

第2部分

常见传感器与新型传感器

-  第3章 传感器中的弹性敏感元件设计
-  第4章 电阻应变式传感器
-  第5章 电容式传感器
-  第6章 电感式传感器
-  第7章 压电式传感器
-  第8章 压阻式传感器
-  第9章 热电式传感器
-  第10章 光电式传感器
-  第11章 固态图像传感器
-  第12章 磁传感器
-  第13章 射线及微波检测传感器
-  第14章 光纤传感器
-  第15章 化学传感器
-  第16章 新型传感器及其应用
-  第17章 射频识别技术

第3章 传感器中的弹性敏感元件设计

固体材料在外力作用下改变原来的尺寸或形状的现象称为变形,如果外力去掉后物体能够完全恢复原来的尺寸和形状,那么这种变形称为弹性变形。

弹性敏感元件是通过弹性变形这一特性,把力、力矩或压力转换成相应的应变或位移,然后配合其他各种形式的传感元件,将力、力矩或压力转换成电量的一种元件。弹性敏感元件应用广泛,在测试技术中占有重要的地位。

3.1 弹性敏感元件的基本特性

3.1.1 弹性特性

作用在弹性敏感元件上的外力与该外力引起的相应变形(应变、位移或转角)之间的关系称为弹性敏感元件的特性。图3.1显示了三个不同弹性敏感元件的弹性特性曲线。弹性敏感元件的弹性特性可能是线性的(如图3.1中的直线1),也可能是非线性的(如图3.1中的曲线2和曲线3)。弹性特性可由刚度或灵敏度来表示。

1. 刚度

刚度通常用 k 表示,定义为

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta x} \right) = \frac{dF}{dx} \quad (3-1)$$

式中, F ——作用在弹性敏感元件上的外力;

x ——弹性敏感元件产生的变形。

显然,这样定义的刚度可以反映元件抵抗弹性变形能力的强弱。

观察图3.1中的A点,通过A点作曲线3的切线,此切线与水平线夹角 θ_3 的正切就是A点处的刚度。如果弹性敏感元件的弹性特性曲线是一条直线,那么它的刚度是一个常数。

2. 灵敏度

灵敏度是反映弹性的另一个指标,它定义为刚度的倒数,通常用 S_n 表示

$$S_n = \frac{dx}{dF} \quad (3-2)$$

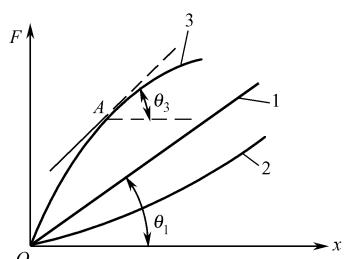


图3.1 弹性特性曲线

从式(3-2)可以看出,灵敏度就是单位力作用下产生变形的大小。与刚度相似,只有当弹性特性曲线是一条直线时,灵敏度才是一个常数。

在传感器当中,有时会遇到多个弹性敏感元件串联或并联使用的情形。当弹性敏感元件并联使用时,系统的灵敏度为

$$S_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{S_{n_i}}} \quad (3-3)$$

当弹性敏感元件串联使用时,系统的灵敏度为

$$S_n = \sum_{i=1}^m S_{n_i} \quad (3-4)$$

式中, m ——并联或串联弹性敏感元件的数目;

S_{n_i} ——第 i 个弹性敏感元件的灵敏度。

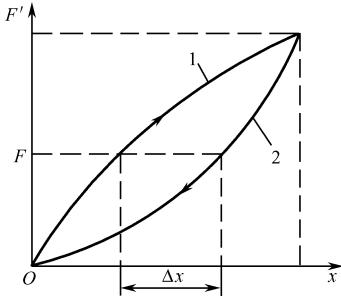


图 3.2 弹性滞后现象

3.1.2 弹性滞后

对弹性敏感元件进行加载,可绘制一条弹性特性曲线;卸载弹性敏感元件,可绘制另一条弹性特性曲线。两条曲线往往并不重合,这种现象称为弹性滞后,如图 3.2 所示。

在图 3.2 中,当作用在弹性敏感元件上的力由 0 增加至 F' 时,弹性敏感元件的弹性特性曲线如曲线 1 所示;当作用力由 F' 减小到 0 时,弹性特性曲线如曲线 2 所示。作用力通过加载达到 F 时的弹性变形与通过卸载达到 F 时的弹性变形之差 Δx 称为弹性敏感元件的滞后误差。滞后误差的存在对整个测量的精度会产生不利影响。曲线 1、曲线 2 所包围的范围称为滞环。

