

第 1 章 电子线路实验基础

内容提要 本章介绍了电子线路实验的流程、设计的一般方法、调试技术，同时，还介绍了测量误差的定义、分类与处理实验数据的方法。这些内容是电子线路实验技术的基础。

1.1 电子线路实验的流程与要求

学习要求 熟悉电子线路实验的流程与要求。

电子线路实验的目的是将模拟电子技术、数字电路与逻辑设计、通信电子线路与电子测量等课程的理论与实践有机地结合起来，使学生掌握电子线路相关的基本实验技能。通过课堂实验和课外开放实验相结合的方式，培养学生综合运用所学理论知识分析解决实际问题的能力，初步掌握电子线路设计的一般方法，熟悉常用元器件和各种 EDA 软件工具的使用，能够查阅相关资料，选择恰当器件实现电子线路单元模块与系统，能够对电路与系统进行仿真、分析和辅助设计，能够分析、寻找和排除实验电路中的故障，从而实现从理论知识到实践能力再到综合专业素质的全面培养。

电子线路实验的一般流程如图 1.1.1 所示。它包括实验前的准备、电路的组装、实验调试与性能指标测量、实验数据的分析与处理和撰写实验报告等过程。为了充分发挥学生主动实验的精神，促使其独立思考、独立完成实验并有所创造，我们对电子线路实验的每个过程提出下列基本要求。

1. 实验前的准备

为了避免盲目性，使实验有条不紊地进行，每个实验者实验前应

对实验内容进行预习，并做好以下几方面准备：

- ① 明确实验目的、任务与要求。
- ② 复习有关电路的基本原理，对思考题作出解答；对于设计性实验则要完成电路设计任务，设计电路的一般方法将在下一节介绍。
- ③ 根据实验内容，设计实验方案与实验步骤，并组装好实验电路。
- ④ 对实验中应记录的原始数据应列出表格待用，并初步估算（或分析）实验结果（包括参数和波形），最后写出预习报告。

实验前，教师要检查预习情况，并对学生

进行提问，预习不合格者不准进行实验。

2. 电路的组装方法

对于开放性实验，要求学生以班为单位提前一周到实验室领取所有实验的元器件和实验工具，并要求每次实验课前按实验方案组装好实验电路。对于非开放性实验，在做好预习的前提下，可以到实验室后再组装电路。

电子电路的组装通常采用在面包板上插接和在 PCB 板上焊接两种方式。对于比较简单的单元电路，在面包板上插接电路是一种简便易行的方法。而对于比较复杂的电路，通常需要设计 PCB 板，然后将元器件焊接在 PCB 上进行调试。本书仅介绍在面包板上组装电路的方法。

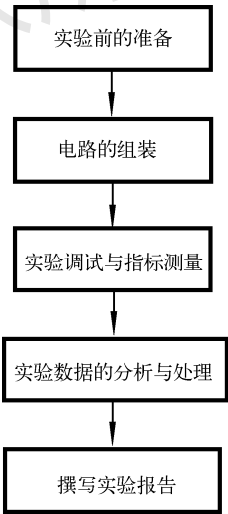


图 1.1.1 实验的基本流程

(1) 面包板的结构

面包板是由有许多小方孔的塑料板组成的，如图 1.1.2 所示。每块插板中央有一凹槽，凹槽两边各有 65×5 个插孔。每 5 个插孔为一组（ABCDE 或 FGHIJ），5 个孔由内部的金属簧片连通。面包板的上、下各有一条 11×5 的小插孔（图中的 X 和 Y），每 5 个孔为一组，它们是相通的，但整个横排不一定都连通，测量不同插孔之间的电阻值，如果为 0 就是连通的。X、Y 这两条插孔通常用作电源线和地线的插孔。

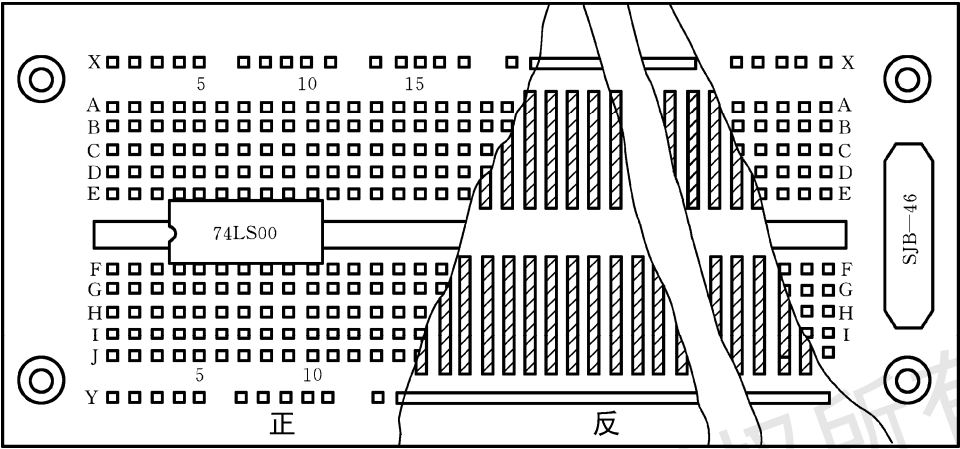


图 1.1.2 面包板结构图

(2) 元器件的安装

通常按照电路中信号的流向安装元器件，将输入信号安排在左边，输出信号则放在右边，电源线安排在上边，地线安排在下边，并且元器件的布局要疏密恰当，对于引脚较长的元件（如电阻、电容等）可以将引脚剪短一些。

集成电路引脚必须插在面包板中央凹槽两边的孔中，插入时所有引脚应稍向外偏，使引脚与插孔中的簧片接触良好，所有集成电路的方向要一致，缺口朝左（如图 1.1.2 所示），便于正确布线和查线。集成电路在插入与拔出时，最好用起子或镊子插入到芯片下面的凹槽中轻轻用力撬起，以免引脚弯曲或断裂。

(3) 正确合理布线

一般选直径为 0.6mm 的单股导线，长度适当。先将两头绝缘皮剥去 7mm~8mm，然后把导线两头弯成直角，用镊子夹住导线，垂直插入相应的孔中。连线时，要紧贴面包板走线，并要求横平竖直，不要从元器件上面走飞线。

