

第 1 章 电路的基本概念与定律

学习“电路分析基础”课程主要是掌握电路的基本规律和基本分析方法。本章从建立电路模型、认识电路变量等最基本的问题出发,重点讨论理想电源、欧姆定律、基尔霍夫定律、电路等效等重要概念。本章未对受控源及运算放大器新器件作适度介绍。

1.1 电路模型

“模型”是现代各个自然学科、社会学科分析研究问题中普遍使用的重要概念。例如,没有宽窄厚薄的“直线”是数学学科研究中的一种模型;不占空间尺寸却有一定质量的“质点”是物理学研究中的一种模型。人们在分析、设计某一实际系统时,几乎都采用模型化的方法,即先建立能反映该系统基本特性的模型,使问题得到合理简化,然后对该模型进行定量分析,以求得该系统的某些分析研究结果。研究电路问题也是如此,首先要建立电路模型,然后进行定量分析。

1.1.1 实际电路组成与功能

在现代工农业生产、国防建设、科学研究,以及日常生活中,使用着各种各样的电气设备,如电动机、雷达导航设备、计算机、电视机、手机等,广义上说,这些电气设备都是实际中的电路。

图 1.1-1 是最简单的一种实际照明电路。它由三部分组成:一是提供电能的能源,简称为电源,它的作用是将其他形式的能量转换为电能(图中干电池电源是将化学能转换为电能);二是用电装置,统称为负载,它将电源供给的电能转换为其他形式的能量(图中灯泡将电能转换成光和热能);三是连接电源与负载传输电能的金属导线,简称为导线。图中 S 是为了节约电能所加的控制开关,需要照明时将开关 S 闭合,不需要照明时将 S 打开。电源、负载与连接导线是任何实际电路都不可缺少的三个组成部分。

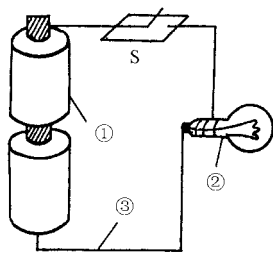


图 1.1-1 手电筒电路

实际电路种类繁多,但就其功能来说可概括为两个方面。其一,是进行能量的产生、传输、分配与转换。典型的例子是电力系统中的发电、输电电路。发电厂的发电机组将其他形式的能量(或热能、或水的势能、或原子能、或太阳能等)转换成电能,通过变压器、输电线输送给各用户负载,那里又把电能转换成机械能(如负载是电动机)、光能(如负载是灯泡)、热能(如负载是电炉、电烙铁等),为人们生产、生活所利用。其二,是实现信号的产生、传递、变换、处理与控制。这方面典型的例子有收音机、电视机、手机电路。如图 1.1-2 所示,接收天线将载有语言、音乐、图像信号的电磁波接收后,通过接收机电路把输入信号(又称激励)变换或处理为人们所需要的输出信号(又称响应),送到扬声器或显像管,再还原为语言、音乐或图像。

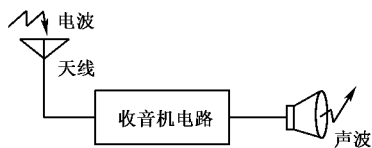


图 1.1-2 接收机电路

1.1.2 电路模型

在实际电路中使用着各种电气、电子元器件(又统称为电路部件),如电阻器、电容器、电感器、灯泡、电池、晶体管、变压器等。实际的电路部件虽然种类繁多,但在电磁方面却有许多共同

的地方。比如,电阻器、灯泡、电炉等,它们主要是消耗电能,这样可用一个具有两个端子的理想电阻来反映消耗电能的特征,其模型符号如图 1.1-3(a)所示。类似地各种实际电容器主要是储存电能,用一个理想的二端电容来反映储存电能的特征,理想电容元件的模型符号如图 1.1-3(b)所示。各种实际电感器主要是储存磁能,用一个理想的二端电感元件来反映储存磁能的特征,其模型符号如图 1.1-3(c)所示。

有了上述定义的理想电阻、理想电容、理想电感元件模型,任何一个实际的电阻器、电容器、电感器部件,就能用足以反映其电磁性能的一些理想元件模型或其组合来表示,构成实际部件的电路模型。比如,灯泡、电炉、电阻器,它们的主要电磁性能都是消耗电能,在低频应用时,它们中储藏的电能、磁能比起它们消耗的电能来说很微小,可以忽略不计,这些实际部件的电路模型都可用图 1.1-3(a)中的理想电阻 R 来表示。这样,就抽掉了这些实际部件的外形、尺寸的差异性,而抓住了它们所表现出来共性的东西即消耗电能。再如一个实际的电感器,它是在一个骨架上用良好金属导线绕制而成的,如图 1.1-4(a)所示。如果应用在低频电路里,它所表现出的电磁性能主要是储藏磁能,它所消耗的电能与储藏的电能都很小,与储藏的磁能相比可以忽略不计,在这种应用条件下的实际电感器,它的模型可视作图 1.1-4(b)所示的理想电感。如果应用在高频电路中,绕制该线圈的导线所消耗的电能需要考虑,它储藏的电能仍可忽略,那么,这种情况的实际电感器的模型就可用体现电能消耗的理想电阻 r 与体现磁能储藏的理想电感 L 相串联,如图 1.1-4(c)所示。如果这个实际电感器应用在更高频率的电路中,它储藏的电能也需要考虑,那么这种情况下的实际电感器的电路模型可用图 1.1-4(d)来表示。

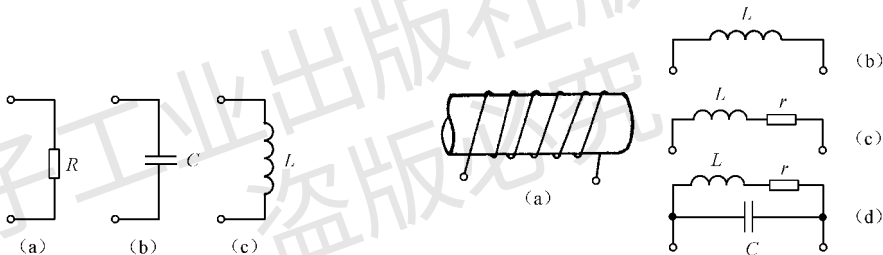


图 1.1-3 理想电阻、电容、电感元件模型

图 1.1-4 实际电感元件在不同应用条件下的模型

其他的实际电路部件都可类似地将其表示为应用条件下的模型,这里不一一列举。关于电路部件的模型概念这里再强调说明几点:① 理想电路元件是具有某种确定的电磁性能的理想元件:理想电阻元件只消耗电能(既不储藏电能,也不储藏磁能);理想电容元件只储藏电能(既不消耗电能,也不储藏磁能);理想电感元件只储藏磁能(既不消耗电能,也不储藏电能)。理想电路元件是一种理想的模型并具有精确的数学定义,实际中并不存在。但是不能说所定义的理想电路元件模型理论脱离实际,是无用的。这犹如实际中并不存在“质点”,但“质点”这种理想模型在物理学科运动学原理分析与研究中举足轻重一样,人们所定义的理想电路元件模型在电路理论问题分析与研究中充当着重要角色。② 不同的实际电路部件,只要具有相同的主要电磁性能,在一定条件下可用同一个模型表示,如上所述的灯泡、电炉、电阻器这些不同的实际电路部件在低频电路里都可用理想电阻 R 表示。③ 同一个实际电路部件在不同的应用条件下,它的模型也可以有不同的形式,如图 1.1-4 所示为实际电感器在各种应用条件下的模型。

将实际电路中各个部件用其模型符号表示,这样画出的图称为实际电路的电路模型图,亦称作电原理图。如图 1.1-5 就是图 1.1-1 实际电路的电路模型。

还应指出,实际电路中使用的电路部件一般都和电能的消耗现象及电、磁能的储存现象有关,它们交织在一起并发生在整个部件中。这里所述的“理想化”是指:假定这些现象可以分别研究,并且这些电磁过程都分别集中在各元件内部进行,这样的元件称为集总参数元件,简称为集

总元件。由集总元件构成的电路称为集总参数电路。众所周知,电荷激发电场,电流激发磁场,一切电、磁现象的本质都应是电场、磁场的问题。集总参数电路问题是满足一定条件下的电、磁场问题的简化问题。即是说,用集总参数电路模型来近似地描述实际电路是有条件的,它要求实际电路的尺寸 l (长度) 要远小于电路工作时的电磁波的波长 λ , 即

$$l \ll \lambda \quad (1.1-1)$$

集总参数电路的突出特点: 电流在集总参数电路中流动不需要时间;没有任何电、磁能量辐射,电磁能量的消耗、储存都集中在元件内部进行。

若不能满足式(1.1-1)条件,实际电路便不能按集总参数电路模型来处理。本书只讨论集总参数电路。

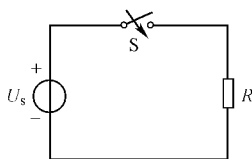


图 1.1-5 图 1.1-1
实际电路的模型图

思考题

1.1-1 20km 的电力供电线路,工程上可认为是集总参数电路吗?为什么?若改为 6000km 的供电线路呢?

1.1-2 房间内墙壁上共用天线插孔到电视机天线插孔的距离大约是 3~4m,需用电缆线将之连接,这 3~4m 电缆线,工程上可认为是集总参数电路吗?请说明理由。(假设电视机接收信号频率为 500MHz)

1.2 电路变量

在电路问题分析中,人们主要关注的物理量是电流、电压和功率,有时也涉及能量、电荷、磁通(或磁链)变量。在具体展开分析、讨论电路问题之前,首先建立并深刻理解一些重要物理量的有关基本概念是非常必要的。

1.2.1 电流

电荷有规则的定向运动,形成传导电流。我们知道,一段金属导体内含有大量的带负电荷的自由电子,通常情况下,这些自由电子在其内部作无规则的热运动,并不形成电流;若在该段金属导体两端连接上电源,那么带负电荷的自由电子就要逆着电场方向运动,于是在该段金属导体中便形成有电流。在其他场合,如电解溶液中的带电离子作规则定向运动也会形成传导电流。

电流,虽然人们看不见它,但可通过电流的各种效应(如磁效应、热效应)来感知它的客观存在,也就是说,电流是客观存在的物理现象。单位时间内通过导体横截面的电荷量定义为电流,如图 1.2-1 所示。电流用 $i(t)$ ^①表示,即

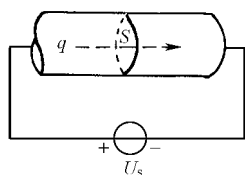


图 1.2-1 电流
定义说明图

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (1.2-1)$$

式中 $q(t)$ 为通过导体横截面的电荷量,若 $dq(t)/dt$ 为常数,即是直流电流,常用大写字母 I 表示。电流的单位是安培(A),简称“安”。电力系统中因为安培单位较小,有时用千安(kA)为电流的单位。而无线电接收系统中又因为安培这个单位太大,常用毫安(mA)、微安(μA)作电流单位。它们之间的换算关系是

$$1 \text{ kA} = 10^3 \text{ A}$$

① 时间函数 $i(t)$,也常简化书写为 i 。

$$1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$$

$$1 \text{ } \mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A}$$

在电路问题分析中,“电流”一词不仅表示一种物理现象,而且也代表一个物理量。

电流不但有大小,而且有方向性。规定正电荷运动的方向为电流的实际方向。在一些很简单的电路中,如图 1.1-5 所示,电流的实际方向是显而易见的,它是从电源正极流出,流向电源负极的。但在一些稍复杂的电路里,如图 1.2-2 所示桥形电路中, R_5 上的电流实际方向就不是一看便知的。不过, R_5 上电流的实际方向只有三种可能:①从 a 流向 b;②从 b 流向 a;③既不从 a 流向 b,也不从 b 流向 a(R_5 上电流为零),别无其他。所以说,对电流这个物理现象可以用代数数量来描述它。简言之,电流是代数数量,当然可以像研究其他代数数量问题一样选择正方向,即本书中所述的参考方向。假定正电荷运动的方向为电流的参考方向,用箭头标在电路图上。今后若无特殊说明,就认为电路图上所标箭头是电流的参考方向。对电路中电流设参考方向还有另一方面的原因,那就是,在交流电路中电流的实际方向分时间段在交替改变,因此很难在这样的电路中标清楚电流的实际方向,而引入电流的参考方向也就解决了这一难题。在对电路中电流设出参考方向以后,若经计算得出电流为正值,说明所设参考方向与实际方向一致;若经计算得出电流为负值,说明所设参考方向与实际方向相反。电流值的正与负,在设定参考方向的前提下才有意义。

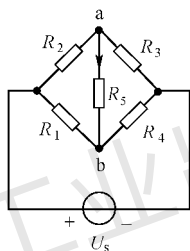


图 1.2-2 桥形电路

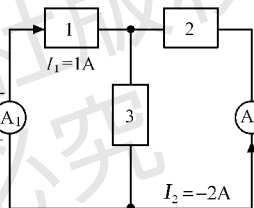


图 1.2-3 直流电流测试电路

在直流电路中,测量电流时要根据电流的实际方向将电流表串联接到待测的支路里,使电流的实际方向从直流电流表的正极流入,即如图 1.2-3 所示那样接入电路。 $\textcircled{A}_1$ 、 $\textcircled{A}_2$ 两旁所标“+”、“-”号是直流电流表的正、负极。

1.2.2 电压

物理学中我们已经知道,将单位正电荷自某一点 a 沿任意路径移动到参考点(物理学中习惯选无穷远处作参考点)电场力做功的大小称为 a 点的电位,记为 V_a 。在电路中,电位的物理意义同物理静电场中所讲电位概念是一样的,只不过电路中计算某点电位是将单位正电荷沿任一电路所约束的路径移至参考点(习惯选电路中某点而不选无穷远处)电场力所做功的大小。

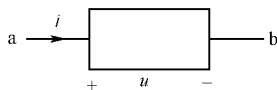


图 1.2-4 定义电压示意图

两点之间的电位之差即是两点间的电压。从电场力做功概念定义,电压就是将单位正电荷从电路中一点移至另一点电场力所做功的大小,如图 1.2-4 所示。用数学式表述为

$$u(t) = \frac{dw(t)}{dq(t)} \quad (1.2-2)$$

式中, dq 为由 a 点移至 b 点的电荷量,单位为库仑; dw 是为移动电荷 dq 电场力所做的功,单位为焦耳(J)。电位、电压的单位都是伏特(V),1V 电压相当于移动 1C 正电荷电场力所做的功为 1J。在电力系统中因为伏特单位较小,有时用千伏(kV)单位。在无线电电路中因为伏特单位太

大,常用毫伏(mV)、微伏(μ V)作电压单位。

从电位、电压定义可知它们都是代数量,因而也有参考方向问题。电路中,规定电位真正降低的方向为电压的实际方向。但在复杂的电路里,如图 1.2-2 中 R_5 两端电压的实际方向是不易判别的,或在交流电路里两点间电压的实际方向是分时间段交替改变的,这给实际电路问题的分析计算带来不便,所以也需要对电路中两点间电压设出参考方向。所谓电压参考方向,就是假设电位降低的方向,在电路图中用“+”、“-”号标出,或用带下脚标的字母表示。如电压 U_{ab} ,其脚标中第一个字母 a 表示假设电压参考方向的正极性端,第二个字母 b 表示假设电压参考方向的负极性端。以后如无特殊说明,电路图中“+”、“-”标号就认为是电压的参考方向。在设定电路中电压参考方向以后,若经计算的电压 U_{ab} 为正值,说明 a 点电位实际比 b 点电位高;若 U_{ab} 为负值,说明 a 点电位实际比 b 点电位低。与电流类似,两点间电压数值的正与负,在设定参考方向的条件下才是有意义的。

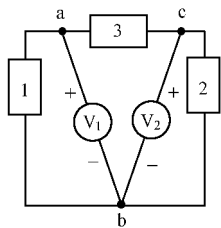


图 1.2-5 直流电压测量电路

大小、方向均恒定不变的电压称为直流电压,常用大写 U 表示。测量直流电压,应根据电压的实际方向将直流电压表并联接入电路,使直流电压表的正极接所测电压的实际高电位端,负极接所测电压的实际低电位端。比如,理论计算得 $U_{ab}=5\text{V}$, $U_{bc}=-3\text{V}$,若要测量这两个电压,电压表应如图 1.2-5 所示那样接入电路。图中 $\textcircled{V}_1$ 、 $\textcircled{V}_2$ 为电压表,两旁所标的“+”、“-”号分别为直流电压表的正、负极性端。

例 1.2-1 如图 1.2-6(a)所示电路,若已知 2s 内有 4C 正电荷均匀地由 a 点经 b 点移动至 c 点,且知由 a 点移动至 b 点电场力做功 8J,由 b 点移动到 c 点电场力做功为 12 J。

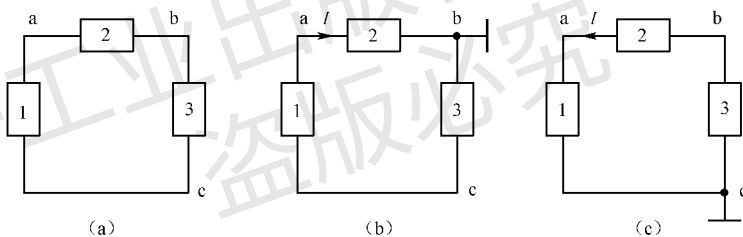


图 1.2-6 例 1.2-1 电路

- (1) 标出电路中电流参考方向并求出其值,若以 b 点作参考点(又称接地点),求电位 V_a 、 V_b 、 V_c ,电压 U_{ab} 、 U_{bc} 。
- (2) 标出电流参考方向与(1)时相反并求出其值,若以 c 点作参考点,再求电位 V_a 、 V_b 、 V_c ,电压 U_{ab} 、 U_{bc} 。

解: (1) 设电流参考方向如图(b)所示,并在 b 点画上接地符号。依题意并由电流定义得

$$I = \frac{q}{t} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (A)}$$

由电位定义,得

$$V_a = \frac{W_{ab}}{q} = \frac{8}{4} = 2 \text{ (V)}$$

$$V_b = 0 \text{ (b 点为参考点)}$$

$$V_c = \frac{W_{cb}}{q} = -\frac{W_{bc}}{q} = -\frac{12}{4} = -3 \text{ (V)}$$

本例题中已知 4C 正电荷由 b 点移动至 c 点电场力做功为 12J,本问是以 b 为参考点求 c 点电位,就是说,若将 4C 正电荷由 c 点移动至 b 点,电场力做功应为 -12J,[实际上为克服电场力做功

12J,或者说外力(非电场力)做功 12J],所以计算 c 点电位时算式中要用 -12。利用电压等于电位差关系,求得

$$U_{ab}=V_a-V_b=2-0=2 \text{ (V)}$$

$$U_{bc}=V_b-V_c=0-(-3)=3 \text{ (V)}$$

(2) 按题目中第(2)问要求,设电流参考方向如图(c)中所标,并在 c 点画上接地符号。由电流定义,得

$$I=-\frac{q}{t}=-\frac{4}{2}=-2 \text{ (A)}$$

电位

$$V_a=\frac{W_{ac}}{q}=\frac{8+12}{4}=5 \text{ (V)}$$

$$V_b=\frac{W_{bc}}{q}=\frac{12}{4}=3 \text{ (V)}$$

$$V_c=0 \text{ (c 为参考点)}$$

所以电压

$$U_{ab}=V_a-V_b=5-3=2 \text{ (V)}$$

$$U_{bc}=V_b-V_c=3-0=3 \text{ (V)}$$

通过这个例子,可以归纳总结出有关电流、电位、电压概念带有共性的几点重要结论:(1)电路中电流数值的正与负与参考方向密切相关,参考方向设得不同,计算结果仅差一个负号。(2)电路中各点电位数随所选参考点的不同而改变,但参考点一经选定,那么各点电位数就是唯一的,这就是电位的相对性与单值存在性。(3)电路中任意两点之间的电压数值不因所选参考点的不同而改变。今后在分析电路问题时,如只求电压,并不需要知道参考点选在何处,往往电路图上不标出参考点(这种情况下两点间电压的计算方法见 1.5 节);而求电位,则必须要有参考点,没有参考点,谈论电位数大小是没有意义的。

1.2.3 电功率

单位时间做功大小称为功率,或者说做功的速率称为功率。在电路中所述的电功率即是电场力做功的速率,以符号 $p(t)$ 表示。功率的数学定义式可写为

$$p(t)=\frac{dw(t)}{dt} \quad (1.2-3)$$

式中, dw 为 dt 时间内电场力所做的功。功率的单位为瓦(W)。1 瓦功率就是每秒做功 1 焦耳,即 $1W=1J/s$ 。

在电路中,人们更关注的是功率与电流、电压之间的关系。以图 1.2-4 所示电路为例加以讨论。图中矩形框代表任意一段电路,其内可以是电阻,可以是电源,也可以是若干电路元件组合。电流的参考方向设成从 a 流向 b,电压的参考方向设成 a 为高电位端, b 为低电位端,这样所设的电流、电压参考方向称为参考方向关联(或称参考方向一致)。设 dt 时间内在电场力作用下由 a 点移动到 b 点的正电荷量为 dq , a 点至 b 点电压 u 意味着单位正电荷从 a 点移动到 b 点电场力所做的功,那么移动 dq 正电荷电场力所做的功为 $dw=udq$ 。电场力做功说明电能损耗,损耗的这部分电能被 ab 这段电路所吸收。下面具体推导出 ab 这段电路吸收的电功率与其上电压、电流之间的关系。

由

$$u=\frac{dw}{dq}$$

得

$$dw=udq$$

再由

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$dt = \frac{dq}{i}$$

得

根据功率定义式(1.2-3),得

$$p(t) = ui \quad (1.2-4)$$

必须强调的是,在电压电流参考方向关联的条件下,一段电路所吸收的电功率为该段电路两端电压、电流的乘积。代入 u 、 i 数值,经计算,若 p 为正值,该段电路实际就是吸收功率;若 p 为负值,该段电路吸收负功率,即该段电路实际向外供出正功率,或者说产生功率。例如算得 ab 这段电路吸收功率为 -3W ,那么说成 ab 这段电路供出 3W 的功率也是正确的。如果遇到电路中电压电流参考方向非关联情况,如图 1.2-7 所示,在计算吸收功率的公式中应冠以负号,即

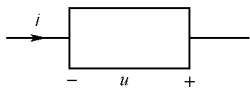


图 1.2-7 电压电流参考方向非关联情况

$$p(t) = -ui \quad (1.2-5)$$

有时,需要计算一段电路供出的功率(产生功率),无论 u 、 i 参考方向关联与否,所用公式与计算吸收功率时的公式均应差一个负号。即 u 、 i 参考方向关联,计算供出功率用 $-ui$ 计算; u 、 i 参考方向非关联,计算供出功率用 ui 计算。这是因为“吸收”与“供出”两者就是相反的含义,所以计算吸收功率与供出功率的公式相差一个负号是理所当然的事。

若已知元件吸收功率为 $p(t)$,并设 $w(-\infty) = 0$,则从 $t = -\infty$ 开始至时刻 t 该元件吸收的电能为

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\xi) d\xi \quad (1.2-6)$$

一个元件,若对于任意时刻 t 均有

$$w(t) \geq 0 \quad (1.2-7)$$

则称该元件为无源元件,否则称为有源元件。在电路工程中,能量单位除用焦耳之外,还常用千瓦时($\text{kW} \cdot \text{h}$)。吸收功率为 1000W 的家用电器,加电使用 1h ,它吸收的电能(即消耗的电能)为 $1\text{kW} \cdot \text{h}$,俗称 1 度电。

例 1.2-2 如图 1.2-8 所示电路,已知 $i = 1\text{A}$, $u_1 = 3\text{V}$, $u_2 = 7\text{V}$, $u_3 = 10\text{V}$,求 ab 、 bc 、 ca 三部分电路上各吸收的功率 p_1 、 p_2 、 p_3 。

解: ab 、 bc 段上电压、电流参考方向关联,所以选用式(1.2-4)计算吸收功率,有

$$p_1 = u_1 i = 3 \times 1 = 3 \text{ (W)}$$

$$p_2 = u_2 i = 7 \times 1 = 7 \text{ (W)}$$

对 ca 段电路,电压、电流参考方向非关联,所以选用式(1.2-5)计算它吸收的功率,有

$$p_3 = -u_3 i = -10 \times 1 = -10 \text{ (W)}$$

实际上 ca 这段电路产生功率为 10W 。

由此例可以看出

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0$$

对一完整的电路来说,它产生的功率与消耗的功率总是相等的,这称为功率平衡。这一点由能量守恒原理是容易理解的。

以上阐述了电路分析中常用的电流、电压、功率和能量的基本概念。由于这些量可以取不同的时间函数,所以又称它们为变量。这里必须指出:对电路中电流、电压设参考方向是非常必要

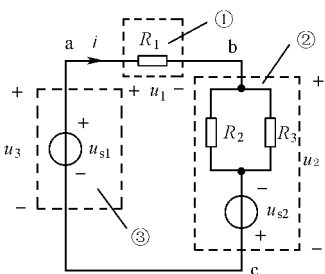


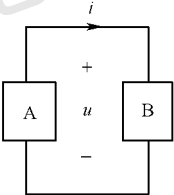
图 1.2-8 例 1.2-2 电路

的,后面我们将会知道,不设电流、电压参考方向,电路中基本定律就不便应用,电路问题的分析计算就无法进行下去。本节计算一段电路吸收功率时就遇到此类问题,如果不假设电压、电流参考方向,就不知该选何公式计算该段电路吸收的功率。如何假设电路中电流、电压参考方向是容易掌握的,原则上可以任意假设,不过为了避免许多公式中的负号,习惯上凡是一看便知电流、电压实际方向的,就假设参考方向与实际方向一致,对于不易看出实际方向的,也不必花时间去判别,只需在这些支路上任意假设一个参考方向。还习惯把元件上电流、电压参考方向设成关联;有时为了简化,一个元件只设出电流或电压一个量的参考方向,意味着省略不设参考方向量与设出量的参考方向关联。

最后谈一下辅助单位。上面讲了电流、电压、功率和能量的基本单位分别为安(A)、伏(V)、瓦(W)、焦耳(J),也简单介绍了几种电流、电压的辅助单位,今后在本课程及后续课程里还会遇到其他一些量的单位问题。作为单位换算关系,表 1.1 给出部分国际单位制(SI)词头表,供读者换算单位时查阅(表中[]内文字为可省略的中文词头名称部分)。