弹性敏感元件内部微观或细观结构(如分子、离子、晶粒)间存在着的内摩擦是引起弹性滞后的主要原因。

3.1.3 弹性后效

当弹性敏感元件上的载荷发生改变时,相应的变形往往不能立即完成,而是在一个时间间隔内逐渐完成的,这种现象称为弹性后效,如图 3.3 所示。当作用在弹性敏感元件上的力由 0 突然增加到 F_0 时,其变形首先由 0 迅速增加至 x_1 ,然后在载荷不变情况下,元件继续变形,直到变形增大到 x_0 为止。反之,当作用力由 F_0 突然减至 0 时,其变形先由 x_0 迅速减至 x_1 ,然后继续减小,直到变形减小为 0。弹性后效现象使弹性敏感元件的变形不能迅速地随着作用力的改变而改变,从而造成测量误差。在动态测量中,这种误差尤其严重。

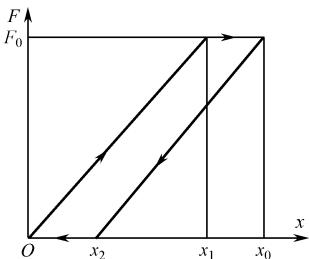


图 3.3 弹性后效现象

3.1.4 固有振动频率

弹性敏感元件的动态特性和被测载荷变化时的滞后现象等都与元件的固有振动频率有关。固有振动频率有多阶,我们通常只关心其中的最低阶,且一般总希望弹性敏感元件具有较高的固有振动频率。固有振动频率的计算比较复杂,只有少数规则形状的弹性敏感元件具有理论解,所以实际中常常通过实验来确定。

以上各种基本特性之间是相互影响、相互制约的。灵敏度的提高会使线性变差,固有振动频率降低,从而不能满足测量动态量的要求;相反,固有振动频率提高会导致灵敏度降低。因此,在进行弹性敏感元件设计时,必须根据测试对象和实际要求,对各种基本特性进行综合、具体的考虑。

3.2 弹性敏感元件的材料

弹性敏感元件在传感器中直接参与变换和测量,因此其材料的选用十分重要。在任何情况下,材料应保证具有良好的弹性、足够的精度和稳定性,如在长时间使用和温度变化时都应保持稳定的特性等。对弹性敏感元件材料的基本要求归纳如下。

- (1) 弹性滞后和弹性后效要小。
- (2) 弹性模量的温度系数要小。
- (3) 线膨胀系数要小且稳定。
- (4) 弹性极限和强度极限要高。
- (5) 具有良好的稳定性和耐腐蚀性。
- (6) 具有良好的机械加工和热处理性能。

弹性敏感元件通常使用的材料为合金结构钢、铜合金、铝合金等,其中35CrMnSiA、40Cr是常用的材料,35CrMnSiA尤其适合制造高精度的弹性敏感元件。50CrMnA铬锰弹簧钢和50CrVA铬钒弹簧钢具有优良的机械性能,可用于制造承受交变载荷的重要弹性敏感元件。黄铜(H62、H80)可用于制造受力不大的弹簧及膜片。德银[Zn18%~22%,(Ni+Co)13.5%~16.5%,其余为Cu]用于制造抗腐蚀的弹性敏感元件。锡磷青铜(QSn6.1%~0.1%,QSn6.5%~0.4%)用于制造一般的弹性敏感元件或抗腐蚀性能好的弹性敏感元件。铍青铜(QBe2,QBe2.5)用于制造精度高、强度好的弹性敏感元件。不锈钢(1Cr18Ni9Ti)用于制造强度高、耐腐蚀性好的弹性敏感元件。