为避免或减少故障，面包板上的电路布局与布线，必须合理而且美观。

- ① 集成块和晶体管的布局，一般按主电路信号流向的顺序在一小块面包板上直线排列。各级元器件围绕各级的集成块或晶体管布置，各元器件之间的距离应视周围元件多少而定。
- ② 第一级的输入线与末级的输出线、高频线与低频线要远离，以免形成空间交叉耦合。尤其在高频电路中，元器件插脚和连线应尽量短而直，以免分布参数影响电路性能。
- ③ 为使布线整洁和便于检查，尽可能采用不同颜色的导线，一般正电源线用红色，负电源线用蓝色，地线用黑色。布线时应注意导线不宜太长，最好贴近底板并在器件的周围布线，一个孔只准插一根线，并且不允许导线在集成块上方跨过、杂乱地在空中搭成网状。以方便检查排除故障或更换器件。
- ④ 合理布置地线。为避免各级电流通过地线时互相产生干扰，特别要避免末级电流通过

地线对某一级形成正反馈而产生自激，故应将各级单独接地，然后再分别接公共地线。

3. 对电路进行实验调试与性能指标的测量

进入实验室后，为了保证实验效果，要按照实验操作的规范进行实验，具体要求如下：

- ① 参加实验者要自觉遵守实验室规则。
- ② 根据实验内容合理布置实验现场，仪器设备和实验装置安放要适当。图 1.1.3 是实验电路板与仪器的布局 and 连接示意图。

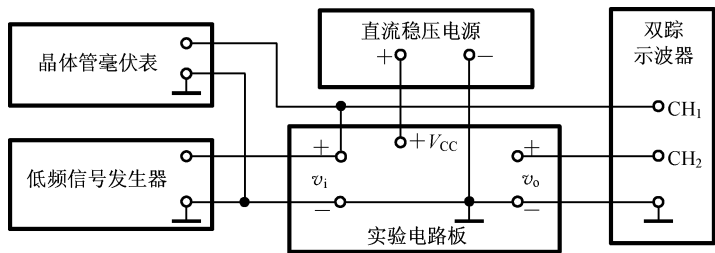


图 1.1.3 实验电路板与仪器的布局 and 连接示意图

③ 按照实验方案对实验电路进行测试与调整，使电路处于正常的工作状态。然后要认真记录实验条件和所得数据、波形（并分析判断所得数据、波形是否正确）。发生故障应独立思考，耐心排除，并记下排除故障过程和方法。

④ 发生事故应立即切断电源，并报告指导教师和实验室有关人员，等候处理。做好实验，保证实验质量是师生的共同愿望。这里所谓做好实验，并不是要求学生在实验过程中不发生问题，一次成功。实验过程不顺利，不一定是坏事，常常可以从分析故障中增强独立工作能力。相反，“一帆风顺”也不一定有收获。所以做好实验的意思是独立解决实验中所遇到的问题，把实验做成功。

⑤ 实验完成后，要将记录的实验结果送指导教师审阅签字，教师一般会当场抽查部分实验数据，并记录实验情况，作为平时实验操作部分成绩的评分依据。经教师验收合格后才能拆除线路，清理现场。

4. 分析实验数据，撰写实验报告

作为工程技术人员必须具有撰写实验报告这种技术文件的能力。附录 F 提供了一份设计性实验报告的写作范例，供参考。下面是实验报告写作的一般要求。

(1) 实验报告的内容

- ① 列出实验条件，包括何日、何时与何人共同完成什么实验，当时的环境条件，使用仪器名称及编号等。
- ② 对于基础实验，要简述实验电路工作原理；对于设计性实验，则需要写出设计过程。
- ③ 根据实验内容，认真整理和处理测试数据，并列出表格或用坐标纸画出曲线。
- ④ 对测试结果进行理论分析，作出简明扼要结论。找出产生误差原因，提出减少实验误差的措施。记录产生故障情况，说明排除故障的过程和方法。

⑤ 对本次实验的心得体会，以及改进实验的建议。

(2) 撰写实验报告的一般要求

- ① 文理通顺，书写简洁；符号标准，图表齐全；讨论深入，结论简明。
- ② 实验报告用学校统一的实验报告纸书写，每次新的实验开始时，交上一次的实验报告。实验报告将记入平时成绩。

实验与思考题

- 1.1.1 电子线路实验要经过哪些步骤？
- 1.1.2 电子线路实验前的准备工作有哪些？

1.2 电子线路设计的一般方法

学习要求 熟悉电子线路设计的基本原则和设计流程。

1. 电子线路设计的基本原则

电子线路设计是指根据设计任务、要求和条件，选择合适的方案，确定电路的总体组成框图，接着对各单元电路进行设计，最后得到满足技术指标和功能要求的完整电路图的过程。

一个好的设计除了完全满足性能指标和功能要求外，还要求电路简单可靠，系统集成度高，电磁兼容性好，性能价格比高，同时要求系统的功耗小、安装调试方便。

2. 电子线路设计的一般步骤

一般来说，电子线路的设计不是一个简单的、一次能完成的过程，而是一个逐步试探的过程。下面介绍电子线路设计的主要步骤。

(1) 仔细审题，分析技术指标

接到设计课题后，一定要仔细分析设计课题的要求、各项性能指标的含义，以便明确系统要完成的任务。

(2) 进行方案选择，画出总体组成框图，分配技术指标

弄清题意后，就可以进行总体方案设计了。这时，可以通过图书馆或网络检索相关参考资料，参考一些与设计课题相近的电路方案，查阅能够满足技术指标要求的器件。对于同一个课题，实现的方案可能有多个，应该将不同的方案进行对比，根据自己现有条件选择一种方案。

最后根据选择的方案，从全局着手，把系统要完成的任务按照功能划分为若干个相互联系的单元电路，然后将技术指标和功能分配给各个单元电路，并画出一个能表示系统基本组成和相互关系的总体组成框图。

例如，要设计一个额定输出功率不小于 1W 的音响放大电路，并要求该电路具有话筒扩音、数字混响延时、卡拉 OK 伴唱等功能。由题意可知，该系统要完成的主要功能是放大和混响延时，这是一个数模混合的电子系统，参考相关资料，可以设计出该系统的总体框图，如图 1.2.1 所示。

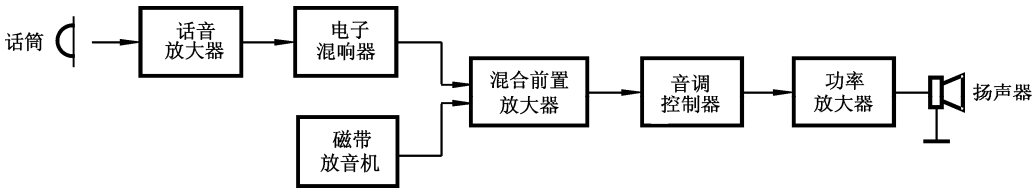


图 1.2.1 音响放大器的总体框图

然后将系统要完成的功能和各项技术指标分配给各个单元电路。由于话筒(低阻 20Ω)的输出电压有效值大约为 5mV ，而输出功率大于 1W ，则输出电压 $V_o = \sqrt{P_o R_L} > 2.8\text{V}$ 。可见系统的总电压增益 $A_{V\Sigma} = V_o/V_i > 560$ 倍(55dB)。混响延时电路可以选用专用数字混响集成电路芯片，如 M65831A，它只完成混响功能，不放大输入信号，因此该电路的电压增益主要分配给放大