表 1.1 部分国际单位制(SI)词头表

因 数	词 头 名 称		符 号
	英文	中文	
10^9	giga	吉[咖]	G
10^6	mega	兆	M
10^3	kilo	千	k
10^{-3}	milli	毫	m
10^{-6}	micro	微	μ
10^{-9}	nano	纳[诺]	n
10^{-12}	pico	皮[可]	p



思考题 1.2-2 图

思考题

- 1.2-1 为什么要对电路中的电流、电压设参考方向？
- 1.2-2 电压 u 、电流 i 参考方向如思考题 1.2-2 图中标。请回答：对 A 部分电路电压、电流参考方向关联与否？对 B 部分电路呢？
- 1.2-3 有人说“电路中两点之间的电压等于该两点之间的电位差，因这两点的电位数值随参考点不同而改变，所以这两点间的电压数值亦随参考点的不同而改变”，你同意他的观点吗？为什么？

1.3 电阻元件与欧姆定律

在实际电路中电流流动并不是畅通无阻的,比如,在金属材料绕制的电阻器中,电流是由自由电子的定向移动形成的。事实上,电子在受电场力作用作定向运动过程中,必然会碰撞到金属内部存在的原子、离子,也就是说,这种碰撞对电流要呈现一定的阻力,当然也就有能量损耗。电路参数之一电阻,实际上是表征材料(或器件)对电流呈现阻力、损耗能量的一种参数。

1.3.1 电阻元件

这里所述的电阻元件就是前述的理想电阻,就电磁功能讲它只消耗电能。给出电阻元件的

一般定义：一个二端元件，如果在任意时刻，其端电压 u 与流经它的电流 i 之间的关系 (Voltage Current Relation, VCR)，能用 $u-i$ 平面上的一条曲线描述，就称为电阻元件，简称电阻。若该曲线是通过原点的直线，则称为线性电阻，否则称为非线性电阻。若曲线不随时间变化，则称为时不变电阻，否则称为时变电阻。线性电阻的显著特点是阻值不随其上电压或电流数值变化；时不变电阻的显著特点是阻值不随时间变化。本书主要涉及线性时不变电阻。线性时不变电阻与一种非线性时不变电阻的电路模型符号及 VCR，分别如图 1.3-1 和图 1.3-2 所示。今后若无特殊说明，电阻一词即指线性时不变电阻。

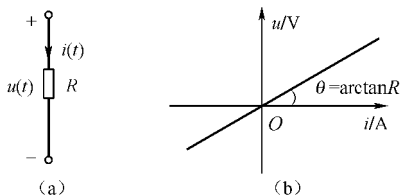


图 1.3-1 线性时不变电阻模型符号及其 VCR 特性

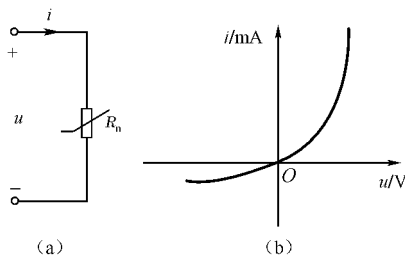


图 1.3-2 非线性时不变电阻模型符号及其 VCR 特性

1.3.2 欧姆定律

欧姆定律 (Ohm's Law, OL) 是电路分析中重要的基本定律之一，它说明流过线性电阻的电流与该电阻两端电压之间的关系，反映了电阻元件的特性。这里联系电流、电压参考方向讨论欧姆定律。设电阻上电压、电流参考方向关联，如图 1.3-1 图 (a) 所示，图 (b) 为电阻 R 上的 VCR，显然它是处在 $u-i$ 平面一象限、三象限过原点的直线。该直线的数学解析式为

$$u(t) = Ri(t) \quad (1.3-1)$$

此式就是欧姆定律公式。电阻的单位为欧姆 (Ω)。

电阻的倒数称为电导，以符号 G 表示，即

$$G = \frac{1}{R} \quad (1.3-2)$$

在国际单位制中，电导的单位是西门子，简称西 (S)。从物理概念上看，电导是反映材料导电能力强弱的参数。电阻、电导是从相反的两个方面来表征同一材料特性的两个电路参数，所以定义电导为电阻的倒数是有道理的。应用电导参数来表示电压和电流之间关系时，欧姆定律形式可写为

$$i(t) = Gu(t) \quad (1.3-3)$$

应当强调：(1) 欧姆定律只适用于线性电阻 (电导)；(2) 如果电阻 (电导) 上的电压、电流参考方向非关联，如图 1.3-3 所示，则欧姆定律公式中应冠以负号，即

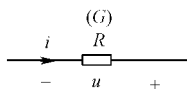


图 1.3-3 电压、电流参考方向非关联

$$u(t) = -Ri(t) \quad (1.3-4)$$

或

$$i(t) = -Gu(t) \quad (1.3-5)$$

(3) 由式 (1.3-1)、式 (1.3-3) 或式 (1.3-4)、式 (1.3-5) 可见，在参数值不等于零、不等于无限大的电

阻、电导上,电压与电流是同时存在、同时消失的。或者说,在这样的电阻、电导上, t 时刻的电压(或电流)只决定于 t 时刻的电流(或电压)。这说明电阻、电导上的电压(或电流)不能记忆电阻、电导上的电流(或电压)在“历史”上(t 时刻以前)所起过的作用。所以说电阻、电导元件是无记忆性元件,又称即时元件。

1.3.3 电阻元件上消耗的功率与能量

将式(1.3-1)代入式(1.2-4),可得电阻 R 上吸收的电功率为

$$p(t) = u(t)i(t) = Ri(t)i(t) = Ri^2(t) \quad (1.3-6)$$

或

$$p(t) = u(t)i(t) = u(t)\frac{u(t)}{R} = \frac{u^2(t)}{R} \quad (1.3-7)$$

同理,将式(1.3-3)代入式(1.2-4),可得电导 G 上吸收电功率为

$$p(t) = Gu^2(t) \quad (1.3-8)$$

或

$$p(t) = \frac{i^2(t)}{G} \quad (1.3-9)$$

由式(1.3-6)~式(1.3-9)可以看出,对于正电阻(或正电导)来说,其上所吸收的功率总是大于等于零。

电阻(或其他的电路元件)上吸收的能量与时间区间相关。设在 $t_0 \sim t$ 区间电阻 R 吸收的能量为 $w(t)$,则它应等于从 t_0 到 t 时刻对它吸收的功率 $p(t)$ 作积分,即

$$w(t) = \int_{t_0}^t p(\xi) d\xi \quad (1.3-10)$$

式(1.3-10)中,为避免积分上限 t 与积分变量 t 相混淆,将积分变量换为 ξ 。

联系电阻 R 上吸收功率与其上电压、电流关系,将式(1.3-6)或式(1.3-7)代入式(1.3-10),得

$$w(t) = \int_{t_0}^t Ri^2(\xi) d\xi \quad (1.3-11)$$

或

$$w(t) = \int_{t_0}^t \frac{u^2(\xi)}{R} d\xi \quad (1.3-12)$$

由于电阻 R 上吸收的功率对任意时间 t 都是非负的,从式(1.3-11)或式(1.3-12)不难看出电阻 R 吸收的能量 $w(t)$ 也一定是非负的。从物理概念看,电阻吸收的电能转换为非电能(热能、光能、机械能等),基于这一点,通常把电阻吸收的电能说成电阻消耗的电能。与此相对应,把电阻吸收的功率也说成电阻消耗的功率。

最后对实际用电器具(元件)的额定值问题作一说明。实际用电器具的额定值就是为保证安全、正常使用用电器具,制造厂家所给出的电压、电流或功率的限制数值。例如,一只灯泡上标明220V、40W,即是说明这样的含义:这只灯泡接到220V电压上,消耗功率为40W。如果所接电压超过220V,灯泡消耗功率大于40W,就有可能将灯泡烧坏(不安全);如果所接电压低于220V,灯泡消耗功率达不到40W(灯较暗),应用不正常,是“大材小用”,显然这样使用也是不合理的。市售的碳膜、金属膜电阻,除标明电阻值以外,通常还标有1/8W、1/4W、1/2W及2W各档;线绕电阻的额定功率较大。在实际设计装配电路时,不但应按所需电阻值大小来选电阻器,还应考虑电阻器在电路中所消耗的功率正确选择电阻的型号。

例 1.3-1 阻值为 2Ω 的电阻上的电压、电流参考方向关联,已知电阻上电压 $u(t) = 4\cos t$ V,求其上电流 $i(t)$,消耗的功率 $p(t)$ 。

解: 因电阻上电压、电流参考方向关联,所以其上电流

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{4\cos t}{2} = 2\cos t \text{ (A)}$$

消耗的功率

$$p(t) = Ri^2(t) = 2 \cdot (2\cos t)^2 = 8\cos^2 t \text{ (W)}$$

例 1.3-2 求一只额定功率为 100W、额定电压为 220V 的灯泡的额定电流及电阻值。

解：由

$$P = UI = \frac{U^2}{R}$$

$$I = \frac{P}{U} = \frac{100}{220} = 0.455 \text{ (A)}$$

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{100} = 484 \text{ (}\Omega\text{)}$$

得

例 1.3-3 某学校有 5 个大教室,每个大教室配有 16 个额定功率为 40W、额定电压为 220V 的日光灯管,平均每天用 4h(小时),问每月(按 30 天计算)该校这 5 个大教室共用电多少 kW·h?

解：额定功率为 40W 的日光灯管,即它吸收平均功率为 40W,所以计算所消耗的电能时只需平均功率乘上时间,即

$$\begin{aligned} W &= Pt = 40 \times 16 \times 5 \times 4 \times 30 \\ &= 384000 \text{ (W} \cdot \text{h)} = 384 \text{ (kW} \cdot \text{h)} \end{aligned}$$

思考题

1.3-1 有人说：“若 VCR 曲线为 $u-i$ 平面上过原点且处在二象限、四象限的直线的电阻为负的线性电阻；阻值随时间变化的电阻为时变电阻。不管是线性的负电阻或是线性的时变电阻，欧姆定律都是适用的。”你同意他的观点吗？并简述理由。

1.3-2 线性电阻有两种特殊情况,即 $R=0, R \rightarrow \infty$ 情况,其 VCR 曲线有何特点？试画出。若是这两种特殊的线性电阻,还能说其上电压、电流同时存在,同时消失吗？为什么？

1.4 理想电源

任何一种实际电路必须有电源提供能量。实际中有各种各样的电源,如干电池、蓄电池、光电池、发电机及电子线路中的信号源等。本节所要讲述的理想电源,是在一定条件下从实际电源抽象而定义的一种理想模型。

1.4.1 理想电压源

不管外部电路如何,其两端电压总能保持定值或一定的时间函数的电源定义为理想电压源,又称独立电压源或恒压源。其模型如图 1.4-1(a)、(b)所示。图(a)中圆圈外的“+”、“-”号是其参考极性, $u_s(t)$ 为理想电压源的端电压。若 $u_s(t)$ 是不随时间变化的常数,即是直流理想电压源,也常用图(b)所示的长短画符号模型。为了深刻理解理想电压源概念,这里再强调说明以下三点:

(1) 对任意时刻 t_1 ,理想电压源的端电压与输出电流的关系曲线(即 VCR 特性曲线)是平行于 i 轴、其值为 $u_s(t_1)$ 的直线,如图 1.4-2 所示。

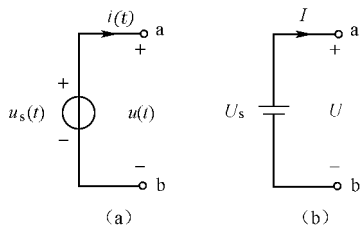


图 1.4-1 理想电压源模型

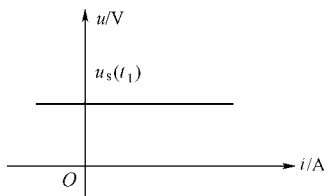


图 1.4-2 理想电压源 VCR 特性

(2) 由 VCR 特性可进一步看出,理想电压源的端电压与流经它的电流方向、大小无关,即使流经它的电流为无穷大,其两端电压仍为 $u_s(t_1)$ (对 t_1 时刻)。若 $u_s(t_1)=0$,则 VCR 特性为 $u-i$ 平面上的电流坐标轴,它相当于短路。

(3) 理想电压源的端电压数值由其自身独立决定,与外部电路无关;而流经它的电流由它及外部电路所共同决定,或者说它的输出电流随外部电路变化,可以等于任意值。根据不同的外部电路,电流可以从不同的方向流过电源,因此理想电压源可以对电路提供能量(起电源作用),也可以从外电路接受能量(当作其他电源的负载),这要看流经理想电压源电流的实际方向而定。理论上讲,在极端情况下,理想电压源可以供出无穷大能量,也可以吸收无穷大能量。

真正理想的电压源在实际中是不存在的,因为按照定义要求,这种电源在其内部储存着无穷大的其他形式能量,这显然是不可能做到的。然而,对于新的干电池或发电机等许多实际中的电源,当外部电路负载在一定范围之内变化时(注意:实际电压源决不可短路!)确实能近似视为定值(直流源)或一定的时间函数(交流电源)。这种情况下,把这些实际电源看作理想电压源也是工程计算中允许的。即使外电路负载变化范围条件限制不存在,也就是说,不能把实际电压源看作理想电压源,亦可用理想电压源模型串联一适当的内阻,作为表示实际电压源的模型。关于这个问题,将在 1.7 节实际电源模型中仔细讨论。由此可见,虽然理想电压源在实际中并不存在,但这里所定义的理想电压源模型还是有重要的理论价值和实际意义的。

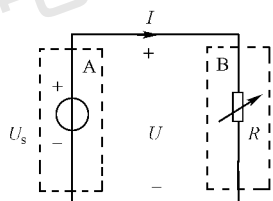


图 1.4-3 例 1.4-1 电路

例 1.4-1 图 1.4-3 电路中, A 部分电路为理想电压源 $U_s=6\text{V}$; B 部分电路即负载电阻 R 是电压源 U_s 的外部电路,它可以改变。电流 I 、电压 U 参考方向如图中所标。求:

- (1) $R \rightarrow \infty$ 时的电压 U , 电流 I , 电压源产生功率 P_s ;
- (2) $R=6\Omega$ 时的电压 U , 电流 I , 电压源产生功率 P_s ;
- (3) 当 $R \rightarrow 0$ 时的电压 U , 电流 I , 电压源产生功率 P_s 。

解: (1) $R \rightarrow \infty$ 时即外部电路开路, U_s 为理想电压源, 所以

$$U=U_s=6 \text{ (V)}$$

依据欧姆定律, 得

$$I=\frac{U}{R}=\frac{6}{\infty}=0 \text{ (A)}$$

对 U_s 电压源来说, U 、 I 参考方向非关联, 所以 U_s 电压源产生功率

$$P_s=UI=6 \times 0=0 \text{ (W)}$$

(2) $R=6\Omega$ 时

$$U=U_s=6 \text{ (V)}$$

$$I=\frac{U}{R}=\frac{6}{6}=1 \text{ (A)}$$

$$P_s=UI=6 \times 1=6 \text{ (W)}$$

(3) 当 $R \rightarrow 0$ 时, 显然

$$U = U_s = 6 \text{ (V)}$$

$$I = \frac{U}{R} \rightarrow \infty$$

此时 U_s 产生功率

$$P_s = UI \rightarrow \infty$$

由此例可以看出:

(1) 理想电压源的端电压不随外部电路变化, 本例三种情况的端电压 $U \equiv \textcircled{1} U_s = 6 \text{ V}$ 。

(2) 理想电压源输出电流 I 随外部电路变化。本例中, 当 $R \rightarrow 0$ 极端情况时 $I \rightarrow \infty$, 这时 U_s 产生功率 $P_s \rightarrow \infty$ 。

例 1.4-2 图 1.4-4 电路中, B 部分电路由电阻 R 与另一理想电压源 $U_{s2} = 12 \text{ V}$ 串联构成, 作为 A 部分电路 $U_{s1} = 6 \text{ V}$ 的理想电压源的外部电路, 电压 U 、电流 I 的参考方向如图中所标。求:

(1) $R = 6 \Omega$ 时的电流 I 和理想电压源 U_{s1} 吸收的功率 P_{s1} ;

(2) $R \rightarrow 0$ 时的电流 I 和 U_{s1} 吸收的功率 P_{s1} 。

解: (1) a 点电位 $V_a = U_{s1} = 6 \text{ V}$, b 点电位 $V_b = U_{s2} = 12 \text{ V}$, 电压 $U_{ab} = V_a - V_b = 6 - 12 = -6 \text{ V}$, 根据欧姆定律, 得电流

$$I = \frac{U_{ab}}{R} = \frac{-6}{6} = -1 \text{ (A)}$$

对 U_{s1} 电压源来说, U 、 I 参考方向非关联, 所以 U_{s1} 吸收功率

$$P_{s1} = -UI = -6 \times (-1) = 6 \text{ (W)}$$

此时 U_{s1} 不起电源作用, 实际上它成了 12 V 理想电压源的负载。

(2) 当 $R \rightarrow 0$ 时, 显然

$$U = U_{s1} = 6 \text{ (V)}$$

$$I = \frac{U_{ab}}{R} \rightarrow -\infty$$

此时 U_{s1} 吸收功率

$$P_{s1} = -UI \rightarrow \infty$$

由此例可看出, 理想电压源 U_{s1} 供出的电流为负值, 在 $R \rightarrow 0$ 极端情况下, U_{s1} 电压源吸收的功率为无穷大。

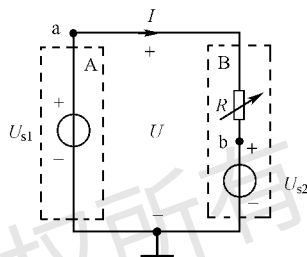


图 1.4-4 例 1.4-2 电路

1.4.2 理想电流源

理想电流源是另一种理想电源, 它也是一些实际电源抽象、理想化的模型。

不管外部电路如何, 其输出电流总能保持定值或一定的时间函数的电源定义为理想电流源, 又称独立电流源或恒流源。其模型用图 1.4-5(a)、(b) 表示。模型中箭头表示理想电流源 $i_s(t)$ 的参考方向, $i(t)$ 表示理想电流源的输出电流。若 $i_s(t)$ 是不随时间变化的常数, 即是直流理想电流源, 常用图(b)所示的模型。为了深刻理解理想电流源概念, 这里也强调说明以下三点:

(1) 对任意时刻 t_1 , 理想电流源的 VCR 特性是平行于 u 轴其值为 $i_s(t_1)$ (对 t_1 时刻) 的直线, 如图 1.4-6 所示。

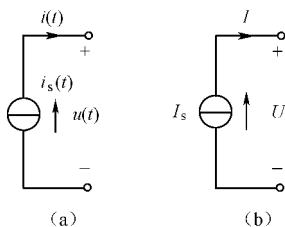


图 1.4-5 理想电流源模型

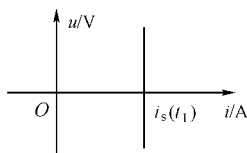


图 1.4-6 理想电流源 VCR 特性

(2) 由理想电流源的 VCR 特性可进一步看出,理想电流源发出的电流 $i(t) \equiv i_s(t)$ 与其两端电压大小、方向无关,即使两端电压为无穷大也是如此。如果理想电流源 $i_s(t) = 0$,则电压、电流关系特性为 $u-i$ 平面上的电压轴,它相当于开路。

(3) 理想电流源的输出电流由它本身决定,而它两端电压由其本身的输出电流与外部电路共同决定。理想电流源的两端电压可以有不同的极性,如同理想电压源一样,它亦可以向外电路提供电能,也可以从外电路接受能量,这要视理想电流源两端电压的真实极性而定,并且它供出或接受的能量,在极端情况,理论上讲也可以无穷大。

当然,真正理想的电流源实际中也是不存在的,其道理类同在理想电压源时讲述的理由。但是,实际中有一些电源,当外电路负载在一定范围内变化时(注意:实际中的电流源不允许开路!)它们输出的电流近似为定值或一定的时间函数。实际中的光电池电源、电子线路中一些等效信号源电源就是这样的。

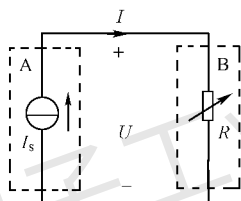


图 1.4-7 例 1.4-3 电路

例 1.4-3 图 1.4-7 所示电路, A 部分电路为直流理想电流源 $I_s = 2\text{A}$, B 部分电路即负载电阻 R 为理想电流源的外部电路。设 U 、 I 参考方向如图中所标,求:

- (1) $R=0$ 时电流 I , 电压 U 及 I_s 电流源产生功率 P_s ;
- (2) $R=3\Omega$ 时电流 I , 电压 U 及 I_s 电流源产生功率 P_s ;
- (3) $R \rightarrow \infty$ 时电流 I , 电压 U 及 I_s 电流源产生功率 P_s 。

解: (1) $R=0$ 时即外部电路短路, I_s 为理想电流源, 所以电流

$$I = I_s = 2 \text{ (A)}$$

由欧姆定律算得电压

$$U = RI = 0 \times 2 = 0 \text{ (V)}$$

对 I_s 电流源来说, I 、 U 参考方向非关联, 所以 I_s 电流源产生功率

$$P_s = UI = 0 \times 2 = 0 \text{ (W)}$$

(2) $R=3\Omega$ 时, 电流

$$I = I_s = 2 \text{ (A)}$$

电压

$$U = RI = 3 \times 2 = 6 \text{ (V)}$$

I_s 电流源产生功率

$$P_s = UI = 6 \times 2 = 12 \text{ (W)}$$

(3) 当 $R \rightarrow \infty$ 时, 根据理想电流源定义

$$I = I_s = 2 \text{ (A)}$$

电压

$$U = RI_s \rightarrow \infty$$

I_s 电流源产生功率

$$P_s = UI \rightarrow \infty$$

由此例可以看出:

(1) 理想电流源的输出电流不随外电路变化。本例三种情况的输出电流 $I = I_s = 2\text{A}$ 。

(2) 理想电流源的端电压 U 随外部电路变化。本例中, 当 $R \rightarrow \infty$ 的极端情况时, $U \rightarrow \infty$, 从而使 I_s 产生功率 $P_s \rightarrow \infty$ 。

思考题

1.4-1 有人说:“理想电压源可看作为内阻为零的电源,理想电流源可看作为内阻为无限大的电源。”你同意这种观点吗?为什么?

1.4-2 你是如何理解理想电压源为 0 相当于短路线,理想电流源为 0 相当于开路这一结论的?