3.3 弹性敏感元件的特性参数计算

这一节,我们介绍一些常用弹性敏感元件的特性参数计算。

3.3.1 弹性圆柱

弹性圆柱结构如图3.4所示。截面根据形状可分为实心圆截面[见图3.4(a)]和空心圆截面[见图3.4(b)]。弹性圆柱结构简单,可承受很大的载荷。

被测力F(拉力或压力)沿弹性圆柱的轴线作用于其两端,圆柱被拉伸(或压缩),圆柱体内各点产生应力、应变。

对于受力状态下的一点,其应力、应变的值与分析时选取的截面方向有关,选取不同的截面方向进行分析,会得到不同的数值。垂直于选取截面方向的应力和应变称为正应力和正应变,下文中的应力、应变均指的是正应力、正应变。

弹性圆柱上任一点在与轴线成 α 角的截面上的应力、应变为

$$\sigma_a = \frac{F}{A} (\sin^2 \alpha - \mu \cos^2 \alpha) \quad (3-5)$$

$$\epsilon_a = \frac{F}{AE} (\sin^2 \alpha - \mu \cos^2 \alpha) \quad (3-6)$$

式中,F——轴线方向上的作用力;

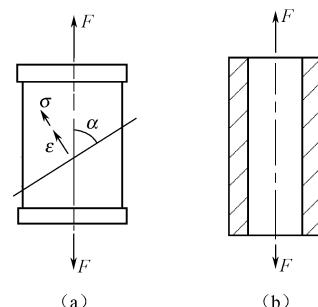


图3.4 弹性圆柱结构

E ——材料的弹性模量；

μ ——材料的泊松比；

A ——圆柱的横截面积；

α ——截面与轴线的夹角。

弹性圆柱上各点在垂直于轴线的截面上($\alpha = 90^\circ$)的应力、应变为

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \epsilon = \frac{F}{AE}$$

而在平行于轴线的截面上($\alpha = 0^\circ$)的应力、应变为

$$\sigma = -\mu \frac{F}{A} \quad \epsilon = -\mu \frac{F}{AE}$$

显然,在垂直于轴线的截面上出现最大的应力和应变。为了比较不同方向上的应变大小,需要引入灵敏度结构系数 β

$$\beta = \sin^2 \alpha - \mu \cos^2 \alpha \quad (3-7)$$

于是得圆柱应变的一般表达式为

$$\epsilon = \frac{F}{AE} \beta \quad (3-8)$$

由式(3-8)可以看出,圆柱内各点的应变大小取决于圆柱的灵敏度结构系数、横截面积、材料的弹性模量和圆柱所承受的力,而与圆柱的长度无关。

上述所有结论同时适用于空心截面和实心截面的圆柱弹性敏感元件。空心截面的圆柱弹性敏感元件在某些方面优于实心截面的圆柱弹性敏感元件:在横截面积相等的情况下,空心截面圆柱的外直径可以较大,因此圆柱的抗弯能力大大提高;另外,较大直径圆柱对由温度变化引起的曲率半径相对变化敏感程度较小,从而使温度变化对测量的影响减小。但应注意的是,如果空心截面圆柱的壁太薄,受压力作用后将产生较明显的屈曲变形(桶形变形),这会影响测量精度。

圆柱弹性敏感元件的固有频率 f_0 为

$$f_0 = \frac{0.249}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3-9)$$

式中, l ——圆柱元件的长度;

ρ ——圆柱材料的密度。

分析圆柱弹性敏感元件的基本公式(3-8)和式(3-9)可知:为了提高灵敏度,应当选择弹性模量小的材料,此时虽然相应的固有振动频率降低了,但固有振动频率降低的程度比应变量的提高程度小,总的衡量还是有利的。不降低应变值来提高固有振动频率必须减短圆柱的长度或选择密度低的材料。圆柱弹性敏感元件主要用于电阻应变式拉力(压力)传感器。

3.3.2 悬臂梁

悬臂梁是一端固定一端自由的金属梁。作为弹性敏感元件,悬臂梁的特点是结构简单,加工方便,适用于较小力的测量。悬臂梁根据梁的截面形状不同可分为等截面悬臂梁和等强度悬臂梁。

1. 等截面悬臂梁

被测力 F 作用于等截面悬臂梁(见图3.5)的自由端,等截面悬臂梁表面某一位置处的应变可按下式计算

$$\epsilon_x = \frac{6(l-x)}{EAh}F \quad (3-10)$$

式中, ϵ_x ——距固定端为 x 处的应变值;

l ——梁的长度;

x ——某一位置到固定端的距离;