器。图 1.2.2 是各单元电路电压增益分配情况（电路设计时，通常保留一定的裕量，图中取 $V_o=3V$ ）。

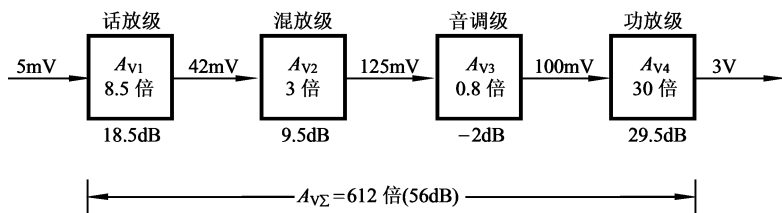


图 1.2.2 各个单元电路的电压增益分配

(3) 设计单元电路，进行计算机仿真实验

单元电路的设计可以参考一些典型的实用电路，或者将几个电路巧妙地结合起来实现某个功能。通常包括电路选择、元器件选择、电路参数计算、计算机仿真和实验调试等步骤。如果元器件选择合适，则电路实现起来就比较简单。在电路形式确定后，还要根据公式计算出各元件的参数，由于电子元器件性能的离散性及标称规格分级有限且存在误差，故元器件参数的计算常称为估算，估算的参数需要经过仿真或实验调试才能确定。对单元电路进行计算机仿真实验可以提高实验效率，避免搭接硬件电路、进行重复测试的烦琐过程。

在设计单元电路时，在保证电路性能指标的前提下，要尽量减少元器件品种、规格，要尽量选用集成电路进行设计。在选择元器件时，要注意以下几点：

- ① 选择集成电路进行设计时，除了考虑集成电路的功能和性能指标外，还要注意芯片的供电电压、功耗、速度和价格等因素。
- ② 电阻和电容的种类较多，正确选择电阻和电容是很重要的，不同电路对电阻和电容性能要求是不同的，有些电路对电容的漏电要求很严，有些电路对阻容元件的精度要求很高。设计时要根据电路的要求选择性能和参数合适的阻容元件，并要注意功耗、容量、频率和耐压范围是否满足要求。由于电阻值大时，其误差和噪声会增大，因此选择电阻时，其阻值一般不应超过 $10M\Omega$ ，并尽量选择阻值小于 $1M\Omega$ 的电阻。对于非电解电容的选择，其数值应在常用电容器标称系列之内，并根据设计要求及电路工作具体情况选择电容种类，其电容值最好在 $100pF \sim 0.1\mu F$ 。

(4) 画出总体电路图

在单元电路设计完成后，应画出能反映各单元电路连接关系的完整的电路原理图。此时得到的原理图是一个初步设计的草图，在经过实验调试后，才能绘制正式的总体电路图。绘制电路图时，要注意以下几点：

- ① 布局合理、排列均匀、图面清晰，便于读图和理解。对于比较复杂的电路，绘图时应尽量把主体电路绘在一张图纸上，而把比较独立或次要的部分绘在其他图纸上，并在图的断口两端做好标记，标出信号从一张图到另一张图的引出点和引入点，以说明各图纸在电路连线之间的关系。
- ② 注意信号流向，一般从输入端或信号源画起，由左到右或由上到下按信号流向依次画出各单元电路，而反馈通路的信号流向则与此相反。
- ③ 图形符号要符合国标或国际通用符号。
- ④ 连接线一般画成水平线或垂直线，并尽量减少交叉与拐弯。相互连通的交叉线应在交叉处用实心点表示，根据需要，可以在连接线上加注信号名或其他标记，表示其功能或其去向。

实验与思考题

1.2.1 电子线路设计一般需要经过哪几个步骤？

1.2.2 以图 1.2.2 所示电路为例，如果输入信号为 20mV，功放级的输出为 5V，要求信号不失真放大，应如何分配各个单元电路的电压增益？

1.3 电子线路调试技术

学习要求 掌握电路的调试技术，了解电路调试中的一些注意事项。

1. 电路的调试方法

调试是电子线路设计中一次非常重要的工作。对于一个新设计的电路，必须通过组装、测试和调整，才能发现问题、排除电路故障或修改电路参数，使设计的电路达到规定的技术指标要求。

实验调试的常用电子仪器有：直流稳压电源、万用表、示波器、信号发生器和扫频仪等。调试的一般步骤如下：

(1) 检查电路的连接

在电路的连线接完后，首先必须对照电路图认真仔细检查电路连线，如各晶体管或集成块的引脚是否插对了，是否有漏线和错线，特别要检查电源与地线是否有短路现象。

(2) 分块调试

通常按照总体组成框图分块进行调试，一般按照电路中信号的流向，从“源”（包括供电电源、传感器信号源或电路中的振荡信号源）开始，分块安装与调试，在分块调试的基础上逐步扩大安装与调试的范围，最后完成整个电路的调试。具体步骤如下：

① 直接观察。在检查电路连线无误后，首先在空载（即切断该电源的所有负载）的情况下，调好所需要的电源电压，然后给电路通电。此时要观察电路有无异常现象，包括冒烟、有异常气味、用手触摸元器件发热、电源短路等，如果有，应立即关断电源，待排除故障后，才可重新通电。

② 静态测试。先去掉输入信号，并将电路的输入置零，用万用表测量电路的 V_{CC} 与地之间的电压，测量电路的静态工作点是否符合要求。

③ 动态调试。在输入端加入一个适当频率和幅值的信号，按信号流向用示波器观测电路各测试点波形（包括幅值、相位、波形形状、时序关系等）是否符合要求。

测试完毕后，要将静态和动态测试结果与设计指标加以比较，经过分析后再调整电路参数，使之达标。

(3) 整机联调，测试技术指标

有时，单元电路工作正常，整机电路的工作却不正常。主要原因是没有进行逐级连接与调试。一般先将两级电路进行级联、调试，使这两级电路的技术指标达到设计要求；再将下一级与前两级进行级联、调试，使这三级的技术指标达到设计要求；如此类推，直到整机电路调试完成。