1.5 基尔霍夫定律

基尔霍夫定律(Kirchhoff's Law, KL)是分析一切集总参数电路的根本依据,一些重要的电路定理、许多有效的电路分析方法,都是以基尔霍夫定律(连同元件上电压、电流关系)为“源”推导、证明、归纳总结得出的。无疑,基尔霍夫定律是电路理论中重要的基本概念。

为了叙述问题方便,在具体讲述基尔霍夫定律之前,先介绍电路模型图中有关的几个名词术语。

1. 支路

具有两个端子的元件称为二端元件,将两个或两个以上的二端元件依次连接且中间又无分岔,这样的连接称为串联。如图 1.5-1 中 R_1 与 R_2 的连接即是串联。单个二端元件或若干个二端元件的串联,构成电路中的一个分支,一个分支上流经的是同一个电流。电路中每个分支称作支路。如图 1.5-1 中 ad 、 ab 、 bd 、 bc 、 cd 、 aec 都是支路,其中 aec 是由两个二端元件串联构成的支路^①,其余 5 个都是由单个二端元件构成的支路。

2. 节点

支路的公共连接点称为节点,图 1.5-1 中 a 、 b 、 c 、 d 都是节点。

3. 回路

电路中由支路组成的任一闭合路径称做回路。如图 1.5-1 中 ab 、 da 、 bcd 、 $abca$ 、 $adcea$ 等都是回路。

4. 网孔

对于平面电路^②,其内部不包含任何支路的回路称为网孔。如图 1.5-1 中 $abcea$ 、 $abda$ 、 bcd 这三个回路是网孔,其余的回路都不是网孔。可以这样讲,网孔一定是回路,但回路不一定是网孔。

电路元件的电压电流关系(VCR),它仅与元件的性质有关,如前面讲述过的理想电压源、理想电流源的 VCR,电阻元件的 VCR 都是如此,后面章节中讲述的其他的电路元件的 VCR 也是如此。然而,各种元件若组合连接构成一个具体的电路之后,所有连接在同一个节点的各支路电

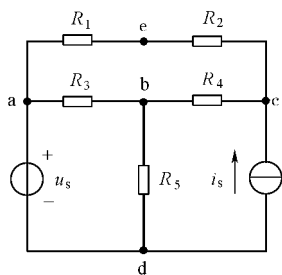


图 1.5-1 介绍电路术语使用的电路

① 参考文献[1]中把每一个二端元件都看作一个支路。 aec 支路,按这种定义应是 ae 、 ec 两个支路。

② 可经任意扭动变形画在一个平面上而不使任何两条支路交叉而又不连接的电路,称为平面电路。

流之间,或者任意闭合回路中各元件上电压之间,就要受到另外两种所谓的结构约束(亦称拓扑约束),这种约束关系与构成电路的元件性质无关。基尔霍夫电流定律(Kirchhoff's Current Law, KCL)和基尔霍夫电压定律(Kirchhoff's Voltage Law, KVL)就是概括这两种约束关系的基本定律。

1.5.1 基尔霍夫电流定律(KCL)

KCL 是描述电路中与节点相连的各支路电流间相互关系的定律。它的基本内容是:对于集总参数电路的任意节点,在任意时刻流入该节点的电流之和等于流出该节点的电流之和。例如,对于图 1.5-2 所示电路中的节点 b,有

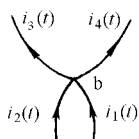


图 1.5-2 电路中节点 b

$$i_1(t) + i_2(t) = i_3(t) + i_4(t)$$

若规定流出节点的电流取正号(这是代数式中的取号规定,与电流本身的正负值无关,只看参考方向),流入节点的电流取负号(或作相反规定),则 KCL 又可叙述为:对于集总参数电路中的任意节点,在任意时刻,流出或流入该节点电流的代数和等于零。如果连接到某节点有 m 个支路,第 k 条支路的电流为 $i_k(t)$, $k=1, 2, \dots, m$, 则 KCL 可写为

$$\sum_{k=1}^m i_k(t) = 0 \quad \forall t \quad (1.5-1)$$

式(1.5-1)称为节点电流方程,简称为 KCL 方程。

KCL 是电荷守恒定律和电流连续性在集总参数电路中任意节点处的具体反映。所谓电荷守恒定律,即是说电荷既不能创造,也不能消灭。基于这条定律,对集总参数电路中某一支路的横截面来说,它“收支”是完全平衡的。即是说,流入横截面多少电荷即刻又从该横截面流出多少电荷, dq/dt 在一条支路上应处处相等,这就是电流的连续性。对于集总参数电路中的节点,它“收支”也是完全平衡的,所以 KCL 是成立的。

以上讨论中对各支路的元件性质并无要求,只要是集总参数电路, KCL 总是成立的。事实上 KCL 不仅适用于电路中的节点,对电路中任意假设的闭曲面它也是成立的,如图 1.5-3(a)所示电路,对闭曲面 S,有

$$i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) = 0$$

这里闭曲面 S 看作广义节点。若两部分电路只有一条线相连,由 KCL 可知,该支路中无电流。如图 1.5-3(b)所示电路,作闭曲面 S,因只有一条支路穿出 S 平面,根据 KCL,有 $i=0$ 。

关于 KCL 的应用,再明确以下两点:

(1) KCL 适用于任意时刻、任意激励源(直流、交流或其他任意时间函数的激励源)情况的任意(线性、非线性、时变、时不变)集总参数电路中的节点。

(2) 应用 KCL 列写节点或闭曲面方程时,首先要设出每一支路电流的参考方向,然后依据参考方向取号:选流入节点的电流取正号流出节点的电流取负号或选流出节点的电流取正号流入节点的电流取负号均可以,但在列写的同一个 KCL 方程中取号规则应一致。

例 1.5-1 如图 1.5-4 所示电路,已知 $i_1=4\text{A}$, $i_2=7\text{A}$, $i_4=10\text{A}$, $i_5=-2\text{A}$, 求电流 i_3 、 i_6 。

解:选流出节点的电流取正号。对节点 b 列 KCL 方程,有

$$-i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

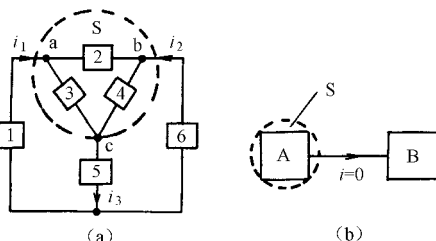


图 1.5-3 KCL 应用于闭曲面 S

$$i_3 = -i_1 + i_2 = -4 + 7 = 3 \text{ (A)}$$

对节点 a 列 KCL 方程,有

$$i_3 - i_4 + i_5 + i_6 = 0$$

则

$$i_6 = i_4 - i_3 - i_5 = 10 - 3 - (-2) = 9 \text{ (A)}$$

还可应用闭曲面 S 列 KCL 方程求出 i_6 , 如图中虚线所围闭曲面 S, 设流出闭曲面的电流取正号, 列方程

$$-i_1 + i_2 - i_4 + i_5 + i_6 = 0$$

所以

$$i_6 = i_1 - i_2 + i_4 - i_5 = 4 - 7 + 10 - (-2) = 9 \text{ (A)}$$

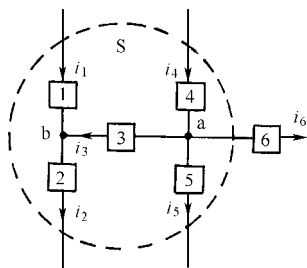


图 1.5-4 例 1.5-1 电路

1.5.2 基尔霍夫电压定律(KVL)

KVL 是描述回路中各支路(或各元件)电压之间关系的。它的基本内容是:对任何集总参数电路,在任意时刻,沿任意闭合路径绕行一周各段电路电压的代数和等于零。其数学表示式为

$$\sum_{k=1}^m u_k(t) = 0 \quad \forall t \quad (1.5-2)$$

式中, $u_k(t)$ 表示回路中第 k 个支路(或元件)上的电压, m 为回路中包含的支路(或元件)的个数。如图 1.5-5 所示电路,对回路 A 有

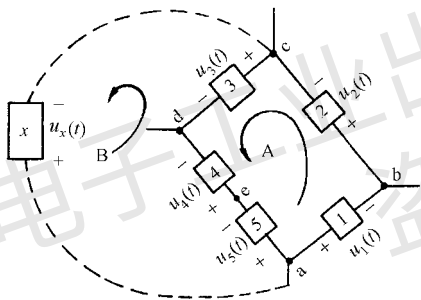


图 1.5-5 某电路中的回路

$$u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) - u_4(t) - u_5(t) = 0$$

通常称式(1.5-2)为回路电压方程,简称为 KVL 方程。

KVL 的实质,反映了集总参数电路遵从能量守恒定律,或者说,它反映了保守场中做功与路径无关的物理本质。从电压变量的定义容易理解 KVL 的正确性:参看图 1.5-5,如果自 a 点出发移动单位正电荷,沿着构成回路的各支路绕行又回到 a 点,相当求电压 u_{aa} ,显然应是 $u_a - u_a = 0$ 。

以上论述,对回路中各元件的性质、种类并不加限制,只要是集总参数电路,KVL 总是成立的。事实上,

KVL 不仅适用于电路中的具体回路,对于电路中任何一假想的回路,它也是成立的。例如,对图 1.5-5 中假想回路 B^①,可列如下方程

$$-u_3(t) - u_x(t) + u_5(t) + u_4(t) = 0$$

式中, $u_x(t)$ 为假想支路 x 上的电压。由 B 回路 KVL 方程,得

$$u_x(t) = u_5(t) + u_4(t) - u_3(t)$$

如果已知 $u_3(t)$ 、 $u_4(t)$ 、 $u_5(t)$,即可由上式求出 $u_x(t)$ 。据此可归纳总结出求电路中任意两点间电压的一般方法:求 a 点至 c 点电压,自 a 点开始沿任何一条路径绕行至 c 点,沿途各段电路电压的代数和即得电压 u_{ac} 。参看图 1.5-5,图中的 $u_{ac}(t)$ 即是 $u_x(t)$,显然它也可以用另一条绕行路径上各段电路电压代数和表示,有

$$u_x(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

通常,选择求两点间电压的绕行路径时,选择各段电路电压容易计算甚至不用计算(路径都由理

① x 支路用虚线画,表示它不是真实存在于电路中的支路,而是一假想的支路。该电路中凡包含有 x 支路的回路均为假想回路。

想电压源组成)的路径巡行。

关于 KVL 的应用也应注意两点:

(1) KVL 适用于任意时刻、任意激励源情况的任意集总参数电路中的回路。

(2) 应用 KVL 列回路电压方程时,首先要设出回路中各支路(或元件)上电压参考方向,然后选一个巡行方向(顺时针或逆时针均可),自回路中某一点开始,按所选巡行方向沿着回路巡行一周。巡行中写各支路(或元件)电压时,若先遇电压参考方向的“+”端取正号;反之取负号。若回路中有电阻 R 元件,电阻元件上又只标出了电流 i 的参考方向,若巡行方向与电流方向一致,则电阻上电压取 $+Ri$;反之取 $-Ri$ 。

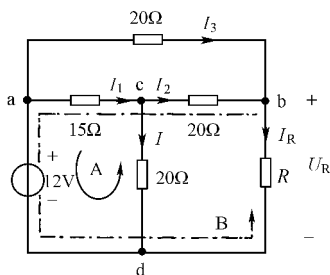


图 1.5-6 例 1.5-2 电路

例 1.5-2 如图 1.5-6 所示电路,已知 $I = 0.3\text{A}$, 求电阻 R 。

解: 在求解电路时为了叙述、书写方便,需要的话,可以在电路上设出一些点,如图中 a、b、c、d 点。用到的电流电压一定要在电路图上标出参考方向(切记!),如图中电流 I_1 、 I_2 、 I_3 、 I_R , 电压 U_R 。应该说在动手解答之前还要把问题分析清楚。这里所述的分析问题包含这样两个内容:一是明确题意,即明确哪些是已知条件,哪些是待求量,若遇文字叙述的题目更应如此。就求解的一般电路问题来说题意是容易清楚的。分析

问题的第二个内容是确定解题的思路:根据什么概念、定律求什么量,先求哪一个量后求哪一个量做好安排。问题分析中确定好解题思路,动手解算起来就可以做到逻辑条理性好,解答过程简捷明了。分析问题的过程是不需要写出来的,但却是解题之前应该做到的,也是读者“能力”训练的一部分。这里以本例作示范,看如何确定解题思路的,并以简图的形式给出。图中“ $\longrightarrow$ ”符号表示“应先求”之意,括号后两个量不对齐书写,表示居前者先求。本问题求解流程图如下:

$$\begin{array}{l} \text{求} \\ R \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow U_{ac} = 12 - 20I \text{ (参见回路 A)} \\ I_3 \rightarrow U_{ab} \rightarrow U_{cb} = 20I_2 \\ U_R = 12 - U_{ab} \text{ (参见回路 B)} \end{array} \right. \end{array}$$

根据待求的 R 由左向右(看箭头方向)分析过去,求解的顺序是由右向左(逆箭头方向)求解过来。具体计算(需要写出来的步骤):经反复多次应用基尔霍夫电压定律、电流定律及欧姆定律,得

$$U_{ac} = 12 - 20I = 12 - 20 \times 0.3 = 6 \text{ (V)}$$

$$I_1 = \frac{U_{ac}}{15} = \frac{6}{15} = 0.4 \text{ (A)}$$

$$I_2 = I_1 - I = 0.4 - 0.3 = 0.1 \text{ (A)}$$

$$U_{cb} = 20I_2 = 20 \times 0.1 = 2 \text{ (V)}$$

$$U_{ab} = U_{ac} + U_{cb} = 6 + 2 = 8 \text{ (V)}$$

$$I_3 = \frac{U_{ab}}{20} = \frac{8}{20} = 0.4 \text{ (A)}$$

$$I_R = I_2 + I_3 = 0.1 + 0.4 = 0.5 \text{ (A)}$$

$$U_R = 12 - U_{ab} = 12 - 8 = 4 \text{ (V)}$$

$$R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{4}{0.5} = 8 \text{ (}\Omega\text{)}$$

由求解过程可以看出,上步骤的求解结果下一步骤(或以后步骤)就用得上,所以条理很清楚,步骤也简捷。

例 1.5-3 如图 1.5-7 电路,已知 $R_1=2\Omega, R_2=4\Omega$, $u_{s1}=12V, u_{s2}=10V, u_{s3}=6V$, 求 a 点电位 V_a 。

解: 本题 d 点为参考点,由 KCL 可知 $i_1=0$,所以回路 A 各元件上流经的是同一个电流 i ,由 KVL 列写方程

$$R_1 i + u_{s3} + R_2 i - u_{s1} = 0$$

代入已知的各电阻及电源的数值,得

$$2i + 6 + 4i - 12 = 0$$

所以

$$i = 1 \text{ A}$$

求电位 V_a ,就是求 a 点到参考点的电压,它是自 a 点沿任一条可以到“地”的路径巡行至“地”的沿途各段电路电压的代数和,所以有

$$V_a = R_1 i + u_{s3} + R_2 i - u_{s1} = 2 \times 1 + 6 + 0 - 10 = -2 \text{ (V)}$$

顺便说及,电路原理图也常用电位简略图表示,如图 1.5-8 图(a)、(c)分别用图(b)、(d)作简化表示。在(b)图中, $+10V$ 表示该点接 $10V$ 理想电压源的正极,它的负极意味着接“地”; $-6V$ 表示该点电位是 $-6V$,可以看作为该点接 $6V$ 理想电压源的负极,它的正极意味着接“地”。若初次接触到这类电位表示的电路不习惯,可以先按上述说明恢复原电路图,然后再进行计算。

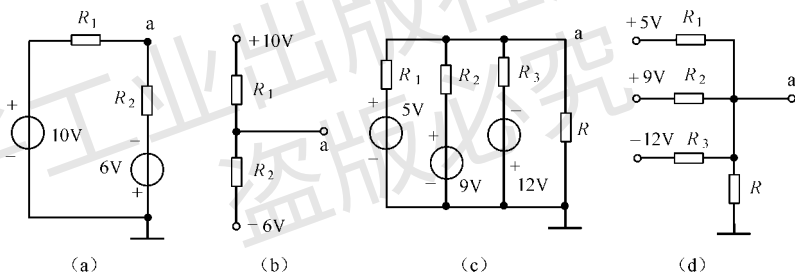


图 1.5-8 电路图的电位表示法

例 1.5-4 图 1.5-9(a) 所示计算机加法原理电路,已知 $U_{s1}=12V, U_{s2}=6V, R_1=9k\Omega, R_2=3k\Omega, R_3=2k\Omega, R_4=4k\Omega$, 求 a、b 两端子开路时电压 U_{ab} 。

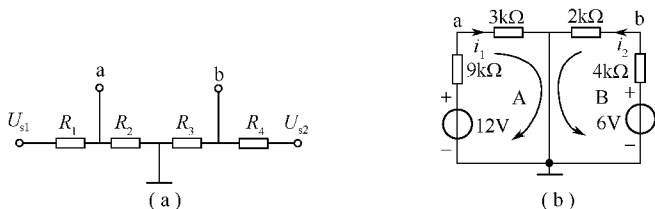


图 1.5-9 计算机加法原理电路

解: 这个电路就是节点电位表示的电路,因为刚接触这种表示形式的电路,还不熟练。为防出错这里先恢复大家都熟悉的“方块”电路图形式,并代入已知数据如图(b)所示。对 A、B 回路列写 KVL 方程,分别解得

$$I_1 = \frac{12}{3+9} = 1 \text{ (mA)} \quad I_2 = \frac{6}{2+4} = 1 \text{ (mA)}$$

所以开路电压

$$U_{ab} = 3I_1 - 2I_2 = 3 \times 1 - 2 \times 1 = 1 \text{ (V)}$$

思考题

1.5-1 试述基尔霍夫定律的基本内容,说明应用范围,结合你的体会归纳应用基尔霍夫定律时应注意的问题。

1.5-2 有人阐述基尔霍夫定律的重要性时说:“基尔霍夫定律是分析一切集总参数电路的根本依据”,你同意此观点吗?

1.6 电路等效

“等效”在电路理论中是重要的概念,电路等效变换方法是电路问题分析中经常使用的方法。本节首先阐述电路等效的一般概念,即等效定义、等效条件、等效对象以及等效的目的,然后具体讨论两种重要的常用二端电路等效变换方法。

1.6.1 电路等效的一般概念

有结构、元件参数可以完全不相同的两部分电路 B 与 C,如图 1.6-1 所示。若 B 与 C 具有相同的电压、电流关系即相同的 VCR,则称 B 与 C 是互为等效的。这就是电路等效的一般定义。

相等效的两部分电路 B 与 C 在电路中可以相互代换,代换前的电路与代换后的电路对任意外来电路 A 中的电流、电压、功率是等效的,如图 1.6-2(a)、(b)所示。就是说用图(b)求 A 中的电流、电压、功率与用图(a)求 A 中的电流、电压、功率是具有同等效果的。习惯把图 1.6-2 图(a)与图(b)说成是互为等效变换电路。这里所述“等效”即指对求 A 中电流、电压、功率的效果而言是等同的,“变换”即指 C 代换了 B 致使图(b)与图(a)结构、形状发生了变化。这里再次强调:①电路等效变换的条件是相互代换的两部分电路 B 与 C 具有相同的 VCR,即

$$(VCR)_B = (VCR)_C \quad (1.6-1)$$

②电路等效的对象是 A(也即电路未变化的部分)中的电流、电压、功率。③电路等效变换的目的是为简化电路,可以方便地求出需要求解的结果。

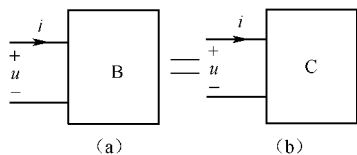


图 1.6-1 具有相同 VCR 的两部分电路

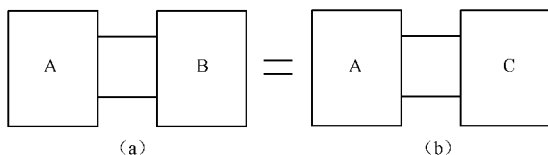


图 1.6-2 电路等效示意图

还需要说及的是,若要求图 1.6-2(a)中 B 部分电路中的电流、电压、功率,能否用它的等效电路图 1.6-2(b)求呢?C 代换了 B 以后的图(b)中 B 已不存在,当然在该图中求 B 中的电流、电压、功率是不可能的。但可以这样处理:因图 1.6-2(a)、(b)两电路是等效变换电路,应满足等效变换条件式(1.6-1),由此可知图(b)中 C 与 A 连接处的电流、电压等于图(a)中 B 与 A 连接处的电流、电压;基于此点,可以先从图(b)中求得 C 与 A 连接处的电流、电压,以此作为图(a)中 B 与 A 连接处的电流、电压,然后回到图(a)中再求出 B 中所要求的电压、电流、功率。

① 为简单、易于理解,设 B、C 两部分电路为二端子电路(又称单口电路,即满足进、出这两个端子的电流是同一个电流。)

1.6.2 电阻的串联与并联等效

1. 电阻的串联等效

图 1.6-3(a) 是 n 个电阻相串联的电路, 设各电阻上电压、电流参考方向关联, 由欧姆定律及 KVL, 得

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n = R_1 i + R_2 i + \cdots + R_n i \\ &= (R_1 + R_2 + \cdots + R_n) i \end{aligned} \quad (1.6-2)$$

若把图 1.6-3(a) 看作等效电路定义中所述的 B 电路, 式(1.6-2)就是它的 VCR。另有单个电阻 R_{eq} 的电路, 视它为等效电路定义中所述的 C 电路, 如图 1.6-3(b) 所示, 由欧姆定律写它的 VCR 为

$$u = R_{\text{eq}} i \quad (1.6-3)$$

根据电路等效条件, 令式(1.6-3)与式(1.6-2)相等, 即

$$R_{\text{eq}} i = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n) i$$

所以等效电阻

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n = \sum_{k=1}^n R_k \quad (1.6-4)$$

由式(1.6-4)可以看出: 电阻串联, 其等效电阻等于相串联各电阻之和。

电阻串联有分压关系。若知串联电阻两端的总电压, 求相串联各电阻上的电压, 称分压。参看图 1.6-3, 由式(1.6-3), 得

$$i = \frac{u}{R_{\text{eq}}}$$

由欧姆定律, 得第 k 个串联电阻上电压

$$u_k = R_k i = \frac{R_k}{R_{\text{eq}}} u \quad (k=1, 2, \cdots, n) \quad (1.6-5)$$

式(1.6-5)称为分压公式, 式中 R_k/R_{eq} 称为分压系数。由分压公式容易得到相串联的两电阻 R_1 、 R_2 上电压之比为

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (1.6-6)$$

式(1.6-6)表明: 电阻串联分压与电阻值成正比, 即电阻值大者分得的电压大。

观察图 1.6-3(a) 电路, 考虑电压、电流参考方向关联, 应用式(1.3-6)解得电阻串联电路吸收功率为

$$\begin{aligned} p &= ui = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) i \\ &= u_1 i + u_2 i + \cdots + u_n i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n \\ &= \sum_{k=1}^n p_k \end{aligned} \quad (1.6-7)$$

式中, p_k 为第 k 个串联电阻上吸收的功率。由式(1.3-6)并考虑流经各串联电阻中的电流是同一个电流, 不难得到相串联的两电阻 R_1 、 R_2 上吸收的功率之比为

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (1.6-8)$$

式(1.6-7)、式(1.6-8)表明: 电阻串联电路总的吸收功率等于相串联各电阻吸收功率之和, 且电阻值大者吸收的功率值大。

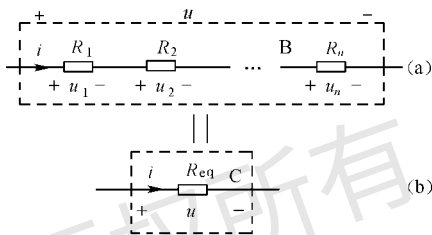


图 1.6-3 电阻串联及等效电路

2. 电阻的并联等效

图 1.6-4 是 n 个电阻相并联的电路。设各电阻上电压、电流参考方向关联, 由 KCL 及欧姆定律, 得

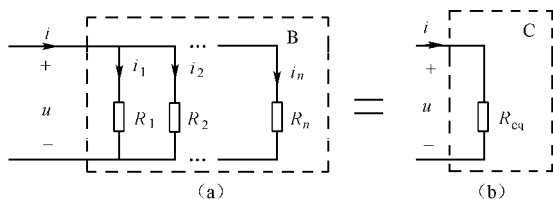


图 1.6-4 电阻并联及等效电路

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + \cdots + i_n = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} + \cdots + \frac{u}{R_n} \\ &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \right) u \end{aligned} \quad (1.6-9)$$

式(1.6-9)即是图 1.6-4(a) n 个电阻并联电路的 VCR, 由图 1.6-4(b) 电路写它的 VCR 为

$$i = \frac{1}{R_{eq}} u \quad (1.6-10)$$

由电路等效条件, 令式(1.6-10)等于式(1.6-9), 解得

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad (1.6-11)$$

式中, R_k 为相并联的第 k 个电阻, $k=1, 2, \cdots, n$ 。如果用电导表示式(1.6-11)中各电阻, 则式(1.6-11)可改写为

$$G_{eq} = \sum_{k=1}^n G_k \quad (1.6-12)$$

式中, $G_{eq}=1/R_{eq}$, $G_k=1/R_k$, $k=1, 2, \cdots, n$ 。式(1.6-11)和式(1.6-12)表明, n 个电阻(电导)相并联, 其等效电阻的倒数(即等效电导)等于各并联电阻的倒数(即各并联电导)之和。

电阻(电导)并联有分流关系。若知并联电阻(电导)的总电流, 求相并联各电阻(电导)上的电流, 常称之为分流。参看图 1.6-4, 由式(1.6-10), 得

$$u = R_{eq} i \quad \text{或} \quad u = \frac{1}{G_{eq}} i \quad (1.6-13)$$

由欧姆定律, 得第 k 个并联电阻(电导)上的电流

$$i_k = \frac{R_{eq}}{R_k} i \quad \text{或} \quad i_k = \frac{G_k}{G_{eq}} i \quad (1.6-14)$$

式(1.6-14)前者为电阻并联分流公式, 它表明电阻并联分流与电阻成反比, 即电阻值越大分得的电流越小。式(1.6-14)后者为电导并联分流公式, 它表明电导并联分流与电导值成正比关系。

对于常遇到的两个电阻相并联的情况, 由式(1.6-11)稍作推导即可求得等效电阻的公式为

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.6-15)$$

将式(1.6-15)代入式(1.6-14)可得分流公式

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \\ i_2 &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} i \end{aligned} \right\} \quad (1.6-16)$$

观察图 1.6-4(a) 电路, 考虑电压、电流参考方向关联, 应用式(1.3-6)得电阻并联电路吸收

功率

$$\begin{aligned}
 p &= ui = u(i_1 + i_2 + \cdots + i_n) = ui_1 + ui_2 + \cdots + u_n i \\
 &= p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_{k=1}^n p_k
 \end{aligned} \quad (1.6-17)$$

式中, P_k 为第 k 个并联电阻上吸收的功率。考虑相并联各电阻上承受的是同一个电压并联关系式(1.3-7)不难得到相并联两电阻 R_1 、 R_2 上吸收的功率之比为

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (1.6-18)$$

式(1.6-17)、式(1.6-18)表明:电阻并联电路总的吸收功率等于相并联各电阻吸收功率之和,且电阻值大者吸收的功率小。

3. 电阻的混联等效

既有电阻串联又有电阻并联的电路常称为电阻混联电路。电阻相串联的部分具有电阻串联电路的特点,电阻相并联的部分具有电阻并联电路的特点,无须赘述。分析混联电路的关键问题是如何判别串并联,这是初学者感到较难掌握的地方。下面重点讲述混联电路的串并联关系判别方法:

(1) 看电路的结构特点。若两电阻是首尾相连且中间又无分岔,就是串联;若两电阻是首首尾尾相连,就是并联。

(2) 看电压、电流关系。若流经两电阻的电流是同一个电流,那就是串联;若两电阻上承受的是同一个电压,那就是并联。常遇到的电路连接结构是纵横交错的复杂形式,仅用上述两点对有些电阻之间的连接关系仍判断不出来,这时用下面所述的第三点还是很有效的。

(3) 对电路作变形等效。即对电路作扭动变形,如左边的支路可以扭到右边,上面的支路可以翻到下面,弯曲的支路可以拉直等;对电路中的短路线可以任意压缩与伸长;对于多点接地点可以用短路线相连。一般,如果是真正电阻串、并联电路的问题,都可以应用上述的方法判别出来。

4. 电压表、电流表量程扩展

实际中用于测量电压、电流的多量程电压表、电流表是由称作微安计的基本电流表头与一些电阻串联、并联组成的。微安计所能测量的最大电流为该微安计的量程。例如,一个微安计,它测量的最大电流为 $50\mu\text{A}$,就说该微安计的量程为 $50\mu\text{A}$ 。在测量时通过该微安计的电流不能超过 $50\mu\text{A}$,否则微安计将损坏。实际中测量更大的电流、电压怎么办呢?现通过以下两例说明多量程电压表、电流表的组成原理。

例 1.6-1 图 1.6-5 所示电路为微安计与电阻串联组成的多量程电压表,已知微安计内阻 $R_1 = 1\text{k}\Omega$,各挡分压电阻分别为 $R_2 = 9\text{k}\Omega$, $R_3 = 90\text{k}\Omega$, $R_4 = 900\text{k}\Omega$;这个电压表的最大量程(用端钮“0”,“4”测量,端钮“1”,“2”,“3”均断开)为 500V ,试计算微安计的量程及其他量程的电压值。

解: 当用“0”、“4”端测量时,电压表的总电阻

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 1 + 9 + 90 + 900 = 1000\text{k}\Omega$$