E ——梁的材料的弹性模量;

A ——梁的横截面积;

h ——梁的厚度。

由式(3-10)可知,随着 x 的不同,梁上各个位置所产生的应变也是不同的。在 $x=0$ 处应变最大,在 $x=l$ 处应变为零。不妨定义等截面悬臂梁的应变灵敏度结构系数

$$\beta = 6\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (3-11)$$

在实际应用中,还常把悬臂梁自由端的挠度(位移)作为输出。挠度 y 与作用力 F 的关系为

$$y = \frac{4l^3}{Ebh^3}F \quad (3-12)$$

等截面悬臂梁的固有振动频率为

$$f_0 = \frac{0.162h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3-13)$$

由式(3-10)、式(3-12)和式(3-13)可知,材料的特性参数(E, ρ)及结构尺寸(l, h)对灵敏度和固有振动频率都有影响,如减小等截面悬臂梁的厚度可以使其灵敏度提高,但会使其固有振动频率降低。

2. 等强度悬臂梁

等截面悬臂梁的不同部位所产生的应变是不相等的,这对电阻应变式传感器中应变片的粘贴位置的准确性提出了较高的要求。等强度悬臂梁(见图 3.6)的特点是距固定端不同距离处的横截面积不同,即

$$A_x = hb_x = hb_0 \frac{l_x}{l} = hb_0 \frac{l-x}{l}$$

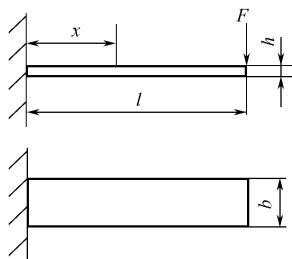


图 3.5 等截面悬臂梁

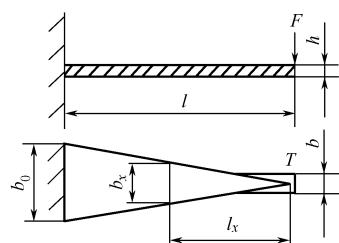


图 3.6 等强度悬臂梁

将上式代入式(3-10)得

$$\epsilon = \frac{6l}{Eb_0h^2}F \quad (3-14)$$

在等强度悬臂梁自由端施加作用力时,梁上各处的应变大小相等,应变灵敏度结构系数与

长度方向的坐标无关,也就不需要对应变片粘贴位置准确性提出较高要求。

必须说明的是,作用力 F 必须加在梁的两斜边的交汇点 T 处,否则无法保证各处的应变大小相等。等强度悬臂梁自由端挠度为

$$y = \frac{6l^3}{Eb_0 h^3} F \quad (3-15)$$

固有振动频率表达式为

$$f_0 = \frac{0.316h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3-16)$$

3.3.3 扭转棒

在力矩测量中常常用到扭转棒。图 3.7 为圆截面扭转棒,该扭转棒一端固定,另一端自由。当圆截面扭转棒自由端承受力矩 M_t 时,在棒表面产生的沿圆周方向的剪切应力为

$$\tau = \frac{r}{J} M_t \quad (3-17)$$

式中, M_t ——力矩;

r ——扭转棒半径;

J ——横截面对圆心的极惯性矩($J = \pi d^4 / 32$);

d ——扭转棒直径。

根据材料力学知识,棒表面上任一点在沿与轴线成 45° 角的方向上出现最大正应力 σ_{max} (其与该点沿圆周方向的剪切应力 τ 相等),此方向上的应变为

$$\epsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E} = \frac{r}{EJ} M_t \quad (3-18)$$

单位长度上的扭转角为

$$\phi_i = \frac{1}{GJ} M_t \quad (3-19)$$

式中, G ——扭转棒材料的剪切模量。

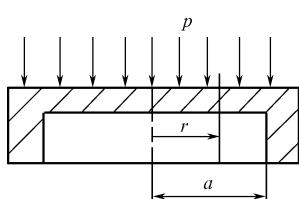
式(3-19)表明单位长度上的扭转角 ϕ_i 与力矩 M_t 成正比,与 GJ 成反比。 GJ 称为抗扭刚度。