整机电路工作正常后，要测试整机的全部性能指标，并与设计要求进行对比，找出问题，然后进一步修改、调整电路的参数，直到完全符合设计要求为止。

注意 使用示波器测试电路的波形时，最好把示波器的信号输入方式置于“直流”耦合挡，这样可以同时观察到被测信号的交直流成分。

2. 检查电路故障的常用方法

在保证供电正常的情况下，查找电路故障可以采用以下方法：

(1) 替代法

用已经调整好的单元电路代替有故障或有疑问的相同的单元电路，这样可以很快判断出故障原因是在单元电路本身，还是在其他的单元或连接线上。当发现某一局部电路有问题时，应先检查该部分的连线，当确认无误后再更换元器件。

(2) 对比法

将有问题电路的状态、参数与相同正常电路进行逐项对比，从中找出电路中不正常情况，进而分析故障原因，判断故障点。

(3) 对分法

把有故障的电路对分为两个部分，可检查出有问题的那一部分而排除另一部分无故障的电路。然后再对有故障的部分进行对分检测，直到对分找出故障点为止。

以上仅仅列举了 3 种常用的查找电路故障的方法，调试电路时，往往要综合应用各种方法，才能排除故障。

3. 调试中的注意事项

在调试电路的过程中，应注意以下几点：

① 测试前，要熟悉电路的工作原理和各项技术指标的测试方法。

② 仪器的信号线与地线的连接要正确。或许有人会说：实验中测量的是交流信号，可以不分正、负，因此测量仪器的信号线与地线也可以不分（任意接）。这种想法是错误的，这样做会导致测量结果错误，如图 1.3.1 所示。设测量仪器是示波器或者电压表，其输入阻抗是 R_i ，被测电压是 v_o ，其对地的电阻是 R_o 。采用图 1.3.1 (a) 所示的连接方法，测得对地的电压是 v_o ，测量仪器与被测电路的连接是正确的。如果测量仪器的信号线与地线接反，如图 1.3.1 (b) 所示，则被测电路的地线相对于测量仪器来说是悬浮的，此时被测电路对地会产生分布电容 C_x ，仪器测得的实际电压如图 1.3.1 (c) 所示。由于分布电容产生的电压 v_x 对被测电压 v_o 的幅度和相位都会产生影响，从而导致测量结果错误。特别是随着信号频率的升高，测量结果的错误就会越来越严重。因此，切不可将仪器的信号线与地线接反。

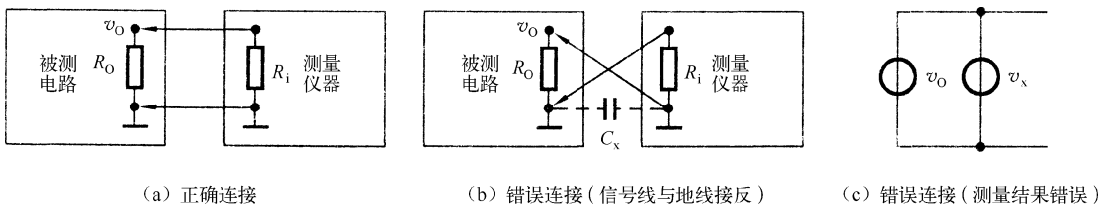


图 1.3.1 仪器的信号线与地线的连接

③ 测量电压时，所用仪器的输入阻抗必须远大于被测处的等效阻抗。因为，若测量仪器输入阻抗小，则在测量时会引起分流，给测量结果带来很大误差。

④ 测量仪器的带宽必须大于被测电路的带宽，否则，测试结果就不准确。

⑤ 测量方法要方便可行。例如，在测量 PCB 板上某支路的电流时，可以通过测取该支路上某电阻两端的电压，经过换算而得到。若用电流表测电流很不方便。

⑥ 调试过程中，不但要认真观察和测量，还要认真做好记录。记录的内容包括实验条件、观察的现象、测量的数据、波形和相位关系等。只有有了大量的可靠的实验记录并与理论

结果加以比较，才能发现电路设计上的问题，完善设计方案。

⑦ 调试时出现故障，要认真查找故障原因，仔细分析判断。切不可一遇到故障就拆掉线路重新安装，因为重新安装的线路仍可能存在各种问题。如果是原理上的问题，即使重新安装也解决不了问题。应当把查找故障，分析故障原因，看成一次好的学习机会，通过它来不断提高自己分析问题和解决问题的能力。

实验与思考题

- 1.3.1 简述调试电路的一般步骤。
- 1.3.2 如何对一个放大电路进行静态测试和动态测试？在测试过程中会用到哪些仪器？
- 1.3.3 由于交流信号是不分正、负极性的，因此在用示波器测量交流信号时，示波器的信号线与地线也可以不加区分地任意接到被测信号的两端。这种说法是否正确？

1.4 测量误差分析

学习要求 熟练运用绝对误差、相对误差、满度相对误差、分贝误差等正确表示电子电路参数的测量结果；掌握计算机辅助分析系统误差、随机误差、粗大误差的方法。

1.4.1 测量误差的定义

(1) 绝对误差

测量值 x 与被测量的真值 x_0 间的偏差称为绝对误差，即

$$\Delta x = x - x_0 \tag{1.4.1}$$

(2) 相对误差

测量的绝对误差 Δx 与真值 x_0 的比值称为相对误差。常用百分数表示，即

$$\gamma = \frac{\Delta x}{x_0} \times 100\% \tag{1.4.2}$$

(3) 满度相对误差

测量的绝对误差 Δx 与测量仪表的满度值 x_n 的比值称为满度相对误差。常用百分数表示，即

$$\gamma_n = \frac{\Delta x}{x_n} \times 100\% \tag{1.4.3}$$

γ_n 不能超过测量仪表的准确度等级 S 的百分值 $S\%$ (S 分为 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.5 和 5.0 七级)，即

$$\gamma_n = \frac{\Delta x}{x_n} \times 100\% \leq S\% \tag{1.4.4}$$

如果仪表的等级为 S ，被测量的真值为 x_0 ，选满度值为 x_n ，则测量的相对误差为

$$\gamma = \frac{\Delta x}{x_0} \leq \frac{x_n \cdot S\%}{x_0} \tag{1.4.5}$$

上式表明，当仪表的等级 S 选定后， x_n 越接近 x_0 ，测量的相对误差就越小。使用这类仪表时，要尽可能使仪表的满量程接近被测量的真值。或者说，测量时仪表的指针落在满量程的 2/3 以上区间内，测量误差较小。

(4) 分贝误差

电压增益或功率增益的相对误差用分贝表示时称为分贝误差, 即

$$\gamma_{dB} = 20 \lg \left(1 + \frac{\Delta A}{A_0} \right) \text{dB} \quad (1.4.6)$$

$$\gamma_{dB} = 10 \lg \left(1 + \frac{\Delta P}{P_0} \right) \text{dB} \quad (1.4.7)$$