若这时所测的电压恰为 500V (这时微安计也达到满量程),则通过微安计的最大电流即微安计的量程

$$I = \frac{U_{40}}{1000} = \frac{500}{1000} = 0.5 \text{ (mA)}$$

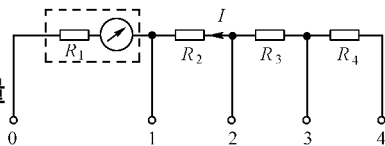


图 1.6-5 多量程电压表

当电压表量程开关置“1”挡时(“2”,“3”,“4”端钮断开)

$$U_{10} = R_1 I = 1 \times 0.5 = 0.5 \text{ (V)}$$

当开关置“2”挡时(“1”,“3”,“4”端钮断开)

$$U_{20} = (R_1 + R_2)I = (1 + 9) \times 0.5 = 5 \text{ (V)}$$

当开关置“3”挡时(“1”,“2”,“4”端钮断开)

$$U_{30} = (R_1 + R_2 + R_3)I = (1 + 9 + 90) \times 0.5 = 50 \text{ (V)}$$

由此例可见,直接利用该表头测量电压,它只能测量 0.5V 以下的电压,而串联了分压电阻 R_2 、 R_3 、 R_4 以后,作为电压表,它就有 0.5V、5V、50V、500V 四个量程,实现了电压表的量程扩展。

例 1.6-2 多量程电流表如图 1.6-6 所示,已知表头内阻 $R_A = 2300\Omega$,量程为 $50\mu\text{A}$,各分流电阻分别为 $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 9\Omega$, $R_3 = 90\Omega$ 。求扩展后各量程。

解: 基本表头偏转满刻度为 $50\mu\text{A}$ 。当用“0”,“1”端钮测量时,“2”,“3”端钮开路,这时 R_A 、 R_2 、 R_3 是相串联的,而 R_1 与它们相并联,根据分流公式(1.6-16),得

$$I_A = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_A} I_1$$

$$I_1 = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_A}{R_1} I_A$$

$$= \frac{1 + 9 + 90 + 2300}{1} \times 0.05 = 120 \text{ (mA)}$$

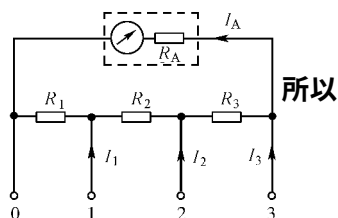


图 1.6-6 多量程电流表

同理,用“0”,“2”端测量时,“1”,“3”端开路,这时流经表头的电流仍应为 $50\mu\text{A}$,这时 R_1 与 R_2 串联, R_3 与 R_A 串联,二者再相并联,应用式(1.6-16),得

$$I_A = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_A} I_2$$

所以

$$I_2 = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_A}{R_1 + R_2} I_A = \frac{1 + 9 + 90 + 2300}{1 + 9} \times 0.05 = 12 \text{ (mA)}$$

当用“0”,“3”端测量时,“1”,“2”端开路,这时流经表头的满刻度电流还是 $50\mu\text{A}$,此时 R_1 、 R_2 、 R_3 串联再与 R_A 相并联,再应用式(1.6-16),得

$$I_A = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_A} I_3$$

则有

$$I_3 = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_A}{R_1 + R_2 + R_3} I_A = \frac{2400}{1 + 9 + 90} \times 0.05 = 1.2 \text{ (mA)}$$

由此例可以看出,直接利用该表头测量电流,它只能测量 0.05mA 以下的电流且内阻大(本例表头内阻达 2300Ω !),而并联了分流电阻 R_1 、 R_2 、 R_3 以后,作为电流表,它就有 120mA、12mA、1.2mA 三个量程,实现了电流表的量程扩展,且用扩展量程后的电流表测量电流,电流表的内阻比基本表头的内阻小得多。如用 120mA 量程测量电流,电流表的内阻小于 1Ω 。

例 1.6-3 图 1.6-7 所示的常用、简单分压器电路。电阻分压器的固定端 a、b 接到直流电压源上。固定端 b 与活动端 c 接到负载上。利用分压器上滑动触头 c 的滑动可以在负载电阻上输出 $0 \sim U$ 的可变电压。已知理想电压源电压 $U = 18\text{V}$,滑动触头 c 的位置使 $R_1 = 600\Omega$, $R_2 = 400\Omega$,如图 1.6-7(a)所示。

(1) 未接电压表时,求输出电压 U_2 ;

(2) 若用内阻为 1200Ω 的实际电压表去测量此电压,求电压表的读数;

(3) 若用内阻为 3600Ω 的实际电压表再测量此电压,求这时电压表的读数。

解: (1) 未接电压表时,应用分压公式,得

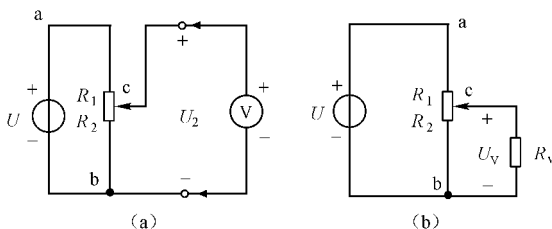


图 1.6-7 电阻分压器电路

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U = \frac{400}{600 + 400} \times 18 = 7.2 \text{ (V)}$$

(2) 当接上电压表后,将图 1.6-7(a)改画成图 1.6-7(b),图中 R_V 表示实际电压表的内阻。当用内阻为 1200Ω 的电压表测量时, $R_V = R_{V1} = 1200\Omega$ 。参见图(b),cb 端为 R_2 与 R_{V1} 相并联的两端,所以等效电阻

$$R_{eq1} = \frac{R_2 R_{V1}}{R_2 + R_{V1}} = \frac{400 \times 1200}{400 + 1200} = 300 \text{ (}\Omega\text{)}$$

应用分压公式,得

$$U_{V1} = \frac{R_{eq1}}{R_1 + R_{eq1}} U = \frac{300}{600 + 300} \times 18 = 6 \text{ (V)}$$

这时电压表的读数是 6V。

(3) 当用内阻为 3600Ω 电压表测量时,图(b)中 $R_V = R_{V2} = 3600\Omega$ 。这时 cb 端等效电阻

$$R_{eq2} = \frac{R_2 R_{V2}}{R_2 + R_{V2}} = \frac{400 \times 3600}{400 + 3600} = 360 \text{ (}\Omega\text{)}$$

由分压公式,得

$$U_{V2} = \frac{R_{eq2}}{R_1 + R_{eq2}} U = \frac{360}{600 + 360} \times 18 = 6.75 \text{ (V)}$$

实际电压表都有一定的内阻,将电压表并联到电路上测量电压时,对测试电路都有一定的影响。由此例具体的计算可以看出:电压表内阻越大,对测试电路的影响越小。理论上讲,若用内阻为无穷大的理想电压表测量,对测试电路无影响,它的读数应该是(1)小题中计算得到的 U_2 数值 7.2V。由此例还可联想到,测量电流时将电流表串联接入电路,实际电流表的内阻越小,对测试电路的影响越小。若用内阻为零的理想电流表测量电流,对测试电路无影响。

例 1.6-4 求图 1.6-8(a)所示电路 ab 端的等效电阻 R_{eq} 。

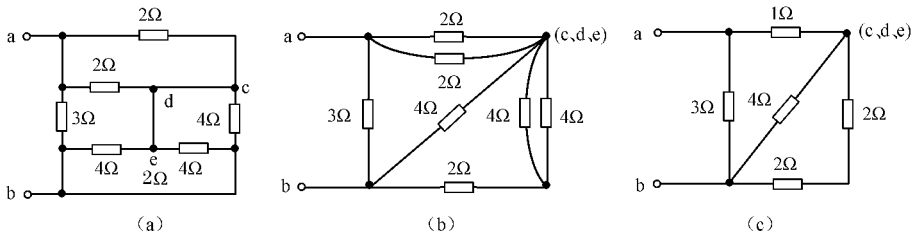


图 1.6-8 例 1.6-4 使用电路

解: 将短路线压缩,c、d、e 三个点合为一点,如图 1.6-8(b),再将能看出串并联关系的电阻用其等效电阻代替,如图 1.6-8(c),由图(c)就可方便地求得

$$R_{eq} = R_{ab} = [(2+2) // 4 + 1] // 3 = 1.5 \text{ (}\Omega\text{)}$$

式中,“//”符号表示两元件并联。

1.6.3 理想电源的串联与并联等效

由理想电压源、电流源的电压、电流关系特性(即 VCR),联系电路等效条件,不难得到下列两种常用情况的等效。

1. 理想电压源串联等效

理想电压源串联,其等效源的端电压等于相串联理想电压源端电压的代数和,即

$$u_s = u_{s1} \pm u_{s2} \text{ (代数和)}$$

如图 1.6-9(a)、(b)所示。

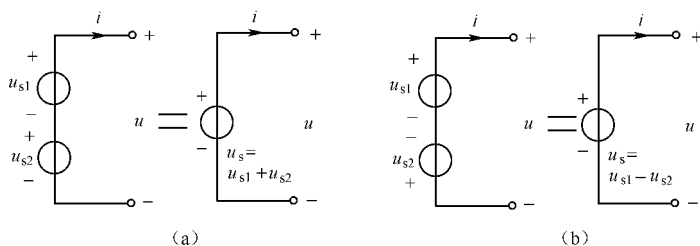


图 1.6-9 理想电压源串联等效

2. 理想电流源并联等效

理想电流源并联,其等效源的输出电流等于相并联理想电流源输出电流的代数和,即

$$i_s = i_{s1} \pm i_{s2} \text{ (代数和)}$$

如图 1.6-10(a)、(b)所示。

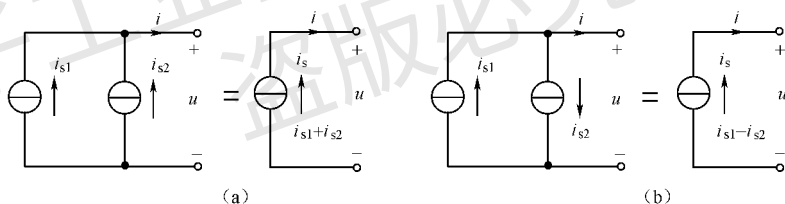


图 1.6-10 理想电流源并联等效

除上述两种情况的等效以外,还应明确:只有电压值相等、极性一致的理想电压源才允许并联;只有电流值相等、方向一致的理想电流源才允许串联,否则,与理想电压源、电流源的定义相矛盾。

例 1.6-5 如图 1.6-11 中所示各电路,求:(1)图(a)中电流 i ; (2)图(b)中电压 u 。

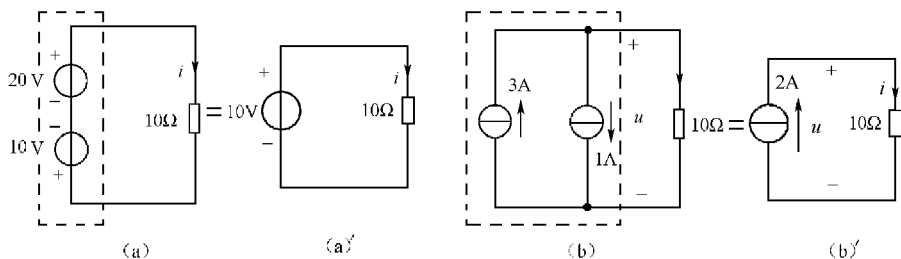


图 1.6-11 例 1.6-5 使用电路

解: (1) 将图(a)虚线框部分等效为一个理想电压源,如图(a)'所示。由图(a)',得

$$i=\frac{10}{10}=1(\text{A})$$

(2) 将图(b)虚线框部分等效为一个理想电流源,如图(b)'所示。由图(b)',得

$$u=2\times 10=20(\text{V})$$

思考题

- 1.6-1 简述两电路等效的定义,两电路等效需要满足的条件是什么?
- 1.6-2 在应用分压公式、分流公式时,需不需要考虑电流、电压参考方向?应如何考虑?

1.7 实际电源的模型及其互换等效

在 1.4 节中介绍了两种理想电源模型及其外特性。一个实际电源的端电压与输出电流关系即外特性究竟是什么样呢?它的模型又该如何表示呢?本节将深入讨论这个问题。

1.7.1 实际电源的模型

一个实际电源的模型所呈现的外特性应与实际电源工作时所表现出的外特性相吻合。基于这种想法,对一个实际电源做实验测试。图 1.7-1(a)是对实际电源测试外特性的电路。当每改变一个负载电阻 R 的数值时,从电流、电压表读取一个数据,这样可得数据表,见表 1.2。

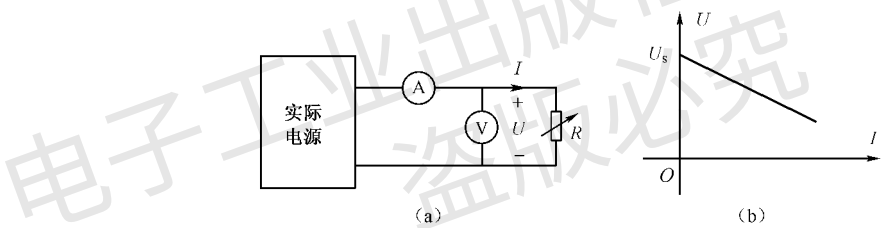


图 1.7-1 实际电源外特性测试电路

表 1.2 实际电源外特性测试数据表

R	∞ (开路)	R_1	R_2	R_3	...	0 (短路)
U	U_s	U_1	U_2	U_3	...	0
I	0	I_1	I_2	I_3	...	I_s

由表 1-2 数据画得实际电源的测试外特性即 $U-I$ 关系曲线如图 1.7-1(b)所示。由此特性可以看出,实际电源的端电压在一定范围内随着输出电流的增大而逐渐下降(斜率为负的直线),它非同于理想电压源的外特性,也非同于理想电流源的外特性。写出实验测试的实际电源外特性的解析表示式(即直线方程)为

$$U = U_s - R_s I \tag{1.7-1}$$

式中, U_s 为实际电源两端子开路($R=\infty$)时的开路电压,把它看作为数值为 U_s 的一个理想电压源; R_s 称为实际电源的内阻。根据式(1.7-1)画出相应的电路模型如图 1.7-2 所示。这就得到了实际电源的一种模型形式,它用数值等于 U_s 的理想电压源串联一个内阻 R_s 来表示。称这种模型形式为实际电源的电压源模型。

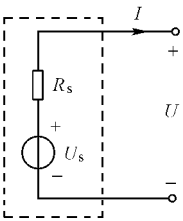


图 1.7-2 实际电源的电压源模型

如果对式(1.7-1)两端同除以 R_s , 并经移项整理, 得

$$I = \frac{U_s}{R_s} - \frac{U}{R_s}$$

令 $I_s = U_s/R_s$ 并代入上式, 得

$$I = I_s - \frac{U}{R_s} \quad (1.7-2)$$

由式(1.7-2)画出相应的电路模型如图 1.7-3 所示, 它用数值等于 I_s 的理想电流源并联内阻 R_s 表示。称这种模型形式为实际电源的电流源模型。

从实际电源的电压源模型形式(参见图 1.7-2)可以看出, 实际电源供出的电流 I 越大, 内阻 R_s 上的压降就越大, 致使实际电源两端的电压 U 也就越低; 若实际电源供出的电流为零(外部开路), 内电阻 R_s 上压降为零, 则此时端电压等于理想电压源的端电压 U_s 。在实际电路中, 如果满足负载电阻 R 远远大于内阻 R_s , (即 $R \gg 100R_s$) 则由图 1.7-2 模型电路, 根据电阻串联分压关系, 显然可得

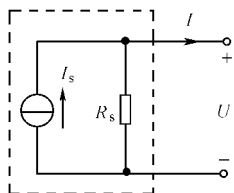


图 1.7-3 实际电源的电流源模型

$$U = \frac{R}{R + R_s} U_s \stackrel{R \gg R_s}{\approx} \frac{R}{R} U_s = U_s$$

在这样的使用条件下, 实际电源的模型可近似为数值等于 U_s 的理想电压源模型。反之, 如果满足 $R \leq \frac{1}{100} R_s$ 条件, 由图 1.7-3 模型电路, 应用分流关系, 得

$$I = \frac{R_s}{R_s + R} I_s \stackrel{R \ll R_s}{\approx} \frac{R_s}{R_s} I_s = I_s$$

在这样的应用条件下, 实际电源的模型可近似为数值等于 I_s 的理想电流源模型表示。从工程观点看, 实际电源在满足一定应用条件下的这种近似表示是满足工程误差要求的, 是允许的。

1.7.2 电压源、电流源模型互换等效

一个实际电源外特性是客观存在的, 可通过实验手段测绘出来。用以表示实际电源的两种模型都反映实际电源的外特性, 就是说它们反映同一个实际电源的外特性, 只是表现形式不同而已。因而实际电源的这两种模型之间必然存在着内在联系。式(1.7-1)是图 1.7-2 电压源模型电路的 VCR, 式(1.7-2)是图 1.7-3 电流源模型电路的 VCR, 它们都与图 1.7-1(b)所示的 VCR 等同。根据“两部分电路具有相同的 VCR 则相互等效”的条件可知: 实际电源的这两种模型电路是相互等效的。图 1.7-4 (a)、(b) 表述它们之间的相互等效变换关系。图中, $U_s = R_s I_s$, $I_s = U_s/R_s$ 。

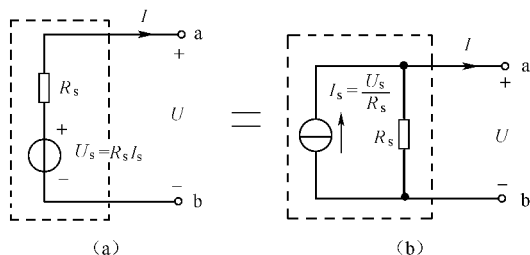


图 1.7-4 电压源、电流源模型互换等效电路

应用电源互换等效分析电路问题时还应特别注意这样几点:

- (1) 电源互换是电路等效变换的一种方法。这种等效是对电源输出电流 I 、端电压 U 的等效。

或者说是对虚线框的外部电路等效。如果 ab 端接相同的负载(或外电路),用图 1.7-4(a)电路求电流 I 、电压 U 或负载(或外电路)中的电压、电流、功率,与用图 1.7-4(b)电路求电流 I 、电压 U 或负载(或外电路)中的电压、电流、功率,结果应是一样的。

(2) 有内阻 R_s 的实际电源,它的电压源模型与电流源模型之间可以互换等效;理想的电压源与理想的电流源之间不便互换,原因是这两种理想电源定义本身是相互矛盾的,二者不会具有相同的 VCR。

(3) 电源互换等效的方法可以推广运用,如果理想电压源与外接电阻串联,可把外接电阻看作内阻,即可互换为电流源形式。如果理想电流源与外接电阻并联,可把外接电阻看作内阻,互换为电压源形式。电源互换等效在推广应用上要特别注意等效端子。

例 1.7-1 如图 1.7-5(a)电路,求 b 点的电位 V_b 。

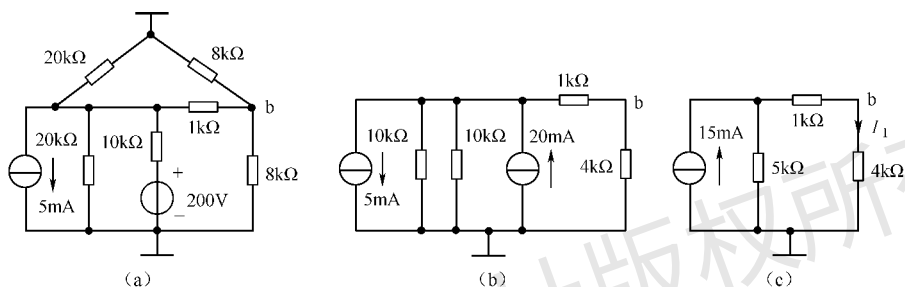


图 1.7-5 例 1.7-1 使用电路

解: 一个电路若有几处接地,可以将这几点用短路线连在一起,连接以后的电路与原电路是等效的。应用电阻并联等效、电压源互换为电流源等效,将图(a)等效为图(b)。再应用电阻并联等效与电流源并联等效,将图(b)等效为图(c)。由图(c)应用分流公式求得

$$I_1 = \frac{5}{5+4+1} \times 15 = 7.5 \text{ (mA)}$$

所以,再用欧姆定律求得 b 点电位

$$V_b = 4I_1 = 4 \times 7.5 = 30 \text{ (V)}$$

例 1.7-2 如图 1.7-6(a)电路,求电流 I 和电压 U_{ab} 。

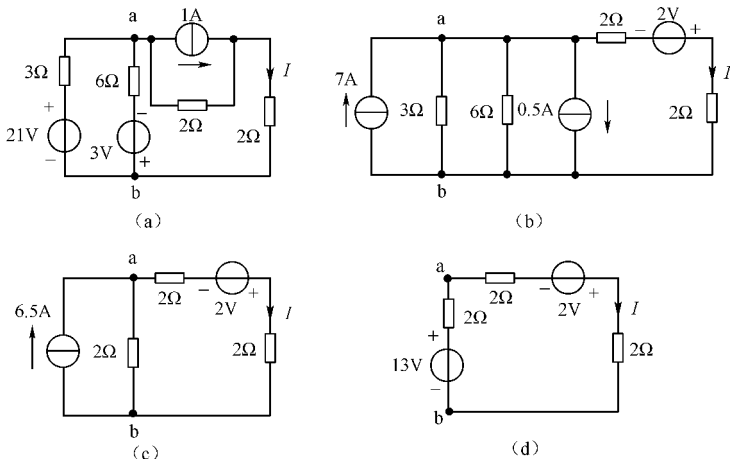


图 1.7-6 例 1.7-2 使用电路

解: 应用电源互换将图(a)等效为图(b);应用电阻并联等效与理想电流源并联等效,将

图(b)等效为图(c);再将图(c)中的电流源互换等效为电压源,如图(d)所示。由 KVL 及欧姆定律可得电流

$$I = \frac{15}{2+2+2} = 2.5 \text{ (A)}$$

电压

$$U_{ab} = -2I + 13 = -2 \times 2.5 + 13 = 8 \text{ (V)}$$

思考题

1.7-1 一实际电源的两端子间 VCR,常称为电源的外特性。有人说“实际电源外特性与外电路无关系,与端子上电压、电流参考方向如何假设也无关系。”这种说法正确吗?为什么?

1.7-2 某实际电源,当外电路开路时两端电压为 10V,当外电路接 $R=5\Omega$ 电阻时两端电压为 5V。试画出该实际电源的电压源模型与电流源模型。

* 1.8 电阻 Δ 形、Y形电路互换等效

电阻串并联等效、理想电源串并联等效、电压源模型与电流源模型互换等效都是常用的重要二端电路等效变换方法,应该掌握好。还有些重要的二端电路等效变换方法将以定理的形式在第3章里给出。本节介绍一种属多端电路等效的电阻 Δ 形、Y形电路互换等效方法。

如图 1.8-1(a)所示,电路中各个电阻之间既不是串联又不是并联,常称为 Δ 形、Y形(或 Π 形、T形)连接结构。显然不能用电阻串并联的方法求图(a)电路 ab 端的等效电阻。如果能将图(a)中虚线围起来的 B 电路等效代换为图 1.8-1 图(b)中虚线围起来的 C 电路,则从图(b)就可以用串并联方法求得 ab 端的等效电阻,给电路问题的分析带来方便。图(a)等效为图(b)就应用到 Δ 形电路与 Y 形电路的互换等效。

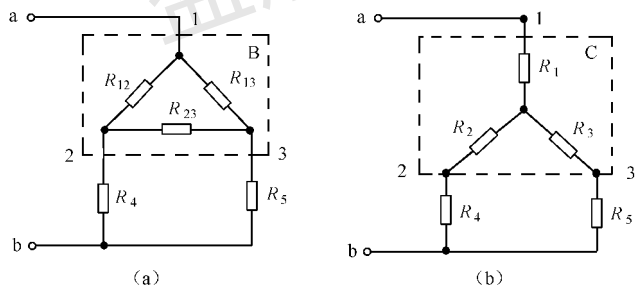


图 1.8-1 Δ 形、Y形结构连接的电路

1.8.1 Δ 形电路等效变换为 Y 形电路

三个电阻一端共同连接于一个节点上,而它们的另一端分别接到三个不同的端钮上,这就构成了如图 1.8-2(a)所示的 Y 形(又称 T 形或星形)连接的电路。三个电阻分别接在每两个端钮之间,就构成了如图 1.8-2(b)所示的 Δ 形(又称 Π 形或三角形)连接的电路。

所谓 Δ 形电路等效变换为 Y 形电路,就是已知 Δ 形电路中三个电阻 R_{12} 、 R_{13} 、 R_{23} ,通过变换公式求出 Y 形电路中的三个电阻 R_1 、 R_2 、 R_3 ,将之接成 Y 形去代换 Δ 形电路中的三个电阻,这就完成了 Δ 形电路互换等效为 Y 形电路的任务。

下面从电路等效变换条件着手推导出 Δ 形、Y 形电路互换等效的变换公式。为使图 1.8-2

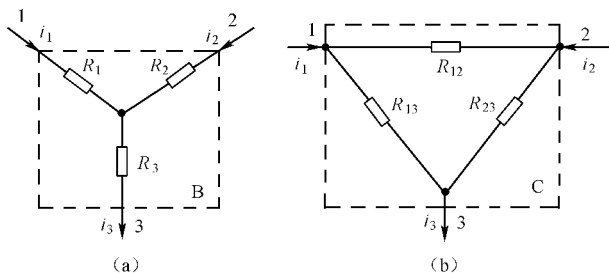


图 1.8-2 Y形与△形连接的电路

(a)、(b)两电路等效,根据前述的等效条件,就要求两者的外特性(VCR)完全相同。对于图 1.8-2(a)、(b)电路,由 KCL、KVL 可知

$$i_3 = i_1 + i_2 \quad (1.8-1)$$

$$u_{12} = u_{13} - u_{23} \quad (1.8-2)$$

显然,图中三个电流变量和三个电压变量中各有两个是相互独立的。

由图(a),根据 KVL,写

$$u_{13} = R_1 i_1 + R_3 i_3$$

$$u_{23} = R_2 i_2 + R_3 i_3$$

将式(1.8-1)代入以上两式,得

$$u_{13} = (R_1 + R_3) i_1 + R_2 i_2 \quad (1.8-3)$$

$$u_{23} = R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_2 \quad (1.8-4)$$