扭转棒长度为 l 时的扭转角为

$$\phi = \phi_i l = \frac{l}{GJ} M_t \quad (3-20)$$

3.3.4 平膜片

圆形膜片分为圆形平面膜片和圆形波纹膜片两种,用来测量气体的压力。在压力相同情况



下,圆形波纹膜片可产生较大的挠度。膜盒是两个圆形波纹膜片对焊在一起具有腔体的盒状元件,也用来测量气体的压力。本节主要介绍圆形平面膜片,简称平膜片。

在工作时,平膜片承受均匀载荷,如图 3.8 所示。在压力 p 作用下,平膜片中心处出现最大挠度 y_{max} 。平膜片在设计计算中所采用的假设归纳如下。

图 3.8 平膜片承受均匀载荷

(1) 平膜片的周边是固支的。

(2) 平膜片的最大挠度不大于 $1/3$ 膜厚, 属于小挠度理论范围。

(3) 被测压力均匀作用于平膜片表面。

在以上假设下, 平膜片的计算由以下公式给出。周边固支平膜片的应力、应变曲线如图 3.9 所示。

径向应力为

$$\sigma_r = \frac{3p}{8h^2} [a^2(1+\mu) - r^2(3+\mu)] \quad (3-21)$$

切向应力为

$$\sigma_t = \frac{3p}{8h^2} [a^2(1+\mu) - r^2(1+3\mu)] \quad (3-22)$$

径向应变为

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_t) = \frac{3p(1-\mu^2)}{8Eh^2} (a^2 - 3r^2) \quad (3-23)$$

切向应变为

$$\epsilon_t = \frac{1}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_r) = \frac{3p(1-\mu^2)}{8Eh^2} (a^2 - r^2) \quad (3-24)$$

在平膜片中心($r = 0$)处, 切向应力与径向应力相等, 切向应变与径向应变相等, 而且具有正的最大值

$$\sigma_{r0} = \sigma_{t0} = \frac{3pa^2}{8h^2}(1+\mu) \quad (3-25)$$

$$\epsilon_{r0} = \epsilon_{t0} = \frac{3pa^2}{8Eh^2}(1-\mu^2) \quad (3-26)$$

在平膜片的边缘($r = a$)处, 切向应力、径向应力和径向应变都达到负的最大值, 而切向应变为零

$$\sigma_{ra} = -\frac{3pa^2}{4h^2} \quad (3-27)$$

$$\sigma_{ta} = -\frac{3pa^2}{4h^2}\mu \quad (3-28)$$

$$\epsilon_{ra} = -\frac{3pa^2}{4Eh^2}(1-\mu^2) \quad (3-29)$$

$$\epsilon_{ta} = 0 \quad (3-30)$$

平膜片的挠度为

$$y = \frac{3p(1-\mu^2)}{16Eh^3} (a^2 - r^2)^2 \quad (3-31)$$

平膜片的挠度在其中心($r=0$)处取得最大值, 即

$$y_0 = y_{\max} = \frac{3p(1-\mu^2)a^4}{16Eh^3} \quad (3-32)$$

平膜片的固有振动频率为

$$f = \frac{10.17h}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{E}{12(1-\mu^2)\rho}} \quad (3-33)$$

上述各式中,

p —压力(Pa);

h —平膜片厚度(cm);

a —平膜片工作部分的半径(cm);