式中, $\Delta A/A_0$ 为电压增益的相对误差; $\Delta P/P_0$ 为功率增益的相对误差。

分贝误差与相对误差的直接关系为

$$\gamma_{dB} = 8.69 \frac{\Delta A}{A_0} \text{dB} \quad \text{或} \quad \frac{\Delta A}{A_0} \approx 0.115 \gamma_{dB} \quad (1.4.8)$$

1.4.2 测量误差的分类

根据测量误差的性质、特点及产生原因, 可将其分为系统误差、随机误差及粗大误差。

1. 系统误差

在相同条件下, 多次测量同一量时, 误差的大小和方向均保持不变, 或在条件变化时按照某种确定规律变化的误差称为系统误差 (简称系差)。较常见的系差有恒值系差、累进性变化系差, 周期性变化系差等。

(1) 累进性系差判据

将 n 次等精度测量的残差 v 按测量条件 θ 的变化顺序 (如按时间的先后顺序) 排列为 $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n$, 然后把 n 个残差分成两部分求和, 再求其差值 Δ 。当 n 为偶数时

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n/2} v_i - \sum_{i=(n/2)+1}^n v_i \quad (1.4.9)$$

当 n 为奇数时

$$\Delta = \sum_{i=1}^{(n-1)/2} v_i - \sum_{i=(n+3)/2}^n v_i \quad (1.4.10)$$

式中, v_i 为残差, $v_i = x_i - \bar{x}$ ($\bar{x}$ 为算术平均值, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$)。

若前后两部分残差和的差值 Δ 近似等于零, 则说明测量数据中不含有累进性系差。若 Δ 值明显不为零, 即 $|\Delta| \geq |v_{i|\max}|$, 则认为测量中含有累进性系差。

(2) 周期性系差判据

按照一定顺序把残差两两相乘, 然后取乘积项的和的绝对值, 若满足关系式 (1.4.11), 则可认为测量中存在周期性系差。

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} v_i \cdot v_{i+1} \right| > \sqrt{n-1} \hat{\sigma}^2(x) \quad (1.4.11)$$

式中, $\hat{\sigma}^2(x)$ 为测量数据的方差的估计值。其计算式见式 (1.4.13)。

引起系统误差的因素很多, 常见的有测量仪器不准确、测量方法不完善、测量条件变化及测量人员不正确的操作等。系统误差是可以根据产生的原因, 采取一定措施减小或消除的。如果在一系列测量数据中存在着未被发现的系差, 那么对测量数据按随机误差进行的一切数据处理将毫无意义。

2. 随机误差

在相同条件下，多次测量同一量时，误差的大小和方向均发生变化且无确定的变化规律，称这种误差为随机误差。

一次测量的随机误差没有规律，但是，对于大量的测量结果，从统计观点来看，随机误差的分布接近正态分布，只有少数服从均匀分布或其他分布。因此，可以采用数理统计的方法来分析随机误差；可以用有限个测量数据来估计总体的数字特征。

(1) 数学期望的估计值

在实际测量中，将有限次测量数据的算术平均值 $\bar{x}$ 作为被测量真值 x_0 的估计值，或作为测量值的数学期望 $M(x)$ 的估计值 $\hat{M}(x)$ ，即

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \hat{M}(x) \tag{1.4.12}$$

(2) 均方差的估计值——贝赛尔 (Bessel) 公式

在实际测量中，常用有限次测量数据的均方差作为测量精度的估计值或作为测量值均方差 $\sigma(x)$ 的估计值 $\hat{\sigma}(x)$ ，即

$$\hat{\sigma}(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} \quad \text{或} \quad \hat{\sigma}^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1} \tag{1.4.13}$$

$$\hat{\sigma}(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} \quad \text{或} \quad \hat{\sigma}^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} \tag{1.4.14}$$

$\hat{\sigma}(x)$ 值越小，说明测量精度越高。

对于单次测量的均方差可按下式估算：

$$\hat{\sigma}(x) = \Delta_{\min} / \sqrt{3} \tag{1.4.15}$$

式中， $\Delta_{\min}$ 为测量仪器的最小分度。

(3) 估计被测量真值所处的区间

若测量中只存在随机误差（或系统误差可忽略），则可以用有限次测量数据来估计被测量真值 x_0 (x_0 满足关系式 (1.4.16))，称 x_0 所处的区间为 $[\bar{x} - t_\alpha \hat{\sigma}(\bar{x}), \bar{x} + t_\alpha \hat{\sigma}(\bar{x})]$ 。

$$x_0 = \bar{x} \pm t_\alpha \hat{\sigma}(\bar{x}) \tag{1.4.16}$$

式中， $\hat{\sigma}(\bar{x})$ 为平均值的均方差的估计值，即 $\hat{\sigma}(\bar{x}) = \hat{\sigma}(x) / \sqrt{n}$ ； t_α 为有限次测量的 t 分布系数，与测量次数 n 及指定的置信概率 P 有关，其关系如表 1.4.1 所示。

表 1.4.1 有限次测量的 t 分布 (t_α 值表)

$K \backslash P$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.741	0.941	1.190	1.553	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405

$K \backslash P$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850

注： $k = n - 1$

随机误差主要是由那些对测量值影响较微小，又互不相关的多种因素共同造成的，如热骚动、电磁场的微变、各种无规律的微小干扰等。用增加测量次数、取平均值的办法可减小随机误差对测量结果的影响。

3. 粗大误差与可疑数据

粗大误差通常是由测量人员的不正确操作或疏忽等原因引起的。粗大误差明显地超过正常条件下的系统误差和随机误差。凡被确认含有粗大误差的测量数据均称为坏值，应该剔除不用。

可疑数据是指那些使误差的绝对值超过给定范围的测量值 (x_k) ，即

$|x_k - \bar{x}| > ch \cdot \hat{\sigma}(x)$

(1.4.17)

式中，ch 为给定的系数，与测量次数 n 有关，如表 1.4.2 所示。

剔除可疑数据的步骤如下：

① 计算算术平均值 $\bar{x}$ ，均方差的估计值 $\hat{\sigma}(x)$ 及残差 ν_i ， $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ 。

② 判断有无可疑数据。先由表 1.4.2 查出测量次数 n 对应的系数 ch，然后用式 (1.4.17) 判断可疑数据。若存在可疑数据，则应指出其对应的测量值 x_k 和序号 k 。