式(1.8-3)、式(1.8-4)就是图(a)电路端子间的 VCR。

由图(b)依据 OL、KCL,写

$$i_1 = \frac{1}{R_{13}} u_{13} + \frac{1}{R_{12}} u_{12}$$

$$i_2 = \frac{1}{R_{23}} u_{23} - \frac{1}{R_{12}} u_{12}$$

将式(1.8-2)代入以上两式,得

$$i_1 = \left(\frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{12}} \right) u_{13} - \frac{1}{R_{12}} u_{23} = \frac{R_{12} + R_{13}}{R_{13} R_{12}} u_{13} - \frac{1}{R_{12}} u_{23}$$

$$i_2 = -\frac{1}{R_{12}} u_{13} + \left(\frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{12}} \right) u_{23} = -\frac{1}{R_{12}} u_{13} + \frac{R_{12} + R_{23}}{R_{23} R_{12}} u_{23}$$

联立求解以上两式,得

$$u_{13} = \frac{R_{13} (R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} i_1 + \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} i_2 \quad (1.8-5)$$

$$u_{23} = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} i_1 + \frac{R_{23} (R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} i_2 \quad (1.8-6)$$

式(1.8-5)、式(1.8-6)就是图(b)电路端子间的 VCR。

令式(1.8-3)、式(1.8-4)与式(1.8-5)、式(1.8-6)分别相等,并比较等式两端,再令 i_1 、 i_2 前系数对应相等,即

$$\left. \begin{aligned} R_1 + R_3 &= \frac{R_{13} (R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \\ R_3 &= \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \\ R_2 + R_3 &= \frac{R_{23} (R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \end{aligned} \right\} \quad (1.8-7)$$

由式(1.8-7)容易解得由 $\triangle$ 形连接电路等效为Y形连接电路的变换公式为

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \\ R_2 &= \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \\ R_3 &= \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \end{aligned} \right\} \quad (1.8-8)$$

观察式(1.8-8)可以看出这样的规律:Y形电路中与端钮 $i(i=1,2,3)$ 相连的电阻 R_i 等于 $\triangle$ 形电路中与端钮 i 相连的两电阻乘积除以 $\triangle$ 形电路中三个电阻之和。特殊情况,若 $\triangle$ 形电路中三个电阻相等,即 $R_{12}=R_{13}=R_{23}=R_{\triangle}$,显然,等效互换的Y形电路中三个电阻也相等,由式(1.8-8)不难得到 $R_1=R_2=R_3=R_Y=\frac{1}{3}R_{\triangle}$ 。

1.8.2 Y形电路等效变换为 $\triangle$ 形电路

所谓Y形电路等效变换为 $\triangle$ 形电路,就是已知Y形电路中三个电阻 R_1, R_2, R_3 ,通过变换公式求出 $\triangle$ 形电路中的三个电阻 R_{12}, R_{13}, R_{23} ,将之接成 $\triangle$ 形去代换Y形电路中的三个电阻,这就完成了Y形电路互换等效为 $\triangle$ 形电路的任务。

只需将式(1.8-8)中 R_1, R_2, R_3 看作已知, R_{12}, R_{13}, R_{23} 看作未知,便可解得Y形电路等效变换为 $\triangle$ 形电路的变换公式:

$$\left. \begin{aligned} R_{12} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_3} \\ R_{23} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_1} \\ R_{13} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_2} \end{aligned} \right\} \quad (1.8-9)$$

观察式(1.8-9)亦可看出规律: $\triangle$ 形电路中连接某两端钮的电阻等于Y形电路中三个电阻两两乘积之和除以与第三个端钮相连的电阻。特殊情况,若Y形电路中的三个电阻相等,即 $R_1=R_2=R_3=R_Y$,显然,等效互换的 $\triangle$ 形电路中的三个电阻也相等,由式(1.8-9)不难得到: $R_{12}=R_{13}=R_{23}=R_{\triangle}=3R_Y$ 。

接在复杂网络中的Y形或 $\triangle$ 形电路部分,可以运用式(1.8-8)、式(1.8-9)进行等效互换,而并不影响网络其余未经变换部分的电压、电流、功率。这种等效变换也可以简化电路的计算。

例 1.8-1 图 1.8-3 电路,求电压 U_1 。

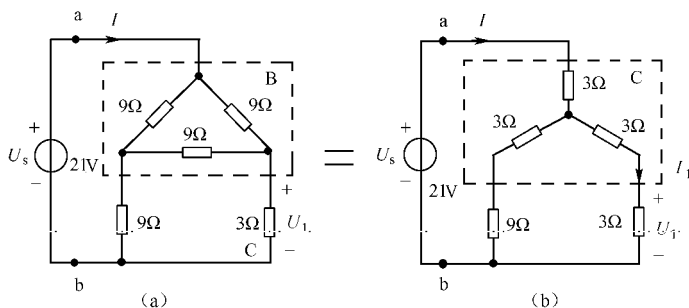


图 1.8-3 例 1.8-1 使用电路

解: 应用 $\triangle$ 形、Y形电路互换等效,将图(a)等效为图(b),再应用电阻串并联等效求得等效

电阻

$$R_{ab} = 3 + (3 + 9) // (3 + 3) = 7 (\Omega)$$

所以, 电流

$$I = \frac{U_s}{R_{ab}} = \frac{21}{7} = 3 (\text{A})$$

应用分流公式, 算得

$$I_1 = \frac{(3 + 9)}{(3 + 9) + (3 + 3)} \times I = \frac{2}{3} \times 3 = 2 (\text{A})$$

故得电压

$$U_1 = 3I_1 = 3 \times 2 = 6 (\text{V})$$

例 1.8-2 如图 1.8-4(a) 电路, 求负载电阻 R_L 上消耗的功率 P_L 。

解: 本例电路中各电阻之间既不是串联又不是并联, 而是 $\triangle$ 形、Y 形结构连接。应用 $\triangle$ 形、Y 形互换等效将图(a)等效为图(b), 再应用电阻串联等效及 $\triangle$ 形、Y 形互换等效将图(b)等效为图(c)。在图(c)中, 应用分流公式, 得

$$I_L = \frac{(10 + 40)}{(10 + 40) + (10 + 40)} \times 2 = 1 (\text{A})$$

所以负载 R_L 上消耗功率

$$P_L = R_L I_L^2 = 40 \times 1^2 = 40 (\text{W})$$

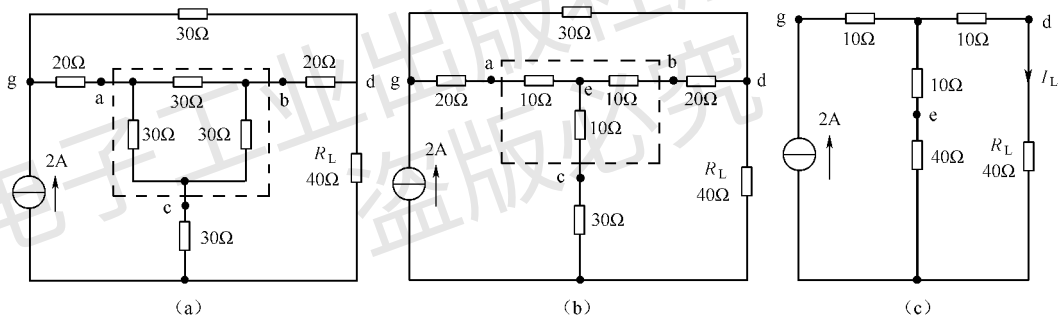


图 1.8-4 例 1.8-2 电路

对于上述所举的两个例子, 因结构特殊, 元件数值作了精心配置, 所以在应用 $\triangle$ 形、Y 形等效变换以后, 再结合应用电阻串并联等效及分压分流关系, 简便地求出了结果。不过这里需要明确, 一般的 $\triangle$ 形、Y 形结构电路中的各电阻并不是精心配置的数值, 所以互换等效算出的电阻数据并不整齐, 这就使问题的计算过程变得复杂。另外, $\triangle$ 形、Y 形互换等效属多端子电路等效, 在使用这种等效变换时, 除正确使用变换公式计算出各电阻值之外, 务必正确连接各对应端子。更应特别注意不要把本是电阻串并联等效就可求解的问题当作 $\triangle$ 形、Y 形结构变换等效, 那样会使问题的计算更复杂化。

思考题

1.8-1 有人说“某电路中 Y 形结构的三个电阻被与之等效的 $\triangle$ 形结构的三个电阻代替, 代替前、后流进(或流出)各对应端子的电流相等; 代替前、后各对应端子间的电压相等; 代替前三个电阻吸收的功率总和与代替后三个电阻吸收功率的总和也相等”, 你同意这些观点吗? 并说明理由。

1.8-2 试将下列各图示电路由 Y 形连接等效变换为 $\triangle$ 形连接, 或由 $\triangle$ 形连接等效变换为 Y 形连接。

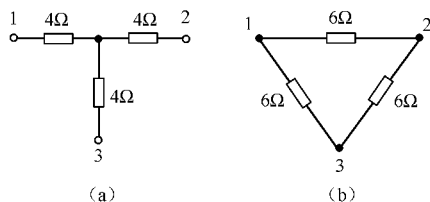


图 1.8-5 思考题 1.8-2 图

1.9 受控源及含受控源电路的等效

1.9.1 受控源

为了描述一些电子器件实际性能的需要,在电路模型中常包含有另一类电源——受控源。所谓受控源,即大小方向受电路中其他地方的电压或电流控制的电源。这种电源有两个控制端钮(又称输入端),两个受控端钮(又称输出端)。就其输出端所呈现的性能看,受控源可分为受控电压源与受控电流源两类;而受控电压源又分为电压控制电压源与电流控制电压源两种,受控电流源又分为电压控制电流源与电流控制电流源两种。大家所熟悉的晶体管集电极电流受基极电流所控制的现象,在画晶体管的电路模型时就要用到电流控制的电流源。基极电流就是控制量,基极电流所在的端子就是受控源的控制端;集电极电流就是受控量,集电极电流所在的端子就是受控源的受控端。

图 1.9-1(a)、(b)、(c)、(d)分别表示上述 4 种受控源的模型。图(a)是理想的电压控制电压源(Voltage Controlled Voltage Source, VCVS)模型。这种理想受控源,仅有控制支路电压即能控制输出支路中受控电压源的电压,不需要控制支路中有电流,所以控制支路应看作开路,而输出端的电压只取决于控制端电压。也就是说,如果控制支路电压为 u_1 ,在输出端的受控电压源就等于 μu_1 ,这里 μ 是无量纲的控制系数。 u_1 控制着 μu_1 的大小、方向;若 $u_1 = 0$,则 $\mu u_1 = 0$;若 u_1 增大,则 μu_1 亦增大;若 u_1 改变极性,则 μu_1 亦改变极性。所以就输出端电压源 μu_1 来说,又可称它为非独立电源。为了标明受控特点,模型符号以其外带“+”、“-”号的菱形符号加以标志。

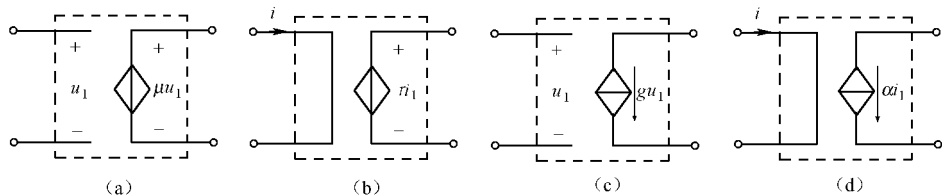


图 1.9-1 理想受控源模型

图(b)是理想的电流控制电压源(Current Controlled Voltage Source, CCVS)模型。仅有输入支路电流即能控制输出支路中的受控电压源,不需要控制支路中有电压,所以输入端应看作短路。模型图中输出电压即受控电压源的电压为 $r i_1$,这里 r 为控制系数,其单位为 Ω 。 i_1 为控制支路的电流,它控制着 $r i_1$ 的大小、方向。

图(c)是理想的电压控制电流源(Voltage Controlled Current Source, VCCS)模型,模型图中: u_1 为控制支路电压; g 为控制系数,其单位为 S(西门子); $g u_1$ 为输出电流即受控电流源的电流。同样,输入端可视为开路,仅有 u_1 就可控制 $g u_1$ 的大小、方向。受控电流源的模型符号为其外部带箭头的菱形符号表示。

图(d)是理想的电流控制电流源(Current Controlled Current Source, CCCS)模型,模型图

中; i_1 为控制支路电流; α 为控制系数,无量纲; αi_1 为输出电流即受控电流源的电流。同样,输入端可视为短路,仅有 i_1 就可控制 αi_1 的大小、方向。

图 1.9-1 所示的四种理想受控源的输入端、输出端还要与外电路有关元件相连接。这里还应明确,独立源与受控源在电路中的作用有着本质的区别。独立源作为电路的输入,代表着外界对电路的激励作用,是电路中产生响应的“源泉”。受控源是用来表征在电子器件中所发生物理现象的一种模型,它反映了电路中某处的电压或电流控制另一处的电压或电流的关系。在电路中,受控源不是激励。顺便指出,受控源的控制参数(μ, r, g, α)若为常数,则称此类受控源为线性受控源,本书中所涉及的受控源均为线性受控源。在电路分析基础课程中对受控源这部分内容的要求是,对给出的含有受控源的电路模型会分析计算就行,至于由一个实际器件(如晶体管、场效应管等)如何得到包含有受控源的电路模型,是后续课程中所讨论的问题,在此不必深究。虽说受控源属于多端元件,但就输出端来说,它相当于一个二端子电源,只不过要时时注意这类电源的大小、方向受其他处的电压或电流控制的特点。

例 1.9-1 对图 1.9-2 所示电路,求 ab 端开路电压 U_{oc} 。

解: 求解含有受控源的电路,会处理受控源是很重要的。从概念上应清楚:受控源亦是电源,所以在应用 KCL、KVL 列写电路方程时,遇到节点或封闭曲面连接有受控电流源、遇到回路内含受控电压源时,首先把受控源当作独立源一样看待,并参与列写基本方程(要注意受控源受控制的特点);然后写出控制量与待求量之关系式——常称为辅助方程。联立求解所列写出的基本方程与辅助方程即可得到所求的电路响应。

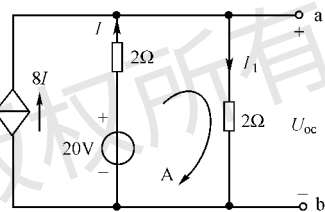


图 1.9-2 例 1.9-1 电路

设电流 I_1 参考方向如图中所标,由 KCL,得

$$I_1 = 8I + I = 9I \quad (1.9-1)$$

对回路 A 应用 KVL 列方程为

$$2I + U_{oc} - 20 = 0 \quad (1.9-2)$$

应用欧姆定律并代入式(1.9-1)关系,得

$$U_{oc} = 2I_1 = 18I \quad (1.9-3)$$

式(1.9-1)、式(1.9-2)为基本方程,式(1.9-3)为辅助方程。联立式(1.9-2)、式(1.9-3)解得

$$U_{oc} = 18 \text{ (V)}$$

1.9.2 含受控源电路的等效

这里所述含受控源电路是指只含有受控源、电阻的电路。若遇受控电压源与电阻串联,或受控电流源与电阻并联时同样可进行电源互换等效;受控电压源串联、受控电流源并联均可仿效独立电压源串联、独立电流源并联等效的办法进行。但也应注意,控制量所在的支路不要变掉,若要是变掉的话,只会对问题的求解带来更大的麻烦与困难。

在电路中一般把加激励源(信号)的端子称为输入端。由输入端子看,不含独立源的电阻电路(其内也可以含受控源)的等效电阻,称二端电路的输入电阻,记为 R_i 。电路中接负载的端子称为输出端。由输出两个端子看,不含独立源的电阻电路(也可以含受控源)的等效电阻,称二端电路的输出电阻,记为 R_o 。求二端电阻电路的输入电阻、输出电阻的方法是完全一样的。对于仅含有受控源、电阻的二端电路在求等效电阻(输入电阻或输出电阻)时,不能不“理睬”受控源就简单地用电阻“串并联”等效的方法,而常采用伏安法或端子间加电源的办法来求:加电压源 u ,求电流 i ;加电流源 i ,求电压 u (注意:所设 u, i 的参考方向对二端电路来说是关联的),则其等效电阻

$$R_{eq} = \frac{u}{i} \quad (1.9-4)$$

对于既不含独立源又不含受控源的电阻二端电路,在求等效电阻时,当然亦可用伏安法或端子间加电源的办法,但更常用简便的串并联等效方法求解。

这里还应提醒读者:由于受控源的作用(原因),含有受控源的电阻二端电路的输入(或输出)电阻的值可以是正值,可以是负值,当然亦可以为零。今后,若遇到求出的这类二端电路的输入(或输出)电阻值为负值,或者为零时应习以为常,不必大惊小怪。

例 1.9-2 对图 1.9-3(a)所示电路,求

- (1) a、b 看作输入端时的输入电阻 R_i ;
- (2) c、d 看作输出端时的输出电阻 R_o 。

解: (1) 采用伏安法求 ab 端看的等效电阻 R_i 。设各有关电流、电压参考方向如图 1.9-3(a) 中所标。因 cd 端是开路的,电流

$$I_2 = \frac{U_1}{2+3} = \frac{1}{5}U_1$$

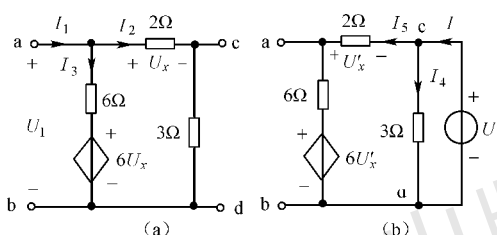


图 1.9-3 例 1.9-2 电路

而

$$U_x = 2I_2 = \frac{2}{5}U_1$$

$$I_3 = \frac{U_1 - 6U_x}{6} = \frac{U_1 - 6 \times \frac{2}{5}U_1}{6} = -\frac{7}{30}U_1$$

所以 $I_1 = I_2 + I_3 = \frac{1}{5}U_1 + \left(-\frac{7}{30}\right)U_1 = -\frac{1}{30}U_1$

故得

$$R_i = \frac{U_1}{I_1} = -30 (\Omega)$$

(2) 采用外加电源法求从 cd 端看的等效电阻 R_o 。根据本电路的结构特点,在 cd 端加电压源 U 求解较简便。设有关电流及电压参考方向如图 1.9-3(b) 中所标。显然

$$I_4 = \frac{1}{3}U$$

ab 端开路,由 KVL 得

$$I_5 = \frac{U - 6U'_x}{2+6} = \frac{U - 6U'_x}{8}$$

而 $U'_x = -2I_5$ 并代入上式,得

$$I_5 = \frac{U - 6(-2I_5)}{8}$$

解得

$$I_5 = -\frac{1}{4}U$$

所以 $I = I_4 + I_5 = \frac{U}{3} + \left(-\frac{1}{4}U\right) = \frac{1}{12}U$

故得 $R_o = \frac{U}{I} = 12 (\Omega)$

例 1.9-3 对图 1.9-4(a) 电路,求 ab 端的等效电阻 R_{eq} 。

解: 在 ab 端外加电流源 i , 设电压 u 使 u 、 i 对二端电路来说参考方向关联,并设电流 i_1 、 i_2 参考方向如图(b)上所标。

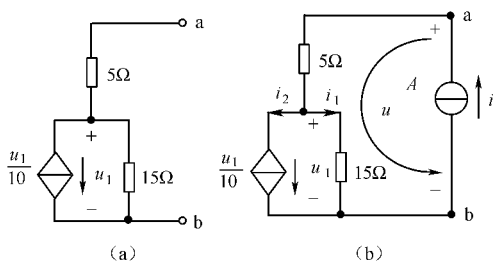


图 1.9-4 例 1.9-3 电路

$$\text{因 } u_1 = 15i_1, \quad i_2 = \frac{u_1}{10} = \frac{15}{10}i_1 = 1.5i_1$$

$$\text{又} \quad i_1 + i_2 = i$$

$$\text{所以} \quad i_1 = \frac{1}{2.5}i$$

由 KVL 列写回路 A 的 KVL 方程,有

$$5i + 15i_1 - u = 0$$

$$\text{即} \quad 5i + 15 \times \frac{1}{2.5}i = u$$

故得等效电阻

$$R_{\text{eq}} = \frac{u}{i} = 11 \quad (\Omega)$$

思考题

1.9-1 何谓受控源?它与独立源的主要区别在哪里?分析含有受控源的电路问题时如何处置受控源?

1.9-2 你如何理解含有受控源的电阻电路,其端子间的等效电阻有可能是负值的?

1.10 运算放大器概述

1.9 节述及的受控源是表征电子器件中发生的某处电压或电流控制另一处电压或电流的一种理想化模型。现代电子线路中普遍使用的一种称为“运算放大器(Operational Amplifier)”的器件,就是可以用受控源模型表示的器件。

“运算放大器”(简称运放)是一种电压放大倍数极大、输入电阻极高、输出电阻极低的电压放大器。实际的运放是由晶体三极管、二极管和电阻等元件集成于半导体晶片上,接上引线加以封装而制成。由于对运放外接适当的其他电路元件,就可以完成信号的加、减、微分、积分等多种运算,故称其为运算放大器。本书只讲述理想运算放大器及其外围特性,只涉及线性应用,其目的是使读者加深对受控源概念的理解,早接触运算放大器等新器件,为后续课程或实际电子线路中遇到含有运算放大器的电路时,进行分析打下初步基础。

1.10.1 理想运放的图形符号及电路模型

理想运放的图形符号如图 1.10.1(a)所示。左边的两个端子是输入端子,右边一个端子是输出端子。输入端子中“-”端、“+”端分别称为反相输入端和同相输入端。理想运放的电路模型如图 1.10.1(b)所示。图中 u_- 、 u_+ 、 u_o 均为各端子对地的电压; $u_D = u_+ - u_-$ 称为差分输入电压; A_o 称为运放的开环放大倍数。

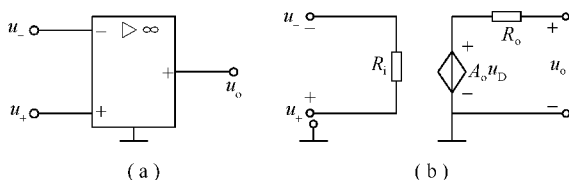


图 1.10-1 理想运放的图形符号及电路模型

理想运放具有如下三个特点:①开环差模电压放大倍数 $A_o \rightarrow \infty$;②差模输入电阻 $R_i \rightarrow \infty$;③

开环输出电阻 $R_o=0$ 。或者说满足上述三个条件的运放称为理想运放。实际中的运放完全满足这三个条件是做不到的,但在一定条件下,在允许工程误差范围内,在进行电路分析时常将实际运放视为理想运放看待。

运放输出与输入之间关系的特性,称为传输特性。运放的传输特性曲线示于图 1.10-2(a)、(b)。图(a)为理想运放的传输特性,横坐标为 $u_D=u_+-u_-$ 差分输入电压,纵坐标为输出电压 u_o 。因为理想运放的 $A_o \rightarrow \infty$,则 $u_D \rightarrow 0$,可以得到一有界的输出电压,即

$$u_o = \begin{cases} U_{o(sat)} & u_D > 0 \\ -U_{o(sat)} & u_D < 0 \end{cases} \quad (1.10-1)$$

式(1.10-1)表明输出电压 u_o 在 $u_D=0$ 处呈现第一类间断点。 $U_{o(sat)}$ 为有界的电压数值,称为饱和电压。

图 1.10-2(b)为实际运放的传输特性。因实际运放的 A_o 不是无穷大,而是数值极大的有界数值(如 10^6 、 10^7 等),这时当 u_D 在 $-\sigma < u_D < \sigma$ 区间变化时,传输特性呈现线性变化。 σ 为数值极小的有界数值。 $u_D=0$ 处不再是传输特性的间断点,在 $u_D=\pm\sigma$ 处是传输特性的两个拐点。

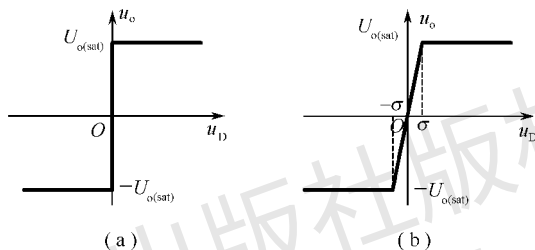


图 1.10-2 运放的传输特性

1.10.2 理想运放三种输入方式与虚短路、虚开路概念

1. 反相输入

电路如图 1.10-3 所示。输入信号 u_i 经 R_1 加至反相输入端,同相输入端经 R_2 接地。考虑运放是理想的, $R_1 \rightarrow \infty$, 所以

$$i_+ = i_- = 0 \quad (1.10-2)$$

故称同相输入端、反相输入端为虚开路。这里所述虚开路,就是说,在对电路分析时,将 $i_+ = i_- = 0$ 视为开路,但又不能对其真的断开,那样任何的运放都不能正常运行工作。参看图 1.10-3 电路,显然,同相输入端电位 $u_+ = -R_2 i_+$, 考虑 $i_+ = 0$, 所以 $u_+ = 0$, 又

$$u_o = A_o(u_+ - u_-)$$

为有限数值, $A_o \rightarrow \infty$, $(u_+ - u_-) \rightarrow 0$, 即

$$u_- = u_+ = 0 \quad (1.10-3)$$

这时,称反相输入端、同相输入端为虚短路,又称虚地。这里“虚”的意思与前述的“虚”开路雷同,即是说,在计算问题时可认为 $u_- = u_+$ 视为短路,可又不能真的用导线把“-”端与“+”端连起来。那样,任何运放也不能运行工作。

2. 同相输入

如图 1.10-4 所示电路,输入信号经 R_2 接运放的同相输入端,反相输入端经 R_1 接地。

如同反相输入情况时一样的分析,得

$$\left. \begin{aligned} i_+ &= i_- = 0 \text{ (虚开路)} \\ u_+ &= u_- \text{ (虚短路)} \end{aligned} \right\} \quad (1.10-4)$$