r ——平膜片任意部位的半径(cm)；
 μ ——平膜片材料的泊松比；
 E ——平膜片材料的弹性模量(MPa)；
 ρ ——平膜片材料的密度(kg/cm³)。

需要指出的是,以上这些公式均不考虑平膜片周围流体的影响,因此,平膜片在流体中(特别是在液体中)工作时,固有振动频率比式(3-33)的计算值要低一些。

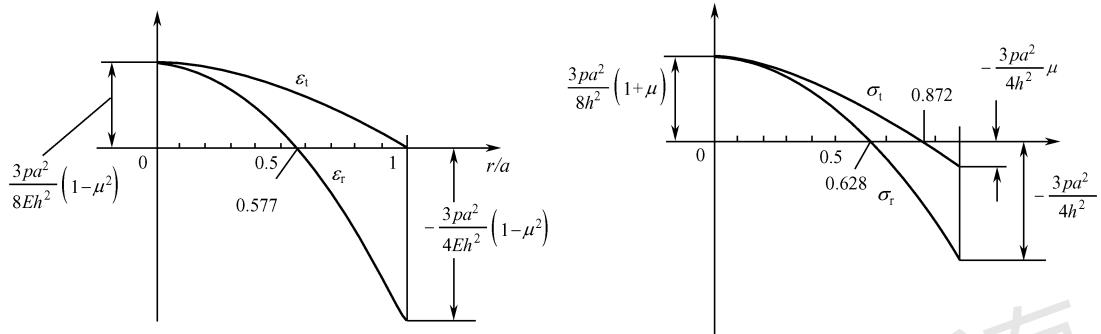


图 3.9 周边固支平膜片的应力、应变曲线

3.3.5 波纹管

波纹管是一种表面上有许多同心环状波形皱纹的薄壁圆管,如图 3.10 所示。在轴向力或流体压力的作用下,波纹管伸长或缩短,从而把轴向力(或压力)变换为位移。金属波纹管沿轴向容易变形,也就是说,其灵敏度非常高。在变形量允许范围内,轴向力(或压力)的大小与伸缩量成线性关系。

波纹管的轴向位移与轴向作用力之间的关系可用下式表示

$$y = \frac{n}{A_0 - \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + B_0} \frac{1 - \mu^2}{Eh_0} F \quad (3-34)$$

式中, F ——轴向力。

n ——波纹管上的波纹数。

h_0 ——波纹管内半径的壁厚,即毛坯的厚度。波纹处的材料厚度随着它与波纹管轴线的距离增大而减薄。

A_0, A_1, A_2, B_0 ——取决于参数 K 和 m 的系数(参阅“仪器零件”等有关书籍)。

其中, $K = R_H/R_B, m = R/R_B$ 。

R_H ——波纹管的外半径;

R_B ——波纹管的内半径;

R ——波纹管的圆弧半径;

α ——波纹平面部分的斜角(又称紧密角) $[\alpha = 0.5(2R - a)/(R_H - R_B - 2R)]$;

a ——相邻波纹的间隙。

当作用于波纹管的压力为 p 时,波纹管的自由端位移 y 可由下式求得

$$y = \frac{n}{A_0 - \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + B_0} \frac{1 - \mu^2}{Eh_0} S_a p \quad (3-35)$$

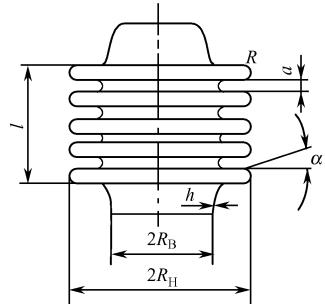


图 3.10 波纹管

式中, p ——作用压力;

S_a ——有效面积。

波纹管的有效面积可以用下式确定

$$S_a = \pi r^2$$

式中, r ——波纹管的平均半径 [$r = (R_H + R_B)/2$]。

由式(3-34)和式(3-35)可知, 波纹管自由端位移 y 与轴向力 F 或压力 p 成正比, 即其弹性特性是线性的。但是, 当压力很大, 超过一定范围时, 波纹相互接触, 会破坏线性特性; 如果轴向力过大, 会使波纹形状发生变化, 同样会破坏线性特性。另外, 在允许行程内波纹管受压缩时的基本特性的线性度较好, 因此通常使其在压缩状态工作。

理论分析和试验表明, 当其他条件不变时, 波纹管的灵敏度与波纹管上的波纹数目成正比, 与壁厚的三次方成反比, 与内、外径比 R_H/R_B 的平方成正比。为了提高波纹管的强度和耐久性, 特别是波纹管在大的高变作用力下工作时, 常将它做成多层结构。

3.3.6 薄壁圆筒

薄壁圆筒壁厚一般都小于圆筒直径的 $1/20$, 内腔与被测压力相通, 内壁均匀受压, 薄壁不受弯曲变形, 只是均匀地向外扩张, 如图 3.11 所示。筒壁的每一单元在轴线方向和圆周方向的拉伸应力分别为

$$\sigma_x = \frac{r_0}{2h} p$$

$$\sigma_r = \frac{r_0}{h} p$$

式中, σ_x ——轴线方向的拉伸应力;