③ 剔除 x_k ，不改变原测量值的顺序，令 $n = n-1$ （设剔除了一个可疑数据），重复步骤①、②、③直到无可疑数据为止。

注意 可疑数据是否一定要剔除不用，应慎重考虑。对那些因仪器不正常或测量人员的疏忽造成的可疑数据（又称为坏值）应剔除不用；但对那些由某种特殊原因（如电路工作不稳定）导致的可疑数据不能轻易剔除，需要进一步测量分析。

表 1.4.2 肖维纳准则表

n	ch	n	ch
5	1.65	16	2.16
6	1.73	17	2.18
7	1.79	18	2.20
8	1.86	19	2.22
9	1.92	20	2.24
10	1.96	21	2.26
11	2.00	22	2.28
12	2.04	23	2.30
13	2.07	24	2.32
14	2.10	25	2.33
15	2.13	26	2.34

1.4.3 误差传递公式及其应用

有些物理量（如电流、功率等）不便于直接测量，通常采用间接测量方法，如通过测量电压、电阻计算出待测的电流或功率。那么，如何根据直接测量量的误差求间接测量量的误差呢？误差传递公式能较好地解决这类问题。

1. 误差传递公式

设某量 y 由两个分量 x_1 、 x_2 按照函数关系式 $y=f(x_1, x_2)$ 合成，若在 $y_0=f(x_{10}, x_{20})$ 处附近的各阶偏导数存在，则

$$\begin{aligned}
 y &= f(x_1, x_2) \\
 &= f(x_{10}, x_{20}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f}{\partial x_2} (x_2 - x_{20}) \right] + \\
 &\quad \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (x_1 - x_{10})^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} (x_2 - x_{20})^2 \right] + \dots
 \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

若用 $\Delta x_1 = x_1 - x_{10}$ 及 $\Delta x_2 = x_2 - x_{20}$ 分别表示测量值 x_1 及 x_2 的误差, 由于 $\Delta x_1 \ll x_1$, $\Delta x_2 \ll x_2$, 则式 (1.4.18) 可近似为

$$\Delta y = y - y_0 = y - f(x_{10}, x_{20}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \quad (1.4.19)$$

若 y 由 m 个分量合成, 则

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (1.4.20)$$

式中, Δy 为总量的绝对误差; Δx_i 为分量的绝对误差; $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 为函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 关于第 i 个分量 x_i 的偏导数。

若用相对误差, 则式 (1.4.20) 可表示为

$$\gamma_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{y} \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (1.4.21)$$

式中, $\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}$ 为总量取自然对数后再对各分量求偏导数。

称式 (1.4.20)、式 (1.4.21) 为误差传递公式。当总量的表达式为和、差关系时, 采用式 (1.4.20) 计算总量的绝对误差较方便; 为积、商或乘方、开方关系时, 采用式 (1.4.21) 计算总量的相对误差较方便。

2. 误差传递公式应用举例

例 1 已知电阻 R_1 的误差为 ΔR_1 , R_2 的误差为 ΔR_2 。求两电阻并联后的电阻 R 的绝对误差 ΔR 及相对误差 γ_R 。

解 并联后的电阻
$$R = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

由式 (1.4.20) 得绝对误差
$$\Delta R = \frac{\partial R}{\partial R_1} \Delta R_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2} \Delta R_2 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 \Delta R_1 + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)^2 \Delta R_2$$

则相对误差
$$\gamma_R = \frac{\Delta R}{R} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\Delta R_2}{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \gamma_{R_1} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \gamma_{R_2}$$

例 2 已知某二阶 RC 有源带阻滤波器的中心角频率 ω_0 的表达式为 $\omega_0 = 1/(RC)$, 试求电阻 R 及电容 C 的稳定性对中心角频率 ω_0 的稳定性的影响。

解 电阻 R 的稳定性可用相对误差 $\Delta R/R$ 表示, 电容 C 的稳定性可以用 $\Delta C/C$ 表示, 由于 R 、 C 的不稳定引起了中心角频率 ω_0 的不稳定, ω_0 的稳定性用 $\Delta \omega_0/\omega_0$ 表示。

由式 (1.4.21) 得
$$\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = \frac{\partial \ln \omega_0}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial \ln \omega_0}{\partial C} \Delta C$$

因为 $\ln \omega_0 = \ln 1/(RC) = -(\ln R + \ln C)$, 所以

$$\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = \frac{\partial[-(\ln R + \ln C)]}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial[-(\ln R + \ln C)]}{\partial C} \Delta C = -\frac{\Delta R}{R} - \frac{\Delta C}{C}$$

例 3 用数字频率计测量信号的频率时,既可以采用测频法,其测频表达式为 $f_x = N_s/T_s$;也可以采用测周期法,其测周期表达式为 $T_x = N_c T_c$ 。求这两种方法的测量误差。

解 (1) 用测频法测量频率的表达式为

$$f_x = N_s / T_s$$

式中, N_s 为闸门时间 T_s 内的脉冲数。由式 (1.4.21) 得

$$\frac{\Delta f_x}{f_x} = \frac{\Delta N_s}{N_s} - \frac{\Delta T_s}{T_s} = \pm \frac{1}{T_s f_x} - \frac{\Delta T_s}{T_s}$$

式中, $\Delta N_s / N_s$ 为量化误差; $\Delta T_s / T_s$ 为闸门时间的相对误差,它由石英晶振的频率准确度决定。通常 $\Delta T_s / T_s \ll \Delta N_s / N_s$, 所以用测频法产生的测量误差为

$$\frac{\Delta f_x}{f_x} \approx \pm \frac{1}{T_s f_x}$$

可见,被测信号的频率 f_x 越高,闸门时间 T_s 越长,测频法的测频误差就越小。

用测周期法测量周期的表达式为

$$T_x = N_c T_c = N_c K T_0$$

式中, N_c 为被测信号的周期 T_x 内的脉冲数; T_c 为计数脉冲的周期, $T_c = K T_0$; K 为石英晶振的周期 T_0 的倍乘系数。

由式 (1.4.21) 得 $\frac{\Delta T_x}{T_x} = \frac{\Delta N_c}{N_c} + \frac{\Delta T_c}{T_c} = \frac{\pm K}{T_x f_0} - \frac{\Delta f_0}{f_0}$

通常石英晶振的频率准确度 $\frac{\Delta f_0}{f_0} \ll \frac{\pm K}{T_x f_0}$, 所以测周期法产生的测量误差为

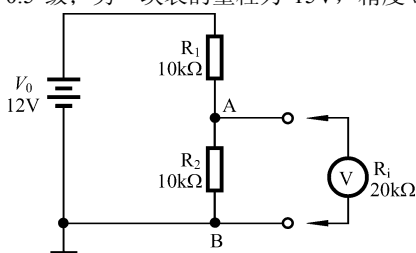
$$\frac{\Delta T_x}{T_x} = \pm \frac{K}{T_x f_0}$$

可见,被测信号的频率 f_x 越低,测周法的测量误差就越小。

实验与思考题

1.4.1 现有两块电压表,一块表的量程为 150V,其精度等级为 0.5 级;另一块表的量程为 15V,精度等级为 2.5 级。欲测量 10V 左右的电压,问选用哪块电压表测量更准确?为什么(通过分析计算回答)?