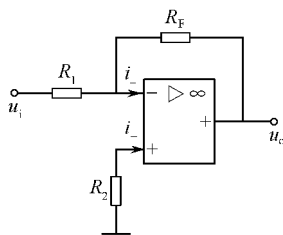


图 1.10-3 反相输入

但此时,同相输入端、反相输入端不能视为虚地,此时

$$u_+ = u_- = -R_1 i_F \quad (i_F \neq 0)$$

3. 差分输入

如图 1.10-5 所示电路, u_{i1} 、 u_{i2} 两个输入信号分别从运放的反相输入端、同相输入端加入,这时的输入为差分输入。

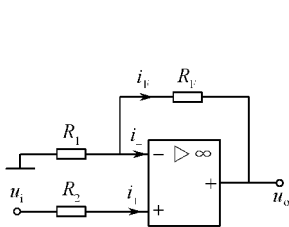


图 1.10-4 同相输入

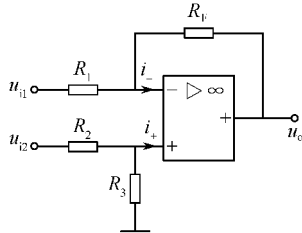


图 1.10-5 差分输入

如同相输入情况的分析,可得

$$\left. \begin{aligned} i_+ &= i_- = 0 \text{ (虚开路)} \\ u_+ &= u_- \text{ (虚短路)} \end{aligned} \right\} \quad (1.10-5)$$

也不能将同相输入端、反相输入端视为虚地。

1.10.3 运放的两类典型运算

1. 反相输入比例运算

如图 1.10-6 所示电路,输入信号 u_i 加于运放的反相输入端与地之间,则输出电压

$$u_o = -\frac{R_F}{R_1} u_i \quad (1.10-6)$$

分析:考虑 $i_- = 0$, $i_+ = 0$, $u_+ = u_- = 0$,所以

$$i_1 = \frac{u_i - u_-}{R_1} = \frac{u_i}{R_1} = i_F$$

$$\text{而} \quad u_o = -R_F i_F = -R_F \frac{u_i}{R_1} = -\frac{R_F}{R_1} u_i$$

即证得式(1.10-6)是正确的结果。式(1.10-6)中的负号说明输出与输入反相。

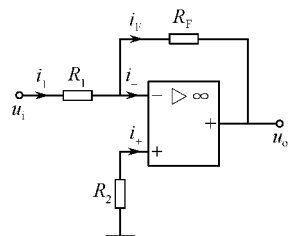


图 1.10-6 反比例运算

2. 反相加法运算

如图 1.10-7 所示电路,三路输入信号 u_{i1} 、 u_{i2} 、 u_{i3} 分别经 R_1 、 R_2 、 R_3 加入运放的反相输入端。则运放的输出电压

$$u_o = -R_F \left(\frac{u_{i1}}{R_1} + \frac{u_{i2}}{R_2} + \frac{u_{i3}}{R_3} \right) \quad (1.10-7)$$

分析:应用理想运放虚短路、虚开路、虚地概念,可知

$$\begin{aligned} u_+ &= u_- = 0, i_- = 0 \\ i_F &= i_1 + i_2 + i_3 \end{aligned} \quad (1.10-8)$$

$$i_1 = \frac{u_{i1} - u_-}{R_1} = \frac{u_{i1}}{R_1} \quad (1.10-9a)$$

$$i_2 = \frac{u_{i2} - u_-}{R_2} = \frac{u_{i2}}{R_2} \quad (1.10-9b)$$

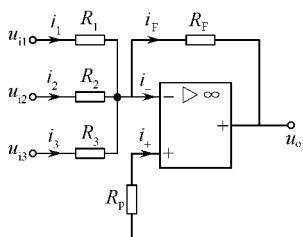


图 1.10-7 反相加法运算

$$i_3 = \frac{u_{i3} - u_-}{R_3} = \frac{u_{i3}}{R_3} \quad (1.10-9c)$$

将式(1.10-9)代入式(1.10-8),得

$$i_F = \frac{u_{i1}}{R_1} + \frac{u_{i2}}{R_2} + \frac{u_{i3}}{R_3}$$

所以,输出电压

$$u_o = -R_F i_F = -R_F \left(\frac{u_{i1}}{R_1} + \frac{u_{i2}}{R_2} + \frac{u_{i3}}{R_3} \right)$$

即是式(1.10-7)。若 $R_1 = R_2 = R_3 = R_F$, 代入上式,有

$$u_o = -(u_{i1} + u_{i2} + u_{i3}) \quad (1.10-10)$$

式(1.10-10)表明输出等于各路输入信号相加取负号。

运放可完成的运算功能还有许多种,这里不一一展开讨论了,其实实际中的运放所能完成的功能已远远超出“运算”这个范畴。待在后续课程电子线路中更加详细地学习研究。

思考题

1.10-1 理想运放有哪三个特点?理想运放的电路模型可以用思考题图 1.10-1 表示吗?并说明理由($u_D = u_+ - u_-$)。

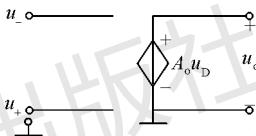


图 1.10-1

1.10-2 你是如何理解理想运放输入端间的虚短路、虚开路概念的?何种情况下方能视输入端为虚地?

本章小结

1. 电路模型与电路中的基本变量

(1) 电路模型

在集总假设条件下,定义一些理想电路元件(如 R 、 L 、 C 等),这些理想电路元件在电路中只起一种电磁性能作用,它有精确的数学解析式描述,也规定有模型表示符号。对实际的元器件,根据它应用的条件及所表现出的主要物理性能,对其作某种近似与理想化(要有实际工程观点),用所定义的一种或几种理想元件模型的组合连接,构成实际元器件的电路模型。

若将实际电路中各实际部件都用它们的模型表示,这样所画出的图称为电路模型图(又称电原理图)。本课程分析、研究的电路均为电路模型。

(2) 电路中的基本变量

① 电流:电荷有规则的定向运动形成传导电流。其大小用电流量度,即 $i = dq/dt$ 单位为安(A);规定正电荷运动的方向为电流的实际方向;假定正电荷运动的方向为电流的参考方向。

② 电压:电位之差称电压。用移动单位正电荷电场力做功来定义,即 $u = dw/dq$,单位为伏(V);规定电位真正降低的方向为电压的实际方向;假定电位降低的方向为电压的参考方向。

在分析电路时务必设出使用到的电流电压的参考方向(切记!);原则上电流电压的参考方向可任意假设;习惯上凡一眼就看出实际方向的电流、电压,就设它们的参考方向与实际方向一致。

看不出的就任意设一个方向作为它们的参考方向;还习惯将元件上的电流、电压参考方向设成关联。

③ 功率:做功的速率称功率,即 $p = \mathrm{d}w/\mathrm{d}t$,单位为瓦(W)。对二端电路,若电流、电压参考方向关联,该段电路吸收功率

$$p_{\text{吸}} = ui$$

供出功率

$$p_{\text{供}} = -ui \text{ (供出功率也称产生功率)}$$

若电流电压参考方向非关联,则计算该段电路吸收功率和供出功率公式与参考方向关联时均差一负号,即该段电路供出功率

$$p_{\text{供}} = ui$$

吸收功率

$$p_{\text{吸}} = -ui$$

2. 电源

电源可归纳如图 XJ1-1 所示。

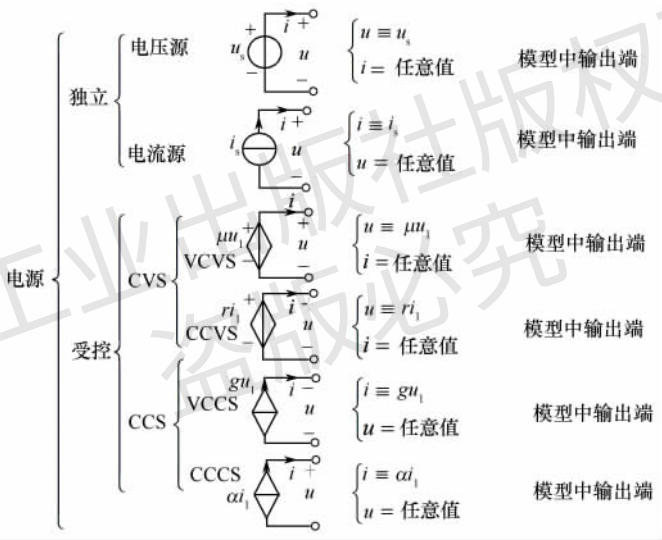


图 XJ1-1 电源小结图

3. 基本定律

基本定律诸项内容归纳于表 XJ1-1 中。

表 XJ1-1 基本定律归纳表

定律名称	描述对象	定律形式	应用条件
OL	电阻 (电导)	$u=Ri$ ($i=Gu$)	线性电阻(电导); $u、i$ 参考方向关联, 若非关联公式中冠以负号
KCL	节点或闭曲面	$\sum i(t)=0$	任何集总参数电路(含线性、非线性、时变、时不变电路)中的节点或闭曲面
KVL	回路	$\sum u(t)=0$	任何集总参数电路(含线性、非线性、时变、时不变电路)中的真实回路或假想回路

4. 电路等效

(1)等效定义

两部分电路 B 与 C,若对任意外电路 A,二者相互代换能使外电路 A 中有相同的电压、电

流、功率,则称 B 电路与 C 电路是互为等效的。

(2)等效条件

B 与 C 二电路具有相同的 VCR。

(3)等效对象

任意外电路 A 中的电流、电压、功率。

(4) 等效目的

将电路由繁化简,方便分析求解。

(5) 两种常用的二端电路等效法

电阻电导串、并联等效与电源互换等效,见表 XJ1-2 和表 XJ1-3。

表 XJ1-2 电阻电导串并联等效

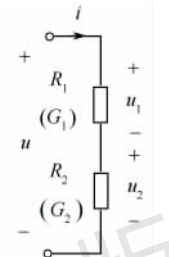
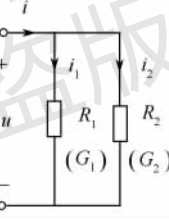
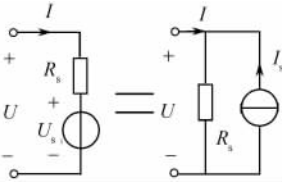
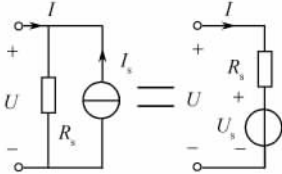
类别	结构形式	重要公式
电阻电导串并联	串联 	$R_{eq}=R_1+R_2$ $(G_{eq}=\frac{G_1G_2}{G_1+G_2})$ $u_1=\frac{R_1}{R_1+R_2}u$ $(u_1=\frac{G_2}{G_1+G_2}u)$ $u_2=\frac{R_2}{R_1+R_2}u$ $(u_2=\frac{G_1}{G_1+G_2}u)$
	并联 	$R_{eq}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ $(G_{eq}=G_1+G_2)$ $i_1=\frac{R_2}{R_1+R_2}i$ $(i_1=\frac{G_1}{G_1+G_2}i)$ $i_2=\frac{R_1}{R_1+R_2}i$ $(i_2=\frac{G_2}{G_1+G_2}i)$

表 XJ1-3 电源互换等效

等效形式	重要关系
电压源互换为电流源 	$I_s=\frac{U_s}{R_s}$
电流源互换为电压源 	$U_s=R_sI_s$

5. 理想运放的三个特点

开环差模电压放大倍数 $A_o \rightarrow \infty$; 差模输入电阻 $R_i \rightarrow \infty$; 开环输出电阻 $R_o \rightarrow \infty$ 。会运用理想运放输入端间虚短路、虚开路概念, 分析求解包含理想运放的简单基本运算电路: 反相输入比例运算和反相加法运算等。

习 题 一

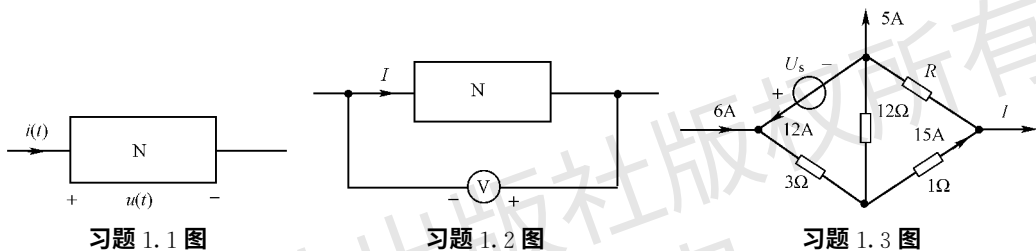
1.1 图示一段电路 N, 电流、电压参考方向如习题 1.1 图中所标。

(1) 若 $t=t_1$ 时 $i(t_1)=1\text{A}$, $u(t_1)=3\text{V}$, 求 $t=t_1$ 时 N 吸收的功率 $p_N(t_1)$;

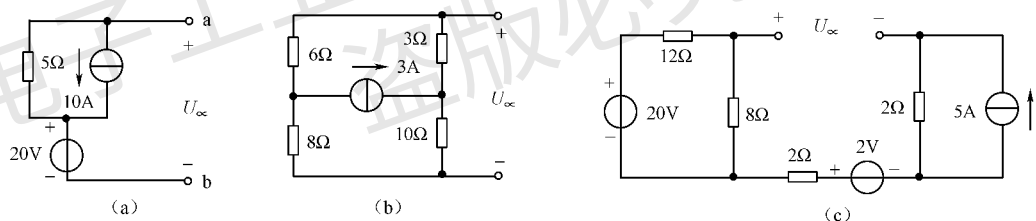
(2) 若 $t=t_2$ 时 $i(t_2)=-2\text{A}$, $u(t_2)=4\text{V}$, 求 $t=t_2$ 时 N 产生的功率 $p_N(t_2)$ 。

1.2 图示一段直流电路 N, 电流参考方向如习题 1.2 图中所标, 电压表内阻对测试电路的影响忽略不计, 已知直流电压表读数为 5V , N 吸收的功率为 10W , 求电流 I 。

1.3 图示某电路的部分电路, 各已知的电流及元件值已标示在习题 1.3 图中, 求 I 、 U_s 、 R 。

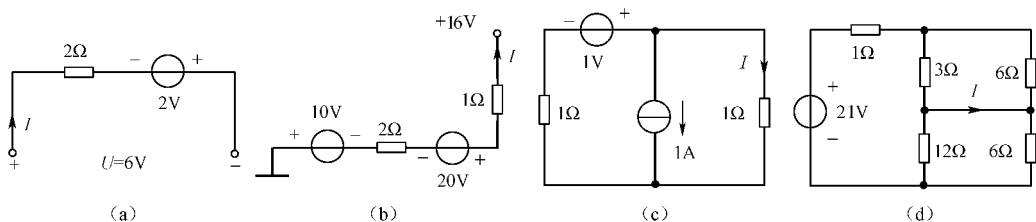


1.4 求习题 1.4 图所示各电路的开路电压。



习题 1.4 图

1.5 求习题 1.5 图所示各电路的电流 I 。



习题 1.5 图

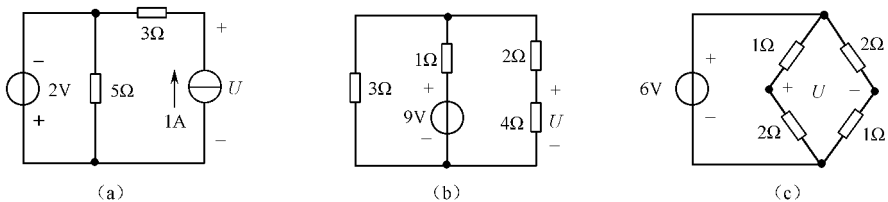
1.6 求习题 1.6 图所示各电路的电压 U 。

1.7 习题 1.7 图所示各电路, 求

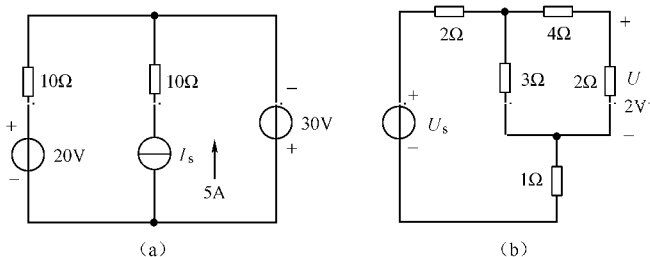
(1) 图(a)中电流源 I_s 产生功率 P_s ;

(2) 图(b)中电压源 U_s 产生的功率 P_s 。

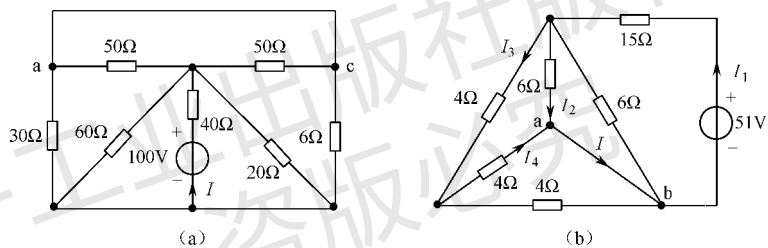
1.8 求习题 1.8 图所示各电路中的电流 I 。



习题 1.6 图



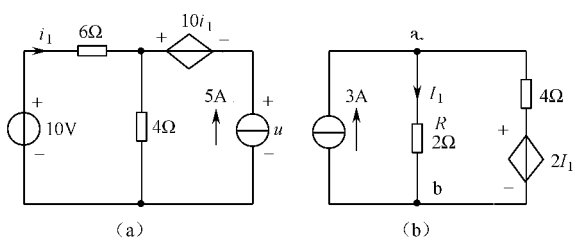
习题 1.7 图



习题 1.8 图

1.9 习题 1.9 图所示含受控源电路,求:

- (1) 图(a)中电压 u 。
- (2) 图(b)中 2Ω 电阻上消耗的功率 P_R 。

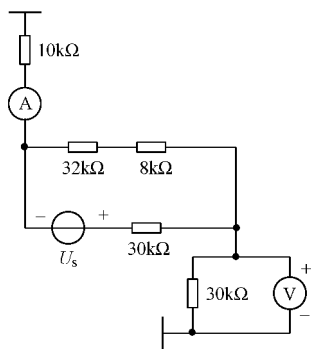


习题 1.9 图

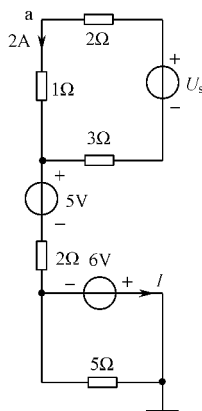
1.10 习题 1.10 图所示直流电路,已知电压表读数为 $30V$,忽略电压表、电流表内阻影响。问:

- (1) 电流表的读数为多少?并标明电流表的极性。
- (2) 电压源 U_s 产生的功率 $P_s = ?$

1.11 求习题 1.11 图所示电路中的电流 I 、电位 V_a 及电源 U_s 之值。

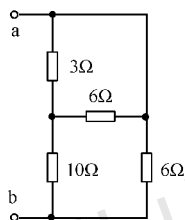


习题 1.10 图

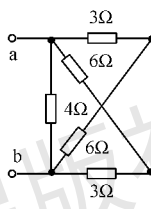


习题 1.11 图

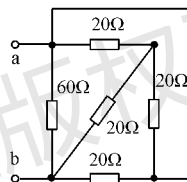
1.12 求如习题 1.12 图所示各电路 ab 端的等效电阻 R_{ab} 。



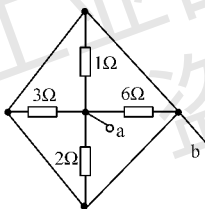
(a)



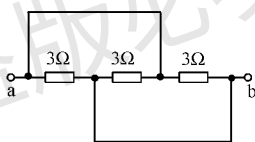
(b)



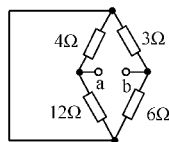
(c)



(d)



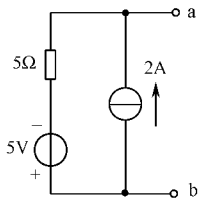
(e)



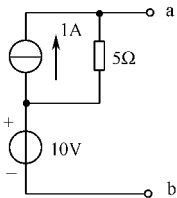
(f)

习题 1.12 图

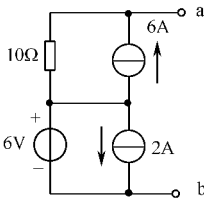
1.13 将习题 1.13 图电路对 ab 端化为最简形式的等效电压源形式和等效电流源形式。



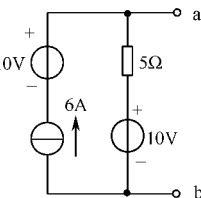
(a)



(b)



(c)



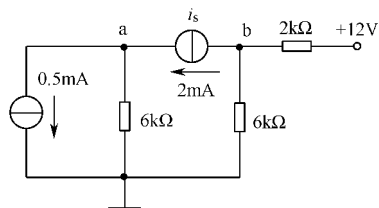
(d)

习题 1.13 图

1.14 习题 1.14 图所示电路, 求电位 V_a 、 V_b 及 i_s 电流源产生的功率 P_s 。

1.15 (1) 求图(a)电路中的电流 i ;

(2) 求图(b)电路中开路电压 U_{oc} ;



习题 1.14 图

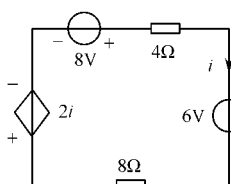
(3) 求图(c)电路中受控源吸收的功率 P 。

1.16 (1) 图(a)电路, 已知 $R_1=2\Omega, R_2=4\Omega, R_3=R_4=1\Omega$, 求电流 i ;

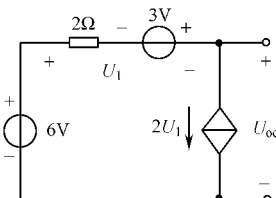
(2) 图(b)电路, 已知电阻 R 上消耗功率 $P_R=50W$, 求电阻 R 。

1.17 (1) 求图(a)电路中的电流 i_3 ;

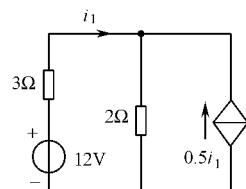
(2) 已知图(b)中 $I_{ab}=1A$, 求电压源 U_s 。



(a)

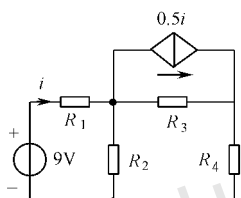


(b)

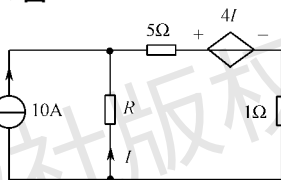


(c)

习题 1.15 图



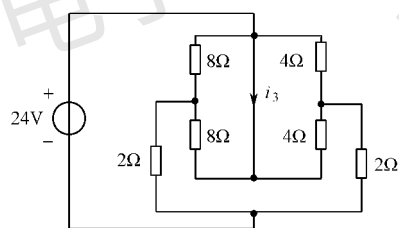
(a)



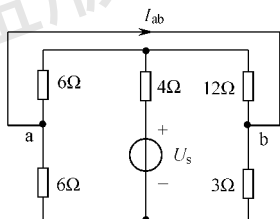
(b)

习题 1.16 图

1.18 习题 1.18 图所示电路, 问 R 为何值时 $I_1=I_2$? R 又为何值时 I_1, I_2 中一个电流为零? 并指出哪一个电流为零。

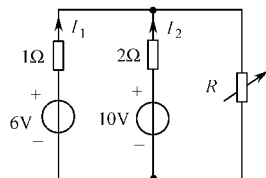


(a)



(b)

习题 1.17 图

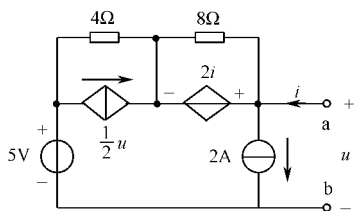


习题 1.18 图

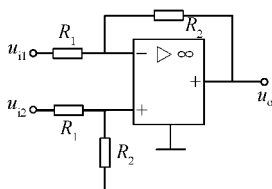
1.19 习题 1.19 图所示电路, 当 ab 开路时求开路电压 u ; 当 ab 短路时求电流 i 。

1.20 习题 1.20 图所示含理想运放电路, 已知 $u_{i1}=1V, u_{i2}=3V, R_1=3k\Omega, R_2=6k\Omega$, 求输出电压 u_o 。

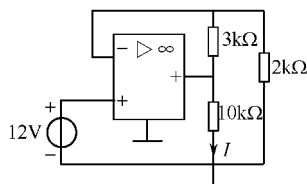
1.21 习题 1.21 图所示含理想运放电路, 求电流 I 。



习题 1.19 图



习题 1.20 图



习题 1.21 图

第 2 章 电阻电路的一般分析方法

仅包含有电阻、独立源及受控源的电路称做电阻电路。所谓电路的一般分析方法,就是以元件约束特性(VCR)和拓扑约束特性(KCL、KVL)为依据,建立以所选择电路变量为未知量的方程组,通过求解方程解得所要求的电路响应(电流或电压),进而求得需要求解的功率。这种分析方法又常简称做方程分析法。

无论是线性电路,还是非线性电路,其拓扑约束,即按 KCL 和 KVL 所列的方程是代数方程式,而线性元件与非线性元件上的电压、电流约束关系式(即 VCR)却有着显著不同。对于线性电阻元件其 VCR 是一次代数式(线性),对于非线性电阻元件其 VCR 是高次代数式(非线性)。

本章只讨论线性电阻电路,一方面它分析起来简单,而且有许多实际电路可以看作是线性电阻电路,另一方面它是学习动态电路、非线性电路的基础。

2.1 拓扑图与电路方程

2.1.1 网络(电路)的拓扑图

将电路中每一个元件(无源元件或有源元件)都用一线段表示,称为一条拓扑支路,简称为支路;各支路的连接点以黑点表示,称为拓扑节点,简称为节点。这样,就能画出与原电路相对应的、用支路与节点组合连接的线图,称为电路的拓扑图,简称为图(Graph),以符号 G 表示。