σ_r ——圆周方向的拉伸应力;

r_0 ——薄壁圆筒的内半径;

h ——薄壁圆筒的壁厚。

σ_x 和 σ_r 相互垂直, 应用广义虎克定律可求得薄壁圆筒的压力-应变关系式为

$$\epsilon_x = \frac{r_0}{2Eh} (1 - 2\mu) p \quad (3-36)$$

$$\epsilon_r = \frac{r_0}{2Eh} (2 - \mu) p \quad (3-37)$$

从式(3-36)和式(3-37)可以看出, 薄壁圆筒的灵敏度仅取决于其半径、厚度和弹性模量, 而与其长度无关, 并且轴线方向应变和圆周方向的应变不相等。我们可以定义沿不同方向的灵敏度结构系数为

$$\beta_x = \frac{1}{2} (1 - 2\mu) \quad (3-38)$$

$$\beta_r = \frac{1}{2} (2 - \mu) \quad (3-39)$$

需要指出的是, 在传感器的实际应用中, 电阻应变片既不沿轴向粘贴, 也不沿周向粘贴, 而是在与轴向(或周向)成某一角度的方向上粘贴, 测得的应变与粘贴方向的应力有关, 灵敏度结构系数应该为 $0.2 \sim 0.87$ 。可以证明, 当电阻应变片粘贴方向与圆周方向应力的夹角为 13.3° 时, 具有最大的灵敏度结构系数 0.87 。

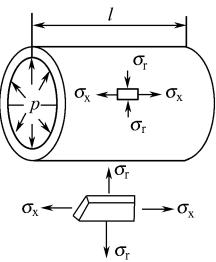


图 3.11 薄壁圆筒

薄壁圆筒的固有振动频率为

$$f_0 = \frac{0.276}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3-40)$$

3.3.7 双端固定梁

如图 3.12 所示, A 点处沿梁长度方向的应变为

$$\epsilon = \frac{3l}{4bh^2 E} F \quad (3-41)$$

一般都将梁和壳体做成一体。虽然双端固定梁比悬臂梁的刚度大,但受到过载后容易产生非线性误差。

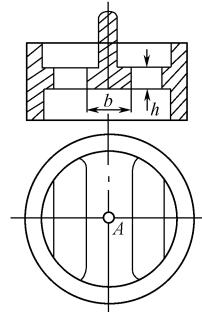


图 3.12 双端固定梁应变式力传感器

3.4 有限单元法简介

3.4.1 弹性力学

材料力学的知识可以用来分析等截面悬臂梁、等强度悬臂梁、扭转棒等杆状元件的载荷-应变关系。对于平膜片、圆形波纹膜片、波纹管等非杆状元件,则需要使用弹性力学知识。

弹性材料在载荷作用下,材料上每一点均会出现 3 个位移 u_x, u_y, u_z , 6 个应变 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 和 6 个应力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 。位移、应变和应力是材料点位置坐标 (x, y, z) 的函数。

外载荷是已知的,3 个位移、6 个应变和 6 个应力是未知的,总共有 15 个未知函数。另外,根据对材料内部的力学关系的研究,共建立 15 个弹性力学基本方程,它们是:

6 个几何方程,描述 6 个应变与 3 个位移之间的关系;

6 个物理方程,描述 6 个应变与 6 个应力之间的关系;

3 个平衡方程,描述材料微小单元力的平衡关系。

3.4.2 边界条件

解决弹性力学问题,就是利用 15 个弹性力学基本方程和全部边界条件求解 15 个未知函数。如果边界情况不确定,那么材料内部的情况也就不能确定。因此,在问题的求解过程中,确定边界条件有着十分重要的意义。