1.4.2 如题 1.4.2 图所示,该电路为一电阻分压电路。根据电阻分压原理 $V_{AB} = V_0/2 = 6V$,用一内阻 $R_1 = 20k\Omega$ 的直流电压表测量,结果并不等于 6V,为什么?求电压表的测量值 V_x 及测量的相对误差 γ_x 。



题 1.4.2 图

1.4.3 对某信号源的输出频率 f 进行 8 次测量,数据如下:

序号	1	2	3	4	5	6	7	8
f/Hz	1000.82	1000.79	1000.85	1000.84	1000.78	1000.91	1000.76	1000.82

求有限次测量的数学期望的估计值 $\hat{M}(x)$ 、均方差的估计值 $\hat{\sigma}(x)$ 。设置信概率 $P = 95\%$, 试估计被测频率的真值 f_0 所处的范围。

1.5 实验数据处理

学习要求 掌握实验数据的正确整理与曲线的绘制方法。了解最小二乘法、回归分析、拉格朗日插值等基本理论在实验数据处理中的应用。

1.5.1 实验数据的整理与曲线的绘制

凡测量得到的实验数据，都要先经过整理再进行处理。整理实验数据的方法通常有误差位对齐法及有效数字表示法。

1. 误差位对齐法

测量误差的小数点后面有几位，则测量数据的小数点后面也取几位。

例 用一块 0.5 级的电压表测量电压，当量程为 10V 时，指针落在大于 8.5V 的附近区域。这时测量数据应取几位？

解 由式 (1.4.4) 得该表在 10V 量程内的最大绝对误差为

$$\Delta V_{\max} = x_n \cdot S\% = 10 \times 0.5\% = 0.05 \text{ V}$$

则测量值应为 8.53V 或 8.52V 等，即小数点后面取两位。

2. 有效数字表示法

为减小测量误差的积累，通常采用近似舍入规则保留有效数字的位数。其规定为：以保留数字的末位为单位，它后面的数大于 0.5 者，末位进 1；小于 0.5 者，末位不变；恰为 0.5 者，末位为奇数时进 1，为偶数时不变。可见近似舍入规则克服了古典四舍五入规则中，保留数字末位后面的数为 0.5 时，只入不舍的缺点。

例 将数据 6.738501, 2.71829, 4.5105, 5.62350 保留 4 位有效数字。

解 6.738501 → 6.739 2.71829 → 2.718 4.5105 → 4.510 5.62350 → 5.624

3. 实验曲线的绘制

实验曲线的绘制，是指将测量的离散实验数据，绘制成一条连续光滑的曲线并使其误差最小。通常采用平滑法和分组平均法。无论采用哪种方法，绘制曲线前都要将整理好的实验数据按照坐标关系列表，适当选择横坐标与纵坐标的比例关系与分度，使得曲线的变化规律比较明显。

(1) 平滑法

如图 1.5.1 所示，先将实验数据 (x_i, y_i) 标在直角坐标上，再将各点 (x_i, y_i) 先用折线相连，然后作一条平滑曲线，使其满足以下等量关系：

$$\sum s_i = \sum s'_i \quad (1.5.1)$$

式中， $\sum s_i$ 为曲线以下的面积和； $\sum s'_i$ 为曲线以上的面积和。

(2) 分组平均法

如图 1.5.2 所示，将数据 (x_i, y_i) 标在坐标上。先取相邻两个数据点连线的中点（或 3 个数据点连线的重心点），再将所有中点连成一条光滑的曲线。由于取中点（或重心点）的过程就是取平均值的过程，所以减小了随机误差的影响。

1.5.2 实验数据的函数表示

用函数关系式来描述被测量的各物理量之间的相互关系，称为实验数据的函数表示或回归

分析。

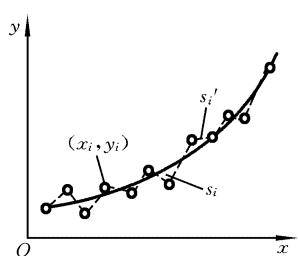


图 1.5.1 曲线平滑法

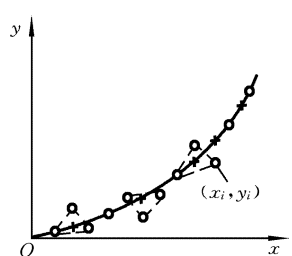


图 1.5.2 分组平均法

1. 最小二乘法

设对某量 x 进行了 m 次等精度的测量，第 i 次测量的随机误差为 δ_i ，且 δ_i 服从正态分布。由最大似然估计原则，满足关系式

$$\sum_{i=1}^m \delta_i^2 = \min \tag{1.5.2}$$

的估计值就是最佳估计值。称式 (1.5.2) 为最小二乘式。

在实际测量中，常用残差 v_i 来代替随机误差，则式 (1.5.2) 可以表示为

$$\sum_{i=1}^m v_i^2 = \min \tag{1.5.3}$$

式中， v_i 为第 i 次测量的残差， $v_i = x_i - \bar{x}$ 。

若被测量为间接测量量，则残差可以表示为

$$v_i = y - f(x_i; \alpha, \beta) \tag{1.5.4}$$

式中， α, β 为函数关系式 $f(x_i; \alpha, \beta)$ 中待估计的参数。

2. 回归分析法

先将实验数据标在坐标上，根据经验观察该列实验数据的变化规律符合哪种类型的函数的变化规律，从而确定函数的类型，再通过实验数据求函数式中的常系数及常量的方法，称为回归分析法。

设有 m 组实验数据 (x_i, y_i) ，选定的函数式为 $y = f(x; \alpha, \beta)$ ，其中 α 和 β 分别为待定系数和常量。根据最小二乘原理，由式 (1.5.3) 求出的 $\hat{\alpha}$ 及 $\hat{\beta}$ 值就是 α 及 β 的最佳估计值，即

$$\sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i; \alpha, \beta)]^2 = \min \tag{1.5.5}$$

