tag{3.3.3}$$

那么迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*。

（2）如果 x^* 是 $f(x)=0$ 的单根，那么迭代序列 $\{x_k\}$ 在 x^* 附近是二阶收敛的，即平方收敛，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

（3）如果 x^* 是 $f(x)=0$ 的重根，那么迭代序列 $\{x_k\}$ 在 x^* 附近是一阶收敛的，即线性收敛。

证明 （1）根据定理 3 显然成立。

（2）若 x^* 是 $f(x)=0$ 的单根，即 $f(x^*)=0$，$f'(x^*)\neq 0$，则 $\varphi'(x^*)=0$，根据定理 4 及公式（3.2.9），显然成立。

（3）若 x^* 是 $f(x)=0$ 的 m 重根，即 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$，那么 $\varphi'(x^*)=1-\dfrac{1}{m}\neq 0$，所以牛顿法只是线性收敛的。证毕。

3.4 割线法

割线法又称为弦截法。牛顿法的突出优点是收敛速度快，但它也有明显的缺点，即公式含有导数，当 $f(x)$ 较复杂时，使用不方便。为了避免牛顿法计算导数的麻烦，我们现在设法利用一些函数值 $f(x_k),f(x_{k-1}),\cdots$ 来回避导数值 $f'(x_k)$ 的计算，该方法即割线法。下面具体介绍割线法。

已知方程 $f(x)=0$ 的两个近似根为 x_k 和 x_{k-1}，把牛顿迭代公式：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad（k=0,1,2,\cdots）$$

的导数 $f'(x_k)$ 用差商 $\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$ 代替，整理后得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)(x_k-x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}\quad（k=0,1,2,\cdots）\tag{3.4.1}$$

该公式称为割线迭代公式，用此公式求方程 $f(x)=0$ 的近似根的方法称为割线法。

现在解释割线法的几何意义。如图 3-2 所示，在曲线 $y=f(x)$ 上横坐标为 x_k 和 x_{k-1} 的点分别记为 P_k 和 P_{k-1}，则割线 P_kP_{k-1} 的方程为

$$y-f(x_k)=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\left(x-x_k\right)\quad（k=0,1,2,\cdots）$$

令 $y=0$，得到式（3.4.1），其中 x_{k+1} 是割线 P_kP_{k-1} 与 x 轴交点的横坐标，把 x_{k+1} 作为根 x^* 的新的近似值。过点 P_{k+1} 和 P_k 作割线 $P_{k+1}P_k$ 交 x 轴于 x_{k+2}，再把 x_{k+2} 作为根 x^* 的新的近似

值。如此继续下去，得到点列 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$。当此点列 $\{x_k\}$ 收敛到方程 $f(x)=0$ 的根 x^* 时，可求出满足精度要求的 x_k。这就是割线法名称的由来，它是线性化与迭代法的结合。

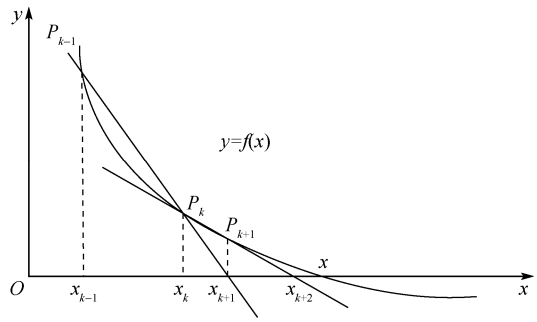

图 3-2

割线法的收敛速度比牛顿法稍慢，并且需要两个初始值 x_0 和 x_1。

3.5　非线性方程组的迭代法

3.5.1　非线性方程组

非线性方程组是非线性科学的重要组成部分。考虑方程组：

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \quad\quad\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{3.5.1}$$

式中，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ 均为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的多元函数。若用向量记号，记 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^{\mathrm{T}}$，方程组（3.5.1）就可以写成

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \tag{3.5.2}$$

当 $n \geqslant 2$，且 $f_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 中至少有一个是自变量 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的非线性函数时，则称方程组（3.5.1）为非线性方程组。非线性方程组（3.5.1）的求解问题无论是在理论上还是在实际解法上均比线性方程组和单个方程求解要复杂和困难，它可能无解，也可能有一个解或多个解。

求方程组（3.5.1）的根时可直接将单个方程（n=1）的求根方法加以推广，实际上只

要把单变量函数 $f(x)$ 看成向量函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$，将方程组（3.5.1）改写为方程组（3.5.2），就可以将前面讨论的求根方法用于求方程组（3.5.2）的根，为此设向量函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 定义在区域 $\boldsymbol{D}\subset\mathbb{R}^n$， $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{D}$，若 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)$，则称 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，这意味着对任意实数 $\varepsilon>0$，存在实数 $\delta>0$，使得对满足 $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 的 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}$，则有

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)<\varepsilon$$

如果 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{D}$ 上每点都连续，则称 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 在区域 $\boldsymbol{D}$ 上连续。

向量函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的导数 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})$ 被称为 $\boldsymbol{F}$ 的雅可比矩阵，它表示为