在电路问题讨论中,有时为顺应习惯或方便,常把若干个元件的串联组合,如电阻串联或恒压源与电阻的串联,当作一条支路;还有时把某些元件的并联组合,如电导并联或恒流源与电导的并联,当作一条支路。图 2.1-1(a)所示电路的对应拓扑图如图 2.1-1(b)所示。按照严格支路与节点的定义,图(b)有 7 条支路,5 个节点;顺应习惯,元件 1、2 串联视为一个支路,元件 1、2 的公共连接点 e 也不算节点,这样看,图(b)有 6 条支路,4 个节点。若无特殊说明本章中所述的支路、节点均指后者。

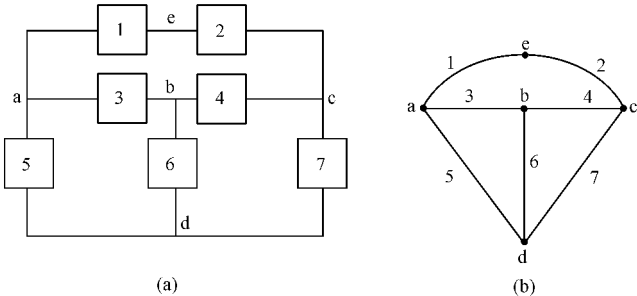


图 2.1-1 电路的拓扑图

根据图论^①理论,图的构成与变换应遵循这样的规则:每条支路的两端都必须连接到相应的节点上;移去某条支路并不把与它相连的节点移去;移去某节点而要把与该节点相连的所有支路同时移去。所以,图中不能有不与节点相连的支路,但可以有孤立的节点,如图 2.1-2(a)所示。

全部节点都被支路所连通的图称为连通图,否则,称为非连通图。图 2.1-2(a)是非连通图,

① 图论是研究点和线连接关系的理论,它是数学中的一个分支。

显然它由四个相互分离的部分组成,称其为分离度 $\rho=4$;图 2.1-2(b)是连通图,其分离度 $\rho=1$ 。我们主要研究的是连通图。

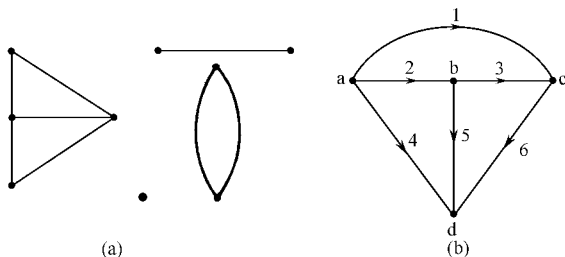


图 2.1-2 连通图与非连通图

全部支路都标有方向^①的图称为有向图[如图 2.1-2(b)],否则称为无向图。

如果从图 G 中去掉某些支路和某些节点所形成的图 G_1 ,称为图 G 的子图。显然子图 G_1 的所有支路和节点都包含在图 G 中。由子图的定义可知,一个图 G 可以有多个子图,如图 2.1-3 中 G_1 、 G_2 为图 G 的子图中的两个子图,其余的子图未画出。

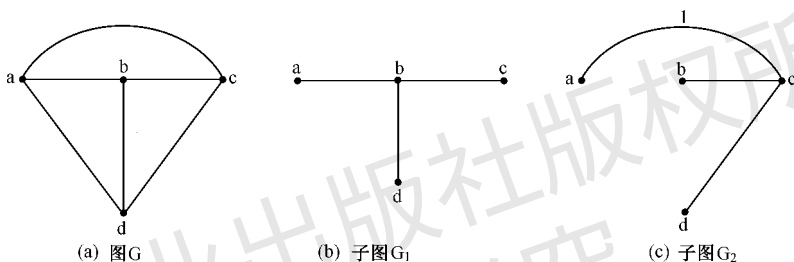


图 2.1-3 图与子图

2.1.2 回路、割集、树

1. 回路

由图中支路、节点的集合构成的闭合路径称为回路。图 G 中任何一个回路它都具有这样 4 个特点:①回路是图 G 的一个子图;②此子图是一个连通图;③回路子图中的节点连接的支路必须且只能是两条;④若移去回路子图中的任意一个支路或节点,则闭合路径便遭破坏。

如图 2.1-4 所示的图 G 中,支路、节点集合 $\{1,2,3;a,b,c\}$ 、 $\{2,4,5;a,d,b\}$ 、 $\{3,5,6;b,d,c\}$ 、 $\{2,3,6,4;a,b,c,d\}$ 、 $\dots$,均为回路子图。前两个回路子图分别由图 2.1-4(b)、(c)表示,读者可以检验回路所具有的 4 个特点。

2. 割集

在连通图 G 中,这样的支路集 S 称为割集:若从图 G 中移去或割断属于 S 的所有支路,则图 G 恰好被分成两个互相分离的部分,但只要少移去其中的一条支路,则图仍然是连通的。割集还可简明地定义为:把连通图分割为两个连通子图所需移去的最少支路集。如图 2.1-5 中,支路集 $\{1,2,4\}$ 、 $\{4,5,3,1\}$ 、 $\{4,5,6\}$ 、 $\{6,3,1\}$ 均为割集。

3. 树

树是图论中常用到的重要概念,它的定义可叙述为:对于连通图 G ,包含图中所有节点,但不

① 对于不同的问题,支路方向的含义不同。信号流图等,其中的方向表示只能按箭头方向流动。这里的方向是指支路电流的参考方向。

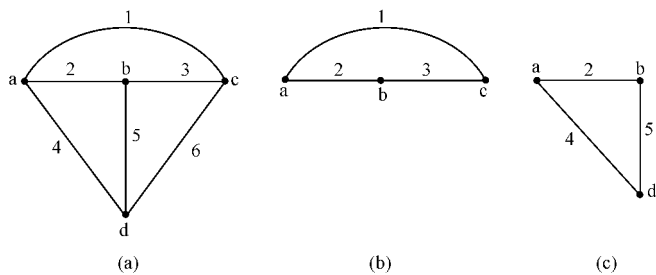


图 2.1-4 图 G 中的回路

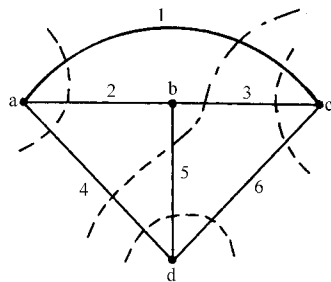


图 2.1-5 割集

包含回路的连通子图,称为图 G 的树。一个连通图它可以有多种树。如图 2.1-6 中(a)图所示的连通图 G,图(b)、图(c)、图(d)是它的三种树,该图 G 的其他的树请读者练习画出。树中的支路称为树枝,图 G 中不属于树枝的支路,称为连枝。不同的树有不同的树枝,相应的也有不同的连枝。如图 2.1-6(b)所示的树 T_1 ,它的树枝支路为 $\{2,3,5\}$,相应 T_1 ,图(a)中支路 $\{1,4,6\}$ 为连枝;如图 2.1-6(c)所示的树 T_2 ,它的树枝支路为 $\{2,5,6\}$,相应 T_2 ,图(a)中支路 $\{1,3,4\}$ 为连枝。

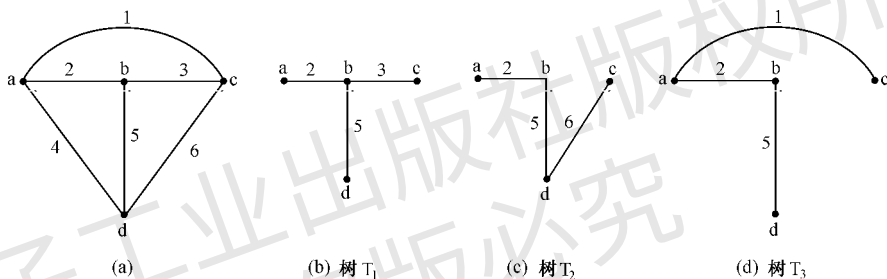


图 2.1-6 连通图 G 的三种树

一个有 n 个节点, b 条支路的连通图 G,其任何一种树的树枝数一定为

$$T = n - 1 \quad (2.1-1)$$

这是因为,若把图 G 的 n 个节点连接成一种树时,第一条支路连接 2 个节点,此后每增加一条新支路就连接上 1 个新节点,直到把 n 个节点连接成树,所以树枝数比节点数少 1。如图 2.1-7 所示。图中,①,②,⋯,② 为节点序号;1,2⋯, $n-1$ 为支路序号。显然,对应于任一种树的连枝数必为

$$L = b - T = b - n + 1 \quad (2.1-2)$$

4. 基本回路与基本割集

在连通图 G 中,任意选一种树,则树枝支路、连枝支路相应确定。仅包含一条连枝的回路,称为基本回路。仅包含一条树枝的割集称为基本割集。一个有 n 个节点, b 条支路的连通图 G,它的基本回路个数为它的连枝个数,即 $b-n+1$ 个;它的基本割集个数为它的树枝个数,即 $n-1$ 个。图 2.1-8(a)、(b)分别为连通图 G 的两种树及相应的基本回路与基本割集。图中,粗实线支路表示树枝,细实线支路表示连枝。图(a)中支路、节点集 $\{1,3,2;a,b,c\}$, $\{2,4,5;a,b,d\}$, $\{6,5,3;b,c,d\}$ 都是基本回路;图(a)中支路集 $\{1,2,4\}$, $\{1,3,6\}$, $\{4,5,6\}$ 都是基本割集。图(b)中支路、节点集 $\{1,4,6;a,c,d\}$, $\{1,2,3;a,b,c\}$, $\{3,5,6;b,c,d\}$ 都是基本回路;图(b)中支路集 $\{1,2,4\}$, $\{4,5,6\}$, $\{2,5,3\}$ 都是基本割集。

这里还应说及的是,在对有向图问题的讨论中,在选定树确定了基本回路、基本割集以后,为

了列写 KVL 方程、KCL 方程方便起见,还应规定基本回路、基本割集的方向。通常选连枝的方向作为该连枝所在基本回路的方向,选树枝的方向为该树枝所在基本割集的方向,如图 2.1-8(a)、(b)所示。

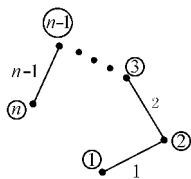


图 2.1-7 说明树枝数与节点数关系用图

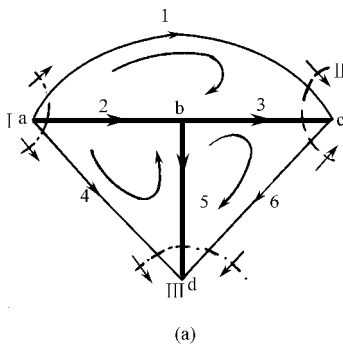
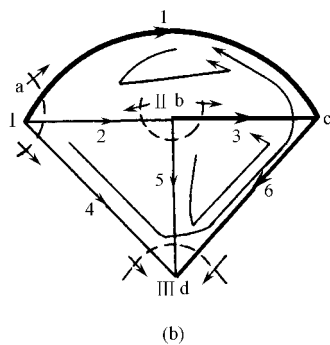


图 2.1-8 基本回路与基本割集



2.1.3 KCL 和 KVL 的独立方程

图 2.1-9(a) 为某电路的拓扑图 G , 对其各节点和支路分别编号, 支路的方向即支路电流的参考方向(支路电压参考方向与支路电流参考方向关联, 省略不标) 如图中所标。选 G 的一种树 T_1 如图(b)中粗实线支路所画。基本割集 I、II、III 分别为支路集 $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{4, 5, 6\}$, 它们的方向分别取树枝 2、3、5 的方向。按基本割集列写 KCL 方程, 选取与割集方向一致的支路电流取正号, 反之取负号, 有

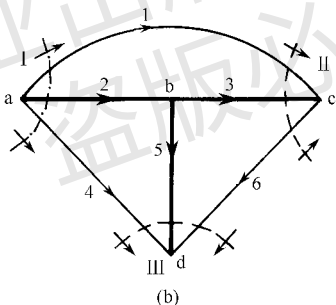
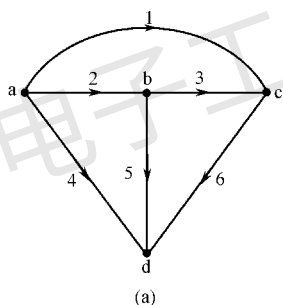


图 2.1-9 KCL 的独立方程

$$\left. \begin{aligned} i_1 + i_2 + i_4 &= 0 \\ i_1 + i_3 - i_6 &= 0 \\ i_4 + i_5 + i_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1-3)$$

显然式(2.1-3)中各方程之间相互独立。这是因为, 每个基本割集都包含一条其他基本割集所不包含的树枝, 所以按基本割集列写的 KCL 方程相互独立。由此可得结论: 一个 b 条支路 n 个节点的电路(连通图), 可列写

且仅能列写相互独立的 KCL 方程数为树枝的个数, 即 $n-1$ 个。

由于按基本割集列写相互独立的 KCL 方程需要选树、确定树枝及基本割集, 过程较繁, 可否省去这一过程而能省时省力地列写出数量足够、且又相互独立的 KCL 方程呢? 按独立节点列写 KCL 方程正是这样的。

根据割集的定义可知, 一个有 n 个节点 b 条支路的连通图 G , 与每一个节点相连的支路集均为它的一个割集, 这 n 个割集不全是基本割集。又, 根据树的定义, 无论如何选树, 树枝数均为 $n-1$ 条且要连通所有节点。若任意选取 n 个节点中的 $n-1$ 个节点, 认为它们与 $n-1$ 个树枝一一对应, 与这 $n-1$ 个节点中每一个节点相连的支路集就都应是基本割集, 所以列写这 $n-1$ 个节点的 KCL 方程相互独立。正因为无论如何选树都是如此的理由, 反而无须选树, 可直接列写图 G 中任意 $n-1$ 个节点的 KCL 方程都相互独立, 且数量足够。所列 KCL 方程相互独立的这 $n-1$ 个节点, 常称为独立节点。

对于图 2.1-9(a) 所示的连通图, 任选它的一种树 T_2 如图 2.1-10 中粗实线支路所画, 细实线

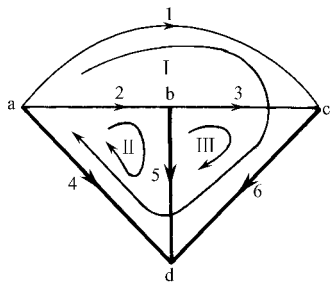


图 2.1-10 KVL 的独立方程

支路为连枝。显然,基本回路 I、II、III 分别为支路、节点集 $\{1, 6, 4; a, c, d\}$, $\{2, 5, 4; a, b, d\}$, $\{3, 6, 5; b, c, d\}$ 。各基本回路的方向(列 KVL 方程的巡行方向)选为各基本回路所包含连枝的方向,如图中所示。列写各基本回路的 KVL 方程为

$$\left. \begin{aligned} u_1 + u_6 - u_4 &= 0 \\ u_2 + u_5 - u_4 &= 0 \\ u_3 + u_6 - u_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1-4)$$

显然式(2.1-4)中各方程之间相互独立。这是因为,每个基本回路都包含一条其他基本回路所不包含的连枝,所以按基本回路列写的

KVL 方程相互独立。据此亦可得出结论:一个 b 条支路 n 个节点的电路(连通图),可列写且仅能列写相互独立的 KVL 方程数为连枝的个数,即 $b-n+1$ 个。

今后,在对电路问题的分析中遇到的大多数电路属于平面电路,对于这类电路,若按基本回路列写相互独立的 KVL 方程,需要选树确定连枝及基本回路,过程亦繁,可否省去这一过程而能快速地列写出数量足够且又相互独立的 KVL 方程呢?按平面电路的网孔回路列写 KVL 方程可以做到这一点。

对于具有 b 条支路、 n 个节点的平面连通图,它具有的网孔个数恰为该图连枝的个数 $b-n+1$ 。这一结论可采用推理、归纳的方法作出证明:如果线图有两个节点一条支路,则组成的网孔数

$$L = b - n + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

结论成立。如图 2.1-11(a)所示。以后在线图中每增加一条支路时,要么组成一个新网孔,要么增加一个新节点,如图 2.1-11(b)、(c)所示。

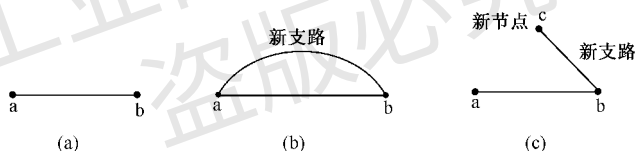


图 2.1-11 证明平面电路网孔个数用图

若为图(b)情况,新增加的支路连接于原有的两个节点上,这时 $b=2, n=2$, 网孔数

$$L = b - n + 1 = 2 - 2 + 1 = 1$$

结论成立。若为图(c)情况,新增加的支路,一端连接原有的一个节点上,一端连接于新增加的节点上,这时 $b=2, n=3$, 网孔数

$$L = b - n + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$$

结论成立。

显然,继续这样的过程所得的线图只要是连通图,则它的节点数 n 和网孔数 L 之和总比支路数 b 多 1,即

$$n + L = b + 1$$

所以,一个具有 b 条支路、 n 个节点的平面连通图,它具有的网孔数一定为

$$L = b - n + 1$$

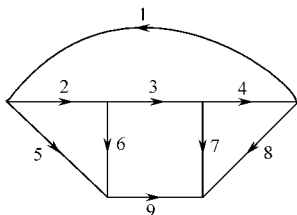
可以证明,按网孔所列写的 KVL 方程都相互独立。正因为如此,在分析平面电路时无须选树确定连枝、基本回路,可直接按网孔列写所需的 KVL 方程即可。

思考题

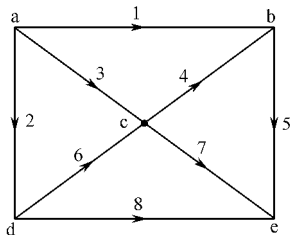
2.1-1 简述:割集、树、基本割集、回路、基本回路的定义。一个具有 b 条支路、 n 个节点的连通图 G ,它有多少个基本割集?多少个基本回路?若 G 为平面图,它应有多少个网孔?

2.1-2 图示连通图 G ,试选画出它的两种树,并分别写出对应这两种树时的基本割集。

2.1-3 图示平面连通图 G ,试选择一种树,使它的网孔均为基本回路。



思考题 2.1-2 图



思考题 2.1-3 图

2.2 $2b$ 法和 b 法

2.2.1 $2b$ 法

对于一个具有 b 条支路、 n 个节点的电路,当选择支路电流、支路电压变量列写方程时,共有 $2b$ 个未知变量。由 2.1 节中的讨论我们知道,根据 KCL 可列出 $(n-1)$ 个相互独立的电流方程;根据 KVL 可列出 $(b-n+1)$ 个相互独立的电压方程;根据每一支路的电压、电流关系(VCR),又可列写出 b 个支路电压、电流关系方程。因 b 个支路各异,所以列写出的 b 个支路的电压、电流关系方程相互独立。这样,共列出 $2b$ 个以支路电压、电流为未知量的数量足够且相互独立的方程,可以用来求解 b 个支路电压和 b 个支路电流。这种求解电路的方法称为 $2b$ 法。下面举例来介绍 $2b$ 法求解电路的具体步骤。

图 2.2-1(a)所示电路,求各支路电流与电压。

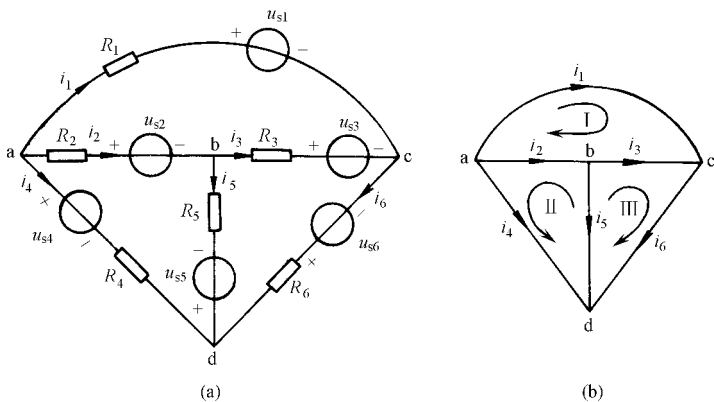


图 2.2-1 $2b$ 法示例

设各支路电流参考方向如图(a)中所标,支路电压参考方向与支路电流参考方向关联,省略不标。图 2.2-1(b)为图(a)的拓扑线图,三个网孔 I、II、III 的巡行方向分别标示在图(b)中。选 a 、 b 、 c 节点为独立节点,选流出节点的电流取“+”号;反之,取“-”号,由 KCL 列写方程为:

$$\begin{aligned}
 \text{a 节点} & \quad i_1 + i_2 + i_4 = 0 \\
 \text{b 节点} & \quad -i_2 + i_3 + i_5 = 0 \\
 \text{c 节点} & \quad -i_1 - i_3 + i_6 = 0
 \end{aligned} \tag{2.2-1}$$

因本示例电路为平面电路,上节已述及,平面电路的网孔即是独立回路,所以不需要选树、确定基本回路的过程。由 KVL 分别对网孔 I、II、III 列写方程为

$$\left. \begin{aligned}
 u_1 - u_3 - u_2 &= 0 \\
 -u_2 + u_4 - u_5 &= 0 \\
 u_3 + u_6 - u_5 &= 0
 \end{aligned} \right\} \tag{2.2-2}$$

根据本电路各支路具体的结构与元件值,可写各支路的电压、电流关系方程为

$$\left. \begin{aligned}
 u_1 &= R_1 i_1 + u_{s1} \\
 u_2 &= R_2 i_2 + u_{s2} \\
 u_3 &= R_3 i_3 + u_{s3} \\
 u_4 &= R_4 i_4 + u_{s4} \\
 u_5 &= R_5 i_5 - u_{s5} \\
 u_6 &= R_6 i_6 - u_{s6}
 \end{aligned} \right\} \tag{2.2-3}$$

联立式(2.2-1)、式(2.2-2)和式(2.2-3)所表示的 $2b$ 个(本示例问题 $2b=12$)方程,就可求解出各支路电压、电流。

$2b$ 法求解电路的优点是,解的结果直观明了,就是各支路的电流、电压;而该法的缺点也很突出,若电路支路数较多时,手解算 $2b$ 个联立方程过程繁复。但要用现代的MATLAB工具软件在计算机上求解也就不算是难事了。

2.2.2 b 法

b 法又称支路法。支路法又分为支路电流法与支路电压法。参见图 2.2-1(a),将式(2.2-3)代入式(2.2-2)并移项整理,得

$$\left. \begin{aligned}
 R_1 i_1 - R_2 i_2 - R_3 i_3 &= -u_{s1} + u_{s2} + u_{s3} \\
 -R_2 i_2 + R_4 i_4 - R_5 i_5 &= u_{s2} - u_{s4} - u_{s5} \\
 R_3 i_3 + R_6 i_6 - R_5 i_5 &= -u_{s3} + u_{s6} - u_{s5}
 \end{aligned} \right\} \tag{2.2-4}$$

式(2.2-1)联立式(2.2-4)为 b 个(本问题 $b=6$)以支路电流为未知量的相互独立的方程组。解该方程组便得各支路电流。如果需要,再以支路电流为已知,进一步求得所要求的电压、功率等。这种求解电路的方法,称为支路电流法。

若改写式(2.2-3)所描述的各支路电压、电流关系方程,将支路电流写为用支路电压表示,即

$$\left. \begin{aligned}
 i_1 &= \frac{u_1}{R_1} - \frac{u_{s1}}{R_1} \\
 i_2 &= \frac{u_2}{R_2} - \frac{u_{s2}}{R_2} \\
 i_3 &= \frac{u_3}{R_3} - \frac{u_{s3}}{R_3} \\
 i_4 &= \frac{u_4}{R_4} - \frac{u_{s4}}{R_4} \\
 i_5 &= \frac{u_5}{R_5} + \frac{u_{s5}}{R_5} \\
 i_6 &= \frac{u_6}{R_6} + \frac{u_{s6}}{R_6}
 \end{aligned} \right\} \tag{2.2-5}$$

参见图 2.2-1(a), 将式(2.2-5)代入式(2.2-1)并经移项整理, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1}u_1 + \frac{1}{R_2}u_2 + \frac{1}{R_4}u_4 &= \frac{1}{R_1}u_{s1} + \frac{1}{R_2}u_{s2} + \frac{1}{R_4}u_{s4} \\ -\frac{1}{R_2}u_2 + \frac{1}{R_3}u_3 + \frac{1}{R_5}u_5 &= -\frac{1}{R_2}u_{s2} + \frac{1}{R_3}u_{s3} - \frac{1}{R_5}u_{s5} \\ -\frac{1}{R_1}u_1 - \frac{1}{R_3}u_3 + \frac{1}{R_6}u_6 &= -\frac{1}{R_1}u_{s1} - \frac{1}{R_3}u_{s3} - \frac{1}{R_6}u_{s6} \end{aligned} \right\} \quad (2.2-6)$$

式(2.2-2)联立式(2.2-6)为 b 个(这里 $b=6$)以支路电压为未知量的相互独立的方程组。解该方程组便得各支路电压。如果需要, 再以支路电压为已知进一步求得所要求的电流、功率等。这种求解电路的方法, 称为支路电压法。

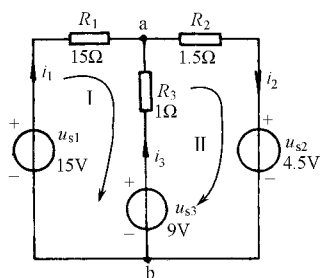


图 2.2-2 例 2.2-1 电路

从解联立方程组的个数来看, b 法比 $2b$ 法少了一半, 若手算, b 法比 $2b$ 法快捷简便。如果问题要求各支路电流、电压都需要求出的话, 无论是用支路电流法或是用支路电压法求解, 都存在回代问题。即将求得的支路电流回代入式(2.2-3)求得支路电压或将求得的支路电压回代入式(2.2-5)求得支路电流。