若待定系数及常量 $\alpha, \beta, \dots$ 共有 n 个，则应建立起 n 个联立方程组：

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i; \alpha, \beta, \dots)]^2}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i; \alpha, \beta, \dots)]^2}{\partial \beta} = 0, \quad \dots \tag{1.5.6}$$

称式 (1.5.6) 为回归方程组。解式 (1.5.6)，可以求出 $\alpha, \beta, \dots$ 的估计值 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \dots$

如果函数 $f(x_i; \alpha, \beta)$ 为直线方程，如 $y = ax + b$ ，则 a 与 b 的估计值 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$ 可由下式求解

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^m [y_i - (ax_i + b)]^2}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \sum_{i=1}^m [y_i - (ax_i + b)]^2}{\partial b} = 0 \tag{1.5.7}$$

得

$$\hat{a} = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2}, \quad \hat{b} = \left(\sum_{i=1}^m y_i / m \right) - \left(\sum_{i=1}^m x_i / m \right) \hat{a} = \bar{y} - \bar{x} \hat{a} \quad (1.5.8)$$

例 在不同温度 $t/^{\circ}\text{C}$ 下，测量三极管 3DG 130 的电流放大系数 β ，测量数据如下：

$t/^{\circ}\text{C}$	0	30	60	90	120
β	20.0	28.0	37.5	51.0	68.0

用回归分析法求 β 与 t 的函数关系式。

解 将实验数据标于坐标上，如图 1.5.3 所示。由图可见， β 与 t 近似于指数关系，故选指数型函数式，即

$$\beta = be^{at}$$

式中， a, b 为待定系数。将上式两边取自然对数得

$$\ln \beta = \ln b + at$$

令 $\ln \beta = y, \ln b = B$ ，从而将上式转换为直线方程

$$y = at + B$$

由式 (1.5.8) 可得

$$\hat{a} = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2} = 0.01, \quad \hat{B} = \bar{y} - \bar{x} \hat{a} = 3.02$$

又因为 $\ln \hat{b} = \hat{B}$ ，则 $\hat{b} = 20.5$ ，故 β 与 t 的近似关系式为

$$\beta = \hat{b}e^{\hat{a}t} = 20.5e^{0.01t}$$

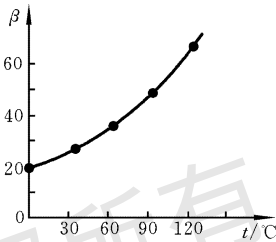


图 1.5.3 回归分析法

1.5.3 实验数据的插值法

在一系列实验数据中插进一些需要的值称为实验数据插值。较常用的插值方法有拉格朗日 (Lagrange) 插值法。

实验中经常见到的一些函数式，均可以由测量得到的实验数据构成的一个多项式去逼近。例如，一次函数式 (直线方程) $y(x) = a_0 + a_1x$ 可由 2 组实验数据 (x_0, y_0) 与 (x_1, y_1) 构成的多项式逼近，即

$$y(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \quad (1.5.9)$$

二次函数式 (抛物线) $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ 可以由 3 组实验数据 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ 与 (x_2, y_2) 构成的多项式逼近，即

$$y(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \quad (1.5.10)$$

n 次函数式 $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 可由 $(n+1)$ 组实验数据 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ 构成的多项式逼近，即

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} y_k$$

$$= \sum_{k=0}^n \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k \quad (1.5.11)$$

式中, n 为插值多项式的次数, 称为插值的阶; $x_0, x_1, \dots, x_n$ 为插值多项式的节点 (实验数据); $y_0, y_1, \dots, y_n$ 为节点对应的函数值 (实验数据); x 为插值点; $y_n(x)$ 为插值点对应的函数值。

称式 (1.5.11) 为拉格朗日插值公式; 求 $y_n(x)$ 的过程称为插值。该式表明: 对于给定的插值点 x , 可以由 $(n+1)$ 组实验数据求 n 次函数式在 x 点处的近似值 $y_n(x)$ 。

实验数据的插值法在实验研究中获得广泛应用。例如, 因实验条件有限, 不能测量出某些实验数据, 或由于疏忽丢失了某些数据, 而在实验分析或绘制曲线时又需要这些数据的情况下, 可以采用插值法求出这些数据。

例 已知实验数据如下, 求插值点 $x=4.0$ 所对应的函数值 $y(4.0)$ 。

x	0.0	1.0	2.0	3.0	5.0	6.0
$y(x)$	0.01	1.11	4.21	9.31	25.51	36.61

解 将实验数据标于坐标上, 如图 1.5.4 所示。观察 $y(x)$ 的变化规律近似于二次函数式 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, 因此, 需要 3 组实验数据求插值。对于插值点 $x=4.0$, 可以取 $x_0=2.0, y_0=4.21$; $x_1=3.0, y_1=9.31$ 及 $x_2=5.0, y_2=25.51$ 这 3 组实验数据。也可以取另外 3 组实验数据, 即 $x_0=3.0, y_0=9.31$; $x_1=5.0, y_1=25.51$ 及 $x_2=6.0, y_2=36.61$ 。现取前面 3 组实验数据, 由拉格朗日插值公式 (1.5.11) 得

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k$$

$$y_2 = \sum_{k=0}^2 \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^2 \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k$$

$$= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

将 $x=4.0, x_0=2.0, y_0=4.21; x_1=3.0, y_1=9.31$ 及 $x_2=5.0, y_2=25.51$

代入上式, 得 $y(4.0)=16.41$ 。插入的实验数据 $(4.0, 16.41)$ 如图 1.5.4 中空心圆点所示。

随着函数式阶数 n 的增加, 式 (1.5.11) 的计算将变得十分烦琐。若将式 (1.5.11) 编程, 再用计算机进行插值计算则方便多了。

实验与思考题

1.5.1 测量晶体二极管 2AP9 的伏安特性, 其测量数据如下:

V_D/V	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$I_D/\mu A$	100	222	496	1100	2455	5456

求该二极管的伏安特性曲线及其函数表达式。

1.5.2 已知某四次函数式的实验数据如下所示:

x	-2.0	-0.4	0.2	1.0	4.0
y	24.000	-0.269	-0.077	0.000	480.000

求插值点 $x=-1.5, -1.0, -0.2, 0.0, 0.4, 0.8, 1.5, 2.0$ 时对应的函数值 $y(x)$, 并根据插值后的实验数据绘制实验曲线。

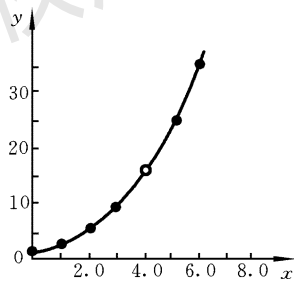


图 1.5.4 实验数据的插值