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n}\end{bmatrix} \tag{3.5.3}$$

3.5.2 求解非线性方程组的牛顿法

将解单个方程的牛顿法直接用于解方程组（3.5.2），则可以得到解非线性方程组的牛顿迭代公式，即

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{F}'\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)^{-1}\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)\quad(k=0,1,\cdots) \tag{3.5.4}$$

式中，$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})^{-1}$ 是式(3.5.3)给出的雅可比矩阵的逆矩阵，具体计算时记作 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}=\Delta\boldsymbol{x}^{(k)}$。

先解线性方程组

$$\boldsymbol{F}'\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)\Delta\boldsymbol{x}^{(k)}=-\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$$

求出向量 $\Delta\boldsymbol{x}^{(k)}$；再令 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{x}^{(k)}+\Delta\boldsymbol{x}^{(k)}$，每步包括计算向量函数 $\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$ 及矩阵 $\boldsymbol{F}'\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$。牛顿法有下面的收敛性定理。

定理 6 设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 定义在区域 $\boldsymbol{D}\subset\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x}^*\in\boldsymbol{D}$，满足 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{0}$，在 $\boldsymbol{x}^*$ 的开邻域 $\boldsymbol{S}_0\in\boldsymbol{D}$ 上 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})$ 存在且连续，$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}^*)$ 非奇异，则牛顿法生成的序列 $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}$ 在闭域 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{S}_0$ 上超线性收敛于 $\boldsymbol{x}^*$。若还存在常数 $L>0$，使

$$\left\|\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}^*)\right\|\leqslant L\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\|\qquad(\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S})$$

则 $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}$ 至少平方收敛。

例 4　用牛顿法解方程组

$$\begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0 \\ x_1 x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0 \end{cases}$$

解：令

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 \\ x_1 x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 10 & 2x_2 \\ x_2^2 + 1 & 2x_1 x_1 - 10 \end{pmatrix}$$

选 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0)^{\mathrm{T}}$，解线性方程组 $\boldsymbol{F}'\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right)\Delta\boldsymbol{x}^{(0)} = -\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right)$，即

$$\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

解得 $\Delta\boldsymbol{x}^{(0)} = (0.8, 0.88)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(0)} + \Delta\boldsymbol{x}^{(0)} = (0.8, 0.88)^{\mathrm{T}}$，按牛顿迭代公式（3.5.4）计算，结果如下所示。

	$\boldsymbol{x}^{(0)}$	$\boldsymbol{x}^{(1)}$	$\boldsymbol{x}^{(2)}$	$\boldsymbol{x}^{(3)}$	$\boldsymbol{x}^{(4)}$
$x_1^{(k)}$	0	0.8	0.991 787 2	0.999 975 2	1.000 000 0
$x_2^{(k)}$	0	0.88	0.991 711 7	0.999 968 5	1.000 000 0

习题三

1．用二分法求方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的正根，要求误差小于 0.05。

2．为求方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近的一个根，设将方程改写成下列等价形式，并建立相应的迭代公式。

（1） $x = 1 + 1/x^2$，迭代公式 $x_{k+1} = 1 + 1/x_k^2$；

（2） $x^3 = 1 + x^2$，迭代公式 $x_{k+1} = \sqrt[3]{1 + x_k^2}$；

（3） $x^2 = \dfrac{1}{x-1}$，迭代公式 $x_{k+1} = 1/\sqrt{x_k - 1}$。

试分析每种迭代公式的收敛性，并选取一种公式求出具有 4 位有效数字的近似根。

3．用下列方法求 $f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$ 在 $x_0 = 2$ 附近的根。根的精确值为 $x^* = 1.879\,385\,24\cdots$，要求计算结果精确到 4 位有效数字。

（1）用牛顿法；

（2）用割线法，取 $x_0 = 2$，$x_1 = 1.9$ 。

4．分别用二分法和牛顿法求 $x - \tan x = 0$ 的最小正根。

5．应用牛顿法于方程 $x^3 - a = 0$，导出求 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式，并讨论其收敛性。

6. 应用牛顿法于方程 $f\left(x\right) = 1 - \dfrac{a}{x^2} = 0$，导出求 $\sqrt{a}$ 的迭代公式，并用此公式求 $\sqrt{115}$ 的值。

7．证明迭代公式：

$$x_{k+1} = \frac{x_k\left(x_k^2 + 3a\right)}{3x_k^2 + a}$$

是计算 $\sqrt{a}$ 的三阶方法。假设初值 x_0 充分靠近根 x^*，求

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{a} - x_{k+1}\right)\Big/\left(\sqrt{a} - x_k\right)^3$$

8．非线性方程组 $\begin{cases} 3x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ 3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0 \end{cases}$ 在 $(0.4, 0.7)^{\mathrm{T}}$ 附近有一个解。构造一个不动点迭代法，使它能收敛到这个解，并计算精确到10^{-5}（按$\|\bullet\|_\infty$）。

9．用牛顿法解方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 - y^2 = 1, \end{cases}$ 取 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (1.6, 1.2)^{\mathrm{T}}$ 。