例 2.2-1 图 2.2-2 所示电路, 求各支路电流、电压 u_{ab} 及各电源产生的功率。

解: 结合本例的求解, 说明支路电流法求解电路问题的基本步骤。

(1) 设出各支路电流参考方向, 依 KCL 列写出 $n-1$ 个独立节点的 KCL 方程(n 为节点数)。本问题只有 a、b 两个节点, 列写节点 a 的 KCL 方程为

$$-i_1 + i_2 - i_3 = 0 \quad (2.2-7)$$

(2) 选取独立回路(平面电路一般选网孔), 并选定巡行方向, 列写出独立回路(网孔)的 KVL 方程。本例题两个网孔的巡行方向如图中所标。习惯在这一步列写 KVL 方程时, 把各支路电压用各支路电流表示。这样, 对图 2.2-2 两个网孔所列的 KVL 方程分别为

$$15i_1 - i_3 = 6 \quad (2.2-8)$$

$$1.5i_2 + i_3 = 4.5 \quad (2.2-9)$$

(3) 解方程组, 得各支路电流。本例题解式(2.2-7)~式(2.2-9)联立方程, 应用克莱姆法则, 有

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 15 & 0 & -1 \\ 0 & 1.5 & 1 \end{vmatrix} = -39 \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \\ 4.5 & 1.5 & 1 \end{vmatrix} = -19.5 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 15 & 6 & -1 \\ 0 & 4.5 & 1 \end{vmatrix} = -78 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 15 & 0 & 6 \\ 0 & 1.5 & 4.5 \end{vmatrix} = -58.5 \end{aligned}$$

所以电流 i_1, i_2, i_3 分别为

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-19.5}{-39} = 0.5 \text{ (A)}$$

$$i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-78}{-39} = 2 \text{ (A)}$$

$$i_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-58.5}{-39} = 1.5 \text{ (A)}$$

(4) 将求得的各支路电流代入各支路电压、电流关系式中,求得各支路电压。本例中的三个支路电压相同,均为电压 u_{ab} ,所以求 u_{ab} 用哪一个支路的电压、电流关系式都可以。

$$u_{ab} = -R_3 i_3 + u_{s3} = -1 \times 1.5 + 9 = 7.5 \text{ (V)}$$

(5) 由求得的支路电流进一步求出所要求的功率。本例问题还要求各电源产生的功率,设电源 u_{s1} 、 u_{s2} 、 u_{s3} 产生的功率分别为 p_{s1} 、 p_{s2} 、 p_{s3} ,由求得的支路电流,可算得

$$p_{s1} = u_{s1} i_1 = 15 \times 0.5 = 7.5 \text{ (W)}$$

$$p_{s2} = -u_{s2} i_2 = -4.5 \times 2 = -9 \text{ (W)}$$

$$p_{s3} = u_{s3} i_3 = 9 \times 1.5 = 13.5 \text{ (W)}$$

电源 u_{s2} 产生 -9W 的功率,实际上它吸收 9W 的功率,处于被充电状态。

例 2.2-2 图 2.2-3 所示电路中包含有电压控制的电压源,试以支路电流作为求解变量列出求解本电路所必需的独立方程组(注意对受控源的处理,对所列方程不必求解)。

解: 选取 a 为独立节点,网孔 I、II 为独立回路。设各支路电流参考方向及各网孔巡行方向如图中所标。应用 KCL、KVL 及 OL 列写方程为:

$$\left. \begin{array}{l} \text{对节点 a} \quad -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ \text{对网孔 I} \quad R_1 i_1 + R_2 i_2 = u_s \\ \text{对网孔 II} \quad -R_2 i_2 + (R_3 + R_4) i_3 = \mu u_1 \end{array} \right\} \quad (2.2-10)$$

式(2.2-10)中有 i_1 、 i_2 、 i_3 及 u_1 4 个未知量,无法求解该电路,还必须寻求另一个独立方程。将控制量 u_1 用支路电流 i_1 表示,即

$$u_1 = R_1 i_1 \quad (2.2-11)$$

则联立式(2.2-10)和式(2.2-11)就可以求解本问题。

如果电路中的受控源的控制量是某一支路电流,那么就不需再列写式(2.2-11)的辅助方程,仅由列写出的式(2.2-10)方程组稍加整理即可求解。如果受控源的控制量是其他的变量(本问题就是如此),那么需对含受控源电路先按前述的步骤(1)、(2)去列写基本方程(列写的过程中把受控源当作为独立源一样看待),然后再增加一个控制量用未知电流表示的辅助方程,这样就得到了数量足够而又相互独立的方程组。

对例 2.2-2 电路,采用支路电压法比支路电流法会简单一些,这是因为该电路三个支路是并联的,所以三个支路电压同为 u_{ab} ,只有一个未知电压变量。应用 OL, KVL 将各支路电流写为用支路电压 u_{ab} 表示,再由 KCL 列写节点 a 的方程为

$$-\frac{u_{s1} - u_{ab}}{R_1} + \frac{u_{ab}}{R_2} + \frac{u_{ab} + \mu u_1}{R_3 + R_4} = 0$$

整理移项即有

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} \right) u_{ab} = \frac{u_{s1}}{R_1} - \frac{\mu u_1}{R_3 + R_4} \quad (2.2-12)$$

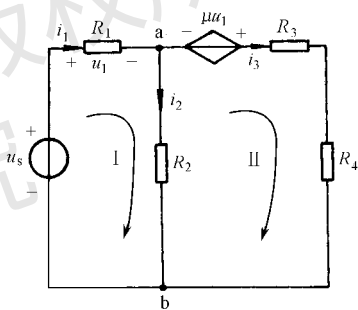


图 2.2-3 例 2.2-2 电路

而控制量 u_1 用 u_{ab} 表示为

$$u_1 = u_{s1} - u_{ab} \quad (2.2-13)$$

联立式(2.2-12)与式(2.2-13)就可求解出支路电压 u_{ab} 。

思考题

2.2-1 有人说:“一组完备的电路变量是指,若求得了这组变量,就可以此为已知求得电路任何元件上的电流、电压或功率。支路电流变量、支路电压变量均是完备的电路变量。”你同意这样的观点吗?

2.3 回路法与网孔法

$2b$ 法需要求解 $2b$ 个联立方程, b 法需要求解 b 个联立方程。如果电路比较复杂,支路个数多,上述两种方法手工解算过程就会相当繁琐。能否使解方程的数目减少下来,简便手工解算的过程?回路法和网孔法就是基于这种想法而提出的一类改进方法。

2.3.1 回路法

欲使方程数目减少,必使求解的未知量数目减少,应寻求数目少于支路数 b 的新的求解变量。

所列 KVL 方程相互独立的回路称为独立回路。一个具有 b 条支路、 n 个节点的连通图(电路)有 $b-n+1$ 个基本回路,即有 $b-n+1$ 个独立回路。

假想电路的各独立回路中均有一电流在各回路单独作闭合流动,这些假想的电流称为各独立回路的回路电流。当选定图的一种树之后,各树枝、连枝也就确定,基本回路只包含一条连枝,各基本回路包含不同的连枝,根据独立回路电流的定义,所以选各连枝电流作为各连枝所属基本回路的独立回路电流再合适不过了。

一个电路对应的连通图,选择它不同的树,对应有不同的连枝电流组合,图 2.3-1(a)所示电路对应线图两种树 T_1 、 T_2 如图 2.3-1(b)、(c)所示。图中,粗实线表示树枝,细实线表示连枝。对应图(b) T_1 树的独立电流集为 $\{i_2, i_4, i_6\}$, 对应图(c) T_2 树的独立电流集为 $\{i_1, i_4, i_6\}$ 。

连枝电流是相互独立的变量。由树的定义可知,对连通图中任何一个节点,与它相连的所有支路中一定有一条树枝,不可能全是连枝。这样,想由节点的 KCL 方程把各连枝支路电流的关系联系起来是不可能的。又,对于已选定树的连通图来说,全部由连枝支路构不成割集,因为将这些连枝支路全部移去图仍然是连通的(由树枝连通),所以也不能通过割集的 KCL 方程把各连枝支路电流间关系找到。这就佐证了连枝支路电流是相互独立的电流变量。用数学的语言来描述连枝支路电流的相互独立性,即是说,若知 $b-n+1$ 个连枝支路电流中的任何 $b-n$ 个连枝支路电流,求不出第 $b-n+1$ 个连枝支路电流。以图 2.3-1(c)所示的连枝支路电流 i_1 、 i_4 、 i_6 来看,知道这三个连枝支路电流中的任意两个求不出第三个。读者可结合图(c)验证这一结论。

连枝支路电流是完备的变量。它的完备性还是先结合图 2.3-1(c)所示的连枝电流 i_1 、 i_4 、 i_6 作说明。如果知道了各连枝电流 i_1 、 i_4 、 i_6 , 显然可通过节点或基本割集的 KCL 方程求得各树枝电流 i_2 、 i_3 、 i_5 , 即各支路电流均为已知,进而可由支路的电压、电流关系求得各支路的支路电压,或更进一步求得欲求电路中的任何元件吸收或产生的功率。一般说,如果求得了电路各连枝支路电流,就可求该电路中任何想求的电流、电压、功率,这就是连枝支路电流的完备性。

以连枝支路电流作为求解变量,列写基本回路的 KVL 方程,解方程先求得连枝支路电流进而求得所需要的电流、电压、功率等,这种求解电路的方法称为回路电流法,简称为回路法。回

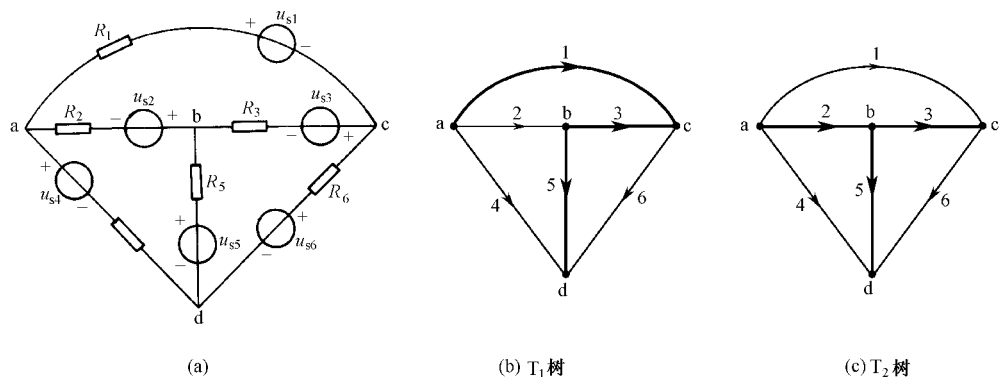


图 2.3-1 独立回路电流表示

回路法中求解变量连枝电流数肯定少于电路的支路数 b , 所以从求解方程数目的多少来看, 回路法比上节所介绍的 $2b$ 法和 b 法都要简单。

回路法求解电路的基本步骤:

- (1) 选树, 确定树枝、连枝及基本回路, 并设连枝支路电流即独立回路电流的参考方向。
- (2) 列写基本回路的 KVL 方程。以连枝支路电流的方向作为列写 KVL 方程的绕行方向。在列写 KVL 方程时, 将回路内各电阻上电压写为电阻与流经该电阻回路电流代数和乘积的形式表示。这样, 就得到相互独立且数量足够的以连枝支路电流为未知量的方程组。
- (3) 解方程组, 得连枝支路电流(独立回路电流)。
- (4) 由解得的独立回路电流, 应用各支路电流等于流经各支路回路电流的代数和, 求得各支路电流。
- (5) 根据问题所求, 再应用已求得的支路电流进一步求得所求的电压、功率。

2.3.2 网孔法

实际中所遇到的电路大都属于平面电路, 而对于这类电路的求解, 人们更经常使用网孔法。下面重点讨论网孔分析方法。在 2.1 节已述及, 平面电路的网孔是一组独立的回路, 假想在每一网孔里均有一电流沿着构成该网孔的各支路作闭合流动, 这些假想的电流, 称为各网孔的网孔电流。网孔电流就是独立回路电流。图 2.3-2 所示平面电路三个网孔的网孔电流 i_I 、 i_{II} 、 i_{III} 如图中所标。网孔电流的方向即作为列 KVL 方程时的绕行方向。

网孔电流是相互独立的变量。如图 2.3-2 所示电路中的三个网孔电流 i_I 、 i_{II} 、 i_{III} , 知其中任意两个求不出第三个。这是因为每个网孔电流在它流进某一节点的同时又流出该节点, 它自身就满足了 KCL, 所以不能通过节点 KCL 方程建立各网孔电流之间的关系, 也就说明了网孔电流是相互独立的变量。

网孔电流是完备的变量。因为如果知道了各网孔电流, 就可以求得电路中任一条支路的电流, 进而可以求得电路中任意两点之间的电压, 任意元件上的功率等。这由图 2.3-2 电路可以很清楚地看出来。因为任何一条支路一定属于一个或两个网孔, 如果某支路只属于某一网孔, 那么该支路电流就等于该网孔电流。例如, 图 2.3-2 电路中, $i_1 = i_I$, $i_2 = i_{II}$, $i_3 = i_{III}$ 。如果某支路属于两个网孔所共有, 则该支路上的电流就等于流经该支路二网孔电流的代数和。例如, 图 2.3-2

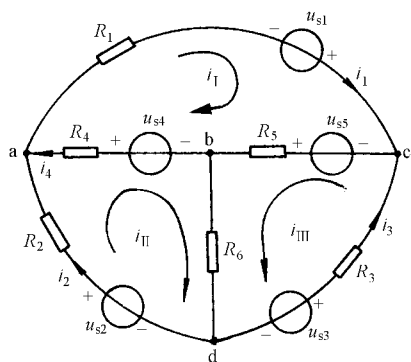


图 2.3-2 网孔法分析使用电路

电路中支路电流 i_4 , 它等于流经该支路的 I、II 网孔电流的代数和。与支路电流方向一致的网孔电流取正号; 反之取负号, 即有

$$i_4 = i_{\text{I}} - i_{\text{II}}$$

其他的支路电流都可类似地求出。当然电路中任意两点之间的电压、任意元件吸收或产生的功率都可通过支路电流再进一步求出。所以说网孔电流是完备的变量。

对于平面电路, 以所设的网孔电流作未知量, 依 KVL 列出网孔电压方程式(网孔内各电阻上电压写为电阻与流经该电阻网孔电流代数和乘积表示), 求解出网孔电流, 进而求得各支路电流、电压、功率等, 这种求解电路的方法称为网孔电流法, 简称为网孔法。应用网孔法分析电路的关键是如何简便、正确地列写出网孔电压方程。这里通过图 2.3-2 所示电路的例子, 列写网孔的 KVL 方程并从中归纳总结出简便列写网孔方程的方法。对图 2.3-2 电路各网孔列写 KVL 方程如下:

$$\text{网孔 I} \quad R_1 i_{\text{I}} - u_{s1} - u_{s5} + R_5 i_{\text{I}} + R_5 i_{\text{III}} - u_{s4} + R_4 i_{\text{I}} - R_4 i_{\text{II}} = 0$$

$$\text{网孔 II} \quad R_2 i_{\text{II}} + R_4 i_{\text{II}} - R_4 i_{\text{I}} + u_{s4} + R_6 i_{\text{II}} + R_6 i_{\text{III}} - u_{s2} = 0$$

$$\text{网孔 III} \quad R_3 i_{\text{III}} - u_{s5} + R_5 i_{\text{III}} + R_5 i_{\text{I}} + R_6 i_{\text{III}} + R_6 i_{\text{II}} - u_{s3} = 0$$

为了便于应用克莱姆法则求解(或计算机上应用 MATLAB 工具软件求解)上述三个方程, 需要按未知量顺序排列并加以整理, 同时将已知激励源也移至等式右端。这样整理改写上述方程得

$$(R_1 + R_5 + R_4) i_{\text{I}} - R_4 i_{\text{II}} + R_5 i_{\text{III}} = u_{s1} + u_{s5} + u_{s4} \quad (2.3-1)$$

$$-R_4 i_{\text{I}} + (R_2 + R_4 + R_6) i_{\text{II}} + R_6 i_{\text{III}} = u_{s2} - u_{s4} \quad (2.3-2)$$

$$R_5 i_{\text{I}} + R_6 i_{\text{II}} + (R_3 + R_5 + R_6) i_{\text{III}} = u_{s3} + u_{s5} \quad (2.3-3)$$

解上述方程组即可得电流 i_{I} 、 i_{II} 、 i_{III} , 进而可确定各支路电流、电压、功率。如果用网孔法分析电路都有如上的方程整理过程, 也嫌麻烦, 能不能做到观察电路即可写出不需要整理的式(2.3-1)~式(2.3-3)呢? 不妨先看式(2.3-1)~式(2.3-3)有何规律。

观察式(2.3-1), 可以看出: i_{I} 前的系数 $(R_1 + R_5 + R_4)$ 恰好是网孔 I 内所有电阻之和, 称它为网孔 I 的自电阻, 以符号 R_{11} 表示; i_{II} 前的系数 $(-R_4)$ 是网孔 I 和网孔 II 公共支路上的电阻, 称它为网孔 I 与网孔 II 的互电阻, 以符号 R_{12} 表示, 由于流过 R_4 的网孔电流 i_{I} 、 i_{II} 方向相反, 故 R_4 前为“-”号; i_{III} 前系数 $(+R_5)$ 是网孔 I 和网孔 III 公共支路上的电阻, 称它为网孔 I 与网孔 III 的互电阻, 以符号 R_{13} 表示, 由于流经 R_5 的网孔电流 i_{I} 、 i_{III} 方向相同, 故 R_5 前取“+”号; 等式右端 $u_{s1} + u_{s5} + u_{s4}$ 表示网孔 I 中电压源的代数和, 以符号 u_{s11} 表示。计算 u_{s11} 时遇到各电压源的取号法则是, 在巡行中先遇到电压源正极性端取负号; 反之取正号。

用同样的方法可求出式(2.3-2)和式(2.3-3)的自电阻、互电阻及网孔 II、III 的等效电压源, 即

$$R_{21} = -R_4, R_{22} = R_2 + R_4 + R_6, R_{23} = R_6$$

$$u_{s22} = u_{s2} - u_{s4}$$

$$R_{31} = R_5, R_{32} = R_6, R_{33} = R_3 + R_5 + R_6$$

$$u_{s33} = u_{s3} + u_{s5}$$

由以上分析, 可以归纳总结得到应用网孔法分析具有三个网孔电路的方程通式(一般式)即

$$\left. \begin{aligned} R_{11} i_{\text{I}} + R_{12} i_{\text{II}} + R_{13} i_{\text{III}} &= u_{s11} \\ R_{21} i_{\text{I}} + R_{22} i_{\text{II}} + R_{23} i_{\text{III}} &= u_{s22} \\ R_{31} i_{\text{I}} + R_{32} i_{\text{II}} + R_{33} i_{\text{III}} &= u_{s33} \end{aligned} \right\} \quad (2.3-4)$$

如果电路有 m 个网孔, 并设各网孔电流分别为 $i_A, i_B, \dots, i_M$, 不难推论出网孔方程通式为

$$\left. \begin{aligned} R_{11}i_A + R_{12}i_B + \dots + R_{1m}i_M &= u_{s11} \\ R_{21}i_A + R_{22}i_B + \dots + R_{2m}i_M &= u_{s22} \\ &\dots\dots\dots \\ R_{m1}i_A + R_{m2}i_B + \dots + R_{mm}i_M &= u_{smm} \end{aligned} \right\} \quad (2.3-5)$$

有了方程通式, 只需设出网孔电流, 观察电路, 求出自电阻、互电阻及等效电压源并代入式(2.3-4)或式(2.3-5)即可得到按未知量顺序排列的相互独立的方程组, 这当然对求解电路是方便的。在应用方程通式列写方程时要特别注意“取号”问题: 因取网孔电流方向作为列写 KVL 方程的巡行方向, 所以各网孔的自电阻恒为正; 为了使方程通式形式整齐统一, 故把公共支路电阻上电压的正负号归纳在有关的互电阻中, 使方程通式(2.3-4)或式(2.3-5)的左端各项前都是“+”号, 但求互电阻时要注意取正号或取负号的问题。两网孔电流在流经公共支路时方向一致, 互电阻等于公共支路上电阻相加取正号, 两网孔电流在流经公共支路时方向相反, 互电阻等于公共支路上电阻相加取负号; 求等效电压源时遇电压源的取号法则表面上看起来与应用 $\sum u=0$ 列方程时遇电压源的取号法则相反, 实际上二者是完全一致的, 因为网孔方程通式中的 u_{s11} (或 u_{s22}, u_{s33}) 是直接放在等式右端的。下面通过具体例子说明网孔法分析电路的步骤。

例 2.3-1 对图 2.3-3 所示电路, 求各支路电流。

解: 本问题有 6 条支路, 3 个网孔, 用 2.3.1 节讲的 b 法需解六元方程组, 而用网孔法只需解三元方程, 显然网孔法要比 b 法简单得多。今后用手解算电路的话, 一般用网孔法求解而不再使用 b 法。

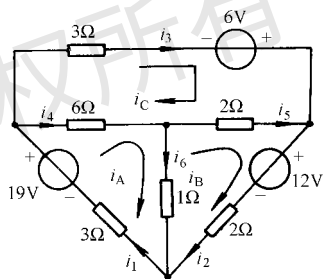


图 2.3-3 例 2.3-1 电路

(1) 设网孔电流 i_A, i_B, i_C 如图中所标。一般网孔电流方向即认为是列 KVL 方程时的巡行方向。

(2) 观察电路对照通式(2.3-4)直接列写方程。因本例电路中各电阻的数值、电源的数值均已知, 所以, 观察电路心算就可求出自电阻、互电阻、等效电压源数值, 代入式(2.3-4)即写出所需要的方程组。这里, 把本例的各自电阻、互电阻、等效电压源写出如下:

$$\begin{aligned} R_{11} &= 10 \text{ } (\Omega), R_{12} = -1 \text{ } (\Omega), R_{13} = -6 \text{ } (\Omega), u_{s11} = 19 \text{ } (\text{V}) \\ R_{21} &= -1 \text{ } (\Omega), R_{22} = 5 \text{ } (\Omega), R_{23} = -2 \text{ } (\Omega), u_{s22} = -12 \text{ } (\text{V}) \\ R_{31} &= -6 \text{ } (\Omega), R_{32} = -2 \text{ } (\Omega), R_{33} = 11 \text{ } (\Omega), u_{s33} = 6 \text{ } (\text{V}) \end{aligned}$$

将上述数据代入式(2.3-4), 得

$$\left. \begin{aligned} 10i_A - i_B - 6i_C &= 19 \\ -i_A + 5i_B - 2i_C &= -12 \\ -6i_A - 2i_B + 11i_C &= 6 \end{aligned} \right\} \quad (2.3-6)$$

(3) 解方程得各网孔电流。用克莱姆法则解式(2.3-6)方程组, 各相应行列式为

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 10 & -1 & -6 \\ -1 & 5 & -2 \\ -6 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 295, & \Delta_A &= \begin{vmatrix} 19 & -1 & -6 \\ -12 & 5 & -2 \\ 6 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 885 \\ \Delta_B &= \begin{vmatrix} 10 & 19 & -6 \\ -1 & -12 & -2 \\ -6 & 6 & 11 \end{vmatrix} = -295, & \Delta_C &= \begin{vmatrix} 10 & -1 & 19 \\ -1 & 5 & -12 \\ -6 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 590 \end{aligned}$$

于是各网孔电流分别为

$$i_A = \frac{\Delta_A}{\Delta} = \frac{885}{295} = 3 \text{ (A)}$$

$$i_B = \frac{\Delta_B}{\Delta} = \frac{-295}{295} = -1 \text{ (A)}$$

$$i_C = \frac{\Delta_C}{\Delta} = \frac{590}{295} = 2 \text{ (A)}$$

(4) 由网孔电流求各支路电流。设各支路电流参考方向如图中所示,根据支路电流与网孔电流之间的关系,得

$$i_1 = i_A = 3 \text{ (A)},$$

$$i_2 = i_B = -1 \text{ (A)}$$

$$i_3 = i_C = 2 \text{ (A)},$$

$$i_4 = i_A - i_C = 3 - 2 = 1 \text{ (A)}$$

$$i_5 = i_B - i_C = -1 - 2 = -3 \text{ (A)}, \quad i_6 = i_A - i_B = 3 - (-1) = 4 \text{ (A)}$$

(5) 如果需要,可由支路电流求电路中任何处的电压、功率。本例题未有这方面的要求,此步可省略。

例 2.3-2 如图 2.3-4(a)所示电路,求 R 上消耗功率 p_R 。

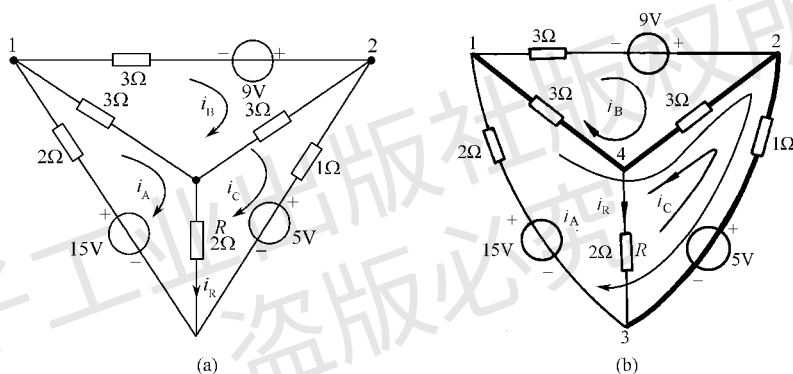


图 2.3-4 例 2.3-2 电路

解: 本题并不要求出所有支路电流,为求得 R 上消耗的功率,只需求出 R 上电流即可。如果按图(a)设网孔电流,需解出 i_A, i_C 两个网孔电流才能求得 R 上电流,即 $i_R = i_A - i_C$ 。而要选择一种树使 R 支路为连枝,如图 2.3-4(b)所示粗实线支路为树枝,细实线支路为连枝。采用回路法求解可少解一个回路电流。设各基本回路的回路电流, i_A, i_B, i_C 如图 2.3-4 中所示。观察电路,类同网孔法时求自电阻、互电阻及各回路的等效电压源,列写方程如下

$$\left. \begin{aligned} 9i_A - 6i_B - 4i_C &= 10 \\ -6i_A + 9i_B + 3i_C &= 9 \\ -4i_A + 3i_B + 6i_C &= 5 \end{aligned} \right\} \quad (2.3-7)$$

化简式(2.3-7)(第二个方程两端相约化简)得

$$\left. \begin{aligned} 9i_A - 6i_B - 4i_C &= 10 \\ -2i_A + 3i_B + i_C &= 3 \\ -4i_A + 3i_B + 6i_C &= 5 \end{aligned} \right\} \quad (2.3-8)$$

由化简的方程组式(2.3-8),得