例如,两边固支的矩形板如图 3.13 所示,板上方受到均匀压力。

写出问题的边界条件。

解 板的边界分为 6 个面,逐个写出后如下。

| | | |
|-------|--|--------------------------------------|
| 上表面: | $\sigma_{zz} = -p, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0$ | $x \in [0, a], y \in [0, b], z = 0$ |
| 下表面: | $\sigma_{zz} = 0, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0$ | $x \in [0, a], y \in [0, b], z = -s$ |
| 左前表面: | $\sigma_{xx} = 0, \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = 0$ | $x = a, y \in [0, b], z \in [0, -s]$ |
| 右前表面: | $\sigma_{yy} = 0, \tau_{yx} = 0, \tau_{yz} = 0$ | $x \in [0, a], y = b, z \in [0, -s]$ |
| 左后表面: | $u_x = 0, u_y = 0, u_z = 0$ | $x \in [0, a], y = 0, z \in [0, -s]$ |
| 右后表面: | $u_x = 0, u_y = 0, u_z = 0$ | $x = 0, y \in [0, b], z \in [0, -s]$ |

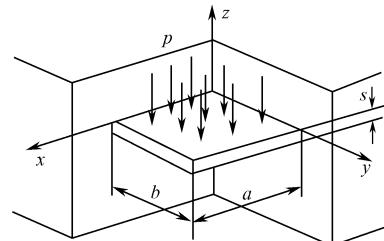


图 3.13 两边固支的矩形板

3.4.3 最小势能原理

受外载荷变形后,材料上任一点的应力乘以应变的二分之一形成该点处的应变能密度(单位体积内由于变形而储存的能量),所有各点应变能密度的积分称为应变能;表面上外力经历位移而做的功称为外力功;应变能+外力功=总势能。

材料受外载荷作用后的变形会是怎样的呢?最小势能原理指出:在众多的可能当中,总势能最小的变形将是真实的变形。换言之,所有物体受到外载荷并达到平衡时,总是自动地使自身处于最低势能状态。

3.4.4 有限单元法

弹性力学基本方程当中含有偏微分方程,对大多数问题来说很难得到精确解,于是只好求助于数值计算。有限单元法就是这样一种数值计算方法。

想象将弹性敏感元件分割成为许多细小单元。以单元节点坐标为插值点,构造一个插值函数(构造方法略)来替代单元内各点的位移值。有了插值函数这一近似手段,原先求解单元内无穷多个点的位移问题,转化为只需要求解为数有限的单元节点位移的问题。单元越小,这种近似为最终结果带来的误差越小。下面,利用最小势能原理求解单元节点位移。

研究一个单元的总势能,对它的表达式做一系列推演。

(1) 由定义知道,总势能是一个积分式,被积函数中含有应力、应变、位移、外力(此时指一个单元的外力)等未知函数。

(2) 利用几何方程和物理方程,将总势能表达式中的应力和应变全部替换成位移函数,并暂时假设单元的外力已知。这时,单元总势能表达式中就只有位移这一个未知函数了。

(3) 将总势能表达式中的位移替换为相应的插值函数,通过偏微分、积分等运算,总势能就写成了以节点位移为自变量的函数式,式中偏微分符号、积分符号均消失了。

由最小势能原理,总势能应取极小值;根据“多元函数极值存在的必要条件”,可得

$$\frac{\partial \Pi_p^e}{\partial a_{ij}} = 0 \quad (3-42)$$

式中, Π_p^e ——单元的总势能;

a_{ij} ——单元上第 i 个节点第 j 个方向的位移。

随着 i, j 取不同的数,式(3-42)代表不是一个而是一组方程。如果单元外力是已知的,到这一步,解式(3-42)就可以得到单元节点位移的具体数值了。然而,单元外力只是暂时假设为已知,但我们注意到:

- (1) 每个单元都有各自的一组类似式(3-42)的方程;
- (2) 每个单元与相邻单元间的外力互为作用力和反作用力;
- (3) 材料边缘部分单元的外力就是边界条件。

综合考虑上面三组关系,能够归纳合并出一个总的线性方程,其未知数是所有各节点的位移。解此线性方程,就得到了所有单元的节点位移的具体数值。通过已计算出的节点位移和插值函数,能够得到所有非节点处的位移,再通过几何方程、物理方程等已知的关系,可进一步得到各点的应力、应变。于是弹性力学问题得到了解决。

有限单元法的研究和应用已经十分深入和广泛,并出现了多种成熟的应用软件,这些软件已经成为传感器设计和解决其他各类工程问题的有力工具。